506.45
.A211

43

P.N. - 2

641502
Smithsonian
2

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXIV

1876-77

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME I.

DISPENSA SECONDA

SMITHSONIAN INSTITUTION
302243
AUG 17 1936
NATIONAL MUSEUM

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1877

506.45

Le trasformazioni piane doppie.

Memoria del dott. RICCARDO DE PAOLIS,
presentata dal Socio L. CREMONA

nella seduta dell' 8 aprile 1877.

I. Trasformazioni d'ordine n e di genere p.

Se ad un punto d'una superficie si fa corrispondere un punto d'un piano, ma viceversa ad un punto del piano si fanno corrispondere due punti della superficie, abbiamo la così detta rappresentazione sul piano doppio (1). Quando, se è possibile, vogliamo passare da questa rappresentazione a quella univoca della superficie sul piano, sorge il problema di riportare il piano doppio sopra un nuovo piano semplice, problema che Clebsch ha fatto dipendere dalla ricerca di certe curve, che hanno contatti colla curva limite segnata nel piano doppio, e questa ricerca alla sua volta da un problema di bissezione delle funzioni abeliane relative alla curva limite. L'esempio trattato da Clebsch con più profondità riguarda la rappresentazione del piano doppio con curva limite del quarto ordine.

« Con questi lavori Clebsch ha aperto una nuova ed ampia via, accessibile « all'analisi del pari che alla geometria pura; ma nella quale non vennero fatti, po- « steriormente, che pochissimi passi (2) ».

Mi propongo in ciò che segue di risolvere in tutta la sua generalità il problema di riportare il piano doppio sopra un altro piano semplice, servendomi di considerazioni *puramente* geometriche e senza uscire dai due piani. Considerando la questione sotto questo punto di vista, indipendentemente dalla rappresentazione delle superficie, si tratta di stabilire la teoria di certe trasformazioni tra due piani, le quali si presentano immediatamente dopo le trasformazioni razionali di Cremona (3).

§ 1. Generalità — Curva doppia, curva limite. Singolarità delle curve corrispondenti alle curve del piano semplice.

1. Siano dati due piani P, P'; ad un punto p di P corrispondano due punti p', $\mathbf{p}'$ di P', mentre al punto p' o $\mathbf{p}'$ corrisponda il punto p; di più quando p percorre una retta, $p', \mathbf{p}'$ descrivano una curva d'ordine n.

(1) Clebsch, *Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen.....*: Math. Ann. t. 3.

(2) *Alfredo Clebsch e i suoi lavori scientifici* (dal t. 7 dei Math. Ann.) trad. di Beltrami: Annali di Matematica, serie 2, t. 6.

(3) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*: Memorie dell' Accad. di Bologna, serie II, t. 2. t. 5.

Potendo immaginare il piano P' trasformato razionalmente in altri due P_1, P_2 che sovrapposti al piano P fanno corrispondere ad un suo punto p due punti p', $\mathbf{p}'$, distingueremo P col nome di piano doppio, P' col nome di piano semplice (1), e la corrispondenza tra i due piani col nome di trasformazione doppia.

È evidente che dal punto p' viene determinato $\mathbf{p}'$ e viceversa; esiste dunque in P' una trasformazione razionale involutoria che fa corrispondere i punti p', $\mathbf{p}'$. Considereremo come congiunti due punti $(p', \mathbf{p}')$, e come congiunte due curve $(C', \mathbf{C}')$, che sono corrispondenti in questa trasformazione congiunta alla trasformazione doppia. Dopo ciò possiamo senz'altro enunciare:

I. Ad una curva del piano semplice ed alla sua congiunta corrisponde una sola curva del piano doppio.

II. Ad una curva del piano doppio, o corrisponde nel piano semplice una curva congiunta a sè stessa, o corrispondono due curve congiunte.

III. Due curve congiunte e la curva corrispondente nel piano doppio sono dello stesso genere.

IV. Sono iperellittiche le curve congiunte a sè stesse e corrispondenti alle curve razionali del piano doppio.

2. In generale in P' avremo un sistema continuo Ω' di punti o' ciascuno infinitamente vicino al punto congiunto $\mathbf{o}'$. Un punto o della curva Ω corrispondente alla Ω' avrà per corrispondenti due punti $o', \mathbf{o}'$ consecutivi, quindi potremo immaginarlo come appartenente consecutivamente ai piani P_1, P_2, o ciò che è lo stesso alle due faccie di P. Il luogo Ω è dunque, in un certo senso, una curva limite tra i punti d'una faccia e quelli dell'altra, è una curva luogo dei punti di transizione (2) tra le faccie di P. A ciascun punto o della Ω corrispondono due punti $o', \mathbf{o}'$ infinitamente vicini, però la retta $o'\,\mathbf{o}'$ non inviluppa la Ω' corrispondente alla Ω, ossia $o', \mathbf{o}'$ descrivono due curve infinitamente vicine in tutti i loro punti. Le considereremo complessivamente come una curva doppia Ω' corrispondente alla curva limite Ω.

Possiamo chiamare direzione principale, in un punto o, la direzione della retta principale $o'\,\mathbf{o}'$.

I. La curva limite e la curva doppia sono dello stesso genere.

Oltre al sistema continuo dei punti della Ω' possiamo avere un sistema discreto di punti ω' congiunti a sè stessi. I punti ω' sono come curve doppie infinitamente piccole; ogni retta che passa per uno di essi contiene due punti congiunti consecutivi posti in ω'. Questi punti discreti li chiameremo i punti doppî del piano semplice.

Come poi dimostreremo, ad un punto ω' o corrisponde in P una curva limite ω distinta da Ω, o corrisponde un punto limite ω.

(1) Clebsch, l. c.

(2) Uebergangscurve; considerata da Clebsch (l. c.) come luogo dei punti del piano rappresentativo doppio ai quali corrisponde un solo punto della superficie rappresentata.

In ciò che segue prima supporremo che in P' non vi sia un sistema discdireto punti doppî, e poi considereremo separatamente il caso in cui vi siano questi punti, e l'influenza da loro esercitata (1).

3. Se una curva C' passa con r rami per un punto p' e con s per il punto congiunto $\mathbf{p}'$, la curva congiunta $\mathbf{C}'$ passa con s rami per p' e con r per $\mathbf{p}'$; dunque il numero dei passaggi $(r+s)$ del luogo complessivo $C'\,\mathbf{C}'$ per un punto è uguale al numero dei passaggi pel punto congiunto, e:

I. Se una curva non congiunta a sè stessa passa con r rami per un punto e con s per il punto congiunto, la curva corrispondente ha un punto $(r+s)$-plo nel punto corrispondente.

Come pure:

II. Se una curva congiunta a sè stessa passa con r rami per un punto, deve passare con r rami per il punto congiunto, e la curva corrispondente ha un punto r-plo nel punto corrispondente.

Un caso particolare del teorema I è l'altro:

III. Se due curve congiunte s'incontrano in 2δ punti, non congiunti a sè stessi, questi formano δ coppie di punti congiunti, e la curva corrispondente ha un nodo in ciascuno dei δ punti corrispondenti.

La curva doppia Ω' è formata da due curve infinitamente vicine in ogni loro punto; quindi se una curva C' non congiunta a sè stessa incontra la Ω' in σ punti, con direzione non principale, in ciascuno di questi vi sono due punti d'intersezione infinitamente vicini, non congiunti, col luogo corrispondente alla curva limite; da ciò:

IV. Se una curva non congiunta a sè stessa incontra la curva doppia in σ punti, con direzione non principale, la curva corrispondente tocca la curva limite nei σ punti corrispondenti.

Mentre dovendo una curva congiunta a sè stessa tagliare la curva doppia con direzione principale:

V. Se una curva congiunta a sè stessa incontra la curva doppia in σ punti, la curva corrispondente incontra semplicemente la curva limite nei σ punti corrispondenti.

Analogamente possiamo dedurre i teoremi seguenti:

VI. Se una curva non congiunta a sè stessa ha un contatto r-punto colla curva doppia, la curva corrispondente ha un contatto $2r$-punto colla curva limite nel punto corrispondente.

VII. Se una curva non congiunta a sè stessa taglia la curva doppia in σ punti con direzione principale, la curva corrispondente ha σ cuspidi nei σ punti corrispondenti.

VIII. Se una curva non congiunta a sè stessa ha un punto r-plo sulla curva doppia, la curva corrispondente tocca con r rami la curva limite nel punto corrispondente.

(1) Vedi il § 6.

§ 2. Rete delle curve corrispondenti alle rette del piano doppio.

4. Consideriamo una retta R del piano doppio e la curva corrispondente Φ' d'ordine n congiunta a sè stessa. Due punti p_1, p_2 del piano P determinano una retta R, quindi per i quattro punti p'_1, $\mathbf{p}'_1$; p'_2, $\mathbf{p}'_2$ corrispondenti passa una Φ' ed una sola; ma le Φ' che passano per un punto devono passare pel punto congiunto (3. II), dunque due punti arbitrarî di P' determinano una sola curva Φ'; in altri termini (1. IV):

I. Alle rette del piano doppio corrisponde una rete di curve iperellittiche.

Due rette di P hanno un solo punto comune, quindi:

II. Due delle curve corrispondenti alle rette del piano doppio s'incontrano in due punti congiunti, non comuni a tutte le altre; perciò le curve Φ' della rete devono avere comuni r' punti multipli secondo

$$i'_1,\ i'_2,\ i'_3, \ldots\ldots, i'_{r'},$$

essendo

$$i'_1 \geqq i'_2 \geqq i'_3 \geqq \ldots\ldots \geqq i'_{r'},$$

e le i' devono soddisfare l'equazione

$$\Sigma i'^2_{r'} = n^2 - 2. \tag{1}$$

I punti i' sono i punti fondamentali del piano semplice (1).

5. Questi punti i' presi in posizione generale determinano per una Φ'

$$h = \Sigma \frac{i'_{r'}(i'_{r'}+1)}{2}$$

condizioni; ora se p è il genere delle Φ' abbiamo:

$$\Sigma \frac{i'_{r'}(i'_{r'}-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p; \tag{2}$$

dunque:

$$h = \frac{n(n+3)}{2} + p - 3.$$

Da qui ricaviamo: se $p = 0$ i punti fondamentali presi in posizione generale determinano un sistema triplicemente infinito di curve razionali d'ordine n, e quelle di una rete appartenente al detto sistema, corrispondono alle rette del piano doppio.

Se $p = 1$ la rete delle curve ellittiche d'ordine n corrispondenti alle rette del piano doppio, è del tutto determinata dai punti fondamentali presi in posizione generale.

Finalmente: se $p > 1$ alle rette del piano doppio corrispondono curve d'ordine n iperellittiche, e i punti fondamentali devono prendersi in posizione speciale affinchè possano stabilire la rete voluta.

(1) In generale, in una qualunque trasformazione chiamansi elementi fondamentali di uno degli spazî, gli elementi comuni ai luoghi che corrispondono ai luoghi lineari dell'altro spazio.

§ 3. Serie delle curve corrispondenti alle rette del piano semplice.

6. Una retta del piano semplice incontra una qualunque curva Φ' in n punti, quindi:

I. Alle rette del piano semplice corrisponde una serie doppiamente infinita di curve Φ razionali d'ordine n.

Per due punti arbitrarî p_1, p_2 passano quattro curve Φ che corrispondono alle rette $p'_1 p'_2$, $\mathbf{p}'_1 p'_2$, $p'_1 \mathbf{p}'_2$, $\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$, dunque:

II. La serie delle Φ è d'indice 4.

Se i due punti p_1, p_2 si prendono infinitamente vicini, risultano infinitamente vicini i punti p'_1 e p'_2, $\mathbf{p}'_1$ e $\mathbf{p}'_2$; allora due sole Φ passano per p_1, p_2, e sono quelle che corrispondono alle rette $p'_1 p'_2$, $\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$.

III. Solamente due curve Φ toccano una retta data in un punto dato.

IV. Le Φ che passano per un punto arbitrario formano due serie semplicemente infinite ciascuna d'indice 2. Queste serie hanno comune una curva Φ che ha un punto doppio nel punto preso ad arbitrio.

Se il punto arbitrario è p, le curve d'una serie corrispondono alle rette del fascio che ha il centro in p', le curve dell'altra serie corrispondono alle rette del fascio che ha il centro in $\mathbf{p}'$. La curva comune alle due serie corrisponde alla retta $p'\,\mathbf{p}'$.

Le Φ' sono d'ordine n e di genere p, quindi la loro classe è:

$$m = 2(n + p - 1);$$

alle tangenti d'una data Φ' corrispondono le Φ che toccano una retta R, dunque alle tangenti che passano per p' ed a quelle che passano per $\mathbf{p}'$ corrispondono le Φ che passano per p e toccano la retta R; perciò:

V. Vi sono

$$4(n + p - 1)$$

curve Φ che passano per un punto dato e toccano una retta data.

Osservando poi che il numero dei punti di flesso di una Φ' è

$$i = 3(n + 2p - 2),$$

ed il numero delle tangenti doppie

$$\tau = 2n(n + 2p - 5) + 2(p - 1)(p - 6),$$

deduciamo:

VI. Vi sono

$$3(n + 2p - 2)$$

curve Φ che hanno un contatto tripunto con una retta data.

VII. Vi sono

$$2n(n + 2p - 5) + 2(p - 1)(p - 6)$$

curve Φ che toccano in due punti distinti una retta data.

7. In P' fissiamo due rette R'_1, R'_2; sia N l'ordine della trasformazione congiunta; allora la curva $\mathbf{R}'_1$ congiunta alla retta R'_1 incontra la R'_2 in N punti, in altre parole:

I. Sopra una retta vi sono N punti i cui congiunti stanno sopra un'altra retta data.

Siano Φ_1, Φ_2 le curve corrispondenti alle rette R'_1, R'_2; uno dei punti variabili comuni alle Φ_1, Φ_2 corrisponde all'intersezione delle rette R'_1, R'_2, gli altri corrispondono ai punti di R'_1 i cui congiunti sono situati su R'_2, quindi:

II. Due curve Φ hanno comuni $N+1$ punti variabili.

Ciò significa che le curve Φ hanno fissi r punti, multipli secondo

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots\ldots,\ i_r,$$

essendo

$$i_1 \geqq i_2 \geqq i_3 \geqq \ldots \geqq i_r$$

e

$$\Sigma i_r^2 = n^2 - (N+1).$$

I punti i sono i punti fondamentali del piano doppio (1); conosciuti i quali, in numero ed in moltiplicità, possiamo determinare N.

III. L'ordine della trasformazione congiunta è:

$$N = n^2 - 1 - \Sigma i_r^2.$$

Indichiamo con ν il numero dei punti di una retta congiunti a sè stessi, ossia l'ordine della curva doppia. Allora possiamo dire (3. IV):

IV. Ciascuna Φ tocca la curva limite in ν punti, e non la incontra in altri punti variabili.

Una retta R' taglia la curva congiunta in N punti; di questi, ν sono i punti di R' congiunti a sè stessi, intersezioni di R' colla curva doppia, gli altri formano $\frac{N-\nu}{2}$ coppie di punti congiunti; dunque (3. III):

V. Una qualunque Φ ha

$$\delta = \frac{N-\nu}{2}$$

punti doppî variabili (posti fuori dei punti fondamentali).

Le Φ essendo curve razionali

$$\Sigma \frac{i_r(i_r-1)}{2} + \delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

ed essendo

$$\delta = \frac{N-\nu}{2},$$

troviamo:

(1) Vedi la nota al n. 4.

VI. L'ordine della curva doppia è:

$$\nu = 3(n-1) - \Sigma i_r.$$

Per mezzo di questa equazione possiamo dimostrare che:

VII. Le condizioni a cui devono soddisfare le curve Φ sono del tutto assorbite dai passaggi per i punti fondamentali, dai punti doppî variabili, e dai contatti colla curva limite.

Infatti i punti fondamentali equivalgono per le Φ ad

$$h_1 = \Sigma \frac{i_r(i_r+1)}{2}$$

condizioni; i δ punti doppî fuori dei punti fondamentali equivalgono ad

$$h_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{i_r(i_r-1)}{2}$$

condizioni; infine per mezzo del valore di ν si vede che i contatti colla curva limite equivalgono ad

$$h_3 = 3(n-1) - \Sigma i_r$$

condizioni, e sommando abbiamo:

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{n(n+3)}{2} - 2.$$

§ 4. Curve fondamentali.

8. Un punto fondamentale del piano semplice può essere fondamentale anche per la trasformazione congiunta, cioè congiunto ad una curva, o può essere fondamentale per la sola trasformazione doppia, cioè congiunto ad un altro punto fondamentale ugualmente multiplo per le Φ', o congiunto a sè stesso (punto doppio di P') (1). Per distinguere questi punti fondamentali li diremo di 1,ª di 2,ª o di 3ª specie.

Intorno ad un punto fondamentale i'-plo f' facciamo girare una retta R'; questa taglierà una curva fissa Φ' in $n - i'$ punti variabili, quindi la curva Φ corrispondente alla R' incontrerà la retta R corrispondente alla Φ' in n punti, dei quali $n - i'$ solamente varieranno con Φ; ciò che può avvenire solo se ciascuna Φ si decompone in una curva variabile d'ordine $n - i'$, ed in una fissa φ d'ordine i'. Diremo la φ curva fondamentale, perchè i suoi punti corrispondono univocamente ai punti infinitamente vicini ad un punto fondamentale f'; e precisamente curva fondamentale di 1,ª di 2,ª o di 3ª specie, secondo la specie del punto fondamentale a cui corrisponde.

I. Ad un punto fondamentale i'-plo del piano semplice corrisponde una curva razionale d'ordine i'.

Supponiamo che f' sia un punto fondamentale della 1ª specie e che I sia l'ordine della sua curva congiunta; la curva fondamentale φ sarà incontrata in I punti variabili da ogni Φ, cioè:

(1) Vedi il § 6.

II. Se una curva fondamentale del piano doppio è incontrata in I punti variabili da una Φ, il punto fondamentale corrispondente è fondamentale I-plo per la trasformazione congiunta.

Mentre:

III. Le curve fondamentali di 2ª o 3ª specie non sono incontrate in punti variabili dalle Φ.

Se la curva doppia passa con j' rami per un punto fondamentale f' di 1ª specie, i suoi j' punti infinitamente vicini ad f', essendo congiunti a sè stessi, appartengono alla curva congiunta ad f', che quindi tocca in f' gli j' rami della Ω'. Vediamo perciò che la curva fondamentale corrispondente ad f' tocca la curva limite in j' punti, ossia:

IV. Le curve fondamentali di 1ª specie toccano la curva limite in tutti i punti comuni non fondamentali.

9. Se una retta R passa per un punto fondamentale f, i-plo del piano doppio, la Φ' corrispondente si spezza in una curva d'ordine $n-i$ congiunta a sè stessa corrispondente alla R, ed in un luogo complessivo congiunto a sè stesso d'ordine i. Riguardo alla formazione di questo luogo, ai cui punti corrispondono i punti infinitamente vicini ad f, possono darsi tre casi:

I. Ad un punto fondamentale i-plo del piano doppio può corrispondere una curva φ' d'ordine i, ed i punti infinitamente vicini ad un punto, congiunti ai punti di φ'.

II. Ad un punto fondamentale i-plo del piano doppio possono corrispondere due curve congiunte degli ordini i_1, i_2, essendo

$$i_1 + i_2 = i$$

III. Ad un punto fondamentale i-plo del piano doppio può corrispondere una curva φ' d'ordine i congiunta a sè stessa.

Diremo le curve fondamentali φ' di 1ª, 2ª, o 3ª specie, secondo che sono congiunte ad un punto, ad un'altra curva fondamentale, od a sè stesse. Anche i punti fondamentali del piano doppio si possono dividere in tre specie, come le curve fondamentali corrispondenti.

IV. Nel piano semplice le curve fondamentali della 1ª e 2ª specie sono razionali, quelle di 3ª specie sono iperellittiche.

10. Nel piano P consideriamo un punto fondamentale i-plo di 1ª specie e supponiamo che la curva fondamentale φ' corrispondente passi con s rami pel suo punto congiunto. A tutte le rette descritte pel punto fondamentale i-plo corrispondono le curve d'un fascio d'ordine $n-i$ e la curva φ'; siccome poi la retta ha un punto infinitamente vicino al punto fondamentale, la curva corrispondente d'ordine $n-i$ deve incontrare la φ' in un punto variabile e deve passare semplicemente pel punto congiunto.

Ora supponiamo che la φ' abbia punti multipli secondo

$$k'_1, k'_2, k'_3, \ldots\ldots k'_{r'}$$

rispettivamente negli r' punti fondamentali

$$i'_1, i'_2, i'_3, \ldots, i'_{r'}.$$

Essendo φ' una curva fondamentale, non deve essere incontrata in punti variabili da una Φ', quindi:

$$ni = \Sigma i'_r k'_r ; \qquad (3)$$

di più dovendo essere tagliata in un solo punto variabile da tutte le curve d'ordine $n - i$ corrispondenti alle rette che passano pel punto fondamentale i-plo, deve essere soddisfatta l'equazione:

$$(n - i)\, i = \Sigma (i'_r - k'_r) k'_r + s + 1 ;$$

ovvero per la (3):

$$\Sigma k'^2_r = i^2 + s ; \qquad (4)$$

ma le curve in questione, formando un fascio, non devono avere punti variabili comuni, dunque:

$$1 + \Sigma (i'_r - k'_r)^2 = (n - i)^2 ,$$

equazione che, insieme alle (3), (4), (1), ci dà

$$s = 0 .$$

I. Le curve fondamentali di 1ª specie non passano per i loro punti congiunti.

Vedremo poi l'utilità di questo teorema, per ora ci servirà a fare le seguenti osservazioni:

Se la curva doppia taglia una φ' di 1ª specie in un punto non fondamentale, questo deve essere congiunto a sè stesso, ossia un punto della φ' posto infinitamente vicino al punto congiunto; ma per questo punto non passa la curva fondamentale, dunque:

II. La curva doppia non incontra le curve fondamentali di 1ª specie fuori dei punti fondamentali.

III. La curva limite non passa per i punti fondamentali di 1ª specie.

§ 5. Proprietà della curva limite e della curva doppia. Singolarità delle curve corrispondenti alle curve del piano doppio.

11. A tutte le rette R che passano per un punto fondamentale i-plo f corrispondono le curve d'un fascio d'ordine $n - i$, mentre ad f, se è di 1ª specie corrisponde una φ' congiunta ad un punto; se è di 2ª specie due φ' congiunte; se è di 3ª specie una φ' congiunta a sè stessa; ora la R ha un solo punto infinitamente vicino ad f; a questo punto devono corrispondere due punti congiunti; quindi nel primo caso le curve del fascio incontrano la φ' in un punto variabile e le Φ' complessive hanno un punto doppio sulla φ'; nel secondo caso incontrano in un punto variabile ciascuna delle due φ' congiunte e le Φ' complessive hanno due punti doppî uno sopra una, e l'altro sopra l'altra φ'; nel terzo caso incontrano la φ', congiunta a sè stessa, in due punti variabili e le Φ' complessive hanno due punti doppî sulla φ'. In questi ultimi due casi v'è un numero semplicemente infinito di Φ' dotate di due punti doppî non fondamentali.

Così troviamo che le curve fondamentali del piano semplice fanno parte lelad Jacobiana della rete delle Φ'. Anche la curva doppia fa parte della Jacobiana, infatti tutte le Φ' che passano per un suo punto o', essendo congiunte a sè stesse, passano per $\mathbf{o}'$, ossia si toccano in o'.

La somma degli ordini delle curve fondamentali di P' è

$$\Sigma i_r,$$

ed essendo

$$\nu + \Sigma i_r = 3(n-1),$$

ordine della Jacobiana della rete, possiamo dire:

I. Le curve fondamentali del piano semplice insieme colla curva doppia formano la completa Jacobiana delle Φ'.

Fissiamo un punto fondamentale f' di 1ª o 2ª specie, e sia j' il numero dei rami con cui vi passa la curva doppia; se il punto fondamentale è di 2ª specie avremo $j' = 0$. La curva fondamentale φ corrispondente ad f' passi rispettivamente con

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_r$$

rami per i punti fondamentali multipli secondo

$$i_1, i_2, i_3, \ldots\ldots, i_r.$$

Conduciamo per f' una retta R'; a questa deve corrispondere una curva d'ordine $n - i'$ che passa con

$$i_1 - s_1,\ i_2 - s_2, \ldots\ldots\ldots, i_r - s_r$$

rami per gli r punti fondamentali, tocca la curva limite in $\nu - j'$ punti, ed ha δ punti doppî variabili; le curve corrispondenti a tutte le R' che passano per f' formano un sistema semplicemente infinito, quindi

$$\Sigma \frac{(i_r - s_r)(i_r - s_r + 1)}{2} + \nu - j' + \delta = \frac{(n-i')(n-i'+3)}{2} - 1,$$

ed essendo queste curve razionali sarà anche:

$$\Sigma \frac{(i_r - s_r)(i_r - s_r - 1)}{2} + \delta = \frac{(n-i'-1)(n-i'-2)}{2},$$

da cui

$$\Sigma i_r - (\Sigma s_r + j') + \nu = 3(n-i') - 2;$$

ma

$$\Sigma i_r = 3(n-1) - \nu,$$

dunque

$$\Sigma s_r + j' = 3i' - 1.$$

Interpretando quest'equazione troviamo che un punto fondamentale $i' -$ plo è multiplo secondo $3i' - 1$ per la Jacobiana delle Φ' (1), la quale per conseguenza sarà incontrata in

$$\sigma = 3n(n-1) - \Sigma i'_{r'}(3i'_{r'} - 1)$$

(1) Vedi p: es: Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie.* p. 383.

punti variabili da una Φ'. Dalla (1) e dalla (2) abbiamo

$$\Sigma i'_{r'} = 3n + 2(p-2), \tag{5}$$

che ci dà

$$\sigma = 2(p+1);$$

ma la Jacobiana è formata dalla curva doppia Ω' e dalle curve φ' che non sono incontrate in punti variabili dalle Φ', quindi una di queste incontra la Ω' in $2(p+1)$ punti variabili, in altri termini:

II. Le curve iperellittiche Φ' di genere p hanno $2(p+1)$ punti uniti (1).

Ad una curva Φ' corrisponde una retta del piano P, di più una Φ' è congiunta a sè stessa; dunque se chiamiamo n l'ordine e p il genere della trasformazione diremo:

III. In una trasformazione d'ordine n e di genere p abbiamo una curva limite d'ordine $2(p+1)$.

12. Nel piano semplice si fissi un punto o' di Ω', così viene fissato nell'altro piano un punto o di Ω. Sappiamo (n. 3) che a tutte le rette le quali passano per o' corrispondono le Φ che toccano la curva limite in o; ora preso un punto p e i due $p', \mathbf{p}'$ le Φ corrispondenti alle rette $o'p'$, $o'\mathbf{p}'$ passano per p, dunque:

I. Per un punto arbitrario passano due Φ che toccano la curva limite in un punto dato.

In modo del tutto analogo stabiliamo che:

II. Una, ed una sola, Φ si può descrivere tangente alla curva limite in due dati punti.

Prendendo questi punti infinitamente vicini si può dedurre:

III. Alle tangenti della curva doppia corrispondono le Φ che hanno un contatto quadripunto colla curva limite.

Fra le rette del fascio che ha il centro in o' abbiamo quella principale che ha per corrispondente una curva Φ con una cuspide in o, per conseguenza:

IV. Il numero delle Φ che passano per un punto dato, ed hanno una cuspide sulla curva limite, è eguale al doppio della classe dell'inviluppo delle rette principali.

Per conoscere quando una curva C ha per corrispondenti due curve congiunte, o una curva congiunta a sè stessa, basta supporre che alla curva C corrisponda un unico luogo, determinarne l'ordine ed i punti multipli, quindi osservare se per il loro numero e per la loro posizione viene o no a spezzarsi. È facilissimo riconoscere l'ordine del luogo C' e le sue singolarità poste nei punti fondamentali; qui appresso determineremo le singolarità che può avere nei punti della curva doppia.

Supponiamo che la C abbia un punto r-plo in un punto o della curva limite. Tutte le Φ che passano per o sono in questo punto intersecate r volte dalla C, perciò nel piano semplice abbiamo un fascio di rette che hanno comuni, col luogo C', r

(1) Ogni curva iperellittica di genere p ha $2(p+1)$ punti uniti. Vedi p. es. Clebsch l. c. p. 459.

punti posti in o'. Fra le Φ che passano per o ve n' è una che ha in o una cuspide ed ivi taglia in $2r$ punti la C, quindi la retta principale corrispondente incontra il luogo C' in $2r$ punti situati in o'.

V. Se una curva ha un punto r-plo sulla curva limite, il luogo corrispondente passa pel punto corrispondente sulla curva doppia con r rami aventi la direzione principale.

Supponiamo che la C tocchi la curva limite in un punto o; le Φ che passano per o sono tangenti alla C in questo punto, per conseguenza le rette corrispondenti nel piano semplice hanno in o' due punti comuni col luogo C'; abbiamo poi dimostrato che per un punto si possono descrivere due curve Φ tangenti alla curva limite in un punto dato, quindi prendendo il punto sulla curva C infinitamente vicino a o vediamo che si possono descrivere due curve Φ che abbiano in o un contatto tripunto colla C, a queste due Φ corrispondono due rette distinte che hanno in o' tre punti comuni col luogo C'.

VI. Se una curva tocca in un punto la curva limite, il luogo corrispondente ha un nodo nel punto corrispondente sulla curva doppia.

Come casi particolari deduciamo che:

VII. Alle tangenti della curva limite corrispondono le Φ' dotate d'un punto doppio.

VIII. Alle tangenti doppie della curva limite corrispondono le Φ' con due punti doppî.

Supponiamo che la C abbia in o un contatto tripunto colla curva limite, allora il luogo C' ha un punto doppio in o' come nel caso precedente, però nel caso presente esiste una sola Φ che ha in o un contatto tripunto colla C, e questa Φ è precisamente quella che ha in o un contatto quadripunto colla curva limite.

IX. Se una curva ha un contatto tripunto colla curva limite, la curva corrispondente ha una cuspide nel punto corrispondente sulla curva doppia. La tangente nella cuspide è anche tangente alla curva doppia.

Come caso particolare:

X. Alle tangenti stazionarie della curva limite corrispondono le Φ' dotate d'una cuspide.

Supponiamo finalmente che la C abbia colla curva limite un contatto r-punto ($r > 3$) in o. Come nei casi precedenti abbiamo nel piano semplice un fascio di rette che hanno in o' due punti comuni col luogo C'; tra queste rette consideriamo la tangente in o' alla curva doppia, la Φ corrispondente ha un contatto quadripunto in o colla curva limite, e perciò pure in o incontra la curva C in quattro punti, quindi la detta tangente ha in o' quattro punti comuni col luogo C'.

XI. Se una curva ha un contatto r-punto ($r > 3$) colla curva limite, il luogo corrispondente ha due rami che nel punto corrispondente toccano la tangente alla curva doppia, ed incontrano questa curva in r punti.

§ 6. I punti doppî del piano semplice.

13. Se un punto ω' è doppio per P', (n. 2) o è un punto fondamentale, o è un punto d'una curva fondamentale. Infatti supponiamo che vi sia un punto doppio ω' di P', non fondamentale e posto fuori delle curve fondamentali. Conduciamo una retta per ω', su questa retta avremo due punti congiunti consecutivi situati in ω', quindi la curva Φ corrispondente avrà una cuspide nel punto ω corrispondente ad ω'; ma per ω' passano infinite rette, dunque in P abbiamo una serie semplicemente infinita di curve Φ con una cuspide in ω, tutte le Φ di questa serie tagliano in $n-2$ punti variabili una retta condotta per ω, quindi tutte le rette che passano per ω' tagliano in $n-2$ punti variabili una Φ' che passa per ω', in altri termini vi deve essere un fascio di curve Φ' con un punto doppio in ω'; ma due Φ' non possono tagliarsi in più di due punti non fondamentali, quindi vi può essere un fascio di Φ' con un punto doppio in ω', solamente quando tutte le Φ' del fascio abbiano una parte comune φ', che deve essere una curva fondamentale contenente ω'.

Supponiamo d'avere un punto fondamentale i'-plo ω' doppio per P'.

Essendo ω' congiunto a sè stesso è un punto fondamentale di 3ª specie (8), ed ha per corrispondente una curva fondamentale ω non incontrata dalle Φ in punti variabili (8. III).

A tutte le rette R' che passano per ω' corrispondono le curve d'ordine $n-i'$ d'una serie semplicemente infinita, e queste curve toccano la ω in un punto variabile corrispondente ai due punti consecutivi congiunti di R' posti in ω'.

In P' consideriamo il punto ω' come una curva doppia infinitamente piccola, così in P considereremo la curva fondamentale ω come una curva fondamentale limite.

Come è multiplo per la Jacobiana delle Φ' un punto fondamentale i'-plo doppio per P'? Ritenendo le stesse denominazioni del numero 10, ed osservando che in questo caso le curve d'ordine $n-i'$ del sistema semplicemente infinito oltre ai contatti colla curva limite Ω, etc, devono toccare in un punto variabile la curva limite fondamentale ω, giungiamo all'equazione:

$$\Sigma \frac{(i_r - s_r)(i_r - s_r + 1)}{2} + \nu - j' + \delta = \frac{(n-i')(n-i'+3)}{2} - 2,$$

che ci dà:

$$\Sigma s_r + j' = 3i'.$$

I. Un punto fondamentale i'-plo doppio per P' è multiplo secondo $3i'$ per la Jacobiana delle Φ'.

In un punto fondamentale i'-plo vi sono in generale $(3i'-1)i'$ intersezioni delle Φ' colla Jacobiana; però se il punto fondamentale è doppio per P' ve ne sono $3i'^2$, quindi ne restano assorbite altre i' e per conseguenza una Φ' taglia in $2(p+1)-i'$ punti variabili la curva doppia; queste $2(p+1)-i'$ intersezioni sono punti uniti della Φ'; ne abbiamo poi i' situati nel punto fondamentale doppio per P', dunque in tutto sono $2(p+1)$ come in generale. Alle intersezioni variabili d'una Φ' colla curva doppia corrispondono le intersezioni d'una retta colla curva limite Ω, quindi:

II. Se nel piano P' abbiamo un punto doppio fondamentale i'-plo, la curva limite si spezza in una curva Ω d'ordine $2(p+1)-i'$ corrispondente alla curva doppia, ed in una curva fondamentale ω d'ordine i' corrispondente al punto doppio.

14. Supponiamo che sopra una curva fondamentale φ' d'ordine i vi sia un punto ω' non fondamentale, doppio per P'. La φ' potrà appartenere indifferentemente a qualunque delle tre specie?

I. Una curva fondamentale che contiene un punto doppio per P' non fondamentale, è di 3ª specie (congiunta a sè stessa).

Supponiamo che la curva fondamentale φ' sia di 1ª specie; allora il punto ω' deve essere congiunto ad un punto infinitamente vicino al punto congiunto alla φ'; ma ω' corrisponde a sè stesso, dunque φ' deve passare pel suo punto congiunto, ciò che è impossibile (10. I); dunque la φ' non può essere di 1ª specie.

Se φ' è di 2ª specie per ω' deve passare la curva fondamentale congiunta. Siano i_1, i_2 gli ordini di queste curve; se $i_1 + i_2 = i$ le Φ hanno un punto i-plo nel punto fondamentale f corrispondente alle due curve in questione. Chiamiamo R' le rette che passano per ω', ed R quelle che passano per ω. Una R' taglia le due curve fondamentali congiunte in $i-2$ punti distinti da ω' che danno $i-2$ rami della Φ corrispondente i quali passano per f; abbiamo poi sulla R' due punti congiunti consecutivi posti in ω' che ci danno altri due rami della Φ che passano per f; quindi in tutto vi sono i rami, come quando la retta non passa per ω'. Studiamo meglio la natura del punto i-plo posto in f. Una retta R è tagliata in $n-i$ punti variabili da tutte le Φ corrispondenti alle R', quindi alla R corrisponde una curva Φ' d'ordine $n-i$ incontrata in $n-i$ punti variabili da tutte le R', in altre parole: le Φ' corrispondenti alle R formano un fascio di curve d'ordine $n-i$, e le curve del fascio non passano per ω'. Posto ciò riprendiamo una retta R' e la Φ corrispondente; sappiamo già che questa curva ha in f un punto i-plo, ora si tratta di riconoscere le sue tangenti in f. Fra tutte le Φ' corrispondenti alle R ve ne saranno $i-2$ che passano ciascuna per una delle $i-2$ intersezioni, distinte da ω', d'una R' colle due curve fondamentali congiunte, queste $i-2$ curve Φ' danno, in P, $i-2$ tangenti in f alla Φ, siccome poi la R' ha due punti congiunti consecutivi in ω', i due rami rimanenti toccano una stessa retta corrispondente alla Φ' del fascio, la quale passa per ω'. Da tutto ciò possiamo concludere che mentre ad una qualunque retta di P' corrisponde una Φ con un punto i-plo in f e colle i tangenti distinte, ad una retta che passa per ω' corrisponde una Φ con un punto i-plo in f, $i-2$ rami hanno le tangenti distinte e variabili, gli altri due hanno una stessa tangente e fissa. È evidente che sia in un caso, sia nell'altro, la singolarità in f conta per uno stesso numero di punti doppî relativamente al genere, quindi se le Φ corrispondenti alle rette che non passano per ω' hanno δ punti doppî variabili non fondamentali, anche le Φ che corrispondono alle rette per ω' ne hanno δ. Da questo risultato possiamo dedurre che ω' non può essere un punto doppio per P'; poichè, se lo fosse, ogni retta condotta per ω' dovrebbe essere toccata in ω' dalla curva congiunta, e quindi conterrebbe altre $\delta-1$ coppie di punti congiunti distinti da ω', allora la Φ corrispondente avrebbe $\delta-1$ punti doppî variabili, e non δ.

15. Ci resta a considerare il caso possibile in cui la φ' sia di 3ª specie. Una R' taglia la φ' in $i-1$ punti distinti da ω'i quali danno $i-1$ rami della Φ corrispondente che passano per f; però la R' contiene in ω' due punti congiunti consecutivi, quindi in f abbiamo per la Φ altri due rami che insieme ai primi ne formano $i+1$; dunque mentre una qualunque Φ ha in f un punto i-plo, le Φ corrispondenti alle R' hanno in f un punto $(i+1)$-plo. Una retta R è tagliata in $n-i-1$ punti variabili dalle Φ corrispondenti alle rette R', ossia alle rette che passano per f corrispondono le Φ' d'ordine $n-i$ appartenenti ad un fascio con un punto base in ω'. Queste curve del fascio non incontrano in punti variabili la curva fondamentale φ'. Infatti ritenendo le stesse notazioni del n. 10 vediamo che essendo φ' una curva fondamentale

$$\Sigma i'_r k'_r = n i;$$

di più le curve del fascio tagliano in

$$\sigma = (n-i)i - \Sigma (i'_r - k'_r) k'_r - 1$$

punti variabili la φ', e non tagliandosi fra loro fuori dei punti base

$$(n-i)^2 = \Sigma (i'_r - k'_r)^2 + 1,$$

equazioni che danno $\sigma = 0$.

Dal momento che le Φ' del fascio non incontrano in punti variabili la φ', ve ne deve essere una che si spezza nella φ' ed in una curva Φ'_1 d'ordine $n-2i$, questa curva insieme alla φ' contata due volte corrisponde ad una retta R_1 che passa per f.

Da ciò che abbiamo detto risulta che v'è un fascio di Φ' che hanno tutte un punto doppio in ω', le curve di questo fascio contengono tutte la φ' come parte, ed una la contiene due volte. Ciò basta per ritenere che:

I. Quando sopra una curva fondamentale φ' abbiamo un punto non fondamentale doppio per P', la φ' si stacca due volte dalla Jacobiana.

Per conseguenza:

II. Un punto doppio per P' non fondamentale, posto sopra una curva fondamentale d'ordine i, diminuisce di i unità l'ordine della curva doppia.

Come vedremo in alcuni casi speciali, possiamo avere un punto doppio ω' di P' non fondamentale sopra una curva fondamentale φ', facendo in modo che vi sia un fascio di Φ' con un punto doppio in ω', e che φ' si stacchi due volte dalla Jacobiana.

La retta R_1 avendo per corrispondente una curva d'ordine $n-2i$ ha, in f, $2i$ intersezioni colle Φ, quindi:

III. Se sopra una curva fondamentale φ' d'ordine i v'è un punto non fondamentale doppio per P', le curve Φ nel punto i-plo fondamentale corrispondente alla φ' toccano con i rami una retta fissa.

Osserviamo che alle direzioni in f corrispondono le direzioni in ω', ed alle direzioni consecutive a quelle in f corrispondono i punti della φ'.

In generale in un punto fondamentale i-plo le Φ hanno i^2 intersezioni; nel caso però in cui sulla curva fondamentale corrispondente vi è un punto doppio per P' non fondamentale ne hanno $2i^2$, dunque:

IV. Un punto doppio per P' non fondamentale situato sopra una curva fondamentale d'ordine i, diminuisce di i^2 unità l'ordine della trasformazione congiunta.

Ora vediamo qual'è la natura del punto $(i+1)$-plo che hanno in f le Φ corrispondenti alle rette R'. Una R' taglia la φ' in $i-1$ punti distinti da ω', questi danno $i-1$ rami che toccano in f la R_1, i due punti congiunti consecutivi della R' posti in ω' danno due rami che passano per f ed hanno una stessa tangente corrispondente alla Φ' che tocca in ω' la R'; dunque mentre ad una retta qualunque corrisponde una Φ che tocca con $2i$ rami una retta fissa in un punto fisso,

V. Ad una retta che passa per un punto doppio di P' non fondamentale, posto sopra una curva fondamentale d'ordine i, corrisponde una curva che ha un punto $(i+1)$-plo nel punto fondamentale corrispondente; $i-1$ rami toccano una retta fissa, gli altri due hanno una stessa tangente variabile.

La singolarità che una qualunque curva Φ ha in f è come formata dà due punti i-pli infinitamente vicini, e per il genere fa l'ufficio di $i(i-1)$ punti doppî; quando le Φ corrispondono ad una retta R', uno dei rami tangenti alla R_1 si stacca, e in f si unisce ad un altro per formare una cuspide; è facile vedere che in questo caso la singolarità per il genere equivale ad $i(i-1)+1$ punti doppî, quindi quando una retta viene a passare per ω', la curva corrispondente perde uno dei punti doppî δ non fondamentali che viene assorbito in f, e in P' delle δ coppie di punti congiunti di una retta, se passa per ω', una coppia si riduce a due punti congiunti consecutivi in ω'.

§ 7. Sopra alcuni luoghi ed inviluppi relativi a P e P'.

16. Sopra una retta R' vi sono $\frac{N-\nu}{2}$ coppie di punti congiunti i quali insieme alle ν intersezioni colla curva doppia formano il sistema dei punti comuni alla retta ed alla sua curva congiunta. Ora consideriamo un fascio di rette col centro in m', le curve congiunte formano un fascio projettivo, ed il luogo dei punti comuni ad una retta del fascio ed alla curva congiunta è formato dalla Ω' e da un'altra curva K' congiunta a sè stessa d'ordine $N-\nu+1$, luogo delle coppie di punti congiunti situati sulle rette del fascio. Le curve K' formano una rete, quelle che passano per m' passano anche per $\mathbf{m}'$ e formano un fascio, la K' relativa ad m' è quella del fascio che tocca in m' la retta $m'\,\mathbf{m}'$.

Le curve K' passano tutte per i punti doppî di P', infatti la retta $\omega' m'$ incontra la curva corrispondente in ω' che perciò appartiene alla K'.

Il luogo complessivo $K'\Omega'$ passa per un punto fondamentale collo stesso numero di rami con cui vi passa la curva congiunta ad una retta, ma la rete di queste curve determina la trasformazione congiunta, ed in questa trasformazione una curva Φ' corrisponde a sè stessa; dunque una Φ' deve incontrare una curva congiunta ad una retta, e quindi il luogo $K'\Omega'$, in $n(N-1)$ punti fissi, per conseguenza restano

$$n(N+1)-n(N-1)=2n$$

intersezioni variabili; di queste $2(p+1)$ appartengono alla curva doppia Ω' (11. II), le altre $2(n-p-1)$ sono situate sulla K'. Evidentemente questi punti comuni formano $n-p-1$ coppie di punti congiunti d'una Φ' allineate con m', dunque:

I. L'inviluppo I' delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti d'una Φ' è della classe

$$n-p-1.$$

Il ragionamento precedente non si altera quando abbiamo punti doppî di P' non fondamentali situati sopra curve fondamentali. Se v'è un punto ω' di P' fondamentale i'-plo resta sempre vero che una curva Φ' incontra in $2n$ punti il luogo $K'\Omega'$, però in questo caso dei detti punti, $2(p+1)-i'$ appartengono alla Ω' (13), quindi ne restano $2(n-p-1)+i'$; ma la K' passa per ω' e quindi ivi taglia la Φ' in i' punti, dunque ne abbiamo $2(n-p-1)$ come prima.

II. Un punto doppio di P' non altera la classe dell'inviluppo I'.

Osserviamo che la K' ci può dare la classe dell'inviluppo delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti d'una qualunque curva congiunta a sè stessa, o di due curve congiunte. Come caso particolare ci può far conoscere la classe dell'inviluppo delle rette principali.

17. L'inviluppo I' è razionale perchè alle sue tangenti corrispondono le Φ che hanno un punto doppio sopra una data retta, e quindi la serie delle tangenti è projettiva ai punti d'una punteggiata. Da ciò segue che:

I. La curva I' inviluppo delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti d'una Φ' è d'ordine

$$2(n-p-2).$$

Alla curva K' relativa ad m' corrisponde una parte del luogo dei punti doppî delle Φ che passano per m, l'altra parte corrisponde alla K' relativa ad $\mathbf{m}'$; ora una K' è incontrata da una Φ' in $n-p-1$ coppie di punti congiunti variabili, dunque:

II. Il luogo dei punti doppî delle Φ che passano per un punto dato è formato da due curve d'ordine $n-p-1$.

III. Vi sono $2(n-p-1)$ curve Φ che passano per un punto dato ed hanno un punto doppio sopra una retta data.

Prendiamo m' in un punto fondamentale f' i'-plo di 1ª specie, allora K' si spezza in una curva k' e nella curva φ' congiunta ad f'. Se la K' passava con j rami per f', la $k'\varphi'$ vi passerà con $j+1$ rami e le sue intersezioni variabili con una Φ' saranno $2(n-p-1)-i'$, delle quali i' stanno sopra la φ' e le altre $2(n-p-i'-1)$ determinano $n-p-i'-1$ tangenti alla I' condotte per f'. Le i' intersezioni colla φ' sono i' punti della Φ' congiunti ai suoi i' punti infinitamente vicini ad f', dunque determinano altre i' tangenti alla I' condotte per f', in tutto avremo $n-p-1$ tangenti come prima.

Ora siano f', $\mathbf{f}'$ due punti fondamentali i'-pli congiunti (di 2ª specie). Sulla retta $f'\mathbf{f}'$ prendiamo un punto qualunque m', evidentemente la K' relativa ad esso passerà semplicemente per f', $\mathbf{f}'$ e quindi taglierà una Φ' in $2(n-p-i'-1)$ punti non fondamentali, questi danno $n-p-i'-1$ tangenti distinte condotte alla I' da m' e la retta $f'\mathbf{f}'$ sarà una tangente i'-pla.

IV. Se vi sono due punti fondamentali congiunti i'-pli (di 2ª specie) la retta che determinano è una tangente i'-pla per tutti gl'inviluppi I'.

Prendendo per m' il punto f' troviamo che la K' taglia una Φ' in $2(n-p-i'-1)$ punti non fondamentali, che danno $n-p-i'-1$ tangenti alla I' condotte per f'; di più la retta $f'\mathbf{f}'$ conta per i' tangenti, dunque in tutto ne abbiamo $n-p-1$, e perciò la I' non passa per $f', \mathbf{f}'$.

Finalmente consideriamo un punto fondamentale i'-plo ω' doppio per P' (di 3ª specie). Se per ω' conduciamo una retta, la curva congiunta la tocca in ω' che perciò è un punto triplo pel luogo K', e mentre quando si prendeva un punto qualunque m' avevamo i' intersezioni in ω', ora ne abbiamo $3i'$; quindi la K' relativa ad ω' taglia una Φ' in $2(n-p-1)-2i'$ punti non fondamentali che danno $n-p-i'-1$ tangenti alla I' condotte per ω'; a queste bisogna aggiungere le i' tangenti alla Φ' in ω', quindi in tutto ve ne saranno $n-p-1$ distinte.

V. L'inviluppo I' non passa per i punti fondamentali.

Posto ciò una qualunque Φ' l'incontra in

$$2(n-p-2)n$$

punti variabili, quindi:

VI. L'inviluppo delle Φ che hanno un punto doppio sopra una retta data è d'ordine

$$2(n-p-2)n.$$

Una tangente alla I' contiene una coppia di punti congiunti della relativa Φ', quindi le tangenti doppie della I' contengono due coppie di punti congiunti della Φ', perciò:

VII. Vi sono $\dfrac{(n-p-2)(n-p-3)}{2}$ rette che contengono due coppie di punti congiunti d'una Φ' [1].

VIII. Vi sono $\dfrac{(n-p-2)(n-p-3)}{2}$ curve Φ che hanno due punti doppî sopra una retta data.

Ad un punto p possiamo far corrispondere la retta $p'\mathbf{p}'$; ora sopra una retta $p'\mathbf{p}'$ vi sono $\dfrac{N-\nu}{2}$ coppie di punti congiunti, dunque ad una retta del piano semplice corrisponderanno $\dfrac{N-\nu}{2}$ punti del piano doppio. In questa corrispondenza un punto di P' deve essere considerato come inviluppo di un fascio di rette, quindi ha per corrispondente in P la curva K d'ordine $n-p-1$ corrispondente alla K'. Ad una retta del piano doppio corrisponde l'inviluppo I' delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti d'una Φ', ossia una curva di classe $n-p-1$ e d'ordine $2(n-p-2)$.

[1] Se vi sono punti fondamentali di 2ª specie, si vede facilmente la modificazione che subisce questo numero.

In questa corrispondenza un punto della curva limite dà una retta principale.

18. Fissiamo due rette arbitrarie R'_1, R'_2 e cerchiamo il luogo E' delle coppie di punti congiunti che sono separate armonicamente dalle R'_1, R'_2.

Sia R' una retta qualunque ed $\mathbf{R}'$ la sua curva congiunta d'ordine N; sulla R' prendiamo un punto p' e sulla $\mathbf{R}'$ il punto congiunto $\mathbf{p}'$, uniamolo col punto q' comune alle rette R'_1 R'_2, e chiamiamo p'' il punto d'intersezione della retta R' colla retta coniugata armonica della $\mathbf{p}'$ q' rispetto alle R'_1, R'_2. I punti $\mathbf{p}'$, p'' sono separati armonicamente dalle rette date, e perciò ogni qualvolta p' coincide con p'' appartiene al luogo E'. Viceversa partendo da p'' osserviamo che la retta q' $\mathbf{p}'$ incontra la $\mathbf{R}'$ in N punti, quindi un punto p'' dà N punti p'. Considerando la corrispondenza tra p', p'' troviamo che vi sono $N+1$ coincidenze, dunque:

I. La curva E' luogo delle coppie di punti congiunti separate armonicamente da due rette date è d'ordine $N+1$.

Se la trasversale R' si fa passare per un punto fondamentale I-plo per la trasformazione congiunta, la $\mathbf{R}'$ è d'ordine $N-I$, e quindi sulla R' vi sono $N-I+1$ punti di E' distinti dal punto fondamentale.

II. La curva E' passa con I rami per un punto fondamentale I-plo per la trasformazione congiunta.

È facile dedurre dalla costruzione della curva E' che passa per i punti comuni alle due rette date ed alla curva doppia, e che non può incontrarla fuori di questi e dei punti fondamentali. Di più la E' passa per i punti di R'_1 i cui congiunti stanno sulla stessa R'_1, e passa per q'; così abbiamo trovato tutte le

$$\nu + (N - \nu) + 1 = N + 1$$

intersezioni della E' con una delle rette date.

III. I punti comuni ad una delle rette ed alla curva E' sono il punto comune alle due rette, i punti comuni alla retta ed alla curva doppia, ed i punti della retta che hanno i congiunti sulla retta stessa.

Una curva E' sarà tagliata in

$$\sigma = (N+1)\,n - \Sigma\, Ii$$

punti variabili da una Φ'; ma dal momento che le Φ' sono congiunte a sè stesse

$$Nn - \Sigma\, Ii = n;$$

dunque

$$\sigma = 2n;$$

ciò vale a dire che la curva E corrispondente alla E' è d'ordine n.

Chiamiamo

$$s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r'}$$

i numeri dei rami con i quali una curva fondamentale φ' d'ordine i passa per i punti fondamentali multipli secondo

$$i'_1, i'_2, \ldots\ldots, i'_{r'}.$$

La E' taglia la φ' in

$$\sigma = (N+1)\,i - \Sigma\, Is'$$

punti non fondamentali, se la φ' è di 1ª specie abbiamo

$$Ni - \Sigma Is' = 0,$$

e quindi

$$\sigma = i;$$

perciò la E passa con i rami pel punto fondamentale f corrispondente. Se la φ' è di 3ª specie abbiamo

$$Ni - \Sigma Is' = i,$$

quindi

$$\sigma = 2i,$$

e la E passa con i rami per f. Se poi la φ' è di ordine i_1 e congiunta ad un'altra curva fondamentale d'ordine i_2, 2ª specie, abbiamo

$$\sigma = (N + 1)i_1 - \Sigma Is',$$

e

$$Ni_1 - \Sigma Is' = i_2,$$

da cui

$$\sigma = i_1 + i_2 = i;$$

dunque in generale:

IV. Ad una curva E' corrisponde una curva E d'ordine n che passa con i rami per un punto fondamentale i-plo.

Per il teorema III abbiamo che in P

V. Date due curve Φ_1, Φ_2 esiste sempre una curva E, dello stesso ordine n, che passa per i punti di contatto delle Φ_1, Φ_2 colla curva limite, passa semplicemente per i loro punti doppî non fondamentali, con i rami per i loro punti i-pli fondamentali, e passa per quello tra i loro punti comuni che corrisponde al punto d'intersezione delle due rette corrispondenti nel piano semplice.

In questo modo il punto comune alle Φ_1, Φ_2, che corrisponde alla intersezione delle R'_1, R'_2, viene ad essere separato dagli altri punti comuni che corrispondono ai punti di R'_1 i cui congiunti stanno su R'_2.

Oltre ai punti trovati non vè ne sono altri comuni ad una delle Φ_1, Φ_2 ed alla E, infatti ne abbiamo

$$\nu + (N - \nu) + \Sigma i^2 = n^2.$$

Se le rette R'_1, R'_2 passano per un punto fondamentale i'-plo per la trasformazione doppia, e fondamentale I-plo per la congiunta, la curva E' si spezza nella curva d'ordine I congiunta al punto fondamentale ed in una curva d'ordine $N - I + 1$, mentre la E si spezza nella curva d'ordine i' corrispondente al punto fondamentale, ed in una curva d'ordine $n - i'$.

II. Trasformazioni d'ordine n e di genere 0, 1.

§ 1. Trasformazioni generali di genere 0, 1. Curve e punti fondamentali di P'. — Curva doppia.

19. Consideriamo le proprietà appartenenti alle trasformazioni generali di genere 0 ed 1, ossia a quelle trasformazioni che si hanno quando i punti fondamentali si prendono in posizione generale, ciò che è sempre possibile (5), e quando, se $p = 0$,

si prendono tre curve generali Φ' per determinare la rete. In questi casi vi è bensì un numero semplicemente infinito di curve Φ' dotate d'un punto doppio non fondamentale, ma non vi può essere per la generalità della rete un numero semplicemente infinito di curve Φ' dotate di due punti doppî non fondamentali, o ciò che è lo stesso devono mancare le curve fondamentali di 2ª e 3ª specie (11).

I. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1 le curve fondamentali del piano semplice sono tutte di 1ª specie.

Nelle trasformazioni generali di genere 0 o di genere 1, non solo mancano le curve fondamentali di 2ª e 3ª specie, ma anche i punti fondamentali di 2ª e 3ª specie ed i punti doppî di P' non fondamentali.

Supponiamo di avere due punti $f, \mathbf{f}'$ fondamentali i'-pli congiunti; evidentemente per essi non passa la curva doppia, quindi vi dovranno passare le curve fondamentali con $3i' - 1$ rami. Sia φ' una di queste, ad un suo punto infinitamente vicino ad f' deve corrispondere un punto infinitamente vicino al punto congiunto alla φ', che è necessariamente di 1ª specie, e deve corrispondere un punto infinitamente vicino ad $\mathbf{f}'$; ma ciò è contrario alla nostra ipotesi, dunque:

II. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1 mancano i punti fondamentali di 2ª specie.

Supponiamo ora d'avere un punto fondamentale $\omega' i'$-plo doppio per P'. La curva limite fondamentale ω d'ordine i non può essere incontrata in punti variabili dalle Φ (8. III), quindi deve passare per i punti fondamentali, e perciò in P' avremo curve fondamentali che passano per il punto doppio ω'; sia φ' una di queste, ad un suo punto infinitamente vicino ad ω' deve corrispondere lo stesso punto ed un punto infinitamente vicino al punto congiunto, perchè φ' è di 1ª specie; ma ciò non è possibile, dunque:

III. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1 mancano i punti fondamentali doppî per P' (3ª specie).

È poi evidente che:

IV. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1 mancano i punti doppî per P' non fondamentali.

Infatti questi punti dovrebbero essere situati sopra curve fondamentali di 3ª specie (14. I).

20. Avuto riguardo al teorema (18. I), i teoremi (II) (III) del n. 10 nel caso di $p = 0$ o $p = 1$ si possono enunciare così:

I. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1 la curva doppia non incontra le curve fondamentali fuori dei punti fondamentali.

II. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1 sulla curva limite non vi sono punti fondamentali.

Quando $p = 0$ la curva limite è una conica (11. III), e non passando per i punti fondamentali, è toccata in n punti variabili da una Φ; di più la curva fondamentale φ corrispondente ad un punto fondamentale i'-plo tocca la curva limite dovunque l'incontra, ossia in i' punti, dunque:

III. In una trasformazione generale di genere 0 la curva

doppia è d'ordine n e passa con i' rami per un punto fondamentale i'-plo, ossia: la curva doppia appartiene al sistema triplicemente infinito delle curve d'ordine n determinate dai punti fondamentali.

Quando $p = 1$ la curva limite è del quarto ordine (11. III), e non passando per i punti fondamentali, è toccata in $2n$ punti variabili da una Φ; di più la curva fondamentale φ corrispondente ad un punto fondamentale i'-plo tocca la curva limite in $2i'$ punti, dunque:

IV. In una trasformazione generale di genere 1 la curva doppia è d'ordine $2n$ e passa con $2i'$ rami per un punto fondamentale i'-plo.

§ 2. Costruzione dei punti congiunti.

21. Supponiamo $p = 0$; allora le Φ' che hanno un punto doppio fuori dei punti fondamentali si spezzano in due curve F'_{n_1}, $\mathbf{F}'_{n_2}$ d'ordine n_1, n_2, essendo

$$n_1 + n_2 = n.$$

Abbiamo così due fasci projettivi di curve, due curve corrispondenti sono congiunte e si tagliano in un punto, non comune a tutte le altre, situato sulla curva doppia che viene ad essere generata dai due fasci projettivi, e che per conseguenza è dell'ordine

$$n_1 + n_2 = n,$$

e passa con

$$i'_1 + i'_2 = i'$$

rami per un punto fondamentale i'-plo, indicando con i'_1, i'_2 il numero dei rami con i quali passano per lo stesso punto le F'_{n_1}, $\mathbf{F}'_{n_2}$ (20. III).

Per un punto p' passa una curva F'_{n_1} del primo fascio, ed una curva F'_{n_2} del secondo fascio; le F'_{n_1}, F'_{n_2} incontrano ciascuna in un punto non fondamentale la curva doppia, e i due punti così ottenuti determinano le curve $\mathbf{F}'_{n_1}$, $\mathbf{F}'_{n_2}$ appartenenti ai due fasci. Queste due curve s'incontrano in un solo punto $\mathbf{p}'$ non fondamentale congiunto a p' nella trasformazione involutoria congiunta, e che viene ad essere costruito geometricamente.

È molto più semplice la costruzione dei punti congiunti quando $p > 0$; allora le Φ' formano una rete determinata del tutto dai punti fondamentali, e quindi basta farle passare per un punto p' onde avere un fascio, i punti fondamentali rappresentano $n^2 - 2$ intersezioni fisse, le altre sono p', $\mathbf{p}'$.

Se $p = 0$ possiamo determinare nel modo seguente l'ordine della trasformazione congiunta.

Sopra una retta R prendiamo ad arbitrio un punto p'_{n_1}, per questo punto passa una curva F'_{n_1}, e se il punto congiunto sta sulla stessa retta R deve essere uno degli n_2 punti in cui la retta è tagliata dalla $\mathbf{F}'_{n_2}$, su questi n_2 punti ripetiamo l'operazione fatta per p'_{n_1}, ognuno darà n_2 punti p'_{n_2}, ed in tutto avremo n^2_2 punti p'_{n_2} corrispondenti a p'_{n_1}. È chiaro che se un punto p'_{n_2} coincide con p'_{n_1} il punto congiunto a p'_{n_1} sta sulla retta R. Se in luogo di partire da p'_{n_1} partiamo da un punto p'_{n_2} troviamo come corrispondenti n^2_1 punti p'_{n_1} e troviamo che p'_{n_2} ha il punto congiunto sulla retta R quando coincide con uno dei corrispondenti. Abbiamo

così sulla R una corrispondenza tale che ad un punto della prima serie ne corrispondono n^2_2 della seconda e ad un punto di questa ne corrispondono n^2_1 della prima, perciò in tutto vi saranno $n^2_1 + n^2_2$ punti uniti; ma ogni punto unito ha il congiunto sulla retta R, dunque:

I. Se $p = 0$ l'ordine della trasformazione congiunta è

$$N = n^2_1 + n^2_2.$$

In modo simile si trova che:

II. Se $p = 0$ un punto fondamentale i'-plo per la trasformazione doppia è punto fondamentale multiplo secondo

$$I = i'_1 n_1 + i'_2 n_2$$

per la trasformazione congiunta (1).

§ 3. La trasformazione doppia n = 2, p = 0.

22. Quando $p = 0$ abbiamo:

$$\Sigma i'^2_{r'} = n^2 - 2, \qquad \Sigma i'_{r'} = 3n - 4, \tag{6}$$

e quando $p = 1$

$$\Sigma i'^2_{r'} = n^2 - 2, \qquad \Sigma i'_{r'} = 3n - 2. \tag{7}$$

Evidentemente non abbiamo trasformazioni doppie di primo ordine, $n = 1$, perchè due rette s'incontrano in un sol punto, e se $n = 2$ bisogna considerare solamente le (6), che ci danno l'unica soluzione

$$i'_1 = i'_2 = 1.$$

In questo caso la rete delle Φ' è una rete di coniche che passano per due punti fissi $1'_1, 2'_1$; la Jacobiana è formata dalla retta $1'_1 2'_1$ e dalla curva doppia (11. I), che è una conica la quale passa per i punti $1'_1, 2'_1$ (20. III). La retta fondamentale corrisponde ad un punto fondamentale semplice 1_1 del piano doppio (9. I), e le Φ sono le coniche che passano per questo punto ed hanno un doppio contatto (7. IV) con una conica fissa (11. III), che è la curva limite (2). Ai punti fondamentali $1'_1, 2'_1$ corrispondono nel piano doppio le tangenti condotte da 1_1 alla conica limite (8. I. IV).

La trasformazione congiunta è un'inversione quadratica (7. III) che ha due punti fondamentali in $1'_1, 2'_1$, mentre il terzo punto fondamentale $\mathfrak{Z}'_1$ è congiunto alla retta $1'_1 2'_1$, polo di questa retta rispetto alla conica doppia. La curva I' inviluppo delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti d'una conica Φ' è della prima classe (16. I), e quest'inviluppo è il punto $\mathfrak{Z}'_1$ qualunque sia la Φ'.

Prendendo i punti fondamentali infinitamente vicini in una data direzione R', le Φ' sono le coniche che toccano la retta R' in un punto fisso $1'_1$ e formano una rete; e la conica doppia si spezza in due rette doppie che passano per $1'_1$. Le Φ sono le coniche che passano per un punto fisso 1_1 e toccano due rette limiti. Se $\mathfrak{Z}'_1$ è il punto congiunto alla R', il punto congiunto a p' è un punto $\mathfrak{p}'$ allineato con p', $\mathfrak{Z}'_1$, e $p', \mathfrak{p}'$ sono separati armonicamente dalle rette doppie. Ad una retta è congiunta una conica che passa per $\mathfrak{Z}'_1$ e tocca in $1'_1$ la retta R'.

(1) In questi teoremi abbiamo sempre supposto che la trasformazione di genere 0 sia generale nel senso del n. 19.

(2) Clebsch. l. c.

23. Dopo aver preso i punti fondamentali $1'_1, 2'_1$ possiamo scegliere per coniche determinanti la rete tre coniche qualunque che passino per $1'_1, 2'_1$. Prendiamo la retta $1'_1 2'_1$ insieme ad un' altra retta arbitraria R'_1 che tagli la $1'_1 2'_1$ in ω'; la retta $1'_1 2'_1$ insieme ad un'altra retta R'_2 che passi per ω'; e due rette $1'_1 3'_1$, $2'_1 3'_1$. In questo caso avremo un fascio di coniche Φ' con un punto doppio in ω', e saranno formate dalla retta $1'_1 2'_1$, e da una retta per ω'; tra le coniche del fascio v'è la retta $1'_1 2'_1$ contata due volte, che per conseguenza si stacca due volte dalla Jacobiana (15). La retta $1'_1 2'_1$ è una curva fondamentale di 3ª specie, il punto ω' è un punto doppio per P' (14. I). La curva doppia si riduce ad una retta Ω' (15. II) che passa per $3'_1$, perche $3'_1$ è punto doppio per una conica $2'_1 3'_1$, $1'_1 3'_1$ della rete.

Alla retta fondamentale $1'_1 2'_1$ corrisponde un punto fondamentale semplice 1_1. I due punti fondamentali $1'_1, 2'_1$ sono congiunti, di 2ª specie (8), e ad essi corrisponde una retta R_1. La retta doppia Ω' ha per corrispondente una conica limite Ω che tocca in 1_1 la R_1. Le Φ sono le coniche che toccano in 1_1 la retta R_1 (15. III), e toccano in un punto variabile la conica limite Ω. La trasformazione congiunta è del 1° ordine (7. III), mentre nel caso precedente era del 2° (15. IV). Questa trasformazione congiunta è un'omologia armonica, ω' è il centro d'omologia, Ω' è l'asse.

Ad una retta che passa per ω' corrisponde una retta che passa per 1_1 ed è contata due volte (15. V).

§. 4. La trasformazione doppia $p=0$, $n=3$.

24. Se $n=3$ le (6) ci danno:

$$i'_1 = 2\,, \qquad i'_2 = i'_3 = i'_4 = 1,$$

e le (7):

$$i'_1 = i'_2 = i'_3 = \ldots = i'_7 = 1;$$

dunque abbiamo due sole trasformazioni doppie del terzo ordine.

Nel primo caso le Φ' sono cubiche d'una rete, ed hanno fisso un punto doppio $1'_2$ e tre semplici $1'_1, 2'_1, 3'_1$. La Jacobiana è formata dalle tre rette fondamentali $1'_2 1'_1$, $1'_2 2'_1$, $1'_2 3'_1$ e dalla curva doppia, che è una cubica con un punto doppio in $1'_2$ e tre semplici in $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$ (11. I) (20. III). Le rette fondamentali corrispondono a tre punti fondamentali $1_1, 2_1, 3_1$ (9. I), e le Φ sono le cubiche che passano per questi tre punti, hanno un punto doppio variabile (7, V), ed un triplo contatto colla conica limite (7. IV) (11. III). Ai tre punti $1'_1, 2'_1, 3'_1$ corrispondono tre rette che passano rispettivamente per $1_1, 2_1, 3_1$, e toccano la conica limite (8. I. IV), ciascuna di queste rette è incontrata in due punti variabili da una Φ, dunque i tre punti $1'_1, 2'_1, 3'_1$ sono fondamentali doppî per la trasformazione congiunta (8. II), e corrispondendo al punto $1'_2$ una conica che passa per $1_1, 2_1, 3_1$, che ha un doppio contatto colla conica limite, ed è incontrata in tre punti variabili da una Φ, il punto $1'_2$ è triplo per la trasformazione congiunta, altri punti fondamentali semplici per questa trasformazione sono i punti $1'_1, 2'_1, 3'_1$ congiunti alle rette $1'_2 1'_1$, $1'_2 2'_1$, $1'_2 3'_1$. Riassumendo vediamo che la rete la quale stabilisce la trasformazione razionale involutoria congiunta è formata da curve del 5° ordine (7. II) che hanno fisso un punto triplo, tre punti doppî, e tre semplici.

Dai punti $1_1, 2_1, 3_1$ si possono condurre sei tangenti alla conica limite, tre sono le rette fondamentali, le altre tre hanno per corrispondenti le rette $1'_1\,2'_1$, $2'_1\,3'_1$, $3'_1\,1'_1$ e le congiunte $1'_2\,\mathbf{3'_1}$, $1'_2\,\mathbf{2'_1}$, $1'_2\,\mathbf{1'_1}$. Alle tre rette $1_1\,2_1$, $2_1\,3_1$, $3_1\,1_1$ devono corrispondere tre rette congiunte a sè stesse e passanti per $3'_1, 2'_1, 1'_1$; ora ciascuna di queste rette incontra due rette fondamentali, quindi deve passare per due dei punti $\mathbf{1'_1}, \mathbf{2'_1}, \mathbf{3'_1}$, e precisamente una conterrà i punti $3'_1, \mathbf{1'_1}, \mathbf{2'_1}$, un'altra i punti $1'_1, \mathbf{2'_1}, \mathbf{3'_1}$, ed un'altra i punti $2'_1, \mathbf{3'_1}, \mathbf{1'_1}$; in altri termini i punti $\mathbf{1'_1}, \mathbf{2'_1}, \mathbf{3'_1}$ sono i vertici d'un triangolo circoscritto al triangolo $1'_1, 2'_1, 3'_1$.

Preso un punto m', il luogo delle coppie di punti congiunti situati sulle rette che passano per m' è una cubica K' che passa per i 7 punti fondamentali, per m', e pel punto congiunto $\mathbf{m'}$ (17). La K' taglia una Φ' in quattro punti non fondamentali, dunque l'inviluppo I' è una conica (17. I. II). Se per m' prendiamo uno dei punti fondamentali $1'_1, 2'_2, 3'_1$ la K' si riduce ad una delle rette $\mathbf{1'_1\,2'_1}$, $\mathbf{2'_1\,3'_1}$, $\mathbf{3'_1\,1'_1}$ congiunte a sè stesse, quindi tutte le coniche I' sono inscritte al triangolo $\mathbf{1'_1\,2'_1\,3'_1}$. L'inviluppo delle rette principali è della 4ª classe.

Passando al piano P si trova che una K' ha per corrispondente una conica circoscritta al triangolo $1_1\ 2_1\ 3_1$, perciò il luogo del punto doppio delle Φ che passano per m è formato da due coniche descritte per i quattro punti $1_1, 2_1, 3_1, m$, (17. III). Da ciò discende che vi sono quattro cubiche Φ che passano per un punto dato ed hanno il punto doppio sopra una retta data (17. IV). Le Φ che hanno un punto doppio sopra una retta data inviluppano una curva del 6° ordine con un punto doppio in ciascuno dei punti fondamentali $1_1, 2_1, 3_1$ (17. VI). Per un punto m passano otto curve Φ dotate d'una cuspide sulla conica limite.

Questa trasformazione doppia stabilisce una corrispondenza univoca tra i punti di P e le rette di P'. Ad un punto p possiamo far corrispondere la retta $p'\,\mathbf{p'}$; allora una retta di P' ha per corrispondente un solo punto p (17). Ai punti di P' corrispondono le coniche circoscritte al triangolo $1_1\ 2_1\ 3_1$, alle rette di P corrispondono le coniche iscritte nel triangolo $1'_1\,2'_1\,3'_1$.

25 Sulla retta $1'_2\,1'_1$ scegliamo un punto ω', e prendiamo per rete delle Φ' quella determinata da una cubica qualunque con un punto doppio in $1'_2$ e tre semplici in $1'_1, 2'_1, 3'_1$, dalla retta $1'_2\,1'_1$ insieme con una conica del fascio determinato dai punti $1'_2, \omega', 2'_1, 3'_1$, dalla retta $1'_2\,1'_1$ insieme con un'altra conica dello stesso fascio. Allora abbiamo un fascio di Φ' che hanno un punto doppio in ω' e sono tutte formate dalla retta $1'_2\,1'_1$ e da una conica che passa per $1'_1, \omega', 2'_1, 3'_1$; fra tutte le Φ' del fascio ve n'è una formata dalla retta $1'_2\,1'_1$ presa due volte, e dalla retta $2'_1\,3'_1$ (14). Il punto ω' è doppio per P', la retta $1'_2\,1'_1$ è fondamentale di 3ª specie e si stacca due volte dalla Jacobiana (14. I) (15. I); rimangono per completarla le rette fondamentali $1'_2\,2'_1$, $1'_2\,3'_1$ ed una conica che passa per $1'_2, 2'_1, 3'_1$, che è la curva doppia Ω' (15. II). Alla conica doppia corrisponde una conica limite Ω (11. III) che tocca nel punto 1_1, corrispondente alla retta $1'_2\,1'_1$, la retta R_1 corrispondente alla retta $2'_1\,3'_1$. Le cubiche Φ toccano in 1_1 la retta R_1 (15. III) e passano per i punti $2_1, 3_1$ corrispondenti alle rette $1'_2\,2'_1$, $1'_2\,3'_1$, toccano in due punti variabili la conica limite, ed hanno un punto doppio variabile. La trasformazione congiunta è del 4° ordine (15. IV), i punti $1'_2, 2'_1, 3'_1$ sono fondamentali doppî, e poi abbiamo

tre punti $1'_1, \mathfrak{2}'_1, \mathfrak{3}'_1$ fondamentali semplici. Chiamiamo $\mathfrak{2}'_1, \mathfrak{3}'_1$ i punti congiunti alle rette $1'_2 2'_1$, $1'_2 3'_1$. La retta $1_1 2_1$ è incontrata in un punto variabile da tutte le Φ, quindi ha per corrispondente una retta congiunta a sè stessa, questa retta è la $\omega' 3'_1$ che incontra in un punto non fondamentale la $1'_2 2'_1$, e quindi contiene il punto $\mathfrak{2}'_1$. Considerando la retta corrispondente alla $1_1 3_1$ troviamo che contiene i punti $\omega', 2'_1, \mathfrak{3}'_1$. Riepilogando: la trasformazione involutoria congiunta è del 4° ordine, vi sono tre punti fondamentali doppî $1'_2$, $2'_1$, $3'_1$, e tre semplici 1_1, $\mathfrak{2}'_1$, $\mathfrak{3}'_1$, le rette $1'_2 1'_1$, $2'_1 \mathfrak{3}'_1$, $3'_1 \mathfrak{2}'_1$ passano per uno stesso punto doppio ω', la curva doppia è una conica che passa per i tre punti fondamentali doppî.

Alle rette che passano per ω' corrispondono le cubiche Φ che hanno una cuspide in 1_1 (15. V).

26. Prendiamo sulle rette $1'_2 1'_1$, $1'_2 2'_1$ due punti ω'_1, ω'_2 allineati col punto $3'_1$ e determiniamo la rete delle Φ' per mezzo delle tre seguenti cubiche. La retta $1'_2 1'_1$ insieme colla retta $1'_2 2'_1$ e colla retta $\omega'_1 \omega'_2 3'_1$, la retta $1'_2 1'_1$ insieme con una conica per i punti $1'_2 \omega'_1 2'_1 3'_1$, e la retta $1'_2 2'_1$ insieme con una conica per i punti $1'_2 \omega'_2 1'_1 3'_1$. Allora v'è un fascio di curve Φ' che hanno un punto doppio nel punto ω'_1 doppio per P', ed un fascio di curve Φ' che hanno un punto doppio in ω'_2 pure doppio per P' (15). Dalla Jacobiana si stacca due volte (15. I) ciascuna delle rette $1'_2 1'_1$, $1'_2 2'_1$ fondamentali di 3ª specie (14. I), una volta la retta $1'_2 3'_1$, e rimane una retta doppia Ω' (15. II) che passa per $3'_1$. Le cubiche Φ toccano due rette R_1, R_2 nei punti fissi $1_1, 2_1$ (15. III), le R_1, R_2 corrispondono alle rette $2'_1 3'_1$, $3'_1 1'_1$ ed ai punti $1'_1, 2'_1$ congiunti, e i punti $1_1, 2_1$ alle rette fondamentali $1'_2 1'_1, 1'_2 2'_1$; di più le Φ passano per un punto 3_1 corrispondente alla retta $1'_2 3'_1$, toccano in un punto variabile la curva limite, che è una conica la quale tocca R_1, R_2 in $1_1, 2_1$; ed hanno un punto doppio variabile. Per la trasformazione congiunta il punto $3'_1$ è fondamentale doppio, i punti $1'_2, 1'_1, 2'_1$ e il punto $\mathfrak{3}'_1$ congiunto alla retta $1'_2 3'_1$ sono fondamentali semplici. Alle rette $1_1 3_1$, $2_1 3_1$ corrispondono le rette $1'_1 \omega'_2$, $2'_1 \omega'_1$ congiunte a sè stesse, quindi $\mathfrak{3}'_1$ è il loro punto d'intersezione. Riepilogando: la trasformazione involutoria congiunta è del 3° ordine (15. IV), ha un punto fondamentale doppio in $3'_1$ e quattro fondamentali semplici in $1'_2, 1'_1, 2'_1, \mathfrak{3}'_1$, v'è una retta doppia che passa per $3'_1$, e due punti doppî ω'_1, ω'_2 allineati con $3'_1$; i punti doppî e i quattro punti fondamentali semplici sono i vertici d'un quadrilatero completo.

27. Prendiamo quattro punti arbitrari $1'_2, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$, chiamano $1'_1, 2'_1, 3'_1$ i punti diagonali del quadrangolo, e consideriamo la rete delle Φ' determinata dalla cubica formata colle rette $1'_2 1'_1$, $1'_2 2'_1$, $\omega'_1 \omega'_2 3'_1$, insieme colla cubica $1'_2 2'_1$, $1'_2 3'_1$, $\omega'_2 \omega'_3 1'_1$, e colla cubica $1'_2 3'_1$, $1'_2 1'_1$, $\omega'_3 \omega'_1 2'_1$. Allora i punti $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ sono doppî per P', e la Jacobiana delle Φ' è formata dalle tre rette fondamentali $1'_2 1'_1$, $1'_2 2'_1$, $1'_2 3'_1$ ciascuna contata due volte (15. I). In questo caso manca la curva doppia (15. II). Il punto $1'_2$, fondamentale per la trasformazione doppia, 6 - plo per la Jacobiana, è un punto doppio di P', 3ª specie (13. I). Le Φ sono cubiche che toccano tre rette fisse R_1, R_2, R_3 in tre punti fissi $1_1, 2_1, 3_1$ (15. III), ed hanno un punto doppio variabile.

Al punto fondamentale $1'_2$ doppio per P' corrisponde una conica fondamentale limite che tocca le rette R_1, R_2, R_3 in $1_1, 2_1, 3_1$ (13. II). La trasformazione con

giunta è di 2° ordine (15. IV), i punti $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$ sono i punti fondamentali semplici, e vi sono quattro punti doppî di P', vertici di un quadrangolo che ha il triangolo diagonale nel triangolo fondamentale.

§ 5. La trasformazione doppia $p = 1$, $n = 3$.

28. Passiamo a considerare la trasformazione $p = 1$, $n = 3$. Le Φ' sono le cubiche che passano per i sette punti

$$1'_1,\ 2'_1,\ 3'_1,\ 4'_1,\ 5'_1,\ 6'_1,\ 7'_1\ (^1).$$

La curva doppia del 6° ordine con un punto doppio in ciascun punto fondamentale (20, IV) è la completa Jacobiana della rete. Nel piano P non abbiamo punti fondamentali, la curva limite è una curva generale del 4° ordine (11.III), e le Φ sono le cubiche che la toccano in 6 punti (7. IV) e che hanno un punto doppio; variabile (7. V). Ai sette punti fondamentali corrispondono sette rette tangenti doppie della curva limite (8. IV), le altre 21 tangenti doppie sono date dalle rette che a due a due congiungono i sette punti fondamentali. Ogni retta fondamentale è incontrata in tre punti variabili da una Φ, quindi le curve d'ottavo ordine (7. II) congiunte alle rette di P' hanno un punto triplo in ciascuno dei sette punti fondamentali (8. II).

La K' relativa ad un punto m' è una cubica che passa per i 7 punti fondamentali, per m', $\mathfrak{m}'$, e tocca in m' la retta $m'\,\mathfrak{m}'$. Alla K' corrisponde in P una retta che passa per m, ed è una delle tangenti in m alla sola Φ che ha lì un punto doppio; l'altra tangente corrisponde alla K' relativa ad $\mathfrak{m}'$. Da ciò segue che le cubiche Φ, le quali passano per un punto m, formano due sistemi semplicemente infiniti, il luogo del punto doppio delle cubiche d'un sistema è una retta (17. II). Per un punto passano due cubiche Φ che hanno un punto doppio sopra una retta data (17. III).

Le rette determinate dalle coppie di punti congiunti d'una Φ' passano per un punto fisso della stessa cubica (the coresidual); e passando al piano P troviamo che tutte le cubiche Φ le quali hanno il punto doppio sopra una retta data passano per un punto fisso situato sulla stessa retta (17. VI).

Con questa trasformazione ad un punto p possiamo far corrispondere la retta $p'\,\mathfrak{p}'$, allora a questa retta corrisponde il solo punto p; ad una retta di P corrisponde il punto inviluppo delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti della Φ' corrispondente alla retta, e ad un punto m' di P' corrisponde la retta luogo dei punti doppî delle Φ corrispondenti alle rette che passano per m'.

29. Prendiamo tre rette che passino per uno stesso punto $1'_1$, e su ciascuna di esse fissiamo a piacere altri due punti che chiameremo $2'_1\,3'_1$, $4'_1\,5'_1$, $6'_1\,7'_1$. Le cubiche che passano per $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$, $4'_1$, $5'_1$, $6'_1$, $7'_1$ stabiliscono una trasformazione doppia. Il punto $1'_2$, triplo per la Jacobiana (13. I), è doppio per P', e la Jacobiana è formata dalle tre rette fondamentali $1'_1\,2'_1\,3'_1$, $1'_1\,4'_1\,5'_1$, $1'_1\,6'_1\,7'_1$ congiunte a sè stesse, insieme con una cubica Ω' che passa per $2'_1$, $3'_1$, $4'_1$, $5'_1$, $6'_1$, $7'_1$, e che è la curva doppia. In P abbiamo tre punti fondamentali semplici 1_1, 2_1, 3_1 sulla retta

(1) Clebsch l.c.

fondamentale limite che corrisponde al punto 1_1, e poi una cubica limite che corrisponde alla cubica doppia e passa per $1_1, 2_1, 3_1$ (13. II). Le Φ sono le cubiche che passano per $1_1, 2_1, 3_1$, toccano la curva limite in tre punti variabili ed hanno un punto doppio variabile.

La trasformazione congiunta è del 5° ordine, i punti $2'_1, 3'_1, 4'_1, 5'_1, 6'_1, 7'_1$ sono fondamentali doppî; v' è un punto doppio di P' in $1'_1$, ed una cubica doppia.

Prendendo i punti $2'_1, 3'_1, 4'_1, 5'_1, 6'_1, 7'_1$ sopra una conica, la Jacobiana viene formata dalle tre rette fondamentali, dalla conica fondamentale, e da una retta doppia Ω'. Il punto $1'_1$ è sempre doppio per P'. Nell'altro piano vi sono tre punti fondamentali semplici $1_1, 2_1, 3_1$ ed uno doppio 1_2, la curva limite corrispondente alla retta Ω' è una cubica che ha un punto doppio 1_2, e passa per $1_1, 2_1, 3_1$, v' è poi una retta limite fondamentale che corrisponde al punto $1'_1$ e contiene i punti fondamentali $1_1, 2_1, 3_1$.

Le Φ sono le cubiche con un punto doppio in 1_2 e tre semplici in $1_1, 2_1, 3_1$; toccano in un punto variabile la curva limite. La trasformazione congiunta è un'omologia armonica, $1'_1$ è il centro, Ω' l'asse.

Possiamo spezzare la conica fondamentale in due rette che allora sono due rette fondamentali congiunte (2ª specie).

30. Prendiamo i sette punti fondamentali nei quattro vertici $1'_1, 2'_1, 3'_1, 4'_1$ d'un quadrangolo e nei tre vertici $5'_1, 6'_1, 7'_1$ del triangolo diagonale. I sei lati del quadrangolo sono sei rette fondamentali (di 3ª specie), e formano la completa Jacobiana. In questo caso non v'è curva doppia e i quattro vertici $1'_1, 2'_1, 3'_1, 4'_1$ del quadrangolo, tripli per la Jacobiana, sono punti doppî di P' (13. I). Nell'altro piano abbiamo sei punti fondamentali semplici $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1$ e quattro rette fondamentali limiti che corrispondono ai punti $1'_1, 2'_1, 3'_1, 4'_1$, le quattro rette limiti formano un quadrilatero che ha per vertici i sei punti fondamentali, di modo che le cubiche Φ sono le cubiche circoscritte ad un quadrilatero completo e dotate d'un punto doppio variabile.

La trasformazione congiunta è del 2° ordine, i tre punti fondamentali sono i vertici del triangolo diagonale $5'_1\ 6'_1\ 7'_1$, e i vertici del quadrangolo sono quattro punti doppî per P'.

§ 6. Soluzioni dell'equazioni (6), (7) per le trasformazioni dei primi dieci ordini.

31. Ci occuperemo in un altro studio di alcune interessanti applicazioni delle trasformazioni doppie di 2° e 3° ordine; ora poniamo nei seguenti quadri le soluzioni delle equazioni (6), (7) per le trasformazioni dei primi dieci ordini.

Con $t_{r,s}$ indichiamo che nel piano semplice vi sono t punti fondamentali r-pli per la trasformazione doppia ed s-pli per la congiunta; con $t_{o\,s}$ indichiamo che vi sono t punti fondamentali s-pli per la sola trasformazione congiunta. Uno di questi punti s-pli è congiunto ad una curva fondamentale di 1ª specie d'ordine s, questa curva ha per corrispondente nel piano doppio un punto fondamentale s-plo, quindi chiamando fondamentali aggiunti i punti $t_{o\,s}$ avremo:

I. In una trasformazione generale di genere 0 o di genere 1, se nel piano semplice vi sono t punti fondamentali aggiunti, nel piano doppio vi sono t, e solamente t, punti fondamentali rispettivamente multipli come gli aggiunti.

quindi i punti $t_{r,s}$, $t_{o,s}$ non solo ci danno i punti del piano semplice fondamentali tanto per la trasformazione doppia quanto per la congiunta; ma anche i punti fondamentali del piano doppio.

$n = 2, \quad p = 0$

$N=2$	$2_{1,1} \quad 1_{0,1}$

$p = 0 \qquad n = 3 \qquad p = 1$

$N=5$	$3_{1,2} \quad 1_{2,3} \quad 3_{0,1}$	$N=8$	$7_{1,3}$

$p = 0 \qquad n = 4 \qquad p = 1$

$N=8$	$2_{1,2} \quad 3_{2,4} \quad 1_{0,2} \quad 3_{0,1}$	$N=14$	$6_{1,4} \quad 2_{2,7} \quad 1_{0,1}$
$N=10$	$5_{1,3} \quad 1_{3,7} \quad 5_{0,1}$		

$p = 0 \qquad n = 5 \qquad p = 1$

$N=13$	$2_{1,3} \quad 3_{2,5} \quad 1_{3,8} \quad 3_{0,1} \quad 2_{0,2}$	$N=20$	$3_{1,5} \quad 5_{2,8} \quad 1_{0,2}$
$N=17$	$7_{1,4} \quad 1_{4,13} \quad 7_{0,1}$	$N=22$	$6_{1,5} \quad 2_{2,9} \quad 1_{3,13} \quad 2_{0,1}$

$p = 0 \qquad n = 6 \qquad p = 1$

$N=18$	$2_{1,3}\ 4_{2,6}\ 1_{4,12}\ 4_{0,1}\ 1_{0,2}\ 1_{0,3}$	$N=26$	$1_{1,6}\ 6_{2,9}\ 1_{3,12}\ 1_{0,3}$
$N=18$	$4_{2,6}\ 2_{3,9}\ 1_{0,1}\ 4_{0,2}$	$N=30$	$4_{1,6}\ 3_{2,10}\ 2_{3,15}\ 1_{0,1}\ 1_{0,2}$
$N=20$	$3_{1,4}\ 1_{2,6}\ 3_{3,10}\ 3_{0,1}\ 3_{0,2}$	$N=32$	$7_{1,6}\ 3_{3,16}\ 3_{0,1}$
$N=26$	$9_{1,5}\ 1_{5,21}\ 9_{0,1}$	$N=32$	$6_{1,6}\ 3_{2,11}\ 1_{4,21}\ 3_{0,1}$

$p = 0 \qquad n = 7 \qquad p = 1$

$N=25$	$2_{1,4}\ 5_{2,7}\ 1_{5,18}\ 5_{0,1}\ 2_{0,3}$	$N=32$	$5_{2,10}\ 3_{3,13}\ 1_{0,4}$
$N=25$	$1_{1,4}\ 3_{2,7}\ 2_{3,11}\ 1_{4,14}\ 2_{0,1}\ 3_{0,2}\ 1_{0,3}$	$N=38$	$2_{1,7}\ 5_{2,11}\ 1_{3,17}\ 1_{4,21}\ 1_{0,1}\ 1_{0,3}$
$N=29$	$4_{1,5}\ 3_{3,12}\ 1_{4,17}\ 3_{0,1}\ 4_{0,2}$	$N=40$	$3_{1,7}\ 2_{2,12}\ 4_{3,17}\ 2_{0,2}$
$N=37$	$1_{6,31}\ 11_{1,6}\ 11_{0,1}$	$N=42$	$5_{1,7}\ 2_{2,12}\ 2_{3,18}\ 1_{4,24}\ 2_{0,1}\ 1_{0,2}$
		$N=44$	$6_{1,7}\ 4_{2,13}\ 1_{5,31}\ 4_{0,1}$

$p=0$	$n=8$	$p=1$
$N=32$	$3_{2,8}\,2_{3,12}\,2_{4,16}\,3_{0,2}\,2_{0,3}$	
$N=32$	$2_{1,4}\,3_{2,8}\,3_{4,16}\,3_{0,1}\,3_{0,2}\,1_{0,4}$	
$N=32$	$2_{1,4}\,6_{2,8}\,1_{6,24}\,6_{0,1}\,1_{0,3}\,1_{0,4}$	
$N=34$	$1_{1,5}\,5_{3,13}\,1_{4,16}\,5_{0,2}\,1_{0,3}$	
$N=34$	$2_{1,5}\,2_{2,8}\,3_{3,13}\,1_{5,21}\,3_{0,1}\,2_{0,2}\,2_{0,3}$	
$N=40$	$5_{1,6}\,1_{3,14}\,3_{4,20}\,3_{0,1}\,5_{0,2}$	
$N=50$	$13_{1,7}\,1_{7,43}\,13_{0,1}$	
		$N=38$ $2_{2,11}\,6_{3,14}\,1_{0,5}$
		$N=46$ $1_{1,18}\,5_{2,12}\,1_{3,16}\,2_{4,23}\,1_{0,1}\,1_{0,4}$
		$N=46$ $7_{2,12}\,1_{3,19}\,1_{5,27}\,1_{0,1}\,1_{0,4}$
		$N=50$ $2_{1,18}\,2_{2,13}\,4_{3,19}\,1_{4,24}\,1_{0,2}\,1_{0,3}$
		$N=52$ $3_{1,8}\,4_{2,13}\,2_{3,20}\,1_{5,32}\,2_{0,1}\,1_{0,3}$
		$N=54$ $4_{1,8}\,2_{2,14}\,2_{3,20}\,2_{4,27}\,1_{0,1}\,2_{0,2}$
		$N=56$ $6_{1,8}\,1_{2,14}\,3_{3,21}\,1_{5,35}\,3_{0,1}\,1_{0,2}$
		$N=56$ $6_{1,8}\,2_{2,14}\,3_{4,28}\,3_{0,1}\,1_{0,2}$
		$N=58$ $6_{1,8}\,5_{2,15}\,1_{6,43}\,5_{0,1}$

$p=0$	$n=9$	$p=1$
$N=41$	$1_{1,5}3_{2,9}1_{3,14}2_{4,18}1_{5,23}2_{0,1}3_{0,2}1_{0,3}1_{,04}$	
$N=41$	$2_{1,5}\,7_{2,9}\,1_{7,32}\,7_{0,1}\,2_{0,4}$	
$N=41$	$4_{2,9}\,3_{3,14}\,1_{6,27}\,3_{0,1}\,4_{0,3}$	
$N=41$	$1_{2,9}\,3_{3,14}\,3_{4,18}\,3_{0,2}\,3_{0,3}$	
$N=45$	$3_{1,6}\,1_{2,9}\,4_{3,15}\,1_{6,30}\,4_{0,1}\,1_{0,2}\,3_{0,3}$	
$N=45$	$2_{1,6}\,4_{3,15}\,1_{4,21}\,1_{5,24}\,1_{0,1}\,4_{0,2}\,2_{0,3}$	
$N=53$	$6_{1,7}\,3_{4,23}\,1_{5,30}\,3_{0,1}\,6_{0,2}$	
$N=65$	$15_{1,8}\,1_{8,57}\,15_{0,1}$	
		$N=44$ $7_{3,15}\,1_{4,18}\,1_{0,6}$
		$N=54$ $5_{2,13}\,2_{3,17}\,1_{4,25}\,1_{5,29}\,1_{0,1}\,1_{0,5}$
		$N=60$ $1_{1,9}\,3_{2,14}\,2_{3,21}\,3_{4,26}\,1_{0,2}\,1_{0,4}$
		$N=62$ $2_{1,9}\,5_{3,21}\,2_{4,27}\,2_{0,3}$
		$N=62$ $1_{1,9}\,2_{2,15}\,5_{3,21}\,1_{5,33}\,2_{0,3}$
		$N=62$ $2_{1,9}\,5_{2,14}\,2_{4,27}\,1_{5,35}\,2_{0,1}\,1_{0,4}$
		$N=62$ $1_{1,9}\,6_{2,14}\,2_{3,22}\,1_{6,40}\,2_{0,1}\,1_{0,4}$
		$N=66$ $3_{1,9}\,2_{2,15}\,3_{3,22}\,1_{4,30}\,1_{5,36}\,1_{0,1}\,1_{0,2}\,1_{0,3}$
		$N=68$ $4_{1,9}\,3_{2,15}\,3_{3,23}\,1_{6,45}\,3_{0,1}\,1_{0,3}$
		$N=68$ $3_{1,9}\,3_{2,16}\,4_{4,30}\,3_{0,2}$
		$N=68$ $4_{1,9}\,3_{3,23}\,3_{4,30}\,3_{0,2}$
		$N=70$ $5_{1,9}\,2_{2,16}\,1_{3,23}\,2_{4,31}\,1_{5,39}\,2_{0,1}\,2_{0,2}$
		$N=72$ $7_{1,9}\,4_{3,24}\,1_{6,48}\,4_{0,1}\,1_{0,2}$
		$N=74$ $6_{1,9}\,6_{2,17}\,1_{7,57}\,6_{0,1}$

$n = 10$

$p = 0$		$p = 1$	
$N=50$	$4_{2,10}\,2_{4,20}\,2_{5,25}\,1_{0,1}\,4_{0,2}\,2_{0,4}$	$N=62$	$3_{2,14}\,4_{3,18}\,2_{5,31}\,1_{0,1}\,1_{0,6}$
$N=50$	$2_{1,5}\,8_{2,10}\,1_{8,40}\,8_{0,1}\,1_{0,4}\,1_{0,5}$	$N=70$	$1_{1,10}\,2_{2,15}\,1_{3,20}\,5_{4,28}\,1_{0,2}\,1_{0,5}$
$N=50$	$3_{2,10}\,2_{3,15}\,2_{4,20}\,1_{6,30}\,2_{0,1}\,1_{0,2}\,3_{0,3}\,1_{0,4}$	$N=72$	$1_{1,10}\,5_{2,15}\,1_{3,20}\,2_{4,29}\,1_{6,43}\,2_{0,1}\,1_{0,5}$
$N=50$	$2_{1,5}\,3_{2,10}\,3_{4,20}\,1_{6,30}\,3_{0,1}\,3_{0,2}\,1_{0,3}\,1_{0,5}$	$N=74$	$2_{2,16}\,6_{3,23}\,1_{6,42}\,1_{0,3}\,1_{0,4}$
$N=50$	$2_{1,5}\,6_{4,20}\,6_{0,2}\,1_{0,5}$	$N=78$	$2_{1,10}\,3_{2,16}\,2_{3,24}\,1_{4,30}\,2_{5,39}\,1_{0,1}\,1_{0,2}\,1_{0,4}$
$N=50$	$2_{3,15}\,5_{4,20}\,1_{0,2}\,5_{0,3}$	$N=80$	$3_{1,10}\,5_{3,24}\,2_{5,40}\,1_{0,1}\,2_{0,3}$
$N=52$	$1_{1,6}\,3_{2,10}\,4_{3,16}\,1_{7,36}\,4_{0,1}\,3_{0,3}\,1_{0,4}$	$N=80$	$2_{1,10}\,5_{2,16}\,3_{3,25}\,1_{7,55}\,3_{0,1}\,1_{0,4}$
$N=52$	$1_{1,6}\,1_{2,10}\,3_{3,16}\,1_{4,20}\,2_{5,26}\,1_{0,1}\,3_{0,2}\,2_{0,3}\,1_{0,4}$	$N=80$	$2_{1,10}\,2_{2,17}\,4_{3,24}\,1_{4,33}\,1_{6,47}\,1_{0,1}\,2_{0,3}$
$N=52$	$2_{1,6}\,3_{2,10}\,1_{3,16}\,3_{5,26}\,3_{0,1}\,3_{0,2}\,2_{0,4}$	$N=80$	$3_{1,10}\,5_{2,16}\,3_{5,40}\,3_{0,1}\,1_{0,4}$
$N=58$	$4_{1,7}\,5_{3,17}\,1_{7,41}\,5_{0,1}\,4_{0,3}$	$N=84$	$4_{1,10}\,2_{2,17}\,2_{3,25}\,2_{4,34}\,1_{6,50}\,2_{0,1}\,1_{0,2}\,1_{0,3}$
$N=58$	$3_{1,7}\,3_{3,17}\,2_{4,24}\,1_{6,34}\,2_{0,1}\,3_{0,2}\,3_{0,3}$	$N=86$	$5_{1,10}\,2_{2,17}\,4_{3,26}\,1_{7,60}\,4_{0,1}\,1_{0,3}$
$N=68$	$7_{1,8}\,1_{4,26}\,3_{5,34}\,3_{0,1}\,7_{0,2}$	$N=86$	$4_{1,10}\,3_{2,18}\,2_{4,34}\,2_{5,43}\,1_{0,1}\,3_{0,2}$
$N=82$	$17_{1,9}\,1_{9,73}\,17_{0,1}$	$N=86$	$5_{1,10}\,3_{3,26}\,1_{4,34}\,2_{5,43}\,1_{0,1}\,3_{0,2}$
		$N=88$	$6_{1,10}\,2_{2,18}\,3_{4,35}\,1_{6,53}\,3_{0,1}\,2_{0,2}$
		$N=88$	$6_{1,10}\,2_{2,18}\,1_{3,26}\,3_{5,44}\,3_{0,1}\,2_{0,2}$
		$N=92$	$6_{1,10}\,7_{2,19}\,1_{8,73}\,7_{0,1}$

§ 7. Le trasformazioni razionali applicate al piano semplice e al piano doppio.

32. I. Le curve Φ', se $p = 0$, possono trasformarsi razionalmente nelle coniche Φ' di una rete (22).

II. Le curve Φ', se $p=1$, possono trasformarsi razionalmente nelle cubiche Φ' d'una rete (28).

Il teorema I è immediatamente dimostrato osservando che se si obbligano le curve d'ordine n del sistema triplicemente infinito determinato dai punti fondamentali ad avere comune, oltre a questi, un punto semplice fisso formano una rete

che trasforma razionalmente le Φ' in coniche passanti per due punti fissi. Però i due teoremi possono dimostrarsi insieme così:

Poniamo l'equazioni (1),(5) sotto la forma

$$i'^2_3 + i'^2_4 + \ldots\ldots + i'^2_{r'} = n^2 - 2 - i'^2_1 - i'^2_2 ,$$

$$i'_3 + i'_4 + \ldots\ldots + i'_{r'} = 3n + 2(p-2) - i'_1 - i'_2 ;$$

se moltiplichiamo la seconda equazione per i'_3 e dai suoi membri togliamo quelli della prima, si trova:

$$i'_3 \left\{ 3n + 2(p-2) - i'_1 - i'_2 \right\} \geqq n^2 - 2 - i'^2_1 - i'^2_2 .$$

Ora dimostriamo che

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 > n$$

quando $p = 0$, o $p = 1$; infatti supponiamo

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 \leqq n ;$$

allora la relazione precedente diviene

$$i'_3 \left\{ 3i'_3 + 2(p-2) + 2i'_1 + 2i'_2 \right\} \geqq i'^2_3 + 2(i'_1 i'_2 + i'_2 i'_3 + i'_3 i'_1) - 2 ,$$

ovvero

$$i'^2_3 - i_1 i'_2 + (p-2) i'_3 + 1 \geqq 0 ;$$

fatto $p = 0$ e $p = 1$, abbiamo

$$i'^2_3 - i'_1 i'_2 - 2i'_3 + 1 \geqq 0 ,$$

$$i'^2_3 - i'_1 i'_2 - i'_3 + 1 \geqq 0 ;$$

ma $i'^2_3 \leqq i'_1 i'_2$, dunque le due relazioni precedenti non sono verificate, eccetto i casi in cui sia

$$p = 0,\ i'_1 = i'_2 = 1,\ i'_3 = 0 ;$$

$$p = 0,\ i'_1 = i'_2 = i'_3 = 1 ;$$

vale a dire escluso il caso della trasformazione doppia di 2° ordine, e quello della trasformazione doppia di 3° ordine e genere 1; dunque nelle altre trasformazioni dei primi due generi

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 > n .$$

Questa relazione mostra che con una serie di trasformazioni razionali di 2° ordine, o ciò che è lo stesso con un'unica trasformazione razionale, possiamo se $p = 0$ trasformare le Φ' in coniche, se $p = 1$ in cubiche.

III. Trasformazioni d'ordine n e di genere $p > 1$.

§ 1. Metodo per trovare la posizione speciale dei punti fondamentali. La trasformazione $p = 2$, $n = 4$; una trasformazione $p = 2$, $n = 5$.

33. Qualora si conosca già la posizione speciale dei punti fondamentali è facilissimo stabilire le trasformazioni doppie di genere $p > 1$, e basta seguire le regole di cui ci siamo serviti nei casi di $p = 0$, $p = 1$.

Per determinare la posizione dei punti fondamentali supponiamo trovato un fascio di curve che taglino in due punti variabili una Φ', e supponiamo che una curva del fascio insieme con un'altra curva φ' costituisca una Φ' spezzata; allora se φ'_1, φ'_2 sono due curve del fascio la rete cercata è determinata dalle tre curve

$$\Phi', \quad \varphi'\varphi'_1, \quad \varphi'\varphi'_2,$$

e così abbiamo trovato la posizione dei punti fondamentali.

Per esempio le Φ' siano curve del quarto ordine di genere $p = 2$ con un punto doppio $1'_2$, e 10 punti semplici $1'_1, 2'_1, \ldots, 10'_1$ fissi. Per formare la rete prendiamo ad arbitrio una curva Φ' del quarto ordine con un punto doppio $1'_2$, poi descriviamo per $1'_2$ una cubica; questa incontra la Φ' in altri 10 punti, che insieme al punto doppio formano il sistema dei punti fondamentali. Infatti se φ'_1, φ'_2 sono due rette che passano per $1'_2$, le tre curve

$$\Phi', \quad \varphi'\varphi'_1, \quad \varphi'\varphi'_2$$

determinano la rete.

Alla cubica fondamentale φ' corrisponde un punto 1_3 fondamentale triplo per le Φ La curva doppia è una sestica con un punto quadruplo in $1'_2$, e che passa semplicemente per $1'_1, 2'_1, \ldots, 10'_1$. La curva limite è pure del sesto ordine ed ha un punto quadruplo in 1_3. Le Φ toccano la curva limite in sei punti.

Ai 10 punti fondamentali semplici, corrispondono le 10 tangenti condotte alla curva limite dal punto 1_3; al punto $1'_2$ corrisponde una conica che passa per 1_3 e tocca la curva limite in quattro punti.

La trasformazione congiunta è del 6° ordine, il punto $1'_2$ è fondamentale quintuplo, i punti $1'_1, 2'_1, \ldots, 10'_1$ sono fondamentali semplici. Sopra una retta qualunque non vi sono coppie di punti congiunti; le rette per $1'_2$ sono congiunte a sè stesse

34. Passiamo ad un altro caso. Sia descritta uaa curva Φ' del quinto ordine con quattro punti doppî $1'_2, 2'_2, 3'_2, 4'_2$; per questi facciamo passare una cubica φ' che incontrerà la Φ' in altri sette punti $1'_1, 2'_1, 3'_1, \ldots, 7'_1$; se φ'_1, φ'_2 sono due coniche che passano per i quattro punti doppî le curve

$$\Phi', \quad \varphi'\varphi'_1, \quad \varphi'\varphi'_2$$

determinano una rete di curve del quinto ordine con quattro punti doppî fissi e sette semplici.

La rete così ottenuta stabilisce una trasformazione doppia; alla cubica φ' corrisponde un punto fondamentale 1_3 triplo per le Φ. La curva doppia è del nono ordine, ha un punto quadruplo in ciascuno dei quattro punti $1'_2, 2'_2, 3'_2, 4'_2$, e passa semplicemente per gli altri sette punti fondamentali. La curva limite è del sesto ordine con un punto quadruplo in 1_3. Le Φ hanno tre punti doppî variabili e toccano la curva limite in nove punti. La trasformazione congiunta è del 15^{mo} ordine, i sette punti fondamentali semplici sono punti fondamentali doppî, e i quattro $1'_2, 2'_2, 3'_2, 4'_2$ sono fondamentali 7-pli.

Trasformando le curve del quinto ordine Φ' con una rete di coniche che passino per tre punti fondamentali doppî, abbiamo la rete di quartiche del caso precedente.

§ 2. Una trasformazione $n = 5$, $p = 3$ ed una trasformazione $n = 6$, $p = 3$.

35. Data una curva Φ' del 5° ordine con un punto triplo $1'_3$ descriviamo una curva del 4° ordine φ' con un punto doppio in $1'_3$. La φ' taglia la Φ' in altri 14 punti $1'_1, 2'_1, \ldots, 14'_1$, e se φ'_1, φ'_2 sono due rette che passano per $1'_3$, le tre curve

$$\Phi', \quad \varphi'\varphi'_1, \quad \varphi'\varphi'_2$$

determinano una trasformazione doppia del 5° ordine. Alla curva fondamentale φ' corrisponde un punto fondamentale 1_4 quadruplo per le Φ, alla curva doppia, che è dell'ottavo ordine con un punto 6-plo in $1'_3$ e che passa semplicemente per gli altri 14 punti fondamentali, corrisponde una curva limite dell'ottavo ordine con un punto 6-plo in 1_4, e che è toccata in otto punti variabili dalle Φ.

La trasformazione congiuntà è dell'ottavo ordine, i punti $1'_1, 2'_1, \ldots, 14'_1$ sono fondamentali semplici, il punto $1'_3$ è fondamentale 7-plo.

36. Sia dato un fascio di cubiche, e siano $1'_2, 2'_2, \ldots, 7'_2, 1'_1, 2'_1$, i punti base del fascio; descriviamo una curva del 6° ordine Φ' con un punto doppio in ciascuno dei punti $1'_2, 2'_2, \ldots, 7'_2$ e che passi semplicemente per $1'_1, 2'_1$; per i sette punti doppî conduciamo una cubica φ', e chiamiamo $3'_1, 4'_1, 5'_1, 6'_1$ le ulteriori intersezioni di φ', Φ'. Se φ'_1, φ'_2 sono due cubiche del fascio le tre curve

$$\Phi', \quad \varphi'\varphi'_1, \quad \varphi'\varphi'_2$$

determinano una rete di curve del 6° ordine con 7 punti doppî e 6 semplici fissi.

Alla cubica fondamentale φ' corrisponde un punto fondamentale 1_3 triplo per le Φ; abbiamo poi altre due cubiche fondamentali che sono quelle del fascio le quali passano per $3'_1, 4'_1$, e per $5'_1, 6'_1$, ed alle quali corrispondono altri due punti $2_3, 3_3$ fondamentali tripli per le Φ.

La curva doppia è del 6° ordine ed ha 7 punti doppî nei 7 punti doppî della Φ; la curva limite è dell'ottavo ordine, ed ha un punto quadruplo in ciascuno dei punti $1_3, 2_3, 3_3$. I punti fondamentali $1'_1\ 2'_1, 3'_1\ 4'_1, 5'_1\ 6'_1$ sono congiunti, 2^a specie.

La trasformazione congiunta è dell'ottavo ordine, e i 7 punti $1'_2, 2'_2, \ldots, 7'_2$ sono fondamentali tripli.

Le Φ' della rete considerata in questo esempio sono di genere 3 come le Φ' della rete considerata nell'esempio precedente, contuttociò con una trasformazione razionale non possiamo passare da una di queste reti all'altra.

Catalogo ragionato delle Rocce del Friuli.

Memoria del prof. TORQUATO TARAMELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 7 gennajo 1877.

PREFAZIONE

Dieci anni or sono, per suggerimento dell'illustre scienziato, che ora meritamente presiede codesta Reale Accademia e che allora trovavasi ad Udine in qualità di Commissario del Re per quella Provincia, io imprendeva una esplorazione geologica del bacino idrografico del fiume Tagliamento e della regione finitima. Giovandomi del consiglio e degli insegnamenti dal mio chiarissimo maestro, il prof. Abate Antonio Stoppani e dell'ajuto di parecchi amici, ho potuto compiere e presentare nel maggio dell'anno 1875 alla Deputazione provinciale del Friuli una Carta geologica di quella Provincia nella scala di 1: 86 408 e lasciai al Gabinetto di Storia naturale del R. Istituto tecnico, ove fui insegnante, una collezione abbastanza ricca di rocce e di fossili, raccolti nella regione esplorata.

È mia intenzione di publicare la detta Carta geologica, ridotta a minore scala e con demarcazioni meno numerose di quelle occorse in un lavoro d'indole affatto locale e conto di accompagnarla delle notizie paleontologiche, che valgano a fissarne gli orizzonti. Tale pubblicazione potrà, assai meglio del presente lavoro accordarsi cogli studî geologici risguardanti le altre regioni del versante meridionale delle Alpi. Il carattere però prevalentemente paleontologico, che deve oggigiorno presentare una carta geologica, non mi è parso molto opportuno per mostrare tutti gli accidenti litologici, che mi si offrirono durante la non breve esplorazione; i quali hanno pure una importanza assai rilevante, tanto per la spiegazione della genesi della locale orografia, quanto per le applicazioni, che i dati del geologo ponno trovare nel campo dell'edilizia, delle industrie e dell'agricoltura. Per la qual cosa ho pensato di stendere anche un *Catalogo ragionato delle rocce friulane*, ordinato bensì secondo piani caratterizzati da alcune forme organiche ma suddiviso in sottopiani di valore litologico; potendo così venir giustificate dall'indole e dallo scopo del lavoro parecchie suddivisioni, le quali sarebbero inutili e fors'anche dannose in una carta ed in una descrizione geologica.

Questo Catalogo appunto, preceduto da alcune indicazioni orografiche e stratigrafiche, che ritenni indispensabili per ben comprendere il valore delle desunte differenze litologiche e delle indotte vicende geologiche ed accompagnato da qualche illustrazione grafica, venne favorevolmente accolto dalla R. Accademia dei Lincei, la quale

lo onorò della stampa nei suoi Atti ed io fui ben lieto di potere così rendere di pubblica ragione il mio lavoro, nella speranza che il giudizio, che vorranno di esso dare i geologi varrà a rendere meno imperfetta la Carta geologica da pubblicarsi.

Colgo l'occasione per esprimere pubblicamente la mia viva riconoscenza non solo ai due sullodati signori ma ben anco all'amico pregiatissimo, il prof. G. A. cav. Pirona, il quale mi fu largo di indicazioni e di consiglio, e per porgere un tributo di affettuosissima ricordanza all'estinto amico D.r Emilio Spreafico, il quale mi ajutò nella determinazione dei fossili. Parimenti esprimo la più sentita gratitudine alla onorevole Deputazione provinciale del Friuli, la quale mi accordò un sussidio di mezzi per le escursioni ed un compenso a lavoro compiuto ed ai molti signori friulani, che mi hanno ajutato ed incoraggiato con tanta benevolenza e cordialità da rendermi la memoria degli anni trascorsi in quel colto paese, dolcissima come del miglior tempo della mia vita.

PARTE PRIMA.

Succinta descrizione delle condizioni orografiche o stratigrafiche più intimamente legate alla natura delle rocce, che affiorano nel Friuli.

Converrà al lettore di formarsi una prima idea della orografia friulana, allo scopo di conoscere più agevolmente la provenienza delle rocce qui sotto menzionate e più ancora per intendere talune delle principali relazioni, che alla natura di queste rocce legano la conformazione del paese. Per meglio riuscire all'intento, potrà giovarsi dell'unito schizzo orografico, che io ho disegnato nella scala di 1 : 450 000, dalla Carta del Mayr; indicandovi le principali demarcazioni geologiche, le quali coincidono colle differenze litologiche e notandovi le quote altimetriche, le quali ponno rendere più precisa la cognizione degli accidenti orografici ed idrografici. Ho distinto d'altronde con segni convenzionali i varî modi di *depressioni;* a seconda che si devono più o meno direttamente al sollevamento oppure alla erosione, esercitata con prevalenza sopra qualche terreno, ed a seconda della loro direzione, parallela o perpendicolare agli assi stratigrafici. Colle rette *AB* e *CD* ho poi indicato due importantissime direzioni delle formazioni terziarie, eoceniche e neoceniche; dalle quali direzioni io credo che dipendano i tratti più salienti della regione montuosa e collinesca. Chi bramasse maggiore dettaglio di dati, scelti con molta esattezza ed ordinati assai opportunamente, potrebbe consultare una bella descrizione della orografia friulana, scritta dal mio amico, il signor prof. Giovanni Marinelli ed inserita nel Vol. I° dell'*Annuario statistico dell'Accademia friulana* (1876), nel quale volume stanno anche alcuni cenni geologici, che ora sarebbe superfluo di ripetere.

Ridotta ai suoi confini naturali, con non considerevole aumento di superficie, la Provincia di Udine può dirsi formata dal bacino idrografico del fiume Tagliamento, dal piano litorale tra i fiumi Livenza ed Isonzo e dalle valli dei torrenti secondari, che, oltre al Tagliamento, scendono nel piano. Com'è attualmente (cioè mancante a ponente di un lembo di piano tra il Tagliamento ed il Livenza ed a levante del tratto di piano e di colli tra i fiumi Isonzo, Ausa e Judrio e del tratto di monte, che forma

l'alta valle del fiume Fella sopra Pontebba, e coll'aggiunta dell'alta valle di Erto, che manda nel fiume Piave il torrente Vajont) la Provincia di Udine, tra le più estese del Regno, con una periferia di oltre 510 chilometri, comprende un'area di 6554 chilometri quadrati. Di questi, oltre la metà di terreno montuoso; il tratto collinesco essendo assai ristretto in confronto delle più occidentali provincie prealpine; il tratto di piano assai vasto e vario e morente nell' Adriatico. Tale area sta tra i 45°.40′ ed i 46°.40′ di latitudine boreale ed i 39°.57′ e 31°.19 di longitudine orientale, rispetto all' Isola del Ferro.

Quando si pensi che in questo tratto di paese affiorano pressochè tutte le formazioni, dal Siluriano agli attuali Cordoni litorali; che quest'area è situata tra due regioni, distinte da vastissimo sviluppo di terreni vulcanici, paleozoici, mesozoici e terziari, quali sono appunto le Alpi Retiche e le Caravanche; che gli accidenti orografici sono tali, che dai fondi di valle, elevati in media a 250^{m}, si sale a vette talora attingenti i 2800^{m}, sarà già facile il comprendere quanto interesse geologico possa questa Provincia offrire e come debba essere svariata la collezione anche solo litologica, che quivi si è potuto raccogliere in parecchi anni. Prima però di occuparci delle rocce raccolte nel Friuli, ne conviene gettare uno sguardo sulla conformazione del suolo di questa regione, nelle montagne, nelle colline e nel piano.

Le Montagne. — Allo spartiacque della valle di Gail, il confine naturale della Provincia di Udine è segnato da una catena di montagne elevate dai 2000 a 2800 metri, e costituite talune da calcari dell'epoca *carbonifera*, altre da scisti argillomicacei e quarzosi, spettanti a diverse epoche paleozoiche. Annoveransi tra i più elevati il Cretaverde (B_1-2502), il Coglians (B_1-2731), il Pizzo Collina (B_1-2340), il monte Croce (B_1-2405), il Pizzo di Timau (B_1-2214), lo Scarniss (C_1-2350), l'Hohertrieb (C_1-2045), il Gartnerkofel (C_1-2090), il Malurchskofel (C_1-1998) e l'Osternig (D_1-2185); dalla valle di Sesis, da cui origina il fiume Piave alla sella di Saifnitz, alla quale corrisponde il più naturale confine tra le Alpi Carniche e le Alpi Giulie. I calcari si ergono sopra ampio basamento di scisti; gli uni e gli altri presentando una assai complicata disposizione stratigrafica, che ho procurato di descrivere in una Memoria inserita nel Vol. VIII (1874) delle Memorie del R. Istituto Veneto. Darò in seguito alcuni cenni della interessantissima fauna carbonifera, che trovasi sepolta presso al limite tra i calcari e gli scisti; della quale fauna però l'importanza sarebbe assai maggiore se fosse meno localizzata e comparissero tracce organiche e varî livelli nella potentissima massa di rocce paleozoiche, quivi attingenti una potenza di almeno tre chilometri. Fu pertanto grande ventura che almeno in un lembo di questa catena, cioè presso al monte Osternig, si scoprissero delle *Graptoliti* del Siluriano in alcuni quarzoscisti micacei; ed il merito della illustrazione paleontologica e stratigrafica di questa scoperta appartiene all' egregio geologo austriaco il D.^{r} Guido Stache. Onde si ha argomento a credere che tra gli scisti del *Siluriano* e la zona carbonifera possano in avvenire determinarsi eziandio alcuni piani dell'epoca devoniana. Nello stato attuale delle nostre conoscenze, rimane tuttavia assicurata a questa regione paleozoica una speciale importanza, la quale probabilmente è la naturale conseguenza dell'indole quasi assolutamente esogena delle formazioni quivi affioranti; nel mentre che nelle attigue regioni del Tirolo meridionale e delle Caravanche a queste stesse formazioni equivalgono potenti colate di graniti, di dioriti e di porfidi.

Da questa principale cresta delle Alpi Carniche, individuati per una stretta e profonda incisione dei rispettivi thalweg, scendono i principali confluenti del fiume Tagliamento, in direzione pressochè meridiana. Sono da ponente a levante il Degano, il But ed il Chiarsô, dei quali i due ultimi confluiscono poco sopra Tolmezzo (B_1-*B*2). Il fiume Fella, che confluisce nel Tagliamento ai Piani di Portis (C_2-255), decorre dapprima in una valle parallela all' asse delle Alpi Carniche, dalla sella di Saifnitz a Pontebba, ed in questo tratto appunto riceve sulla sua destra parecchi confluenti, i quali in parte hanno il loro bacino idrografico nella regione paleozoica, che quivi presso scompare sotto il lembo triasico dei monti di Tarvis e di Villacco (D_1-416).

Gli accennati confluenti del fiume Tagliamento, dopo che hanno percorso pochi chilometri, vengono tutti a tagliare quasi a perpendicolo una serie di valli parallele e di culmine (1), la quale scorre attraverso tutto il tratto montuoso del Friuli, dal passo di Lavardet, presso le origini dal torrente Pesarina, sino alla sella di Saifnitz; comprendendo le valli di erosione della Pesarina e dell'alto Fella e le culmine della Val Calda (B_1-947), del Durone (B_1-1051) e della Pradulina (C_1-1600). Questa depressione è dovuta alla prevalente erodibilità delle formazioni inferiori del Trias, le quali furono messe a nudo da una frattura di sollevamento, ad un dipresso parallela all'asse della catena. Nella sua porzione mediana, da Comeglians a Pontebba questa stessa depressione serve anche di limite tra la regione paleozoica, che si dispiega a tramontana e la regione triasica, che comprende le montagne a mezzodì, fin quasi alla zona, delle colline.

Attraversata questa depressione, gli accennati confluenti del fiume Tagliamento continuano il decorso verso mezzogiorno; ora rinchiusi in strettissime gore, ora allargandosi in bacini fertili e ridenti; a seconda della natura litologica delle formazioni attraversate, generalmente spettanti ai piani del Trias, che stanno sotto l'importante orizzonte del Raibliano (terr. 17 nella tavola degli spaccati). E queste formazioni sono disposte per modo che, in cadauno degli spartiacque tra gli accennati confluenti, esse si succedano dal basso in alto ed ai due estremi della Carnia si allineino secondo due *creste,* l'una inclinata verso il Comelico (provincia di Belluno) e l'altra verso la valle del fiume Isonzo. Sono, in altri termini, questi monti della Carnia i frammenti di una mezza cupula di formazioni triasiche, la quale venne abrasa nel suo cocuzzolo, in corrispondenza alla superficie di affioramento della regione paleozoica, e tutto all' ingiro spaccata, erosa e solcata. La porzione settentrionale della cupula sarebbe rappresentata dal lembo di terreni triasici e giuresi, che trovasi oltre il fiume Gail, nel triangolo che questo fiume forma col corso della Drava; mentre che i monti di Villacco e di Tarvis rappresentano l'avvallarsi della curva stessa tra i due rilievi stratigrafici ed orografici delle Alpi Carniche e delle Caravanche. Nei frammenti carnici dell' accennata *vôlta*, ridotti dalle erosioni a gruppi piramidali di montagne, troviamo in alto le formazioni calcari e dolomitiche dei piani di *Hallstadt* e dello

(1) Riserbo il nome di *culmina* ai passi allineati secondo l' affioramento di una formazione prevalentemente erodibile e che perciò conducono più facilmente da una nell' altra *valle di chiusa.* Il nome più generale di *sella* comprende anche gli altri passi, di origine assai più complicata, i quali pongono in comunicazione le grandi valli *longitudinali* colle prime origini delle valli *trasversali.*

Schlern; più sotto le formazioni vulcaniche e pseudovulcaniche del Trias medio, compresi i gessi e le rocce che li accompagnano; ed alla base, le arenarie e le puddinghe quarzose, da alcuni geologi riferite ai piani più recenti dell' epoca permiana. Le vette più elevate sono ai lati, le più depresse presso il centro della vôlta, da 2400 ai 2000 metri sul livello marino e per forma spiccata e per sviluppo di massa, si distinguono da ponente a levante i monti Tuglia (B_1-2450), Siara (A_1-2400), Terza-Grande, (A_1-2383), Clapsavon (A_2-2460), Tinizza (B_2-2076), Veltri (B_2-2079), Arvenis (B_1-1969), Terzadia (B_1-1962) e Sernio (C_2-2186).

In questa regione, così suddivisa dal decorso dei principali confluenti del fiume Tagliamento e denominata precisamente la Carnia, si sprofondano eziandio due altre depressioni, le quali per un certo tratto sono valli di erosione e corrispondono a dei terreni scistosi ed arenacei, cui solcano con varia direzione, prevalentemente da ponente a levante; quindi si cangiano in valli di chiusa, anche queste dovute in massima parte ad erosione, in corrispondenza delle formazioni calcari. Entrambe poi sboccano nel Tagliamento con direzione meridiana e sono le valli del torrente Lumiei o di Sauris e del torrente Vinadia; romite, boscose, simpaticissime regioni e pel geologo assai importanti.

Il fiume Fella, poichè ha percorso l'accennata valle parallela all'asse della catena da Saifnitz a Pontebba, piega bruscamente a mezzodì e per una valle di chiusa, alquanto tortuosa nei dintorni di Dogna (ove per qualche chilometro segue l'affioramento dei calcari marnosi di raibliano) continua il suo decorso fino a Raccolana; ricevendo appunto in corrispondenza alla detta formazione marnosa la confluenza della valle parallela del torrente Dogna. Arricchitosi quindi a Raccolana per l'aggiunta del torrente, che sbocca dalla valle del nome stesso, il fiume Fella piega nuovamente ad ovest e muove incontro al fiume Tagliamento, nel quale confluisce presso a' Piani di Portis. In questo ultimo tratto, il fiume Fella riceve sulla destra i torrenti Alba, Aupa e Varuvola, dalle valli di Moggio e di Moggessa e sulla sinistra il torrente Resia, che proviene dalle falde della assai maestosa massa calcareo-dolomitica del monte Canino. Questa montagna, dalla sua vetta a 2479 metri, domina una schiera di colossi pure dolomitici, che si addensano intorno alle valli or nominate; loro impartendo un carattere orografico assai caratteristico e che presenta forte risalto con quello della valle del Tagliamento o di Socchieve, la quale scende dal confine opposto del Friuli.

Questa valle del fiume Tagliamento ha le sue prime origini alla culmina della Mauria (A_2-1310), dovuta alla erosione delle marne gessifere del Trias superiore. Come può rilevarsi dallo schizzo orografico, rappresenta la porzione occidentale di una profonda depressione di sollevamento, parallela all'asse delle Alpi Carniche, la quale dall'accennata culmina della Mauria va sino alla sella di Nevè (D_2-1323) e comprende appunto l'ultimo tratto del fiume Fella e la valle della Raccolana. Tale depressione costituisce, a mio avviso, il tratto più marcato e più importante della regione ora esaminata; siccome quella che si connette più strettamente che ogni altra depressione alla struttura stratigrafica delle masse attraversate e che presenta successivamente, da monte a valle, tutti i caratteri di culmina, di valle di salto e di comba, che sogliono esser offerti dalle valli longitudinali. Ampia e profonda, accidentata per tortuosità, le quali tutte si spiegano per particolari contorcimenti o dislocazioni delle

formazioni triasiche attraversate; occupata in gran parte, sino a quasi 300 metri sul suo thalweg, da vasti lembi di alluvioni terziarie, ai quali lembi si allinea la maggior parte dei paesi posti a mezzo ciglio; solcata nel fondo dal fiume, che si aggira pel vasto letto di ghiaje biancheggianti e contorna le coinoidi di dejezione posglaciale dei confluenti carnici e dei minori torrenti, che errompono dai burroni dolomitici, questa valle aduna quanto di bello può ammirarsi in una regione alpina e quanto di meglio può desiderare un geologo, che intenda specialmente a studiare le ragioni delle forme orografiche di una contrada.

A mezzogiorno di questa depressione evvi ancora un buon tratto di monti e questi sono in gran parte costituiti dalle dolomie della formazione retica, coronata da un mantello discordante ed assai tormentato di calcari giuresi. Frequenti piani di salto, generalmente attestati da vallicole parallele all'asse della catena (com'è il caso delle valli di Viellia, della Clautana, del Chiarsone, dell'Arzino, del Canal di Vito, del Leale e della Venzonazza) interrompono l'andamento delle curve stratigrafiche, da cui è contorta questa imponente massa di formazioni calcareo-dolomitiche. È quella stessa massa di calcari, che, dispiegandosi nella regione delle Alpi Giulie più continua e meno irregolarmente sollevata, ne costituisce i più elevati altipiani, dai quali si ergono i colossi, che emulano e superano l'altezza del monte Canino, del Manghert (D_1-2678) e del monte Triglau (2885).

In questa massa calcareo-dolomitica, sempre con direzione da levante a ponente, si sprofondano eziandio delle valli di comba, dovute all'abrasione di lembi di terreni eocenici, i quali in generale si allineano presso il contatto discordante dei calcari cretacei colla dolomia retica.

I punti culminanti di questa massa calcareo-dolomitica sono ai due estremi orientale ed occidentale della provincia e sono i monti Canino, Montasio, Monfalcone, Grivola, Cima di Lares, monte Duranno e monte Magor, elevati dai 2300 ai 2700 metri; lo spazio intermedio essendo poi disseminato da molteplici e tortuose creste dolomitiche o calcari, le quali attingono elevazioni tra 1500 e 2000 metri. E questa differenza parmi si debba attribuire piuttosto ad una abrasione della formazione mesozoica, maggiore quivi che altrove ed avvenuta in periodi cenozoici; anzichè ad un diverso valore di sollevamento. I più elevati capistabili infatti, sono ad un livello sorprendentemente consimile; ed i prodotti di una antichissima abrasione, ancora anteriore allo stabilimento della attuale orografia, già compajono con imponente sviluppo come elementi di rocce aggregate nei piani inferiori dell'eocene, i quali, tanto per la forma litologica quanto pel carattere della fauna litorale e dei banchi madreporici, accennano alla prossimità di un continente emerso.

Altresì considerevole deve essere stata l'abrasione subìta dalla formazione dei calcari cretacei, i quali costituiscono alcuni dossi affioranti nella regione collinesca all'altezza da 800 a 1000 metri e la cresta arditissima del monte Cavallo (A_3-2250) al confine del Friuli colla provincia di Treviso e coll'Alpago bellunese.

Nella accennata massa calcareo-dolomitica sono poi scolpite molte valli trasversali o di chiusa, le quali, se pure ponno essere state in origine determinate da una qualche frattura, sono però nel loro complesso dovute alla erosione e rappresentano la confluenza di altrettante correnti nella depressione, occupata al presente dalla pianura

friulana ed un giorno da un golfo miocenico, interrato dagli assai potenti conglomerati del piano sarmatico. Profonde, strette, selvagge (come lo vuole la compattezza della roccia, la quale non permise un troppo frequente cangiamento di direzione nelle correnti che le hanno scolpite), quelle valli convergono tutte nel piano; traendo le loro prime origini presso alla principale depressione di sollevamento, che ho di sopra menzionato, dalla Mauria alla sella di Nevè. Di queste valli le principali sono quelle delle Zelline, del Meduna, dell'Arzino, del Melô col bacino lacustre del lago di Cavazzo, del Natisone, del Torre e dell'Isonzo, nel Friuli orientale; la più vasta poi è quella mediana, che accoglie le acque tutte del bacino carnico e che è percorsa dal fiume Tagliamento, dai Piani di Portis al Campo di Osoppo. Anche la valle dell'Isonzo si distingue per l'ampiezza del suo bacino idrografico e per la irregolarità del suo decorso, il quale potrebbe dare argomento ad una assai istruttiva analisi orografica; comechè determinato, alle sue origini, da parecchie fratture presso all'angolo d'incontro delle due catene delle Alpi Carniche e Giulie, e presso al suo sbocco nel piano di Gorizia, accompagnato dal parallelo decorso dalla valle di Chiampovano, la quale rappresenta una corrente cenozoica ora scomparsa.

Laddove queste valli tagliano le vallicole longitudinali e le combe terziarie, rispondenti ai piani di salto ed alle discordanze delle masse calcaree, osservansi abbastanza estesi pianori, occupati da alluvioni glaciali e posglaciali e spesso rallegrati dai meno poveri paesi, che popolano quelle montagne; com'è il caso della valle dello Zelline presso Claut e Cimolais, della valle del Meduna ai due Tramonti (B_2-368 e 336) della valle del Torre a Tanataviele e Lusevera e di quella dell'Isonzo a Flisch ed a Caporetto.

A proposito di queste valli, che solcano il tratto calcareo del Friuli e quindi precisamente quelle più compatte formazioni, le quali, siccome marmorei monumenti, più chiare conservarono le orme impresse dai fattori esogeni delle forme orografiche, reputo interessante l'osservare come esista un rapporto genetico e cronologico, che stringe talune di queste valli e precisamente quelle del Meduna, dell'Arzino e del bacino del lago di Cavazzo colla valle principale, percorsa dal fiume Tagliamento da Portis al campo di Osoppo. Infatti, all'origine delle prime tre valli, presso lo spartiacque della valle di Socchieve, noi troviamo le quattro selle di Lavardet (A_2-1570), di monte Resto (B_2-1145), di Chiampon (B_2-790) e di Somplago (B_2-260), appena a sud di Cesclans, (352), le quali incidono sempre più profondamente, da monte a valle, la cresta calcareo-dolomitica dal Monfalcone al monte Festa, e l'ultima di esse si accosta d'assai all'attuale altitudine del punto, in cui il Tagliamento, unito al Fella, muove verso il piano. Tale coincidenza di un graduato abbassamento delle selle colla pendenza di una valle principale, non è certamente un fatto raro nella orografia alpina; ma nella disposizione delle valli friulane una tale coincidenza si avvera in un modo così singolare da fare sorgere facilmente l'idea che queste selle, e per conseguenza le valli che da esse scendono al piano, rappresentino altrettanti successivi decorsi, gradatamente abbandonati, della corrente principale; e che questa poi sia venuta man mano innoltrandosi lungo una depressione di sollevamento, che le offeriva un terreno più erodibile, fino a tanto che venne a sboccare in un solco, praticato nella depressione stessa da un' altra corrente autonoma e che poi confluì colla prima.

Quest'altra corrente sarebbe appunto il Fella, a cui si dovrebbe lo scavamento, sino ad una certa profondità ed ampiezza, del decorso da Portis ad Osoppo e che non presenta sulla sua sinistra alcuna delle accorciatoje, che si osservano pel fiume Tagliamento. Le accennate selle d'altronde, man mano che si accostano al passo di Portis, imboccano sempre con maggior precisione una delle valli carniche; corrispondendo assai bene: le selle di Lavardet e di monte Resto alla sella per abrasione del calcare di *Hallstadt* tra i monti Tinizza e Clapsavon; il passo di Preone al torrente Lumiei; la depressione di Verzegnis al torrente Degano; la valle di Cavazzo al torrente But. La natura prevalentemente arenacea del bacino carnico sarebbe, come dico, la causa precipua di questa migrazione della corrente principale; ripresentandosi quivi un fatto geologico, che si osserva riprodotto in tutte le proporzioni da moltissime correnti nella regione delle Alpi Giulie e specialmente dal Recca di Trieste e dal torrente Foiba di Pisino, nell'Istria (1). Tale induzione parmi poi che sia completamente dimostrata dalla esistenza, che ho riconosciuta alle accennate selle, di più o meno vasti lembi di alluvione terziaria ad elementi sicuramente carnici; la quale alluvione non può in modo alcuno venire spiegata da frane locali, sibbene accenna indubbiamente al passaggio per di là di un corso d'acqua che si avviava al piano, preparando successivamente e coadivando la formazione per erosione delle valli prealpine, nel tratto dei monti calcareo-dolomitici tra il Piave ed il Tagliamento. E questo fatto, se male non mi appongo, dimostra sempre maggiormente la lunga durata dell'ultimo periodo continentale e la complicata evoluzione delle forme orografiche e la importanza di osservazioni di tale natura anche in altri punti della catena alpina.

Ritengo altresì interessante il ricordare la presenza di un bacino lacustre in prossimità ed in direzione parallela alla vallata percorsa dal fiume principale; voglio dire del lago di Cavazzo, presso il decorso del Tagliamento da Portis al piano di Osoppo. Imperocchè questo fatto è tutt'altro che isolato nella orografia alpina e senza allontanarci di molto dal Friuli, lo vediamo ripetersi pei laghi di Garda, di S. Croce e Lago Morto nelle Alpi Retiche e Venete, pei laghi di Millstadt, di Ossiach e di Klagenfurt nella Carinzia e pei laghi di Velden e di Czirnick nella Carniola. A proposito dei laghi di Cavazzo, di S. Croce e del Lago Morto, ho procurato in altri miei scritti di tesserne la storia prima e dopo il periodo glaciale; per gli altri che ho accennato e fors'anco pel lago d'Orta in Piemonte, io penso che studiando i rapporti stratigrafici ed orografici delle rispettive contrade, si potranno scoprire gli avvenimenti, per i quali si prepararono e si delimitarono a valle quelle depressioni, che furon percorse da correnti in uno od in parecchi periodi cenozoici e convertite poscia in laghi, talune passando attraverso la fase di fjord pliocenici.

Nell'unito schizzo orografico ho distinto con varî modi di punteggiate le valli, che solcano la regione montuosa del Friuli, secondo le idee ora esposte; le quali idee si raccolgono nel concetto di alcune principali fratture trasversali e longitudinali, stabilite da un sollevamento, avvenuto per gradi in epoca eocenica, e di un progressivo ampliamento di queste fratture per erosione torrenziale; avverandosi anche, in causa

(1) Vedi *Appunti sulla storia geologica del Margraviato d'Istria.* Atti del R. Istituto veneto Serie IIIª Vol 2° 1874.

di alcune differenze litologiche nella massa lentamente erosa, una progressiva trasposizione della corrente principale ed un diverso modo di confluenza delle correnti secondarie.

Dal sin qui detto avrà rilevato il lettore come nelle montagne del Friuli, colla varia natura e disposizione delle molte formazioni, che quivi affiorano, dovrà accompagnarsi anche una forte diversità di tipi orografici, i quali ponno trovare riscontro in altre regioni alpine. Nè posso tralasciare di dirne alcune parole; poichè ritengo appunto uno dei còmpiti del geologo e precisamente del litologo quello di rilevare e possibilmente di spiegare cotali caratteri e differenze orografiche, le quali di solito si considerano come affatto casuali.

Due tipi orografici si presentano in Carnia e sono quelli delle Alpi Noriche e delle Retiche; e due nella regione calcareo-dolomitica e son quelli delle Prealpi Venete e delle Alpi Giulie meridionali. Sono quattro assai distinte fisonomie di montagne, la cui interpretazione può assai meglio di una prolissa descrizione presentare un concetto sintetico della geologia friulana.

In Carnia, vale a dire nella regione che versa le sue acque o direttamente o mediante gli annoverati confluenti nel fiume Tagliamento a monte della confluenza del Fella, detti due tipi di paesaggio si succedono da nord a sud e corrispondono, l'uno all'affioramento delle formazioni paleozoiche, l'altro a quello delle formazioni triasiche, che stanno sotto all'orizzonte di Raibl. Nel tratto paleozoico, sorgono dei dossi ondulati, giganteschi, a portamento veramente alpino, con versanti generalmente poco inclinati; tranne che presso ai thalweg, i quali si sprofondano strettissimi, talora nascondendo il torrente, e più in alto sono segnati da stupendo terrazzamento orografico. Sin presso ai 1900 metri, le montagne sono più o meno rivestite da folte foreste di conifere; più in alto stendonsi pascoli assai fertili; e giù nella valle i paesi sono abbastanza numerosi e ricchi; quasi come nella finitima Carinzia, dove lo stesso carattere di paese, per più vasto sviluppo delle formazioni medesime e per la maggiore grandiosità delle vallate e degli spartiacque, appare ancora più manifesto. Ogni qual tratto, specialmente lungo la cresta principale della catena, dal molle ondeggiamento dei dossi scistosi ergono le loro rupi, con fisonomia severa ma poco pittoresca, i più elevati colossi, costituiti in generale di calcare carbonifero. Sono nudi e grigiastri, con stratificazione poco marcata e non presentano quelle frane, quei burroni e quel frastaglio, che distingue le vette dolomitiche, colle quali furono a torto confusi da alcuni stranieri, che illustrarono le Alpi orientali sotto l'aspetto orografico. Le direi le *piramidi* della storia geologica del carnico suolo. La natura subcristallina del calcare, la compattezza della massa ed una grande irregolarità nella disposizione stratigrafica, rispetto alle rocce scistose, sono le cause di questa loro forma. Siccome poi l'asse stratigrafico di questa antichissima serie di formazioni è assai divergente dall'asse orografico della catena, accade che sporgano alcuni tratti di calcare anche lungo le vallate della Carnia, specialmente nelle valli di Gorto e dell'Incarojo e quivi cagionano altrettante variazioni nel carattere e nella direzione delle vallate medesime ed interrompono, con molto vantaggio dell'effetto artistico, la monotomia delle masse scistose. Quei bellissimi sproni di monte, su cui posano la chiesetta di S. Giorgio di Comeglians e la parrocchiale di Rigolato, alcuni dirupi assai pittoreschi lungo la strada

per Forni Avoltri (F_a-B_1) e da Comeglians a Collina e meglio ancora le belle chiuse del Degano sopra Pierabeck (Est di 2330) e dell'Incarojo sopra Paularo (P, 644-C_1) porgono assai istruttivi esempi di siffatto mutamento di paesaggio, indotto dall'affioramento di rocce assai compatte attraverso agli strati più erodibili.

Nel tratto costituito da rocce triasiche, stante la disposizione stratigrafica sopra menzionata e l'avvenuto frastaglio per sollevamento o per erosione, abbiamo un paesaggio, che ricorda assai fortemente il Cadore, l'Agordino ed il Tirolo meridionale e che per la sua bellezza meriterebbe di essere ammirato dagli alpinisti al pari di quelle classiche contrade. A chi volesse gustarne tutta l'amenità, consiglierei specialmente una escursione o meglio una dimora per qualche giorno nell'incantevole e romito paesello di Paularo (C_1-P 644), dove appunto ho preso lo schizzo, che qui unisco. Una serie di dossi, rivestiti di folta vegetazione boschiva, si eleva con tratti assai morbidi e svariati e lungo ai thalweg si avvalla in oscuri burroni. Il fondo della valle è fiancheggiato da regolari terrazzi alluvionali, di cui i più elevati sono di conglomerato pliocenico. Più in alto, le foreste si diradano e qua e là dispiegano il loro verde smeraldino i pascoli, singolarmente aromatici e vivaci. Più in alto ancora, cinti di frane brulle o già rivestite da foreste, si ergono svelti, lavorati nel modo il più bizzarro e col portamento il più simpatico, i monti di dolomia; coi loro pendii diruti, che sfidano la bravura degli alpinisti, coi loro precipizi vertiginosi, sui quali pare periglioso persino il salto del camoscio. Chi dall'alto di quelle vette aeree, quasi isolato nello spazio, gettò lo sguardo nelle oscure e tortuose valli della Carnia o lo spinse alle non lontane creste pure dolomitiche delle *Giulie* ed ai colossi delle *Retiche* o ricercò, oltre i lembi del piano cinerognolo, la scintillante marina dell'Adriatico, ne serba imperitura memoria e quasi più non invidia le salite, spesso meno compensate, delle vette più famose. Egli quivi si persuade di leggieri che in natura, per chi la intenda, nulla evvi di mediocre ed ogni bellezza è armonica e grande e fortemente istruttiva. I monti Siara (A_1-2400), Arvenis (B_1-1962), Terzadia (B_1-1968), Clapsavon (A_2-2460), Veltri (B_2-2097), e Terza-Grande (A_1-2383) presentano tutti ad un dipresso un analogo aspetto; ma con estrema varietà di dettagli e con una assai diversa proporzione tra lo spessore delle formazioni arenacee e marnose, che stanno di sotto e delle dolomie torreggianti sulla cima; di guisa che ogni vallicola della Carnia ha il suo carattere peculiare e l'artista avrebbe colà ad esaurire tutte le sue risorse per rappresentare convenientemente il multiforme aspetto della regione. Solo è a lamentare che bene spesso sieno i monti, per opera improvvida dell'uomo, spogli del loro ammanto di foreste; d'onde lo imperversare delle frane ed il rapido innalzarsi degli alvei dei torrenti e lo impoverimento progressivo della montagna, per cui ogni anno quegli alpigiani emigrano nella vicina Germania, lasciando alle donne gli stenti ed i pesi di un mal compensato lavoro. E notisi che la qualità del terreno, composto di arenarie scistose, di dolomie cariate gessifere e di marne e tufi augitici, è tale che una volta stabilitosi uno scoscendimento, la natura da sola sembra troppo lenta a ricoprire la superficie dilacerata del suolo e l'arte boschiva, non che limitarsi a proteggerne il provvidenziale lavorio, dovrebbe a tutt'uomo adoperarsi per renderlo più sollecito e più efficace con piantagioni di essenze acconce alle varie altitudini. Non mancano certamente esempi del buon risultato, che per tal guisa si potrebbe

ottenere ed uno di questi mi fu dato di ammirare precisamente nell'alta valle del Degano, presso la miniera ora abbandonata di Avanza. Quivi un bosco rigoglioso, impiantato dalla Società veneta montanistica, crebbe in pochi anni sul terreno assai franabile delle arenarie rosse, che formano le falde settentrionali di quel monte.

A mostrare la estrema erodibilità delle rocce in questa regione, valga lo schizzo della valle del torrente But, che ho disegnato da Suttrio. In esso si scorge come la valle sia sbarrata da una vastissima conoide posglaciale, formata dal detrito del monte Cucco esportato dal R Randice. Sopra la macerie, che andava forse accumulandosi ancora nei primi secoli dell'era moderna, si stende una secolare foresta, attraversata dalla strada che da Piano d'Arta conduce a Paluzza (B_1 tra P 605 ed A 418). Sul davanti si vedono le rupi dilacerate delle dolomie cariate gessifere e nello sfondo si erge la montagna dell'Amariana (B_2-1865), di dolomia retica. Questa, vista di profilo, appare conica come un vulcano ma realmente dessa è foggiata a cresta e presso Tolmezzo presenta un singolarissimo scoscendimento; in guisa che questa cresta sembra spezzata e justaposta come potrebbero essere due frammenti di una lastra di marmo, che si fosse appoggiata e rotta sopra un ostacolo resitente. Sulla destra del torrente But si innalza un terrazzo di conglomerato pliocenico, su cui posa il paese antichissimo di Priola, ed a questo terrazzo corrispondono altri lembi dell'alluvione stessa in parecchi punti della valle e specialmente nel seno di Illeggio (B_2-presso 950) a nord dell'Amariana. Un *talus,* analogo a quello delineato nello schizzo e formato precisamente dallo sfacelo delle rocce medesime, porta il paese di Forni di sotto (A_2-776) nell'alta valle di Socchieve; nè sono meno sviluppati il *talus* di Amaro, formato da un torrentello che scende dall'accennata montagna e quello dei Rivoli Bianchi, attraversato dalla ferrovia pontebbana che è dovuto ad un altro torrentello, ora quasi insignificante, che scende dai fianchi del monte Chiampon (C_2-1714). Entrambi questi imponenti ammassi di detrito dolomitico dimostrano ad un tempo e la franabilità della roccia che li costituisce e la lunghezza del periodo posglaciale.

Il tratto montuoso che comprende le valli del fiume Fella e dei suoi confluenti, inferiormente alla svolta di Pontebba (da 564 a 255^m sul livello marino) è una regione tipica per un terzo carattere orografico, assai comune nelle venete prealpi e che per la sua asprezza e sterilità non deve certo rimaner confuso con quello, di sopra accennato, delle montagne dolomitiche a base arenaceo-scistosa della Carnia. Più di un viaggiatore si ricorderà infatti di aver quivi percorso per intiere giornate dei sentieri ingombri di un detrito quasi vetrigno, cogli occhi abbagliati da un riflesso forse più dannoso e certamente più ingrato di quello della neve alpina, colla lingua arsa, col corpo trafelato e rotto per le improbe attraversate, che si devono affrontare per recarsi dall'uno all'altro paese o dall'uno all'altro abituro, collocati di solito nei tratti alluvionali, che occupono gli allargamenti di quelle povere vallate. I viaggi nelle valli di Cimolais, della Settimana, della Clautana, del Meduna, dell'Arzino, delle valli di Dogna e di Uccea, al pari di quelli delle alte vallate, che confluiscono da tramontana e da levante nel fiume Isonzo, sono certamente tra i più faticosi ed anche tra i meno fruttuosi pel geologo, il quale incontra scarsa varietà di rocce ed ancor minore copia di petrefatti. La forma dei monti di dolomia retica e di calcare liasico è assai monotona, e lungo le falde si osserva

sempre quello alternarsi del bianco grigiastro delle rupi, disseminate da scarsi e riarsi manipoli di erba filiforme, col reticolo dei sentieruzzi da capre, che pare inviluppi nelle sue maglie quei dossi, spesso arrotondati dalla erosione glaciale. Persino là dove stagna tra le rupi il laghetto di Cavazzo, quantunque di solito l'acqua allieti i paesaggi, spira una indescrivibile mestizia; un senso di isolamento e di sconforto, per cui bene spesso si benedice alla scienza, che tra quelle rupi e su quei dossi così uniformi pur sa leggere non breve storia di svariati avvenimenti. Nell'annesso schizzo, preso dal ciglio del lembo di *conglomerato* di Interneppo (C_2-250), ho procurato di rendere appunto un tale carattere e di rappresentare l'interessante arrotondamento delle falde del monte Faroppo, che sovrastano al lago e la esistenza dell'altro lembo di conglomerato, che di contro al punto di vista si innalza sopra Somplago e porta la chiesetta di Cesclans (B_2-352).

Per dare poi un'idea della grandiosità, che assume ancora nei confini del Friuli questo carattere di paesaggio calcareo-dolomitico, aggiungo un'altra veduta del monte Canino, come si presenta dalla valle di Resia (C_2-2479) ad un pajo di chilometri a monte della frazione di S. Giorgio (R-427).

Di questo gruppo di monti diede una descrizione assai accurata ed erudita il sullodato mio amico, prof. Giovanni Marinelli (1), coltissimo ed infaticabile illustratore delle condizioni geografiche e meteorologiche del Friuli. Nella sua Memoria potrà il lettore trovare dati assai precisi sull'altimetria di varî punti di quel tratto montuoso ed interessantissimi particolari orografici ed etnografici; poichè quella valle è occupata da una popolazione slava, alquanto differente dagli altri rami della famiglia serbo-croata, che si diffuse nel Friuli orientale. La descrizione assai brillante, quivi fatta del monte Canino e delle sue adiacenze, dà una idea perfetta della maestà di quella massa calcareo-dolomitica, la quale, siccome un trono irto di asprezze, si innalza sopra un'area pressochè quadrangolare tra le prime origini delle valli dell'Isonzo, della Resia, della Raccolana e della Gailizza di Raibl. Un perfettissimo terrazzo orografico, scolpito in un remotissimo periodo continentale, contorna il maestoso altipiano, che è occupato da vastissimo nevato e da vedrette ed irto da parecchie rughe, allineate probabilmente colla direzione nord-ovest-nord della formazione calcare superiore. L'altipiano poi declina debolmente a sud est, ad una media altezza di 2200 metri. Meglio che una cresta dolomitica, questo gruppo di monti può definirsi come un frammento di un più vasto ed alquanto ondulato altipiano di rocce mesozoiche, il quale si estendeva quanto tutta la regione delle Alpi Giulie e fu smembrato ed eroso in misura molto maggiore che non gli altipiani cretacei, i quali formano il primo gradino orografico di quella singolarissima catena. È un tipo di forma di montagne, che stabilisce assai istruttivo passaggio tra quello delle creste ad aguglie a quell'altro dei monti a tavola e che parmi nelle Alpi più comune di quanto generalmente si creda. Da Resia si scorge il declivio dell'altipiano, esagerato dalla fuga prospettica del ciglio sud ovest; di guisa che non può quivi rilevarsi il vero carattere della montagna. Invece, da parecchie delle alture dei dintorni di Cividale e meglio ancora dal Carso,

(1) G. Marinelli, *La valle di Resia e un'ascesa al monte Canino.* Bollettino del Club Alpino. Vol. IX, 1876.

monfalconese, questo carattere si rileva assai chiaramente e lo si può indovinare anche da Udine; fissando attentamente la bella massa del monte Canino, la quale, in direzione di nord-est, si scorge elevarsi sopra il ciglio così regolare di quella muraglia di montagne nude, apparentemente continua ed inaccessibile, torreggiante con insolito contrasto sui molli ondeggiamenti dei minori colli e dossi eocenici e mesozoici. Dalla valle di Resia si rileva piuttosto la straordinaria grandiosità di quella montagna, la quale si erge sulle origini della valle stessa di oltre 1800 metri, con aspetto brullo, tutto a precipizi; ma non così frastagliata, nè così a picco come sono di solito le montagne della regione dolomitica propriamente detta. Nelle ore pomeridiane, quando questa massa è in piena luce, il M. Canino si presenta con un effetto sorprendente e con un risalto tanto più forte in quantochè la valle è poco inclinata, ampia, sufficientemente imboscata ed occupata sul fondo da una ragguardevole estensione di terreno alluvionale e morenico, ben coltivato e sparso di villaggi. Ed appunto in questo terreno, che occupa il fondo della valle di Resia, troviamo le vestigia di un episodio interessante del secondo periodo glaciale; imperocchè quivi si raccolse e si mantenne molto dopo lo smembramento dell'antico ghiacciajo carnico una vedretta, alimentata dalle nevate del monte Canino, la quale si costrusse una perfetta morena frontale; e dietro a questa morena si raccolse un' alluvione, che in epoca posglaciale fu terrazzata al pari della morena; sicchè il torrente, poich'ebbe raggiunto ad un dipresso il suo antichissimo alveo preglaciale, vi si accomodò con una curva regolarissima e relativamente assai poco inclinata, lungo la quale muove tranquillo per sboccare nel fiume Fella a Resiutta.

Dall' analogia stratigrafica ed in parte anche orografica, che presenta il monte Canino colle altre vette delle Giulie e precisamente col Manghert (D_1-2678) e col Triglau (2857) e per alcuni campioni di roccia portatimi dal sullodato Marinelli, mi rimase il dubbio che sull' accennato altipiano esistano lembi di calcari liasici; tanto più che al monte di Nevè, ad un' altezza assai minore dell'altipiano stesso, ho osservato un calcare a grosse bivalvi ed a screziature rossigne, che caratterizza i piani più recenti della formazione retica. Epperò fui anche più dispiacente di non aver potuto, per motivi di salute, pigliar parte alla simpatica comitiva, che esplorò quella montagna nell' estate del 1874 e di non aver quindi più avuta occasione di imprenderne la salita. Ad ogni modo la massa è assolutamente calcare, con un ampio basamento dolomitico e la sua forma è caratteristica per questo tratto del Friuli. Essa si ripresenta in proporzioni diverse nei monti, che separano la valle di Raccolana dalla valle di Dogna ed in quelli dei dintorni di Moggio; ove questo tipo orografico a frammenti di antichi altipiani passa al tipo a creste dirupate, il quale tosto trova un bellissimo esempio nel monte Sernio, che si prospetta da Paularo.

Un ultimo carattere di paesaggio è offerto finalmente dalla serie dei dossi cretacei, che ho segnata nello schizzo con tinta gialla. Sono altipiani più o meno ampli, sui quali si presenta quel paesaggio, abbastanza strano per noi italiani, che forma il carattere precipuo delle Alpi Giulie meridionali e precisamente del primo gradino orografico, che declina nel mare, projettandosi in esso colla penisola istriana. Ed in vero sono ben sorprendenti quei pianori di roccia, che sembrano fondi di mare ieri prosciugati, quelle vallicole senz' acqua e senza alluvioni, che pajono crateri di vulcani, quelle ondulazioni nude e biancheggianti, che sembrano cumuli di rovine, quei

versanti lisci, ripidissimi, continui, che delimitano tutto all' ingiro quegli affioramenti di regioni calcari e che sono con assai simpatico risalto contornati da più lieta ondulazione di colli, solcati da valli ombrose, a dolce pendenza, dalle molli risvolte. È su quegli altipiani e su quei versanti denudati che si ha un primo saggio di quel paesaggio direi quasi orientale, che è tanto indefinito eppure sì commovente nella tranquilla sua vastità, così maestoso nella abbagliante abbondanza di luce, che d'ogni parte lo irradia. Per poco che quivi ti imbatta in un pastorello, che faccia guardia ad un branco di pecore, ti pare d'essere alle falde del Libano, ai tempi de' patriarchi.

Ed è quivi pur troppo che si ritrovano i più miseri abituri, i quali nelle loro meschinità e sporcizia ricordano, non che i tempi patriarcali, i preistorici delle palafitte e delle caverne. Quivi si comprende come l'acqua, la quale scorre giù per la china delle nostre prealpi, rappresenti davvero il moto progressivo della civiltà europea; mentre là ove tace il suo grato mormorio anche le popolazioni sembrano petrificarsi in un' eterna fanciullezza. Anche dal punto di vista geologico quel paesaggio ha il suo lato interessantissimo, in ordine specialmente alla circolazione sotterranea delle correnti e per lo studio delle genesi della orografia; poichè è la regione dei fiumi sotterranei, dei laghi intermittenti, delle grotte di Adelsberg, di Planina e di Trebic, delle spelonche, ove i fiumi si innabbissano per ricomparire dopo parecchie miglia presso o sotto il livello marino, delle Foibe o vallicole crateriformi, ove le acque di pioggie scompajono per nutrire l' abbondante sistema idrografico, che a fiumi, a torrenti, a venuzze, tutto imbeve quel cancrenoso tavoliere di pietra, steso dall' Isonzo al Quarnero. E nel Friuli abbiamo parecchi esempi di tale modo di orografia, al monte Bernadia (C_3-802) sopra Tarcento, al monte Forchia di Vito d'Asio, sui monti di Maniago (A_3-*A*273) e specialmente nello stupendo altipiano del monte Cavallo, continuantesi fuori di provincia col piano di Cansiglio. Anzi in questo gruppo del monte Cavallo io ravviserei il brano più occidentale degli altipiani del Carso, portato o meglio rimasto ad un livello assai superiore che gli altipiani liburnici ed istriani. Nè mancano a questo gruppo di montagne le foibe, nè le acque rinascenti alla base, col Gorgazzo, col Livenza e colle fonti dei laghi lapisini; nè verso occidente la folta corona di selve, che ricorda le foreste di Ternova e di Piro nelle Alpi Giulie. Quivi però è a notarsi, oltre al più ardito sollevamento in confronto delle formazioni isocrone più orientali, anche una disposizione a cresta di un lembo della formazione cretacea, ove si appoggia all' affioramento delle dolomie del monte Caulana (A_3-2080) per la quale disposizione il calcare a Rudiste attinge una delle massime elevazioni, toccate da questa formazione nelle Alpi italiane, di 2250 metri. Tale condizione orografica fu cagione che questo gruppo, in epoca glaciale, possedesse un sistema autonomo di piccoli ghiacciaj, che lasciarono, specialmente nel versante friulano, assai chiare le loro vestigia; a differenza della regione liburnica ove, per quanto io sappia, non esiste alcuna traccia di dispersione erratica. Da questo fatto noi dobbiamo inferire che la differenza di altimetria tra questi due estremi della stessa formazione rimonti ad un periodo anteriore al glaciale e che se ad entrambi questi estremi si è avverato, come io ritengo indubitabile, un abbassamento posglaciale, questo non fu certamente molto ragguardevole e senza dubbio minore di 400 metri; poichè con questa aggiunta all'attuale massima elevazione delle Alpi Giulie meridionali, che è di circa 1600 metri, si

avrebbe già durante il periodo glaciale, una tale altitudine, che avrebbe necessariamente causata una dispersione di materiali incoerenti per opera dei ghiacciaj.

Epperò anche questo, come tutti gli altri aspetti di montagne i quali con non comune varietà di tipo orografico si presentano in Friuli, è molto antico; molto più antico di quanto sieno usi a considerarlo, non solo i più estranei agli studî geologici, ma i geologi stessi, che non sempre accordano la loro attenzione ai fenomeni svoltisi lentissimamente nei periodi continentali. Mentre egli è appunto a questi fenomeni che si deve quasi esclusivamente la varia conformazione del suolo, e precisamente da essi dipendono in gran parte quelle importantissime particolarità, che più strettamente collegansi alle condizioni economiche di una contrada.

Le colline. — Esistono in Friuli alcuni dossi calcari, che sporgono assai umili dal piano, alle falde dei monti di Polcenigo e l'altro dosso isolato, parimenti calcare, che si erge a circa 140 metri, colla lunghezza di circa tre chilometri, presso Medea (C_4-D_4) a sud di Cormons. Ma questi dossi, nudi ed arrotondati, colla più caratteristica uniformità che distingue le prealpi Giulie, non si ponno confondere colle vere colline, le quali devono la loro peculiare forma orografica ed il numero e la tortuosità delle vallette, da cui sono incise, e la loro fertilità alla natura discretamente erodibile del terreno ed alla non grande elevazione sul piano alluvionale e sul livello marino. Nelle prealpi italiane sono in generale terziarie o glaciali e tali appunto sono quelle del Friuli.

Tra le colline terziarie, sono di preferenza mioceniche (*Aquitaniano, Tortoniano e Messiniano*) quelle a ponente dell'asse meridiano della Provincia; eoceniche invece quelle del Friuli orientale, da Gemona a Gorizia, nel qual tratto presentano un asse stratigrafico ed orografico diretto a nord ovest, che, oltre il golfo di Trieste, si continua attraverso la penisola istriana, sino al Quarnero e termina all'isola di Veglia.

I colli miocenici dei distretti di Sacile e Spilimbergo sono in generale allineati al contatto o poco lungi dalle falde dei monti calcari e constano di conglomerati calcari in strati piuttosto inclinati e di molasse lignitifere, riferibili alla formazione sarmatica, la quale rappresenta, nel bacino friulano al pari che nel molto più vasto bacino del Danubio, il lento prosciugarsi per interrimento e per graduato sollevamento di un golfo miocenico. E questo golfo è attestato dagli inferiori conglomerati e dalle molasse a *Cerithium*, le quali, sempre intercalate con piccoli banchi lignitici, probabilmente dovuti a zattere lentamente sommerse e carbonizzate, affiorano inferiormente alle formazioni alluvionali o di estuario nei colli di Maniago e Cavasso, di Pinzano, di Peonis e di Osoppo.

L'asse stratigrafico di queste formazioni decorre parallelo all'asse della estremità settentrionale dell'Adriatico, da Venezia a Trieste; precisamente come i colli di roccie isocrone del Trevigiano e del Bellunese. Questo asse è diretto a nord-est ed è quindi perpendicolare a quello delle formazioni eoceniche, che io ritengo antecedentemente sollevate. È la stessa direzione che seguono eziandio le vallette scavate in questa stretta ed interrotta zona collinesca; imperocchè la più parte di esse vallette devonsi alla maggiore erodibilità dei piani di marna e di molassa in confronto dei conglomerati. Anche la direzione del Tagliamento, dal colle di Osoppo allo stretto di Pinzano (da metri 205 a 137), è determinata da questo importantissimo asse stratigrafico.

Io credo che si possa riconoscere in esso la direzione e l'epoca, in cui si è stabilita la depressione adriatica, e trovare un dato onde indirettamente precisare il perimetro del mare subalpino pliocenico, da non confondersi troppo facilmente colla attuale valle padana.

Alquanto più a monte dei colli neogenici, nelle vicinanze di Maniago, affiorano alcuni lembi di molasse e di glauconie a *Scutella Subrotunda*, che appartengono al Miocene inferiore e corrispondono perfettamente a quelle del vallone bellunese e dell'Alpago. Un lembo poi di queste stesse molasse glauconiose affiora nel bel mezzo del piano udinese, sulla sponda sinistra del torrente Cormor, presso al paese di Pozzuolo; accennando ad un rilievo miocenico, sollevato, abraso e quasi totalmente sepolto dalle alluvioni. Di questo rilievo le creste, formate di alluvione *sarmatica*, costituiscono gli altri colli sporadici, che a tramontana del colle di Pozzuolo affiorano dal piano a Carpenedo, a Variano, a Campoformio e nel centro della città di Udine al colle, che porta il Castello.

Ancora più a monte dell'accennata zona di colli miocenici ed entro le valli longitudinali, accennate nel capitolo precedente, nell'area calcareo-dolomitica, si allineano, con direzione da est a ovest, alcuni lembi di suolo collinesco, dovuto a rimasugli, profondamente erosi, della più antica formazione eocenica (*Eocene inferiore e medio*), la quale da un sollevamento molto anteriore a quello, che determinò la direzione della serie miocenica, fu spostata nel senso dell'asse orografico delle Alpi Carniche. Da questa diversità di direzione delle varie formazioni terziarie, può agevolmente il lettore comprendere come dall'attenta analisi delle condizioni litologiche e stratigrafiche di questa interessantissima serie di terreni terziarî possa essere accusata un'assai lunga e complicata vicenda di periodi marini e di periodi continentali ed un succedersi di oscillazioni, avvenute secondo parecchie direzioni, che sempre più da vicino delimitarono l'attuale bacino adriatico e corrispondevano all'attuale tracciato orografico.

Le colline eoceniche del Friuli orientale, oltre ad essere più irregolari ad assai più elevate delle mioceniche (attingendo un livello di oltre 1600 metri, sì da meritare piuttosto il nome di monti), mostrano, come si è detto, un asse stratigrafico precisamente normale a quello di esse colline mioceniche; e secondo questo asse si allineano anche le ultime propagini dei colli di Tarcento (C_3-T 229), Attimis (C_3-A 186), Faedis (C_3-F 189), Brazzano (D_4 - ad ovest di Cormons) e Cormons (C_4-C 54) ed i colli affioranti dal piano, a Buttrio, a Rosazzo ed a settentrione del già ricordato dosso cretaceo di Medea. Assai svariata è la litologia di questa regione; frequenti e ricchissime le località fossilifere. Prevalgono le roccie aggregate ed i calcari marnosi; epperò il terreno è fertile, la conformazione del suolo assai amena e per conseguenza vi spesseggiano le ville, abitate per la massima parte da Slavi. Qua e là affiorano dal mantello di roccie eoceniche i dossi di calcare cretaceo, che a colpo d'occhio si distinguono per la loro squallida ed uniforme superficie. I quali dossi, quivi come nell'Istria centrale, accusano una disposizione stratigrafica della serie cretacea assai diversa da quella della formazione eocenica; sicchè affiorano con nessuna regolarità. Per modo che, anche solo dalle condizioni stratigrafiche ed orografiche, facilmente si percepisce la trasgressione di qualche piano e il conseguente decorso di un periodo continentale tra la Creta e l'Eocene, quale appunto viene assicurato dagli studî geologici nella

regione carnico-giulia. Un ultimo e molto eroso lembo di roccie eoceniche si osserva in affioramenti consecutivi presso alla valle longitudinale del Fella inferiore, dalle falde settentrionali del Plauris alla valle di Uccea ed a questo lembo corrisponde la sella di Cernizza (C_2-1056). È il medesimo frammento di roccie eoceniche, che occupa parzialmente il bacino di Flisch, allo sbocco della Goritenza nell' Isonzo.

A proposito delle diverse direzioni delle due formazioni terziarie, che si sviluppano l'una nella porzione occidentale e l'altra, sopra un' area assai più vasta, nella porzione orientale del Friuli, ritengo abbastanza importante l' osservare come all'angolo d' incontro dei due accennati assi stratigrafici (che è pur ad un dipresso il punto d' incontro tra la direzione delle Alpi Carniche e quella delle Alpi Giulie) esista la più importante *chiusa* dell' area montuosa, esaminata nel capitolo precedente; cioè la depressione, solcata prima dal solo fiume Fella nell'epoca neogenica e quindi dalle acque riunite di tutto il bacino carnico in epoca neozoica. A proposito poi della assai maggiore altitudine, che viene attinta dai lembi eocenici nella regione prealpina in confronto dell' altitudine di nemmeno 300 metri, che i terreni medesimi raggiungono nella zona litorale da Buttrio a Gorizia, espongo la mia opinione che tale differenza dipenda da una sommersione posteriore dell' area meno sollevata piuttosto che da una originaria diversità nella quantità di un primo sollevamento. Poichè, per tale sommersione del Friuli orientale e per conseguenza della regione delle Alpi Giulie meridionali, viene anche a spiegarsi assai naturalmente la mancanza in tutta la vastissima estensione di questo rilievo di terreni neocenici marini, quivi mantenuti o ricondotti sotto il livello del mare. E tale considerazione varrebbe a dimostrare che la differenza di altimetria, accennata verso la fine del capitolo precedente, tra il gruppo cretaceo del monte Cavallo e gli altipiani isocroni del Carso monfalconese ed Istriano, dipende da un fenomeno molto antico; probabilmente dalla dislocazione, accennata dalla posizione stratigrafica della serie sarmatica. Quindi coinciderebbe colla prima delimitazione della depressione adriatica, quale esisteva in epoca pliocenica. Ma colla piccola scorta dei fatti, che posso addurre in appoggio di tale mia idea nel presente lavoro, ben comprendo esser affatto fuor di luogo che io mi perda nel riandare quelle antichissime vicende. Piuttosto, stando ancora nell' area collinesca friulana, rileviamo qualche episodio geologico, senza confronto più sicuro e non meno interessante, specialmente nell' analisi di fatti tutto locali. Diamo un' occhiata al bellissimo anfiteatro morenico, che ondeggia allo sbocco della principale vallata.

È questo un tratto di suolo d' origine glaciale, che fu già da parecchi anni studiato dai signori Pirona e Mortillet e che io anche ultimamente descrissi con qualche dettaglio in una monografia dei terreni alluvionali e morenici del Friuli (1). Ricorderò quindi solamente che le cerchie sono numerose e raggruppate in corrispondenza a due principali periodi di sosta della fronte glaciale. Le più esterne di queste cerchie attingono quivi, come in tutti gli anfiteatri morenici delle prealpi, la massima elevazione e si svolgono per circa 30 chilometri dal colle di Ragogna presso S. Daniele (R_3-260) sino a Tarcento (C_3-T 222); sopra una base di conglomerato pliocenico, a circa 190 metri sul livello marino, toccando coi loro cocuzzoli l' altitudine di 268 metri. Le

(1) *Annali scientifici del R. Istituto tecnico.* Vol. IX, con tavole. 1875, Udine Tip. Seitz.

cerchie più interne, meno elevate e meno continue, risentono nella loro disposizione della irregolarità portata nella fronte glaciale, che nel periodo di loro costruzione non era molto potente, dalla sporgenza del colle di Buja (C_3-298), composto di roccie eoceniche. Per questo ostacolo, nel secondo periodo di sosta, venne la fronte glaciale a dividersi in due sezioni assai ineguali, la più occidentale molto più vasta della orientale; e per conseguenza esse cerchie più interne si allineano secondo due sistemi di curve concentriche, le quali decorrono, le une da Buja ad Artegna e Collalto e le altre da Buja alla valle del torrente Ripudio, ove stagna il laghetto morenico di S. Daniele.

Non occorre dire che la litologia di questo interessantissimo tratto di colline rappresenti naturalmente la sintesi di quella del bacino idrografico del Tagliamento, con tutte quelle particolarità di distribuzione e di prevalenza dei diversi materiali, che conseguono dalle note leggi della conservazione dei versanti, dello spostamento dell'asse glaciale per la pressione dei confluenti principali e dalla relazione tra l'abbondanza dei materiali morenici e la estensione di affioramento e la franabilità delle roccie in posto. Le quali particolarità io ebbi cura di dimostrare colla raccolta dei pezzi erratici, di ciascuno dei quali procurai di spiegarmi la provenienza. Fu appunto in tale studio che mi risultò come, per un certo modo di trasporto o meglio di transito dall'uno all'altro ghiacciajo, che avveniva lassù nelle più elevate selle delle Alpi Carniche e che ho descritto con qualche particolare nell'accennata monografia, vennero a finire il lentissimo loro viaggio su questo tratto del piano alcuni massi di provenienza assai lontana e di rocce affatto straniere al bacino idrografico del Tagliamento. Tali sono i gneiss ed i graniti del Tirolo meridionale, alle prime origini della Rienz, confluente dell'Adige, che passarono per le selle di Padola e della Mauria (A_1-1633; A_2-1310) e le felsiti porfiriche dei dintorni di Raibl, che si distribuirono nell'alta valle del Fella e nell'apparato morenico frontale, passando per la sella di Saifnitz (D_1-788), ed entrarono del pari a far parte del materiale erratico della valle dell'Isonzo, passando per la sella del Prediel (D_2-1202).

Ricorderò poi specialmente come questo anfiteatro morenico non rappresenti il massimo sviluppo dei ghiacciai alpini nel Friuli; imperocchè l'arrotondamento marcatissimo delle falde calcari dei monti di Aviano e di Sacile ed il rinvenimento di grossi massi di roccie alpine, fatto in questi dintorni, sul colle di Buttrio e sulle falde del Carso monfalconese, pongano fuori di dubbio che tutto il piano friulano, in un primo periodo glaciale, sia stato coperto da un unico ghiacciajo, che si spingeva sino al mare. È noto d'altronde come il ghiacciajo del Piave si sia mantenuto colla sua fronte nel mare anche nel secondo periodo glaciale, al quale corrisponde appunto la formazione degli anfiteatri morenici.

Siccome si osserva in tutte le altre regioni collinesche, dovute ad accumulazioni moreniche, le depressioni sono occupate da torbiere, che rappresentano stagni e laghetti morenici e di questi ci è dato assistere alla scomparsa dell'ultimo vestigio, nel laghetto di S. Daniele. Queste torbiere sono estesissime ed occupano buona parte della vallata dei torrenti Ripudio, Corno, Lini, Cormor e Sfoina; essendo tutte attivamente coltivate da oltre un secolo, per alimentare le fornaci e gli opifici del Friuli.

Sino ad ora non vi si rinvenne, per quanto io sappia, alcun avanzo preistorico

nè di fauna posglaciale, nè di umane industrie; ma è a sperare che approfondandosi gli scavi della torba, sia somministrato buon materiale di studio all'egregio paleoetnologo cav. Marinoni Camillo, che ora insegna Storia Naturale nel R. Istituto tecnico di Udine.

La pianura. — I seguenti caratteri sembranmi distinguere la pianura del Friuli dalle altre porzioni, che gradatamente si sostituirono all'antico braccio prealpino del mare Adriatico. Sono: il pendio relativamente assai forte e molto rapidamente decrescente da monte a valle; la chiara delimitazione delle *conoidi* di dejezione delle diverse correnti e delle due successive epoche, glaciale e posglaciale; la distinzione marcatissima tra le dejezioni di trasporto diretto, aventi la loro base ad una media altitudine di 27 metri, e le alluvioni di lavaggio, terrazzate o meno (cioè glaciali e posglaciali) formanti il bassopiano e l'apparato litorale; la esistenza in questo apparato, a sud di Aquileja (C_4-B 8) di un interessantissimo avanzo di un apparato litorale del secondo periodo glaciale; finalmente, la differenza litologica tra i materiali delle varie alluvioni, in conseguenza della struttura geologica del rispettivo bacino idrografico. A questa interessantissima particolarità, con sommo vantaggio del geologo, questo tratto di piano aggiunge pur quella di possedere ancora abbastanza conservato il tracciato delle vie romane e parecchi Agri colonici ed un'abbondanza di monumenti, quale può attendersi in regione, posta al limitare dell'Italia, ove sedici secoli or sono fioriva la seconda Roma e si annnodavano le principali vie del mondo antico. Sono scarsi piuttosto gli anelli, per cui si possa rannodare la storia geologica del piano con quella dei suoi primi abitatori e riduconsi ad alcuni avanzi di palafitte palustri, nei pressi di S. Vito al Tagliamento e ad alcune sporadiche armi in selce ed in giadeite, rinvenute in diversi punti della provincia; il tutto, a quanto pare, neolitico e non molto al di là dei limiti della storia.

Nel tratto pedemontano, superiore alla accennata divisione tra le alluvioni torrenziali e le fluviali (alla quale corrisponde ad un dipresso anche la zona di rinascimento delle acque, che danno gli abbondantissimi fiumi di spiaggia), la pianura friulana stendesi ghiajosa, arida e per conseguenza sterile e poco abitata. Il beneficio della irrigazione, che in condizioni simili di pendenza e di natura di suolo si procurarono da tempo le altre porzioni del piano padano, pare ora che almeno pel tratto tra il Tagliamento ed il Torre non debba esser lontano; poichè la modificazione di un primo progetto di un canale irrigatorio, derivato dal fiume Ledra ed arricchito da un ramo del fiume Tagliamento, sta per rendere possibile, anche senza forte tributo dell'erario, lo iniziamento di una serie di opere idrauliche, le quali validamente contribuiranno al benessere di quella popolazione industre, robusta e desiderosa di vero progresso.

Lo schizzo mostra come l'accennata zona di rinascimento delle acque, determinata dal sottosuolo fangoso, che sopporta le conoidi di alluvione torrenziale, circondi la base di queste conoidi e come, partendo da essa zona, le correnti che se ne alimentano tengano il decorso voluto dalla esistenza dei rilievi alveali dei maggiori corsi d'acqua; i quali poi si projettano nel mare coi delta del Tagliamento e dell'Isonzo. Nè queste correnti sono insensibili al passaggio dall'una all'altra sezione del piano, attraverso la detta zona; poichè, in tempo di magra, tanto il Tagliamento

che l'Isonzo spesse volte sono già esauriti e scomparsi a monte di essa zona; mentre poco più a valle ricompajono e vanno gradatamente arricchendosi di acque. Le alluvioni meno declivi e più fine del bassopiano stendonsi assai feraci e ben coltivate e presentano una composizione di suolo meno differente che l'altipiano pedemontano; quantunque però, dall'uno all'altro estremo della Provincia, esse facciano graduato passaggio dal tipo calcareo-siliceo dell'agro aquilejese al tipo calcareo-marnoso-micaceo del distretto di Portogruaro.

I vertici delle varie *conoidi*, che formano l'altopiano, sono ad una assai varia altitudine dai 100 ai 270 metri e son tutti profondamente incisi da terrazzi, scavati dalla rispettiva corrente in epoca posglaciale e gradatamente sfumantisi nel piano, mano mano che si allontanano dall'asse della corrente stessa; per accostarsi e congiungersi, gli attigui, molto al di sopra della segnata zona di rinascimento. Condizione di superficie, la quale dimostra lo sviluppo e l'importanza delle alluvioni posglaciali e quindi la lunga durata del periodo geologico, al quale si riferiscono. Queste alluvioni posglaciali, di trasporto diretto, non sono però tanto estese da ricoprire dovunque le alluvioni di lavaggio del periodo precedente, le quali, terrazzate pur esse, finissime alla superficie ma alquanto ghiajose al di sotto ed assai estese specialmente tra il Sile ed il Livenza, furono indicate nell'unito schizzo.

La pendenza di queste conoidi di dejezione è inversamente proporzionale all'estensione del rispettivo bacino idrografico; di guisa che noi la vediamo essere massima per il torrente Conazzo, dallo sbocco di valle di S. Tomè fino alle falde del colle di Castello d'Aviano, ove tocca il 25 per 1000, e minima per quella del Tagliamento, che scende in media colla pendenza del 7 per 1000. In generale però è ragguardevolissima, trattandosi di correnti più o meno torrenziali e quindi tutte piuttosto atte ad accumulare i detriti allo sbocco delle rispettive vallate che a disperderli sopra ampia superficie. Anzi io ritengo che le correnti, che dispersero le alluvioni più fine del bassopiano, furono sempre prevalentemente dovute ad acque rinascenti e che soltanto nei periodi di piena si formassero qua e là alcuni letti ghiajosi per rami di correnti direttamente provenienti dalle montagne.

Ritengo poi che sia uno dei tratti più caratteristici del piano friulano questa spiccata individuazione delle conoidi di dejezione, le quali si vedono ad occhio guadagnare le falde collinesche, come cumuli giganteschi di sfacelo, ancor grigiastri per scarsa vegetazione e segnati dalle fascie assai ampie e biancheggianti delle alluvioni attuali. Quella del torrente Zelline, di cui porgo il profilo nella tavola II Sp. XXVI, è particolarmente distinta. Noterò eziandio come nell'altipiano udinese, appena a valle del limite delle morene, la superficie del suolo sia alcune volte ondulata per tracce più o meno evidenti di correnti, ora affatto scomparse od appena accennate da un temporaneo rigagnolo; come presso S. Vito di Fagagna, Cicconicco, Martignacco, Plaino. Son quelli, a mio avviso, gli sbocchi delle correnti, dovute al disgelo del ghiacciaio, durante ed appena dopo il periodo degli anfiteatri morenici. E finalmente ricorderò come in questo tratto, appunto come una conseguenza del singolar modo di trasporto glaciale e di condensamento di detrito sotto forma morenica, sia avvenuto che la potenza delle alluvioni di sfacelo glaciale sia relativamente assai poco rilevante; misurando esse appena dai 5 ai 30 metri di spessore, e sotto compaja l'alluvione

terziaria; come ho anche indicato nelle sezioni, delineate in base a dati desunti da numerosi trafori per pozzi.

L' esistenza di un sottosuolo di alluvione terziaria, rappresentata da un conglomerato calcare, che in parte è quello stesso che sporge ai colli suaccennati di Udine, Variano, Carpenedo e Campoformio, in parte è in letti più regolari glaciali o pliocenici (del periodo *Astiano*) ed è inciso assai profondamente dai torrenti del Friuli orientale e specialmente dal Natisone da Cividale ad Orsaria di Buttrio, è anche un fatto della massima importanza, che io ritengo comune a tutte le prealpi lombardo-venete. La dettagliata analisi di questo fatto potrà gettare un grande lume nella questione, ora agitata, sulla orografia preglaciale e glaciale della valle padana. Io penso che si verrà a scoprire un graduato passaggio tra la sommersione, che nel primo periodo glaciale manteneva ancora sott'acqua le falde delle Alpi a ponente dell'Adda e la emersione, allora forse maggiore che al presente, della regione orientale. Si verrà a provare come, in epoca relativamente antica, sia incominciata la diversità dei movimenti sismici ed oscillatori tra il bacino adriatico, che si deprime ed il bacino tirreno, che si innalza. Ma ad onta delle scoperte fatte in questi ultimi anni nella Brianza e che finiranno, io spero, coll'essere appurate ed accettate da tutti i geologi, vediamo innanzi a noi un campo grandissimo di studio e c' è in vero da restar quasi umiliati nel vedere ancora un incognita in una nozione, che si credeva così completamente sviluppata, quale è quella della successione dei fenomeni quaternari nella valle pedana. Per mio conto, studiate le varie località e riuniti i fatti, che mi sembrano più sicuri, accetto ora pienamente l' idea di una discesa generale di tutti i ghiacciai alpini nel mare nella *prima fase* dell'epoca glaciale e ritengo che le spiagge di questo mare sieno andate successivamente modificandosi; non solo per interrimento fluvio-glaciale, ma per un sollevamento della regione occidentale ed un abbassamento della regione orientale (1). In guisa tale che noi troviamo nel Piemonte le morene alla loro base commiste coi fossili marini dell'*Astiano* ed i blocchi di serpentino lisci e striati, sprofondati nelle argille marine; mentre nella regione delle Giulie meridionali, cioè nell' Istria e nelle isole del Quarnero e della Dalmazia, vediamo la assoluta mancanza anche di alluvioni posglaciali e nel Friuli come, a mio avviso, in tutto il Veneto, l'alluvione cenozoica, più o meno erosa, infranta e spostata, accenna ad un piano cenozoico assai più vasto dell'attuale.

Ma torniamo al Friuli. Quivi, come diceva, il sottosuolo delle alluvioni di trasporto diretto, tanto glaciali che posglaciali, è costituito da un conglomerato pliocenico. Or bene, rimontando nelle valli tutte, di questo stesso conglomerato incontriamo dei lembi talora vastissimi, i quali accennano a fondi di valli (*Thalboden*) più elevati e più ampi degli attuali. Questi lembi sono ivi pure alquanto spostati dalla loro originaria orizzontalità ed appartengono all' ultima fase di quelle modificazioni idrografiche, le quali abbiamo veduto nel precedente capitolo in qual guisa ad un dipresso siensi compiute nell'ultimo, lunghissimo periodo continentale. Nello schizzo

(1) T. Taramelli, *Osservazioni sul Ferretto di Lombardia*; con Tavola colorata. Atti della Società italiana di Sc. Naturali; Milano 1877. Vol. XIX, fasc. II. « *Osservazioni stratigrafiche sulla prov. di Pavia.* Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e Lett. Maggio 1877.

orografico ho segnato questi lembi, dei quali il più vasto occupa la vallata del Tagliamento, da Forni di sotto al limite del lago di Cavazzo (B_2).

Nel bassopiano, ove le correnti non sono delimitate da terrazzi, si può sino ad un certo punto coi dati storici e specialmente studiando quanto ne avanza del tracciato delle vie romane, conoscere quali furono i successivi decorsi od i vari rami abbandonati, tanto del Tagliamento che degli altri fiumi più importanti. Così è certo che un ramo del Tagliamento gettavasi normalmente nel corso attuale del Lemene prima del mille ed anche dopo, nelle più eccezionali piene; e che rappresentano due rami ancora più recenti del fiume stesso i canali di Lugugnana e dei Lovi; che l'attuale Natissa o fiume *Attis*, presso Aquileja, rappresenta un ramo dell'Isonzo, forse artificialmente mantenuto sino all'epoca della distruzione di quella città (C_5 presso A_1). Il fiume Isonzo invece scorreva per un altro ramo rasente il Carso monfalconese, presso Ronchis (1). Quindi furono successivamente abbandonati, a destra ed a sinistra dell'attuale corrente, i rami dell'Isonzatto e di S. Canciano. Così il fiume si ridusse all'unica foce della Sdobba, la quale, secondo il signor Kandler, data dalla fine del secolo decimosesto. In generale però questi cangiamenti idrografici, nel giro relativamente assai breve dell'epoca storica, furono quasi insignificanti, come fu tenuissimo l'aumento portato dalle alluvioni alle gettate dei *delta* del Tagliamento e dell'Isonzo e scarso l'imbonimento degli apparati litorali; di modo che l'area ora emersa non è certamente maggiore di quello che fosse all'epoca romana. Parmi che di questo fatto, da tutti acconsentito, tre principalmente sieno state le cagioni, cioè: 1. La erosione marina, operata dalle onde rimoventi il detrito sul lido e dalla corrente circumadriatica, che continuamente portò verso occidente le torbide dei fiumi ed il limo sollevato dalle onde. Cosichè noi vediamo il lido friulano differire dal lido di Venezia per la ghiaja abbondante che rimase da questo lavaggio; 2. La lenta sommersione, che in tutto il litorale Adriatico, anche dov'è costituito da rocce in posto, fu ripetutamente constatata e che è una continuazione dell'oscillazione, incominciata in un periodo molto antico dell'era neozoica; 3. il fatto che queste correnti friulane, per esser provenienti da bacini idrografici costituiti da rocce abbastanza compatte, presentano torbide piuttosto scarse e poco durature, sicchè ad ogni modo il progresso del loro delta, a condizioni pari, non può confrontarsi con quello dei delta appenninici, indubbiamente più rapido. L'argomento del rimanente, anche solo pel geologo, sarebbe tanto vasto da non poter esser trattato così di sfuggita in un breve cenno. Bastami, se col poco che affermai in proposito del piano friulano, abbia potuto indurre nel lettore la persuasione che quivi pure le condizioni di pendenza e di natura del suolo sono talmente collegate colle vicende geologiche e più specialmente colle condizioni litologiche ed orografiche della regione montuosa e collinesca, da rendere lo studio di esso piano così importante come qualunque altro ramo della geologia stratigrafica e solamente deploro che su questo campo i geologi assai di rado si soffermino ed ancor più di rado si pongano d'accordo.

(1) C. Berini, *Analisi del F. Timavo al principio dell'Era cristiana*; Ch. Lyell, *Principes de Géologie*. Ed. 1873. Vol. I pag. 561. T. Taramelli, *Osservazioni geologiche sui Circoli di Gradisca e Gorizia*. Annali scientif. R. Istituto tecnico di Udine, Vol. V, 1871.

PARTE SECONDA

Successione cronologica dei terreni nel Friuli, con qualche cenno dei rispettivi paralleli nelle altre regioni alpine e coll' indicazione delle principali rocce e delle località ove queste affiorano più distinte.

La serie seguente di piani geologici venne stabilita in base ad un primo studio di una ricca collezione di fossili raccolti nel Friuli. Ma ho ad essa conservato un carattere prevalentemente litologico, perchè mi è parso che trattandosi di un'area relativamente ristretta, questo carattere assuma un valore reale e facilmente adattabile a qualunque ulteriore modificazione nel riferimento cronologico. Il presente lavoro d' altronde è piuttosto diretto a distinguere e determinare le rocce che a discuterne i varî orizzonti. Ho cercato tuttavia accordarmi, per quanto ho potuto coi risultati degli studî fatti nel Friuli stesso e nelle finitime provincie dai chiarissimi signori Pirona, De-Zigno, Stur, Fötterle, Mojsisovics, Hörnes, Stache e Loretz; e se in qualche punto me ne discosto, mi riserbo di esporne più ampi argomenti nella descrizione della *Carta geologica* della Provincia. Non credo che le divergenze da dimostrarsi abbiano ad esser molto numerose; poichè per la più parte dei piani ebbi la comprova di una consolante analogia e per alcuni altri, che mi parvero peculiari all'area esaminata, ho procurato di rintracciarne la continuazione nelle regioni finitime, onde trovarvi le sfumature ed i passaggi, che potevano rendere accettabile la temporanea distinzione. Per alcune strette analogie, che legano i terreni paleozoici e mesozoici del Friuli con quelli a me abbastanza noti della Lombardia, ho potuto anche validamente giovarmi della serie stabilita per questa regione dal chiarissimo mio maestro; e percorrendo le altre provincie del Veneto, ho cercato, almeno per sommicapi, di studiare per quali anelli stessero congiunti questi due estremi del mantello di terreni prealpini.

La serie è abbastanza numerosa; ma pur si avvertiranno delle importanti trasgressioni, specialmente al confine dell'epoca cretacea colla eocenica e di questa colla miocenica. Fra il Trias ed Lias il confine è mal sicuro, mancando la determinazione degli equivalenti friulani della zona infraliasica. Così, per gli orizzonti paleozoici, riconosco l'insufficienza delle stabilite osservazioni; stante la complicazione delle curve stratigrafiche, per la quale è men sentito il vantaggio, che a questo proposito può vantare il Friuli, di possedere le più preziose località fossilifere sino ad ora scoperte nella catena alpina. Al punto delle nostre cognizioni sulla regione esplorata, parmi che la serie si possa delineare, dal Siluriano all'Antropozoico, come segue.

ERA PALEOZOICA.

1. *Terreni anteriori al Carbonifero, alcuni dei quali spettano certamente al* Siluriano. — La importante scoperta fatta nell'anno 1872 dei *Graptoliti,* in alcuni quarzoscisti della Carintia, alle falde del Monte Osternig, (D_1-2185) venne con bel corredo di notizie bibliografiche e stratigrafiche illustrata dal chiarissimo signor *Stache* (1)

(1) G. Stache, *Der Graptoliten-Schiefer* am Oesternig-berge in Kärnten; Jahrbuch K. K. Geologisch. Reichs. Wien 1873, XXXIII B. Heft 2.

il quale ha determinato le seguenti specie, sicuramente Siluriane: *Diplograpsus folium* His.; *Dipl. pristis* His.; *Graptolithus Proteus* Barr.; *Grapt. triangulatus* Harkness; *Grapt. millepeda* M Coy; *Grapt. Nilsoni* Barr.; *Rastrites sp, Retiolites Geinitzianus* Barr. In un mio lavoro quasi contemporaneo (1), descrivendo la statigrafia paleozoica delle Alpi Carniche, aveva del pari indotta la esistenza di rappresentanti di piani molto più antichi del Carbonifero, al quale di solito si riferiva la grande zona scistosa dei *Gailthaler-Schiefer* e tuttora rimango nella convinzione che nel versante settentrionale della catena si sviluppino ancora altre formazioni di scisti e di calcari saccaroidi, riferibili alle più antiche epoche del protozoico. La località preziosissima del monte Osternig è ancora isolata nelle Alpi Carniche ed i rapporti stratigrafici, stante la contorsione fortissima quivi subita dalla serie paleozoica, non bastano da soli a distinguere ovunque i piani scistosi più antichi dagli altri, litologicamente simiglianti, che si riferiscono al Carbonifero e sono distinti da fossili piuttosto abbondanti. In complesso parmi che la zona scistosa, che affiora tanto in Carnia che nella valle di Gail ad una certa distanza dagli affioramenti calcari, che coronano lo spartiacque, sia appunto con maggiore probabilità da riferirsi a questi antichissimi tempi. Le rocce più distinte di questa zona sarebbero le seguenti:

a. *Quarzoscisto nero*, leggermente micaceo con *Graptoliti* al monte Osternig, affiorante lungo la valletta a nord di Uggovitz (D_1).

b. *Argilloscisto micaceo*, violaceo o verde intenso a Ravascletto, Monajo (B_1), Rigolato per Forni Avoltri (B_1),Val Sissanis all'origine del torrente Degano (B_1); verde chiaro a monte Avanza (B_1-2330), a Valpicetto (B_1), ed al monte Fleons sopra Avanza. I quali argilloscisti cloritici contengono spesso belle geodi di quarzo jalino e della baritina; presso Monajo si rinvenne anche della grafite.

2. *Argilloscisti, arenarie, puddinghe e calcoscisti spettanti al* Carbonifero. — Accostandosi alle aree di affioramento delle rocce fossilifere, le quali a mio parere costituiscono un solo orizzonte riferibile al Carbonifero superiore, si vede come la natura scistosa sia meno influenzata dal metamorfismo e le rocce si facciano di grana più grossolana; anzi nella porzione orientale della catena diventino prima arenarie e quindi puddinghe quarzose distintissime, le quali hanno una singolare analogia con quelle di Manno nel Canton Ticino, pure a flora carbonifera. Il calcare a *Fusulina* nel senso che fu distinto dai signori Tietze e Stache, non sembrami costituire un piano differente; poichè nella tipica località del passo del Nassfeld, d'onde poi si scende nella non meno importante valle del Vogelsbach, si nota regolarissimo il passaggio dalle arenarie e puddinghe a flora carbonifera ed a *Productus scabriusculus* Sow., ad un calcare arenaceo zeppo di *Fusulina* e *Conocardium* ed a pochi passi la zona arenacea scompare sotto una formazione calcareo-scistosa, sempre micacea, con *Orthoceras calamus* Könick e *Ort. Gessneri* Martin, nella quale raccolsi fin dal 1867 una ricca messe di fossili. Sprovveduto di libri e di materiali di confronto, ho potuto soltanto determinare genericamente questa collezione e disegnarne meglio che poteva gli esemplari migliori in un atlante di tredici tavole, cui ebbe la compiacenza di esaminare il chiarissimo signor Könick, nello studio di questa fauna, come è noto, espertissimo. Ecco la serie delle determinazioni, che in base all'ispezione di queste tavole il chiar. paleontologo ebbe la gentilezza di comunicarmi.

(1) T. Taramelli, *Statigrafia paleozoica delle Alpi Carniche*, con Tavola. Memorie del R. Istituto Veneto, Vol. XIII. 1873.

Phillipsia sp; Orthoceras calamus Kön.; *Orth. Morrisianus?* Kön.; *Orth. Gessneri* Martin; *Murchissonia abbreviata?* Sow.; *Murchissonia angulata* Kön.; *Loxononema pulcherrima* M. Coy; *Pleurotomaria carinata* Sow.; *Euomphalus tuberculatus* Kön.; *Bellerophon Urii* Kön.; *Beller. decussatus* Fleming; *Cardiomorpha orbicularis* M. Coy; *Terebratula sacculus* Martin; *Spirifer lineatus* Martin; *Spirifer duplicosta* Phillips; *Spirifer mosquensis* Fischer et Woltz; *Spirifer Urii* Fleming; *Spiriferina cristata* Schlolth.; *Arthyris Royssii* Leveillé; *Camarophoria crumena* Mart.; *Productus semireticulatus* Mart.; *Productus Chora* d'Orb.; *Productus scabriusculus* Sow.; *Orthothetes crennuistria* Phill.; *Chonetes elegans?* Kön.; *Archeocidaris rossicus* v. Buch; *Cyathoxonia cornu* Michelin; *Favosites parassitica* Phill.; *Fusulina cylindrica* Fischer.

Ricordo come sia appunto su questa stessa zona che i signori Pirona e Stur hanno quasi dieci anni prima di me osservato e raccolto fossili carboniferi al monte Oharnach (C_1) e lungo la Pontebbana ed al passo stesso del Nassfeld. Ritengo poi che sieno di questo stesso periodo i calcoscisti fossiliferi, che trovansi ai passi di Lanza (C_1-1480), di Meledis (C_1), di Pecol di Chiaula (C_1-1776), ed i calcari a *Chamarophoria* ed *Orthoceras* del passo di Judenkofel e della valle Valentina (B_1).

Le rocce a flora carbonifera sono di pochi metri inferiori alle rocce marine ed anzi a Trotten di Pontafel (C_1) raccolsi varî esemplari di *Productus semireticulatus* nello sterro di una cava, quivi aperta per coltivare un banco irregolare di antracite prontamente esaurito. Dell'antracite osservansi alcuni filoncelli anche al R. Tamai e Casera Culet, nell'Alto Incarojo e scendendo dalla forca di Pizzul nella valle della Pontebbana. Le filliti raccolte contengono le seguenti forme, in esemplari talora perfettissimi (1): *Sigillaria* due specie, *Trigonocarpus, Pecopteris arborescens* Brongn., *P. polimorpha* Brongn., *Cyclopteris laciniata* Brongn., *Sphaenophillum Jaegeri* Brongn., *Cordaites borassifolia, Annularia longifolia* Brongn., etc.

Le rocce di questo importante orizzonte sono:

a. *Argilloscisto nero o plumbeo* con *Crinodi*, e *Fenestelle*, o con *Pecopteris* ed *Annularia*, di valle Valentina, del passo del Nassfeld e del Vogelsbach.

b. *Puddinga quarzosa, nera, compattissima*, a grana comunemente minuta in parecchi punti della valle del Degano, tra Rigolato e Forni Avoltri, nell'Incarojo, nella valle Pontebbana; *bianca* a grana grossolana, nel tratto delle Alpi Carniche ad oriente del passo di Meledis (C_1). Somministrano, tanto in posto come dai numerosi erratici dispersi in tutte le valli del Friuli orientale, delle ottime pietre da macine.

c. *Arenaria quarzo-micacea*, con impronte di vegetali, colla puddinga suaccennata; *ocracea*, con *Productus*, al passo del Nassfeld ed alle origini del Vogelsbach.

d. *Calcoscisto* o *calcare saccaroide* in lenti limitate, nelle accennate località fossilifere delle Alpi Carniche orientali.

(1) Al *Cerkel*, presso Pontafel si è esplorato un banco di litantrace, che fu tosto esaurito. La qualità ne era assai buona come risulta dall'analisi seguente, eseguita al pari della maggior parte di quelle risguardanti gli altri combustibili del chiarissimo prof. A. Cossa.

Acqua igroscopica	4. 65
Sostanze combustibili	92. 45
Ceneri	2. 90
	100. 00
Materie volatili p. %	15. 60
Calorie svolte da un grammo di combustibile .	6406 —

e. *Calcare subsaccaroide* o *compatto* o *mandorlato* con *Encrinus* e *Orthoceras*, ai Monti Avanza (B_1-2380), Sissanis (B_1), Volaia (B_1-2517), Canale (B_1-2440), Monte Croce (B_1-2405), Alpe di Primosio (B_1), Avostano (B_1-2405), Pecol di Chiaula (C_1-1776), Malurschkofel (C_1-2090).

3. *Calcari subcristallini grigi o rosei, marmorei, metalliferi, raramente fossiliferi; spettano probabilmente al* CARBONIFERO SUPERIORE. — Questi calcari formano le masse più colossali dello spartiacque tra il bacino carnico e la valle della Gail, dal monte Peralba (A_1-2690) al monte Osternig (C_1-2185), con stratificazione poco evidente ma a quanto può vedersi dai loro rapporti cogli scisti sottoposti, prevalentemente foggiati a ventaglio e formanti lenti a teca scistosa. Attraverso di questi calcari e più ancora al contatto di essi cogli scisti, si allineano i principali giacimenti cupriferi (di tetraedrite, calcopirite, erubescite, con galena, cinabro, stibina, e con ganga di quarzo e baritina). Le coltivazioni fatte a più riprese ed in varie località datano da tempi remotissimi ed in Avanza furono abbandonate soltanto nel 1869, in causa dell' assottigliarsi del filone irregolare quivi intaccato ed anche dell'esaurimento del capitale sociale con un impianto troppo costoso. Altre località, ove furono praticate delle ricerche dietro affioramento degli stessi minerali sono: in valle Sissanis, al monte Pail Grande (B_1), al monte Primosio (B_1-1836) ed a S. Giorgio di Comeglians.

Osservai alcune sezioni di *Cyathophyllum* nei dintorni di Timau e delle *Favosites* al Pecol di Chiaula.

4. *Scisti orgillomicacei policromi; arenarie amigdaloidi o bucherellate; scisti amfibolici, talcosi, micacei; spiliti; grovacche? spettanti al* PERMIANO INFERIORE. — Distinguo dalle suaccennate questa zona scistosa, la quale è immediatamente sottoposta ai porfidi quarziferi del *Permiano* ed ove questi mancano, alla formazione triasica. Probabilmente corrisponde alla zona a *Bellerophon*, recentemente illustrata e seguita per alcuni chilometri nel Comelico e nella valle di Sexten dai signori Hörnes e Mojsisovics; ma nel Friuli non mi occorse mai di notarvi alcun fossile. Soltanto parvemi di rilevare la costante discordanza di questa formazione dalla serie paleozoica, descritta ai numeri 1, 2 e 3. Noto frattanto le seguenti rocce e località, che in essa temporaneamente comprendo.

a. *Argilloscisto micaceo* rosso o violetto, a chiazze verdi, nei dintorni di Comeglians, Zovello (B_1), Paluzza (B_1-605), Paularo (C_1-644).

b. *Arenaria quarzo-cloritica a granuli calcari*, a R. Tamai di Paularo (C_1), Riomal di Zovello (B_1) e vetta di monte Paularo (B_1-1975).

c. *Arenaria come sopra*, bucherellata per esportazione dei granuli calcari; nelle località stesse e comunissima nelle alluvioni e nelle morene provenienti dal bacino carnico.

d. *Spiliti* od *amfiboliti variolitiche*, di color verdastro o giallognolo, abbondanti nel gruppo dei monti appena a settentrione delle due culmine di Valcalda e del Durone.

e. *Grovacca?* Con tale denominazione vennero definite alcune rocce aggregate, a granuli oligoclasici, quarzosi e micacei, passanti ad arenarie, le quali furono già osservate dal sig. De Buch [1] lungo la strada da Paluzza a Timau [2]. Credo che sieno quelle stesse arenarie, che riscontransi anche nel tratto tra Rigolato e le val Pesarina ed a nord di Cercivento, e che sieno da distinguere per origine dalle altre rocce aggregate di questa formazione. Io le ho indicate altra volta sotto il nome di *Arcosi*; presentandosi le più grossolane come rimpasto di rocce granitoidi [3].

[1] V. Buch, *Geognostische Briefe, herausgegeben von Lehonard.* Nassau 1824, p. 160, 172.
[2] D. Stur, *Die geologischen Verhälnisse der Thaler der Drau, Isel, Möll und in den Umgebung von Lienz ferner in Carnia, in Venetianischen Gebiete.* Jahrbuch K. K. geolog. Reichsanstalt 1856.
[3] T. Taramelli, *Osservazioni stratigrafiche nelle valli del But e del Chiarsò in Carnia*; con Tavola. Ann. scient. del R. Istit. tecn. di Udine 1871, Vol. IV.

5. *Afaniti uniformi o porfiroidi ; iperiti ; porfidi amfibolici.* — Sono rocce assai multiformi, che si presentano coll'aspetto decisamente cristallino solo nel tratto tra S. Giorgio di Comeglians e Rigolato, in parecchie colate e filoni-strati tra gli scisti ed i calcari paleozoici. Per maggior compattezza e per chiare relazioni stratigrafiche, si distinguono dalle rocce molto analoghe, che sotto il nome di *Diabasi* furono indicate dal signor Stur a Cima Sappada e che appartengono alla formazione del Trias medio. Si distinguono le seguenti varietà più importanti.

a. *Afanite*, verde, uniforme, subpellucida, a lucentezza ceroide, alla frana di Altegot a ponente di Timau; *granulare* ad Avausa di Pesariis, a Valpicetto di Rigolato (B_1), al monte Paularo (B_1-1975).

b. *Amfibolite arenacea*, verde-scura, uniforme o brecciata, da Comeglians a Rigolato

c. *Porfido amfibolico* a pasta nerastra e cristalli di oligoclasio, presso Cleulis a sud-ovest di Timau.

d. *Iperite* verde chiara, con bronzite, a S. Giorgio di Comeglians, con cristalli di feldispato a nord-ovest di Comeglians ed a Romanins di Rigolato.

6. *Porfido quarzifero, rosso-bruno e conglomerato porfirico.* — Rinvenni soltanto un affioramento, o meglio dirò un avanzo di questa formazione nell'area del Friuli e precisamente al monte di Terzo (B_1-2250), a nord-ovest di Paluzza. Corrisponde alla estesa formazione porfirica del Tirolo meridionale, dell'Agordino e del bacino di Recoaro ed anche nel Comelico ne furono indicati alcuni affioramenti dal signor Loretz, alla base delle puddinghe del Trias inferiore, nella valle di Padola. Questo porfido, in due colate separate e ricoperte da conglomerato porfirico e che attingono complessivamente la potenza di circa 40 metri, si osserva in due punti della detta montagna; cioè, presso la vetta e nel versante meridionale (vedi spaccato IV). Ritengo che si tratti dello stesso piano ripiegato; poichè nel versante opposto del monte, fino ai calcari carboniferi del monte Croce, non si avverte alcuna traccia nè di porfido nè delle rocce annotate nel capitolo precedente, le quali sono al porfido subordinate per una grande potenza presso la vetta e verso Cercivento. Accostandomi alle idee dei signori Richthofen, Suess, Spreafico e Negri, ritengo che questa formazione appartenga al Permiano.

La roccia è rosso-bruna, traente spesso al violetto, con piccoli cristalli di ortose e qualche laminetta di mica. I cristallini feldispatici hanno spesso come un nocciolo di una sostanza amfibolica alterata. Al cannello la pasta di questo annerisce e fonde assai difficilmente in vetro bruno; i cristallini sono alquanto più fusibili. Si distingue per la tinta più bruna e per la maggior compattezza dalle Felsiti porfiriche del Trias medio del Friuli orientale e della Carinzia meridionale.

ERA MESOZOICA.

Epoca del Trias — *Trias inferiore.*

N. B. Mantengo, pur riconoscendola ormai da abbandonarsi pel Trias Alpino, la distinzione in tre membri, perchè ancora generalmente usata e chiamo l'attenzione dei geologi, che si occupano di questa o delle finitime regioni, sulla necessità di distinguere l'orizzonte più antico (N. 7) dall'altro, litologicamente simigliantissimo e perciò spesso con quello confuso, delle arenarie, variegate a *Myacites* (N. 9) e ritengo che nel Friuli, meglio che altrove, sia la distinzione marcata per la interposizione della inferiore formazione gessifera, la quale, così collocata, si unifica ed assume una importanza stratigrafica pari alla sua potenza ed estensione. A levante ed a ponente del Friuli le

dolomie cariate, che le sono annesse, si conservano per grande tratto e si confondono colle rocce generalmente riferite al *Guttensteinerkalk*.

7. *Arenarie micaceo-quarzose* con sottile, ma assai costante zona subordinata di *conglomerato quarzoso a cemento arenaceo-micaceo*. — Equivale al *Servino* o *Sales* della Lombardia; al così detto *Verrucano* delle Alpi; ai *Werfener-Schiefer* dei geologi austriaci ed al *Grödnersandstein* di Richthofen. Su questo piano furono recentemente raccolti dei *Bellerophon* dai signori Hörnes e Mojsisovics, nel Bellunese; ma nel Friuli non vi ho riscontrata alcuna vestigia organica. Appartengono a questo piano le rocce seguenti:

a. *Puddinga quarzosa, a cemento arenaceo-micaceo*; rossiccia al Vogelsbach (C_1), a Meledis (C_1), a Ligosullo per Costa Robbia (*B*1); rosso-bruna a Ligosullo, Zovello (B_1), a Valpicetto (Σ_1) ed al monte Avanza (B-2330).

b. *Arenaria quarzo-micacea*, compattissima, rosso-bruna alla Maina di Sauris (*B*2,683), al monte Avanza (*B*1,2330), a Costa Robbia (*B*1); meno tenace a Forni Avoltri (*B*1,872), in Val Avoltruzzo (B_1), a nord di Paularo (C_1), al passo di Lanza (C_1-1480), a Valpicetto di Rigolato ed a Castions di Paluzza.

Trias medio.

8. *Marne cineree, calcari neri bianco-venati, dolomie cariate,* Gessi, *talora solfiferi*. — In Carnia e credo anche nel Comelico questa formazione misura non meno di quattrocento metri di spessore ed offre una quantità assai notevole di lenti di gesso, abbastanza estese e con molteplici varietà di rocce, quasi mai fossilifere. Epperò questa formazione fu dai varî osservatori smembrata a diversi livelli triasici. Prevalse però sempre l'idea di mantenerla entro i confini del Trias medio, al qual periodo appunto essa appartiene; formando quasi il preludio delle manifestazioni vulcaniche, che dappoi si svolsero fino all'epoca delle dolomie infraraibliane.

Nella Carnia, la più parte degli affioramenti di gesso sono trascurati; quantunque nel Friuli stesso questa roccia trovi vasta applicazione nella coltura dell' erba medica. La ragione sta nell' essere più alla portata altre cave dello stesso minerale allineate lungo la zona gessifera, in più luoghi affiorante, del Trias superiore, di cui vedremo più sotto.

Ad entrambe queste zone gessifere sono associate numerose sorgenti idrosolfuree, delle quali la più nota ed abbondante è quella di Arta, nella valle del But; ove una grossa polla si innalza dalle alluvioni del torrente. Si dicono *acque pudie* e se ne osservano a Forni di sopra, Forni di sotto, sud di Invillino, Sauris, Pesariis, valle di Lavardet, Dierico di Paularo, Val di Studena, est di Pontebba, Lussnitz di Malborghetto, all'origine di Val Settimana (a nord di Claut) ed alle grotte *de lis Aganis*, al R. Barquet presso Vito d'Asio.

Nella zona gessifera inferiore del Trias carnico distinguonsi le seguenti varietà di rocce:

a. *Marna cinerea* poco compatta, più o meno arenacea, a Rivo di Paluzza (B_1-605), in valle di Sauris (B_2 e B_2), al passo del Durone verso Paularo ed a R. del Solfo sotto Treppo Carnico.

b. *Calcare nero bianco-venato*, con Foraminifere, al passo del Durone, ai monti di Suttrio, al R. Miozza per Mione, a Dierico di Paularo, al R. Soalt sotto Pontebba (C_1-564), a nord di Forni Avoltri, sin quasi alla valle del R. Avoltruzzo.

c. *Dolomia cariata*; rappresenta una breccia a cemento dolomitico, da cui sieno stati esportati gli elementi marnosi o calcareo-marnosi per opera di acque dissolventi. È roccia comunissima nella

Carnia, ove si presta assai bene come pietra da taglio, resistente e leggera ed è conosciuta sotto il nome di *tofo*. Accompagna immancabilmente i gessi in entrambe le formazioni gessifere del Trias. Vi rimarcai delle impronte di piccole bivalvi del tipo delle *Dreissene*, presso Baus di Ovaro; ma in generale sono prive d'ogni traccia organica, poichè quei bacini di acqua probabilmente troppo mineralizzata e non in comunicazione col libero mare, nei quali accadeva la formazione dei depositi gessosi, dovevano essere poco propizî alla vita. La detta dolomia cariata affiora in banchi della potenza talora di 20 metri, sempre associata alle rocce precedenti, in valle di Sauris (A_2-B_2), a Cella ed Ovaro (B_1), ad Entrampo, per lungo tratto nella valle Pesarina, al passo del Durone e nei dintorni di Dierico e Paularo, nell'Incarojo.

È abbastanza importante, perchè non comune nella formazione triasica, la presenza del *Solfo nativo*, in pagliette ed in geodi, che si raccoglie con certa abbondanza al R. di Solfo di fronte a Treppo, Carnico, presso Paluzza (B_1-605) ed al R. Telempecte, presso Sauris di sopra (A_1-$S_1$27). Il metalloide trovasi tanto nel gesso alabastrino, quanto nel calcare nero; ma manca nella dolomia cariata.

d. *Gesso.* È raramente in cristalli completi ed isolati; ma di solito è alabastrino, o niveo o saccaroide, con impurità di marna micacea, spesso disposta a zone. Rimarcai anche delle vere brecce calcareo-marnose o quarzose, a cemento gessoso. Non ne vidi mai, su questa zona di roseo, come nella superiore formazione gessifera. La maggiore lente parmi che corrisponda al bacino del Degano, nel tratto tra Entrampo, Ovaro e Mione e la massima potenza per cadaun banco di gesso la rimarcai al passo del Durone, di quasi 8 metri. I punti ove affiora questo minerale sono numerosissimi e trovansi notati negli spaccati.

9. *Arenarie variegate a* Myacites Fassaensis *e* Naticella costata; *calcari cloritici o micacei, splendenti.* — Questa importantissima formazione del Trias carnico presenta la massima superficie di affioramento e contiene le rocce più distinte, parecchie delle quali usate come materiale di costruzione, e spesso come pietre da coti. Suolsi anche con esse formare la parete interna delle fornaci, essendo assai refrattarie. Sono caratteristiche per le alluvioni e per le morene di tutto il bacino carnico. Corrispondono ai *Campiler und Seisser-Schichten* ed alla massima parte dei *Buntersandstein*, ritenuta l'esclusione del *Grödnersandstein*. Si notano le seguenti rocce:

a. *Arenaria quarzo-micacea*, rossa, fossilifera al monte Cadino (B_1-2345) in val Pesarina, al monte Losa (B_1-1980), al Morgenleid di Sauris (A_1-2040), al monte Arvenis (B_1-1962) e nelle ampie frane che ne dipendono del R. di Sautris e del R. delle Streghe, al monte Terzadia (B_1-1968), nei dintorni di Arta e Cedarcis sin quasi a Tolmezzo. Nell'alta valle del fiume Fella e specialmente presso Pontebba affiorano con minore potenza ed hanno anche un colorito meno vivo, passante al giallognolo. Sono ovunque assai contorte, per lo che anche i fossili sono frequentemente laminati, stirati, deformati, sì da essere indeterminabili.

b. *Calcare micaceo o cloritico, splendente;* è una roccia spesso luccicante, specialmente sulla superficie degli strati, per finissimo rivestimento micaceo o cloritico sparso sulla massa del calcare. Compatta e di facile lavoratura, resistentissima all'atmosfera, impiegasi in larga scala per stipiti e pilastri in tutta la Carnia, ove si conosce col nome di *pietra viva*, per distinguerla dal *tofo* anzidetto o *pietra morta*. Abbonda specialmente nella valle di Sauris, nella valle del Degano presso Mione, nei dintorni di Arta ed a Rivo di Paluzza.

10. *Calcari marnosi e marne variegate; calcari nodulosi; brecce policrome; calcare a* Terebratula vulgaris *nell' alta valle del fiume Fella.* — È una zona assai multiforme di rocce in generale frammentizie, la quale chiude immediatamente ed ovunque la serie delle arenarie variegate, separandola dai tufi e dai porfidi augitici o feldispatici del Trias medio. Continuansi di solito in queste roccie le poco determinabili impronte delle *Myacites* e delle *Naticella* del piano precedente e soltanto nella valle di Wolfsbach (D_1-Valbruna) si osservano strati a *Terebratula vulgaris*,

i quali fanno continuazione a quelli accennati dal signor Stur nella valle di Raibl presso a Flitschl. Si distinguono, come più comuni le seguenti varietà di rocce:

a. *Calcare arenaceo, micaceo* giallastro con fossili; ai monti Morgenleid (A_1-2040) e Mediana in val di Sauris, al monte Ciancul d'Ampezzo (B_3-1129), a da Pani di Raveo al monte Avedriugno.

b. *Calcari nodulosi*, a superficie degli strati rilucenti per intonaco argillo-carbonioso, con piccole bivalvi, nei dintorni di Costa Landri ed al monte Collazza in Val dell'Aupa, nelle valle Studena ed alla sella di Camporosso verso il Mittagskofel (C_1-2098).

c. *Brecce policrome.* Sono generalmente ad elementi calcari di più colori, con cemento ocraceo o calcareo-marnoso, bigio o nero. Nella valle del torr. Ugge, a Pietra Tagliata nel Canal del Ferro e lungo il R. di Acqua-bona presso Forni Avoltri, danno una bellissima pietra di costruzione, che potrebbe anche prestarsi ad esser lavorata come marmo.

11. *Arenarie quarzose policrome; tufi augitici; Pietre verdi* (del Catullo e del Fuchs, non del signor Gastaldi). — Questa pure è una formazione assai importante nella stratigrafia delle Carniche; quantunque presenti il massimo sviluppo ed il maggior numero d'istruttivi passaggi a rocce vulcaniche nel Cadore e nell'Agordino, specialmente nella bellissima valle Fiorentina a nord-est di Caprile. Corrisponde assai probabilmente alla zona a *Trachyceras Reitzi* ed ai tufi di S. Cassiano, nella serie proposta dal signor Mojsisovics (1); ma non mi ha presentato alcun fossile tranne qualche rara impronta vegetale o qualche fuscello carbonizzato. Essa comprende:

a. *Arenarie quarzose* poco micacee, rosso-brune, porfiroidi, talora gialle o cloritiche; nei dintorni di Forni Avoltri, a sud di Pani e di Raveo, a Villa per Lauco e Vinajo, lungo i confluenti del torrente Vinadia e presso Tolmezzo; in più siti dell'Aupa, al Passo di Bieliga e nel versante settentrionale dei Monti Mittagskofel e Lipnick, nella valle del Fella.

b. *Arenarie glauconiose*, passanti a *marne verdi*, compatte o sciolte; nelle accennate località e specialmente lungo il R. d'Acqua-bona, appena sotto la culmina di Cima di Sappada.

c. *Tufo augitico*; aggregato di feldispato caolinizzato e di granuli cloritici, a nucleo più o meno compatto; a Cima Sappada, a Costa Landri nell'Aupa, al passo di Bieliga e specialmente nel R. Vintulis, a sud di Paularo (C_1-P644).

12. *Porfidi augitici e conglomerati porfirici eruttivi o di immediato rimpasto.* — Equivalgono ai notissimi del Tirolo meridionale, del Bellunese e della valle di Kaltwasser, nella Carintia (D_1-833).

a. *Porfido augitico a pasta verdognola e cristalli feldispatici* a Costa Landri, a R. Vintulis, a Cima Sappada, all'origine della Valbruna o Wolfsbach.

b. *Porfido augitico a pasta feldispatica e cristalli alterati di augite* e spesso anche con cristalli rossi di *ortose*. Nelle località suddette, talora in lamine per basaltizzazione.

c. *Conglomerati* dei porfidi suddetti, nelle medesime località, specialmente nelle valli d'Aupa e di Valbruna.

13. *Porfidi felsitici.* — Equivalgono ai porfidi bruni e rossi, quarziferi o meno, delle valli di Kaltwasser e Luschari, nella Carinzia meridionale; i quali, per quanto io sappia, non si conoscono nelle Alpi Bellunesi se non che per trovanti esportati dai porfidi augitici.

a. *Porfido rosso-bruno, quarzifero con cristalli assai evidenti di ortose*; in Valbruna, nel R. Vintulis, a Costa Landri e scendendo dal passo di Bieliga.

Come erratico, è abbondantissimo nel sistema morenico del bacino carnico; specialmente nella porzione orientale, per transito della Carinzia oltre i passi di Saifnitz e del Prediel (D_1-788 e D_2-1202); come pure trovansi massi di questo porfido lungo tutta la vallata dell'Isonzo e nel Friuli orientale, presso Medea e Monfalcone e sui colli di Buttrio.

(1) (Mojsisovics). *Die Gliederung der oberen Triasbildungen der östlichen Alpen.* Jahrbuch K. K. geol. Reichsanstalt B. XIX, 1869.

Trias superiore.

14. *Calcari neri, scistosi o rosso-bruni con* Halobia *ed* Ammonites Aonoides. — Questa zona corrisponde al livello degli *Scisti di S. Cassiano;* nel senso in cui furono questi intesi nella série triasica prealpina, tanto dai geologi austriaci come dal chiarissimo nostro Stoppani per le prealpi lombarde, cioè come il più basso livello del Trias superiore. Ma è noto quanto diversa sia la posizione dei varî membri e nelle varie località riferite a questo gruppo; di guisa che quasi a ragione il piano del S. Cassiano si potrebbe confondere con quello di *Raibl;* l'uno e l'altro abbracciando quasi in un reticolato di piani scistosi o calcareo-marnosi le formazioni generalmente lenticolari delle dolomie, riferite al piano di *Hallstadt.* È un fatto però che in tutto il versante meridionale delle Alpi, tra queste dolomie ed i calcari del *Muschelkalk* o i tufi e porfidi equivalenti a questi calcari, esiste sempre una zona scistosa o calcareo-marnosa, alla quale appunto riferisco questi scisti della Carnia. Le rocce comprese in questo piano sono:

a. *Calcoscisti neri, tegulari* al Col del Frate nell'Aupa, nel tratto di Fusea a Vinajo, nella Vinadia, sopra Caneva di Tolmezzo, ed al monte Ghem a sud di Cima Sappada (A_1-1305).

b. *Scisti calcareo-argillosi* con *Halobia ed Ammonites*, ai monte Arvenis (*B*1.1962), Ghem (A_1) e Cadino per R. Avoltruzzo (B_1-2345) ed al monte Tiersine (B_1-1978).

c. *Calcoscisti rosso-bruni* ad *Halobia (Donella Taramellii* Mojs.) alla casera di Nauroni, presso Forni di sotto (A_2-*Fi* 776) ed al monte Tiersine.

15. *Dolomia, con interstrati arenacei nella porzione superiore; zona* piombifera *nel Friuli orientale e nella Carinzia.* — Questo piano equivale alle dolomie dello *Schlern;* le quali però, secondo il signor Mojsisovics, si estendono in parecchi piani triasici, ed ai calcari di *Hallstadt*, nell'Austria. Corrisponde a quelle dolomie, che formano i principali colossi della regione dolomitica del Cadore ed alla *dolomia inferiore* del signor Stoppani, nelle prealpi lombarde. Le rocce sono:

a. *Dolomia a Gyroporella*, con Gasteropodi e Trachyceras, ai monte Sernio, Terzadia e Cucco (B_1), Arvenis (B_1-1962), Veltri (B_2-2079), Tinizza (B_2-2076), Clapsavon (A_2-2460), Tiersine (A_1-1978), Terzagrande (A_1-2383), ai monti Tuglia e Cadino. Ha una tinta grigiastra e stratificazione poco distinta. L'area di suo affioramento è segnata ad un dipresso anche nello schizzo.

b. *Arenarie quarzo-ocracee, passanti a marne giallastre*, talora con impronte di vegetali, alternate colla dolomia ai monti Pil e Veltri (B_2-2079), al passo di Pura (B_2-da val di Sauris ed Ampezzo ad ovest del monte Tinizza, B_2-2076), presso Raveo e Cludinico in val di Gorto (B_1), nella Vinadia e nell'Aupa.

Nella valle dell'Aupa, presso Galizzis, è aperta una miniera in un filone di galena e calamian, a ganga calcareo-fluoritica, compreso appunto in questa dolomia; ma non mi consta che la lavorazione continui con buoni risultati. Anche al R. a Glazat, nord-ovest di Pontebba, circa vent'anni sono, si è lavorato un filone di galena scarsamente argentifera, che fu presto abbandonato. Parmi che la miniera di Auronzo, nella valle dell'Anziei, in Cadore, appartenga eziandio a questo piano, che certamente corrisponde a quello delle miniere di Raibl e di Bleiberg, nella Carinzia meridionale.

16. *Arenarie carbonifere, calcari con banchi di* Antracite. — Questa zona carbonifera della Carnia, forma la continuazione verso occidente del piano dei *Fisch-Schiefer* a *Woltzia*, di Raibl, ed oltre che la Carnia attraversa le valli dell'Anziei e del Boite, sin nella valle Fiorentina ed alle falde del M. Marmolada, nell'Agordino.

Corrisponde alla porzione inferiore degli *Schlern-plateau-Schichten* del signor Loretz (1), alla zona a *Trachiceras triadicus* ed *Aonoides* ed a *Nautilus rectangularis*, ai *Wengener-Schiefer*, ed ai *Cardita-Schichten* di S. Cassiano. Comprende le seguenti rocce:

a. *Arenaria quarzosa, micacea, ocracea* con impronte carboniose a Raveo, Cludinico, Lauco ed Avaglio, nella valle del Degano; nella Vinadia, nella valletta del R. Frondison (V. Longa, B_2-C_1) a nord-est di Tolmezzo, nella valle di Moggessa e dell'Aupa ed a piccoli tratti, alla base della formazione calcareo-marnosa di Dogna e della valle omonima.

b. *Calcare marnoso, bituminoso*, formante il tetto e talora anche il letto ai depositi di *antracite*. Contiene grosse *Chemnitziae* e *Myophoriae*. Affiora intorno ai giacimenti di combustibile di Raveo e Muina, sulla destra del Degano e dal R. Furioso al monte Cretis, sulla sinistra del torrente medesimo.

c. *Antracite* o piuttosto *litantrace magro*; forma tre o quattro banchi, assai tormentati, della massima potenza di quasi un metro con una media di 0,40. È d'aspetto grafitoide, con lucentezza metallica, piuttosto ricco di solfuri e friabile. Con tutto ciò, atteso il suo prezzo relativamente mite ed il forte suo potere calorifico, viene ancora utilmente escavato in due miniere presso Cludinico, per conto dalla Società Veneta montanistica.

Nel laboratorio del R. Istituto tecnico di Udine, da campioni di combustibile raccolti su questa zona si ottennero i seguenti risultati:

a *Antracite* di Cludinico, dalla cava al R. Furioso; campione tolto da un banco dello spessore medio di Cent. 30.

b. *Idem* di Raveo, dalla cava praticata già nel 1847 presso il paese e di cui tuttora vedesi la bocca lungo il sentiero per Muina, in roccia calcare. Il campione mi venne somministrato dal compianto ingegnere Daniele De Marchi.

	(a)	(b)
Materie volatili ed acqua igroscopica	9. 30	7. 00
Carbonio puro	78. 30	76. 80
Ceneri	12. 40	16. 20
L.	100. 00	100. 00
Calorie corrisp.	6316. 29	6348.

17. *Calcari marnosi, marne, arenarie fossilifere a* Hörnesia Johannis-Austriae (*Avicula bipartita*). — È l'orizzonte triasico più ricco di fossili, nella regione esplorata ed affiora in molte località con molte sfumature litologiche, passanti dai calcari più o meno marnosi alle arenarie ed alle lumachelle. Come affioramenti molto preziosi al paleontologo indico: Prerit di sopra, R. Lavaz, R. Pontus, R. di Ferro, Prerit di sotto, nei dintorni di Dogna; Chiout di Cati, Chiout di Pupa, Somdogna nella valle di Dogna; Dordola per Galizzis nell'Aupa; Fusea, Vinajo, Allegnidis, Lauco, Trava, Cludinico, Raveo, ed il Passo della Morte, in Carnia. Le specie più comuni sono quelle stesse di Raibl; ma la varietà ne è molto maggiore. Le principali sono le seguenti: *Nautilus rectangularis* St.; *Chemnitzia* sp.; *Capulus* sp.; *Solen caudatus* Hauer; *Megalodon carinthiacum* Bouè; *Pachycardia rugosa* Hauer; *Nucula sulcellata* Wiss; *Corbis Mellingi* Hauer; *Myophoria elongata* Hauer; *Myoph. Kefersteini* Münster; *Myoph. Wateleyae* De Buche; *Hörnesia Johannis-Austriae* Laube; *Myoconcha Curioni Hauer; Pecten filosum Hauer; Bactryllium* sp.

Giovi ricordare come tra le rocce di questo orizzonte, spesso a contatto coi depositi suaccennati di combustibile, stiano banchi potentissimi di buon materiale per calce idraulica e per cementi. Le analisi chimiche assai numerose stabilite in proposito ed i saggi pratici, da me e da altri a più riprese ottenuti, assicurano questa

(1) Loretz, *Das Tirol-Venetianische Grenzgebiet der Gegend von Ampezzo*, mit 2 Tafel. Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft. Jahr. 1874.

natura, del resto comunissima, di terreno lungo questa zona; la quale presenta eziandio le cave di buone fabbriche di cemento a Raibl nella Carinzia ed a Lecco in Lombardia. Per quanto io sappia, non venne fino ad ora tratto sufficiente partito di questa fonte d'industria, tanto più sicura in quanto che si combina colla presenza di un combustibile fossile di cattiva qualità e che in parte potrebbe consumarsi od almeno distillarsi in sito.

18. *Marne iridate gessifere e dolomie cariate.* — Questo orizzonte è abbastanza continuo nel Friuli; ma non saprei trovarne un sicuro equivalente nelle regioni finitime e nella Carinzia esso manca sicuramente. Può darsi anche che in talune porzioni della Carnia, specialmente nei dintorni della Mauria, esso compaja anche inferiormente al deposito calcareo-marnoso con fossili raibliani. Ma certamente è superiore sempre al gruppo dei calcari e delle dolomie del n. 15 e non può menomamente confondersi con quello gessifero del Trias medio. Il gesso ne è talora roseo, come non l'ho mai osservato nel piano n. 8 e presentasi sempre in lenti comprese nella già notata dolomia cariata (*Rauchkalk-Cargneule*) con marne ad argille cineree o screziate. Le roccie appartenenti a queste zone sono:

a. *Marne* rosse, verdastre, variegate, azzurrognole poco micacee al passo della Mauria (A_1-$_2$1310) a Tredolo presso Forni di sotto, in molti punti dell'altopiano di Ampezzo, a Socchieve e nei dintorni di Raveo e di Esemon, nel canal di Gorto.

b. *Dolomia cariata* nelle prenotate località.

c. *Gesso* roseo o bianco, saccaroide, alabastrino, in lenti ed in venuzze colle rocce precedenti. Sono abbondanti le cave di Esemon, nel canale di Gorto, di Roveredo, Ovedazzo, Aupa e Gniva di Resia, nel distretto di Moggio.

d. *Calcare rosso* con noduli limonitici, probabilmente dovuto a piriti decomposte; trovasi ove sono più potenti e più arrossate le marne gessifere, specialmente nei dintorni di Pani di Raveo, movendo verso Socchieve.

I giacimenti gessiferi di questo orizzonte differiscono da quelli del piano n. 8 per l'abbondanza delle marne variegate e ricordano per giacitura e per posizione stratigrafica quelli di Lecco, di Dossena e di Gorno in Lombardia.

19. *Dolomia scagliosa, bituminosa, scisti argillo-carboniosi alternati con calcari a* Vidali di Dogna. — Accompagnando questa zona, assai continua, nel Friuli sino nella classica località di Raibl, ho potuto convincermi della sua equivalenza ai *Thorer-Schichten* ed ai *Megalodon-Schichten* e quindi al *Wettersteiner-Kalk* del signor Mojsisovics. Soltanto nei dintorni di Dogna vi si associano strati abbondanti di piccoli *Megalodon;* altrove rimane costante la fitta stratificazione di questo gruppo, della media potenza di circa 60 metri; specialmente nella valle dell'Aupa, lungo il R. Frondison, a nord-est di Tolmezzo e lungo tutto il versante meridionale della valle di Socchieve. La frana storica del monte Uda, descritta dal Lazzaro Moro (1) ed avvenuta nell'anno 1692, il giorno 15 agosto, colla temporanea conversione di un lungo tratto del Tagliamento in lago tuttora rappresentato da ampia alluvione, devesi appunto ad uno scorrimento di tali scisti e della massa dolomitica sopraposta. Credetti opportuno distinguere questa zona col nome di Vidali, località toccata dalla linea Pontebbana, perchè quivi ogni viaggiatore potrà anche comodamente osservare uno dei più interessanti

(1) Anton Lazzaro Moro, *Dei crostacei marini, che sui monti si ritrovano.* Padova, tip. Seminario 1838.

dettagli stratigrafici, che presenti la regione; tanto sono complicate le bizzarre risvolte degli strati, rese ancor più manifeste dalla freschezza del taglio della montagna e dalla differenza litologica degli strati stessi. Le rocce che vi appartengono sono:

a. *Dolomia giallastra* leggermente marnosa. Sempre alle base della formazione retica in tutto il Friuli.

b. *Calcare nero bituminoso*, nella valletta del R. Frondison ed al Passo di Preone (B_2-790).

c. *Calcare selcifero, arenaceo, scistoso*, col precedente.

d. *Dolomia scistosa, grigio-scura*, clivata in scaglie e spesso cementata a modo di breccia, nel canal di Socchieve, alle origini di val Settimana e presso Claut e Barcis, lungo il corso del torrente Zelline e nella valle di Resia.

e. *Argilloscisti carboniosi*, in interstrati colle rocce e nelle località precedenti.

20. *Dolomia principale.* Formazione Retica. — Comprende le potenti formazioni di calcari più o meno dolomitici a grosse bivalvi (*Dicerocardium, Megalodon, Conchodon*) e per la parte sicuramente triasica equivale alla *Dolomia media* ad *Avicula exilis* e *Delphinula Escheri* del signor Stoppani ed alla *Hauptdolomite* dei geologi austriaci. Osservo come in causa della mancanza nel Friuli degli strati infraliasici (*Kössener-Schichten; Starhenberger-Schichten und Lithodendron Kalk; Gruppo dell' Azzarola*) con tanto vantaggio della geologia lombarda illustrati dal chiarissimo mio maestro, non abbia potuto sino ad ora distinguere in questa provincia le due dolomie, comprese nella formazione retica, cioè la triasica e la infraliasica. Ma però mi sono persuaso che una chiara discordanza stratigrafica, tra le inferiori dolomie a *Megalodon* e *Delphinula* e le superiori meno magnesiache, a *Conchodon*, esista ovunque; e questo fu prima avvertito dal signor D. Stur nella citata Memoria. Il monte Amariana, dal quale proviene un assai bello esemplare di *Conchodon* esistente nel gabinetto del R. Istituto tecnico di Udine, ed i monti Plauris, Lavri e S. Simeone presentano appunto questa discordanza, che è resa anche più manifesta da una maggiore uniformità e spessezza degli strati di calcare bianco della formazione superiore. Ma e per la scabrezza di quei siti e per la difficoltà inerente al compito di separare due formazioni assai disturbate e così simiglianti, non ho potuto distinguerle nemmeno nelle località percorse dagli spaccati ed è questa una delle moltissime lacune, che lascio a coloro che dopo di me studieranno la regione carnica. Ai quali altresì ricordo come il sullodato signor Stur sia stato tanto fortunato di trovare al M. Verzegnis la *Plicatula intustriata;* fossile, come è noto, caratteristico dell'infralias prealpino, e raccomando come assai opportuna una località presso alle Crode di Venchiaret (A_2-1590) alla portata di chi passa da Forni di sotto alla valle della Viellia. Vi fui in un'ultima mia escursione nel Friuli e rinvenni qualche traccia di brachiopodi e crinoidi. Attendo pure che uno studio chimico possa svelare le differenze notevolissime, che devono sussistere nella composizione dei varî piani di questa immane pila di calcari e di dolomie, la quale misura almeno 1500 metri di potenza. All'osservazione del litologo non presenta che le seguenti varietà:

a. *Dolomia farinosa con Delphinula e Megalodon*, distintissima in val di Cosa, nella valle dello Zelline, nei monti di Moggio; normalmente la più profonda nella massa della formazione retica.

b. *Calcare bianco* con venature cloritiche, presso Raccolana, Moggio, Venzone, Caporetto.

c. *Calcare roseo a spongiarii*, al passo di Nevè, al monte Canino (C_2-2479) ai monti Lavri e Plauris.

d. *Marne giallastre fetenti* coi *piroscisti.*

e. *Piroscisti o Scisti bituminosi.*

Fermo l'attenzione degli industriali sulla esistenza, nel piano superiore della formazione retica, di una zona di *Scisti bituminosi*, nei quali, se di origine organica, non saprei scorgere che l'avanzo di sargassi carbonizzati. Questa zona attraversa tutto il Friuli e comprende uno o due strati di un combustibile affatto scevro di solfuri, spesso assai ricco di materie volatili, dell'apparenza che varia da quella del *Disodilo* a quella della lignite xiloide, della potenza media nella superficie esplorata di uno a due metri. Ho visitati i seguenti punti di affioramento, dei quali sottolineo quelli, che mi sembrerarono più promettenti. *R. Resartico* o *R. Sarai* presso Resiutta; alla casera *Navis* in val Venzonazza; al R. Leale presso Avasinis; al monte *Podeson* a nord-est di Claut (A_2-633) in valle di Selis presso Tramonti, in valle di Viellia ed alla Forca del Becco, parimenti nel bacino del torrente Meduna. Dal monte Scabrina di Resia ebbi poi due bellissimi saggi di asfalto e di breccia cementata da bitume vischioso.

Analisi istituite nel laboratorio chimico di Udine sopra alcuni campioni di tali piroscisti, hanno dato i seguenti risultati:

1. In straterelli bruni, sottilissimi e contorti.
2. In piccoli strati, alternati con calcare.
3. Da uno strato della potenza di 0.60; tutti della cava aperta dal signor Barnaba Perisutti di Resiutta alle origini del R. Resartico (a circa 1241^m sul 1° m°).
4. In straterelli potenti in complesso M. 0.40, contorti, nel calcare alla casera Navis (p. Campo) in val Venzonazza.
5. In banco potente M. 0. 50 ma poco continuo, tra monti Verzegnis e Valcalda.
6. In un banco come sopra alla località detta *Pecolas* lungo il torrente Leale.

	1	2	3	4	5	6
Acqua igroscopica	6.2	1.1	4.5	9.0	1.00	2.0
Materie volatili combustibili	54.8	40.8	21.8	64.0	54.00	68.0
Residuo (debolmente alcalino)	39.0	58.1	73.7	27.0	45.00	30.0
	100.0	100.0	100.0	100.0	100.00	00.0
Calorie sviluppate	3236	2179	1415	2806	2770	3346

Epoca Liasica — *Lias inferiore.*

21. *Calcari grigi ad arnioni od interstrati silicei*; *calcari marnosi a Rhynchonella*; *calcari oolitici.* — Quantunque questa zona sia ancora distinta piuttosto da caratteri litologici che da fauna speciale, tuttavia ho speranza che ulteriori studî valgano a definirla; quando qualcuno esplori più di quanto io ho potuto fare le montagne, che separano la valle Socchieve dalle prime origini delle correnti, che sboccano nel piano tra Montereale ed il Tagliamento. Dovunque nel Friuli è dessa caratterizzata dal contenere noduli di varia grossezza e di variatissima forma di piromaca, i quali non saprei se indichino un'originaria sedimentazione selciosa o piuttosto dipendano da una concentrazione posteriore; come sarebbe dimostrato dall'essere pure di selce i noduli dei pochi fossili, che osservai lungo questa zona, specialmente nella valle di Viellia ed al passo di Venchiaret (B_2—1145) È probabile che questa zona corrisponda alla *Farmazione di Saltrio* del signor Stoppani. Noto le seguenti rocce e le rispettive località, ove le ho raccolte.

a. *Calcari grigi con piromaca*, nei dintorni d'Erto, Casso, Cimolais, Claut (A_2-623), in val di Tramonti alle prime origini in Viellia ed al monte Resto, al Verzegnis (B_2-1814), nel canal S. Francesco (torrente Arzino), ai monti S. Simeone o Festa (C_2-1455), Chiampon (C_2-1714), Laschiplas (C_2-1650), Montemaggiore (C_2-1616) e monte Stole (D_2-1500), presso Caporetto sull'Isonzo.

b. *Calcari oolitici* talora bianco-candidi, come nei dintorni di Venzone, più spesso grigiastri o giallognoli; essi si accompagnano sempre e si constratificano cogli accennati calcari.

c. I calcari marnosi a *Rynconella* ed a crinoidi furono da me osservati soltanto al monte Najarda e nel versante settentrionale del monte Verzegnis (B_2-1914).

Lias superiore.

22. *Calcare rosso mandorlato o cloritico; calcari selciferi rossi; brecce ad* Ostrea Marsii? — Di questo piano, sicuramente stabilito in base ad alcune località fossilifere ed alla più distinta apparenza litologica, parmi abbastanza sicura l'equivalenza al calcare rosso liasico della Lombardia; mentre non so ancora quale dei diversi calcari rossi ammonitici delle venete prealpi ne rappresenti la continuazione. Nei dintorni di Erto si raccolsero parecchie specie, delle quali, stante la non buona conservazione degli esemplari, non ho potuto sinora determinare che le seguenti; *Amm. bifrons,* Brug.; *Mercati* Hau; *Nilsonii* d'Orb.; *Crassus* Quenst.; *Desplacei* d'Orb.; *Orthoceras indunensis?* Stopp. Le rocce sono:

a. *Calcare brecciato o mandorlato*, a varî gradi di tinta, dal rosso mattone al rosso vinato, al giallo ocraceo; è il più comunemente fossilifero e si accompagna in parecchie zone attraverso tutta la regione calcareo-dolomitica della Provincia (per le località vedi la tavola degli spaccati).

b. *Calcare brecciato, cloritico*; si accompagna col precedente ed è del pari fossilifero nei dintorni di Erto ed ai monti Ricitume e Fratta, a sud di Claut.

c. *Brecce ad* Ostrea Marsii? Sono di colorito verdastro e furono fino ad ora osservate soltanto nella porzione superiore della valle Venzonazza.

Epoca Giurese

23. *Oolite superiore (Kimmeridgiano-Malm.) e Titonico.* — Il chiarissimo mio amico, prof. cav. G. A. Pirona sta per pubblicare una assai accurata monografia paleontologica di questi piani, che nel Friuli assumono una fisonomia litologica e paleontologica assai diversa che nel rimanente del Veneto. In una sua recente pubblicazione (1) egli distingue inferiormente un calcare finamente oolitico ed un calcare finamente scistoso, che affiora presso Ospedaletto, presso il R. Novelletta, confluente del Melô, e sui fianchi del monte Quarnan di Gemona e li riferisce, appoggiandosi anche all'autorità del signor Suess, al Kimmeridgiano. Superiormente poi a questo piano, ancora poco noto, colloca i calcari a Menilite, le marne compatte e le brecciole calcareo-selciose, zeppe di fossili e specialmente di *Nerinee* e di corallari, dei dintorni di Polcenigo e di Dardago. Il dotto mio amico determinò 70 specie di molluschi, la massima parte *Nerinee,* che costituiscono una fauna interessantissima e nuova nella geologia prealpina; e di queste specie dà la nota nell'accennato scritto, rilevando la comunanza di molte di esse con quelle della *Ciacca* di Palermo, illustrate dal chiar. prof. Gemellaro.

Le rocce sono le seguenti:

a. *Calcare compatto* bianco o grigio, spesso straricco di fossili, alle falde orientali del monte Cavallo, tra la Santissima ed il piano di Longarezze e nella valletta di S. Tomè (A_3, presso A_4).

b. *Calcare marnoso* a Menilite con Nerinee parimenti silicizzate, col precedente.

(1) G. A. Pirona, *La Provincia di Udine sotto l'aspetto storico e naturale*, Udine, 1877. Tip. Doretti e Socî.

c. *Brecciole calcareo-selciose* a pasta cloritica e marnosa. Sono dette in sito *pietre sarasine* e sono esse pure stramicche di fossili. Formano il piano superiore nelle stesse interessantissime località.

Epoca della Creta

24. *Calcari compatti od oolitici, con scarse* Rudiste, *prevalentemente delle tribù delle* Caprinellidi. *Filliti e calcari bituminosi* (*Comen-Schiefer* dei geologi austriaci). — In mancanza di sufficienti nozioni sui varî piani, di cui si compone la massa dei calcari cretacei, che sta di sotto alla zona di massimo sviluppo delle Rudiste, devo temporaneamente associare le rocce seguenti, che potranno certamente riferirsi a parecchi orizzonti.

a. *Calcari compatti* grigiastri e giallognoli, uniformi di grana e talora a vene *cloritiche*, con *Caprotine* al ciglio pel *Col dei Schiosi* di Polcenigo, al Fajeras, che sta più a nord, e nei dintorni di Tarcento e Torlano.

b. *Calcari bituminosi* con filliti. Il tratto di roccia dirupata, che si scorge da Polcenigo al così detto *Torrione del Fajeras*, presenta una zona di calcari bituminosi con impronte di felci, nelle quali il chiarissimo Barone A. de Zigno ha riconosciuto delle forme spettanti al cretaceo medio.

c. *Calcare grossolano* bianco, assai tenace ma tenero, sì da potersi lavorare al tornio e ridurre in tubi assai opportuni per condotta di acque. Tali tubi si fabbricano in Maniago dalla ditta Antonini con una roccia proveniente dal monte Jouf, la quale poi affiora identica colle accennate filliti nei dintorni di Polcenigo.

25. *Calcari compatti con abbondanti Rudiste; calcari a* Nerinee *dell'altipiano del monte Cavallo.* — Anche di questo piano si è con molto vantaggio della geologia e della paleontologia occupato il mio egregio amico e tanto nello scritto succitato quanto nelle anteriori pubblicazioni, di cui la più importante riguarda la fauna di Medea (1) lo riferisce al Turoniano d'Orb.; accennando alla probabile esistenza di qualche lembo di *Cenomaniano*. Delle numerose località fossilifere tre sono le più importanti, cioè il *Col dei Schiosi* e dintorni, nel gruppo del monte Cavallo (A_3-2250) con *Nerinea Requieniana* d'Orb., *N. Uchauxiana* d'Orb., *N. Fleuriausa* d'Orb.; le cave di Ponte Iracle sopra Medun, (B_3-M 270 B_3-sbocco della Valle di Sesis nella valle del torrente Meduna.) con *Hippurites cornu-vaccinum* Brongn., *Hip. dilatatus* Defr., *Hi. Sulcatus* Defr., *Caprina Aguilloni* d'Orb.; ed al colle di Medea (C_4-140) a sud di Cormons con *Sphaerulites Meneghiniana* Pir., *Pasiniana* Pir., *ponderosa* Pir., *Guiscardiana* Pir., *Radiolites Zignoana* Pir., *Taramellii* Pir., *fascicularis* Pir., *Synodontites Stoppanianus* Pir., *Catopygus nucula* Tar., *Medeae* Tar., *Toxaster* sp. etc.

Le varietà di rocce, osservate lungo questa zona calcare sono:

a. *Calcare grossolano* a foraminiferi di val di Montana in val Cergneu presso Nimis (C_3N210), che però riferisco con dubbio alla creta; potendo anche rappresentare una lente di calcare, inviluppata od immediatamente ricoperta dalla marna rossa scagliosa, eocenica, di cui vedremo più sotto.

b. *Calcare grigio o giallastro*, compatto, più o meno sonoro; con *Rudiste*, spesso così abbondanti e frantumate da ridur la roccia ad una brecciola organica, simile a quella assai nota di Nabresina presso Trieste.

c. *Calcare ad Ostrea*, ai monti di Toppo e nel Carso monfalconese.

d. *Calcari oolitici;* esclusivi, per quanto io sappia, all'altipiano del monte Cavallo e ricchi di Nerinee, Acteonelle, Rudiste etc.

(1) A. Pirona, *Le Ippuritidi del Colle di Medea*, con 10 tavole. — Mem. R. Istituto Veneto di Scienze. Vol. XIV, 1869.

26. *Calcari brecciati,* con interstrati di *marne scagliose rosse, micacee.* — Questa zona comprende degli strati, i quali, a mio parere, hanno assunto l'apparenza di breccia per subìta fratturazione e conseguente cementazione; ma che conservano i propri fossili, quali le *Radioliti,* le *Sferuliti* e le *Terebratule* cretacee. Venne distinta, or sono molti anni dal signor D. Stur (1) col nome di *calcari di Wolzano* (D_3-W 195), delle località ove si presentano più sviluppati e d'onde questa zona si dirige ai dintorni di Idria. Essa sembrami esclusiva alle Alpi Giulie; a meno che non sia rappresentata da qualche lembo di brecce analoghe, che ho rimarcato nella valle dello Zelline a levante di Claut e nel canale di Vito d'Asio. Gli interstrati marnosi, i quali accennano ad un preludio della formazione seguente, si osservano evidentissimi nei dintorni di Wolzano, nei monti Mia, Matajur e nella valle del Natisone. (Vedi le tavole degli spaccati).

Gli equivalenti del Senoniano e del Daniano mancano al Friuli ed anche dalla disposizione stratigrafica è accertata la più generale discordanza tra la serie cretacea e la eocenica. Questa discordanza si osserva anche più ad oriente nell'Istria e nella Dalmazia, ad onta che quivi esista un piano eocenico, che manca probabilmente nel Friuli, cioè del *Liburnico* del signor Stache (2) e perciò, considerata anche la natura di deposito di estuario di quest'ultimo piano, deve indursi che questa regione abbia attraversato un periodo continentale, allo scorcio dell'epoca cretacea; del quale periodo anche ho parlato nella prima parte di questo scritto e più diffusamente nella citata Memoria sulla storia geologica dal Margraviato d'Istria.

ERA CENOZOICA

Epoca eocenica. — *Eocene inferiore e medio.*

27. *Marne rosse scagliose, Scaglia* (partim) del Veneto occidentale e *Tufi di Spilecco* nel Vicentino. — Le ricerche stabilite sino ad ora non valsero a scoprire nella Provincia di Udine la continuazione delle forme litologiche e della fauna (calcari fetenti *a Melania e Chara*) del *Liburnico;* mentre dimostrarono come, partendo dai dintorni del monte Santo di Gorizia fino al Piave, gli strati più profondi dell'Eocene siano costituiti da un deposito marnoso ed arenaceo, intensamente colorato in rosso mattone o vinato, il quale non si può separare dalle rocce eoceniche; stantechè si alterna in più siti con arenarie e marne nummulitiche, identiche a quelle dell'Eocene medio (Vedi tavole degli spaccati). Parmi che in questa formazione, a questo livello nelle prealpi venete assai più sviluppata di quanto comunemente si ammetta, si possa riconoscere una serie di espandimenti sottomarini di fanghiglie vulcaniche, in presenza delle quali veniva sospesa ogni vegetazione od animalizzazione; sicchè queste rocce, ove sono più marnose e più intensamente colorate, non presentano alcuna traccia organica. E ritengo che questa attività vulcanico-periferica fosse contemporanea alle

(1) D. Stur, *Das Isonzo-thal, von Flitsch abwärtz bis Görz, und die Umgebungen von Wippach, Adelsberg, Planina und Wochein.* (Jahrbuch der K. K. geolog. Reichsanstalt. Jahrg. 1858. Wien).

(2) D. Guido Stache, *Die Eocen Gebiete in der inner Krain und Istrien.* Jahrbuck K. K. geolog. Reichsanstalt, X, XIV, e XXII Jahrgange.

prime emersioni doleritiche del Vicentino, di cui le colate si alternano coi calcari ad *Alveolina* e colle filliti notissime di Val d'Agno. Nè mancano i prodotti di un' attività gayseriana; imperocchè al monte S. Simeone rinvenni tra queste marne, che quivi ricoprono il calcare liasico, della selce spugnosa in concrezioni di grosso volume. Le formazioni bituminose poi sono riserbate ad un livello più elevato e sembrano aver chiuso temporaneamente, nell'area del Friuli, ogni manifestazione vulcanica, che vedremo poi ridestarsi, con un prodotto analogo a quello dalla *scaglia rossa*, in un periodo cenozoico meno antico. Noto le località, attraverso le quali ho accompagnato questo piano, che mi parve di un'importanza più che locale.

a. *Marna più o meno arenacea, rossa, a frattura scagliosa* ad Erto e Casso, Cimolais, Claut e val Clautana, valle del torrente Chiarsone, molini di Robanis presso Medun (B_3-M 270), valle del torrente Colvera, sbocco del torrente medesimo presso Maniago Grande, dintorni di Clauzzetto, canale di Vito d'Asio, bacino di Chianet presso Peonis, monte S. Simeone, passo di Carnizza dalla valle di Resia in valle di Uccea, val di Montana, monte Mia, monte Matajur, monte Colaurat, Albana di Prepotto, falde occidentali e meridionali del monte Corada, a nord e nord est di Gorizia alle falde del monte S. Valentino ed alle sorgenti dell'acqua potabile che si conduce in città. Quivi presso, la formazione si sfuma probabilmente col piano *liburnico*, che ricomincia nei dintorni di Trieste, alla Postoina e nei pressi di Adelsberg.

b. *Calcari arenacei*, rossigni o giallastri, alternati colla roccia precedente in quasi tutte le accennate località. Le dette due rocce caratteristiche di questa formazione si alternano, probabilmente con strati di periodi successivi, i quali hanno la fisonomia del *Flysch alpino*; come si può osservare ad Erto e Casso, Medun e Barcis, nei dintorni di Attimis, a Centa di Prepotto, a Montefosca di S. Pietro degli Schiavi, al monte Corada e nei dintorni di Gorizia.

28. *Conglomerati calcareo-marnosi*, spesso con grossi blocchi di calcare cretaceo o liburnico; *brecciola calcareo-marnosa* (PIETRA PIASENTINA); *Calcari marnosi con* PIROSCISTI. — Qualora fosse rimosso ogni dubbio di un' origine endogena di questi conglomerati, sarebbe a riconoscere nella loro presenza una conferma o meglio una conseguenza dell' indole generalmente continentale dei depositi formati allo spuntare dell'era cenozoica nella regione giulio-carnica. Ad ogni modo è ben singolare questa formazione, costituita da massi angolari o tondeggianti d'ogni volume, spesso coi loro fossili conservati nei più minuti dettagli, ma infranti e compresi in un abbondante cemento fangoso, talora assai poco compatto, in origine finissimo, azzurrognolo, uniforme sopra un' area estesissima e dovunque assolutamente privo di fossili propri. Il mio egregio amico cav. G. A. Pirona ha scritto a più riprese dei fossili cretacei compresi in questo conglomerato, tra i quali ha scoperto anche tre bellissime specie nuove, che mancano nelle porzioni residue della formazione cretacea, affiorante nel Friuli e ciascuna di esse è caratteristica di un nuovo sottogenere (*Hippurites polystylus* Pir., *Radiolites forojuliensis* Pir., *Hippurites Giordanii* Pir. Nei dintorni di Cividale, verso Mezzomonte, raccolsi poi dei massi di calcari con *Foraminifere, Melaniae* e *Lucinae* del Liburnico, identici a quelli di Sistiana presso Trieste e dell'Istria. Questo conglomerato rappresenta l'estremo di una serie di rocce frammentizie, ad elementi quasi assolutamente calcari nei piani inferiori e gradatamente commisti ad elementi selciosi nei piani superiori. Si hanno quindi delle brecce di varia grana, delle arenarie, dei calcari marnosi, delle puddinghe; rocce tutte di distinta compattezza, nelle quali trova svariato materiale l'arte edilizia.

a. Il *conglomerato pseudo-cretaceo*, sempre alternantesi con letti di calcare marnoso, affiora in

una serie di località dal M. Quarnan presso Gemona fino al monte Corada ed attraversa le valli del Torre, del Cornappo, della Malina, del Natisone e dell'Iudrio, con vario andamento, dipendente dalle condizioni stratigrafiche della formazione eocenica.

b. La *brecciola calcareo-marnosa (pietra piasentina)* ha un colorito scuro, macchiettato di chiaro per gli elementi calcari da cui è costituita. È un ottima pietra di costruzione ed anche di ornamentazione; senonchè ha una tinta piuttosto severa, la quale imparte quel così distinto carattere alle migliori abitazioni delle città di Udine e dei paesi del Friuli orientale. Questa roccia presenta tutte le desiderate gradazioni di grana e si alterna sempre coi calcari marnosi o colle marne sciolte, nelle quali non trovai alcuna traccia organica. Nelle arenarie, che del pari si alternano colle brecciole nei dintorni di Attimis e Faedis, osservai frequenti *Helmintoidea* e *Retepora*. La complessiva potenza di questa formazione misura di certo oltre 300 metri.

c. Il *calcare marnoso*, più o meno compatto, ha un color plumbeo, piccole tracce di mica e frequenti arnioni piritosi, i quali decomponendosi contribuiscono alla erodibilità della roccia. Esso va gradatamente pigliando il sopravento sulle precedenti rocce frammentarie, mano mano che gli strati si fanno più recenti; sino a passare alle arenarie e marne del *Flysch alpino*, nel Friuli sviluppatissimo. Le marne compatte, che ponno utilizzarsi come materiale per cemento idraulico, affiorano specialmente nei dintorni di Collalto, Faedis, Canebola, Pedrosa, Cividale e nel Coglio.

Il sig. prof. Pirona afferma che nei dintorni di Spessa e di S. Leonardo, nel distretto di Cividale, nelle marne azzurrognole eoceniche si rinvenne del mercurio nativo, e raccolse eziandio degli esemplari, che mi mostrò, di dette rocce con globetti di questo metallo. Di analogo giacimento fui informato nei dintorni di Montemaggiore, alle falde del Matajur e quantunque non abbia potuto verificare il fatto, pur lo ritengo probabilissimo; non essendo infrequenti questi sporadici rinvenimenti di più o meno vaste deposizioni di solfuro di mercurio o di mercurio nativo nelle rocce eoceniche. Il signor Hauer infatti accenna ad assai analoghi giacimenti nelle marne della Boemia e sono probabilmente dell' epoca stessa i depositi cinabriferi del Monte Amiata, in Toscana. Non è certo molto facile stabilire quali nessi abbiano tali giacimenti friulani col deposito cinabrifero d'Idria, il quale dista da quei dintorni oltre trenta chilometri ed è compreso in rocce paleozoiche; non essendosi rinvenuta alcuna traccia di minerali di mercurio nelle rocce mesozoiche della intermedia vallata del fiume Isonzo.

d. I *piroscisti* sono assai abbondanti ad un livello intermedio tra il massimo sviluppo dei conglomerati e quello dei calcari marnosi e le migliori varietà furono osservate a Flaibano, Castel Savorgnano di Tarcento (C_3-F229), Taipana di val Gorgone (C_2), al monte Foraunir a nord di Nimis (C_3-N210) presso Attimis ($C_3$186), al R. Musile, presso Subit (C_3), a Canebola (C_3, a sud di M. Jouanes), a Montefosca di S. Pietro, a Mezzomonte di Cividale (D_3, ad est di 633) e sotto Vercoglia, a nord di Cormons (D_3, presso D_4). Le migliori varietà di val Gorgone, analizzate nel laboratorio chimico del R. Istituto tecnico di Udine, hanno dato i seguenti risultati analitici:

	[1] da Taipana (varietà migliore).	[2] idem (varietà peggiore).	[3] da Subit presso Altimis.
Acqua igroscopica	4.0	3.0	7.0
Mat. volatili combustibili	22.4	12.5	37.1
Residuo (marnoso)	73.6	84.5	55.9
	100.0	100.0	100.0

29. *Calcari e conglomerati nummulitici a* Conoclypus e Serpula spirulea. — Cogli strati inferiori della zona fossilifera dell'eocene friulano si può costituire un orizzonte equivalente a quello di *Chiampo* e *Puli* nel Vicentino ed a quello di *Pedena, Albona* e *Pinguente* nell' Istria ed Isola Veglia, che corrisponde ai depositi di *Biarritz* in Francia.

Gli strati più recenti dei conglomerati anzidetti già presentano qualche piccola nummulite, dei radioli di echinidi e qualche indeterminabile nucleo di bivalve; e sono parimenti nummulitici i calcari, che si appoggiano immediatamente alla formazione cretacea al Colle di Medea ed affiorano a S. Fosca di Borgnano. Ma la località, ove questo orizzonte affiora con maggiore ricchezza di petrefatti, è nei colli di Buttrio, presso

la villa Ottelio. Quivi prevalgono gli *Echinidi*, oltre alle numerose specie di *Orbitoides, Alveolina, Operculina,* e *Nummulites* ed abbonda pure la *Serpula spirulea*, che non raccolsi in altro piano eocenico dalla regione. Le specie caratteristiche, oltre a questo anellide, sono il *Prenaster alpinus* Des., *l'Echinolampas subsimilis* Agass., il *Cyphosoma cribrum* Agass., il *Conoclypus conoideus* Lamk ed il *Conocrinus Thorenti* Blain. Ritengo questo piano assolutamente distinto e più antico rispetto al piano madreporico, di cui vedremo più sotto. Le rocce che vi spettano sono:

a. *Brecciole nummulitiche*, ai colli di Buttrio, al colle di Buja (C_3-B 298) nei dintorni di Tarcento e nell'alta valle del Torre presso Cesariis, presso Faedis, a Mezzomonte di Cividale, a Sinico e S. Floriano nel Coglio ed a Peuma di Gorizia; e nel Friuli occidentale, a Claut, Barcis, Maniago, Medun, S. Rocco di Forgaria, Clauzzetto e Vito d'Asio per Anduins.

b. *Arenaria a fucoidi*, clivata in parallelepipedi, basaltizzata per idratazione ed ossidazione in masse globulari, a strati concentrici, in banchi assai tormentati. È la zona del *Masegno* nell'Istria e nel Triestino.

c. *Marna plumbea*, sciolta o compatta, a fucoidi od a rarissimi corallari, con nuclei piritosi; corrisponde al Tassello delle regioni più orientali e colle arenarie accompagna in tutte le suaccennate località le brecciole fossilifere. Queste ultime rocce passano al piano seguente, che sembrami mancare nell'Istria, ma che corrisponde assai bene a dei livelli già stabiliti nelle prealpi venete.

30. *Puddinga quarzosa; arenarie e marne* come nel piano precedente; *banchi madreporici.* — Le arenarie e le marne del *Flysch* si sviluppano assai, al di sopra delle *brecciole* fossilifere e spesso le prime passano a brecciole e puddinghe a ciottoli diasprigni di vario colore, più o meno grossolane, impiegate come eccellenti pietre da macina. Anche queste puddinghe sono frequentemente nummulitiche e nel gruppo dei colli di Rosazzo, Brazzano e Cormons contengono altresì abbondantissimo il *Cerithium cornucopiae* Lamk e si associano a banchi madreporici, ricchissimi di spoglie organiche. Di questi banchi io diedi alcuni cenni in parecchi miei scritti e specialmente in una Monografia della formazione eocenica friulana (1) e delle specie coralline pubblicò uno studio dettagliatissimo l'egregio geologo e mineralogo cav. A. d'Achiardi (2) e da questo studio, come dalle relazioni stratigrafiche da me rilevate nonchè dal carattere delle specie di molluschi, di Echinidi e di Radiolari associati alle madrepore, viene stabilita l'equivalenza di questo piano al livello di *S. Ilarione* nel Vicentino ed assicurata la sua spettanza all'*Eocene medio.*

Ricordo come nei dintorni di Resiutta sianvi delle arenarie e marne e delle puddinghe nummulitiche, con corallari e con *Serpula spirulea,* le quali rappresentano la continuazione del lembo eocenico del passo di Cernizza. Il mio amico, cav. Camillo Marinoni, si occupa al presente dello studio dei fossili abbondantissimi, che quivi ha raccolto e dai risultati, che da tale lavoro saranno per derivare, si potrà stabilire se questo giacimento appartenga al piano di Rosazzo oppure a quello di Buttrio.

a. Le *arenarie* e le *marne* sono identiche ovunque, nell'area segnata nello schizzo orografico con tinta dell'eocene.

b. I *calcari madreporici* si osservano presso l'Abbadia di Rosazzo, alla villa Macorig di Brazzano, al monte Corin, al *Col dei Soldi* ed a Russitz, nei dintorni di Cormons.

(1) T. Taramelli, *Della formazione eocenica nel Friuli.* Atti della Accademia di Udine. Vol. I, 1870.

(2) A. d'Acchiardi, *Corallari fossili del Friuli.* Atti Soc. Toscana di Scienze Naturali. Vol II fasc. 1°-3°. Pisa, Nistri, 1875.

c. Tra le *puddinghe* ad elementi più sciolti e più grossolani osservai dei ciottoli di calcare cretaceo e liburnico, forati da *foladi*, nei dintorni di Rocca Bernarda e di Oleis, presso Rosazzo.

d. Le *puddinghe quarzose* compatte, a cemento calcareo-marnoso, spesso con piccole Nummuliti e che si adoperano per macine, si scavano nei dintorni di Artegna e Magnano (C_2, presso T. Orvenco), di Tarcento, di Cornappo (C_3 a nord di Nimis, N 210), di S. Leonardo degli Schiavi e si osservano anche nel Collio e nei colli di Brazzano (D_4, ad ovest di Cormons, C54).

N. B. Mancano in Friuli dei piani, che si possano riferire all'Eocene superiore ed all'Oligocene ed anche nelle località dove affiorano contemporaneamente le rocce del *Flysch* e le seguenti, assai distinte, del Miocene, osservai la più chiara discordanza. Epperò si deve indurre un già pronunciato sollevamento della regione allo scorcio dell'epoca eocenica, il quale tolse il parallelismo delle formazioni marine sulle aree ancora sommerse o che si sommersero posteriormente; in attesa di un'ultima, decisiva emersione, avvenuta in epoca miocenica.

Miocene inferiore (Elveziano e Langhiano)

31. *Glauconie e molasse* a SCUTELLA SUBROTUNDA e SCHIZASTER DESORII. *Terreno siderolitico* e *quarzo pulverulento, in arnioni nei calcari cretacei.* — Se male non mi apposi negli accennati parallelismi di questo gruppo, esso verrebbe ad assumere una grande importanza nello studio della geologia e più ancora della orografia di questa contrada. Le glauconie a *Scutella*, con quelli stessi fossili che distinguono il piano di *Schio* nel Vicentino e che tra il Brenta ed il Friuli caratterizzano le assai analoghe rocce del vallone Bellunese e dell'Alpago, non lasciano dubbio sulla loro epoca ed i geologi hanno accettato il loro parallelismo. A proposito del *Terreno siderolitico*, le mie proposte non furono troppo accette; e se non facessi troppo calcolo dell'appoggio concesso alla mia opinione dal chiarissimo mio maestro nel suo *Trattato di geologia*, certo mi sarebbe rincresciuto di vedermi costretto a citare la più recente opinione del *Neumayr*, che riguarda il terreno stesso come il residuo della parte ferruginosa delle foraminifere comprese nel *calcare cretaceo* (il quale calcare contiene delle tracce di ossido di ferro così scarse che il chimico non riesce sempre a scoprirle), ed il vedere taciuta o trascurata l'opinione stessa da altri, che hanno trattato di analoghi depositi, assai sviluppati, sebbene di epoca molto più recente, nell'Italia centrale. Se non che ultimamente il signor Cosimo cav. De-Giorgi (1) anche prima di conoscere le mie idee a questo riguardo, venne a conclusioni analoghe, studiando la geologia della provincia di Lecce e tanto pei suoi scritti come per indicazioni, che egli si compiacque di dirigermi, mi sono persuaso della importanza di questa formazione e spiacemi soltanto di non aver potuto dare alla mia idea il necessario sviluppo con più vaste cognizioni (2).

Le rocce di questo piano sono le seguenti:

a. *Arenaria verde-scura*, nei dintorni di Barcis, Medun e Cavasso di Maniago; *giallognola* nelle località medesime, nei dintorni di Vito d'Asio e Clanzzeto, presso Forgaria ed a Pozzuolo nel Friuli orientale.

b. *Molassa cerulea*, piuttosto sciolta, colla precedente nelle stesse località. Contiene a preferenza gli *Schizaster* ed i *Pecten* più dilicati.

(1) C. D.r De-Giorgi. *Note geologiche sulla provincia di Lecce*; tipog. Garibaldi, 1876. — *La terra rossa nel Leccese*, lettera al prof. Taramelli. Bollett. R. Comit. geol. ital. Vol. VII° p. 294, 1876.

(2) T. Taramelli. *Appunti sulla storia geologica del Margraviato d'Istria*, con tavola. Atti del R. Istituto veneto. Serie IV Vol. III, 1874.

c. Terra rossa, o argilla con un medio contenuto di 26 % di sesquiossido di ferro; spesso con *ooliti* e *pisoliti limonitiche* e passante a sferosideriti compatte e ad argille diasprigne, al colle di Medea, specialmente sul versante settentrionale, alle falde dei colli di Polcenigo, nei dintorni di Vito d'Asio ed alle falde dei monti di Forgaria verso il Chianet di Peonis.

d. Quarzo pulverulento *(Saldame)*, a minuti cristalli dodecaedrici, con tracce di acido borico, in varî arnioni irregolari nel calcare cretaceo di S. Martino di Sarone. Si scava attivamente e serve nelle fabbriche di conterie in Venezia, al pari di quello identico di Pola e di Dignano, nell'Istria meridionale.

Miocene superiore (Tortoniano)

32. *Conglomerati a grossissime* Otree; *molasse e marne ligni ifere.* Zona a Cerithium margaritaceum, Turritella Archimedis ed Ancillaria glandiformis. — Questa formazione rappresenta la graduale riduzione allo stato di estuario di un golfo marino, che all'epoca miocenica aveva ad un dipresso il perimetro dell'attuale pianura friulana e di cui le spiagge ed i depositi, nel Friuli occidentale, rimangono ancora elevati sull'attuale livello marino di circa 500 metri. Gli strati, analogamente a quanto si osserva nelle formazioni mioceniche, non solo del Veneto ma eziandio di tutto il sistema apenninico, sono fortemente inclinati e talora arrovesciati. Come dissi nella prima parte di questo scritto, hanno costantemente una direzione nord est, parallela a quella prevalente nell'orografia delle prealpi venete e dell'estremo settentrionale dell'Adriatico. Nel Friuli sembrano appoggiarsi ad un sepolto rilievo, che sporge il suo vertice al colle di Pozzuolo. Sonvi anche dei piani di salto, i quali accennano a fratture e scorrimenti analoghi a quelli, che si osservano nella formazione del bacino di Vienna. È poi singolarmente da rimarcarsi la mancanza di questo piano, o meglio dei suoi equivalenti marini, in tutta la regione delle Alpi Giulie. Gli elementi dei conglomerati sono quasi esclusivamente calcari, e mancano o sono assai scarse tra essi le rocce del bacino carnico, che a quell'epoca doveva essere meno ampiamente escavato. I ciottoli sono alcune volte improntati, ma meno frequentemente che nelle non lontane colline dal Trevigiano, costituite da conglomerati identici ed aventi la stessa direzione di sollevamento.

La *Lignite* affiora in numerosi banchi irregolarissimi e poco estesi, quasi sempre inclusa in strati marini, tranne che a Budoja ed al Colle di Ragogna (B_3-385), dove, anche stratigraficamente, mostra di appartenere ad un più recente orizzonte, diversamente sollevato. Questi banchi poi riposano sopra letti di marne cerulee o biancastre, a fossili palustri. Ritengo che in generale i banchi lignitici, compresi in rocce marine, rappresentino delle zattere carbonizzate, che venivano fluitate dalle torrenziali correnti, le quali scendevano dalle già emerse ed abbozzate montagne del Friuli. Modo di origine, che certamente non promette ai futuri tentativi di escavo una riuscita migliore di quella, che ebbero gli assaggi praticati in questi ultimi anni ad Osoppo, Manazzons e Castelnovo di Pinzano, Paludea, Peonis, Forgaria, Ragogna, Budoja, Sarone e Caneva di Sacile. Il combustibile è di buona qualità, come risulta dalle analisi istituite nel laboratorio Chimico del R. Istituto tecnico di Udine, delle quali raccolgo qui sotto i cipali risultati.

a *Lignite* nera *(gajetto)* di Peonis (B_2, ovest di P 197).
b *idem* bruna, meno compatta, *ibidem.*
c *idem* in straterelli, simile nell'aspetto alla prima.

d *Lignite* al colle di S. Rocco, presso Osoppo.
e *idem* bruna, xiloide, di Castelnovo di Pinzano.
f *idem* in straterelli a Caneva di Sacile.
g *idem* di Budoja.
h *idem* di Ragogna, dagli strati più potenti, a letto marnoso palustre.
i *idem* in pezzi isolati nella molassa di Sarone.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Acqua igroscopica	12.05	10.80	10.50	3.20	4.00	15.40	14.00	12.10	13.40
Materie combustibili	84.95	73.40	78.40	31.70	57.60	82.57	73.70	61.80	80.30
Ceneri	3.00	15.80	11.10	65.10	38.40	2.03	12.30	26.10	6.30
	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
Calorie per un grammo di combustibile	4466	4148	4813	1400	2929	4663	2903	2780	4371

Le rocce poi, che si associano al conglomerato a grosse *Ostree*, sono molasse giallognole o bianche e calcari, oppure marne cineree od azzurrognole. Al colle di Osoppo ed a Peonis sonvi anche arenarie zeppe di Ceriti e di Turritelle e vere lumachelle di grosse *Dreissene*. Nei dintorni di Flagogna, tra i conglomerati e le molasse, sonvi altri banchi a *Modiole*. Tutte queste rocce sono alternate a più riprese nel tratto collinesco dal campo di Osoppo al confine occidentale della Provincia e si nota un singolare allineamento dei dossi, in corrispondenza delle creste di conglomerato, e delle selle e vallicole secondo l'affioramento degli strati più teneri.

Messiniano o Pliocene antico.

33. *Conglomerato alluvionale a cemento arenaceo.* — Questa formazione, di cui ho parlato anche in questo scritto a proposito della pianura, equivale sicuramente ai *Belvedere-Schotter* e credo anche ad una parte dell'orizzonte *Astiano* dell'Apennino e delle prealpi lombarde. Lo schizzo orografico ne dimostra le principali aree di affioramento, le quali rappresentano: a monte, dei fondi di valle più elevati e più estesi degli attuali, che furono leggermente spostati, spaccati ed erosi; ed a valle, una pianura pliocenica, parimenti infranta, dislocata e sepolta sotto le alluvioni quaternarie, dalle quali sporgono i comignoli dei suoi frammenti agli accennati colli di Udine, Variano, Carpenedo e Campoformio. Gli strati più recenti di questa alluvione cenozoica furono poi messi a nudo dalla erosione delle correnti, esercitata per la massime parte in epoca posglaciale; epperò noi la vediamo affiorare, specialmente nel Friuli orientale, nel tratto pedemontano percorso dai confluenti del F. Isonzo.

Gli elementi di questa alluvione sono per ciascuna corrente corrispondenti al rispettivo bacino, già approfondato e ridotto ad un dipresso come al presente si osserva; e qui ricordo quanto dissi a proposito delle modificazioni subìte dall'idrografia friulana negli ultimi periodi continentali. Nel gabinetto del R. Istituto tecnico di Udine lasciai una collezione di circa una cinquantina di campioni, raccolti su questa formazione in diverse località, di cui troppo lungo ed ozioso sarebbe qui ripetere la nota; bastando a dare un'idea della sua disposizione lo schizzo orografico ed ancor meglio gli ultimi profili della tavola degli spaccati, delineati secondo dati raccolti in numerosi e profondi trafori per pozzi.

Quanto più rimontiamo le valli e quanto più ci innalziamo sui *thalweg* attuali, egli è certo che questa alluvione devesi ritenere sempre più antica; sicchè i lembi più isolati, più alti e più erosi spetteranno probabilmente al periodo *tortoniano*. Circa

poi al limite cronologico più recente di questa formazione; non saprei al presente precisarlo, ma ritengo che fosse ovunque, non solo cementata, ma già infranta e già profondamente erosa prima dello sviluppo massimo dei ghiacciai alpini. Epperò il parallelo col *Ceppo* di Lombardia devesi intendere in senso piuttosto lato e deve solo valere in modo assoluto per le porzioni più superficiali e meno spostate di questa vera alluvione antica, la quale è comune, per quanto io sappia, a tutto il Veneto.

ERA NEOZOICA

Epoca glaciale — I. *Periodo glaciale o Sahariano; formazione del Ferretto nella Lombardia; fondi marini con massi erratici nell' alta valle padana; Sabbie gialle.*

34. *Massi erratici dimostranti la massima espansione degli antichi ghiacciai delle Alpi Carniche sino all' Adriatico.* — Non ripeterò gli argomenti, pei quali mi sono convinto come l'anfiteatro morenico del Tagliamento non rappresenti che un lungo periodo di sosta di questo ghiacciajo, il quale prima aveva attinto la marina ed erasi fuso cogli altri, che scendevano dalle Alpi sul piano stesso, allora già emerso, dal Friuli. Nè mi dilungherò a dimostrare come non sia da opporre a questo mio modo di vedere le scarsità dei massi erratici, che osservai e raccolsi a riprova di tale vastissimo sviluppo glaciale; poichè, considerando come esser doveva in quel primo periodo assai ristretta l'area libera dalla neve e dai ghiacci e quanto lungo giro di secoli sia scorso da quel tempo, mi meraviglio ancora di aver potuto trovare qualcuno di tali massi, che ora appunto ricordo.

a. Massi di *porfido felsitico*, rinvenuti a Sdrauscina di Sagrado, nelle alluvioni del fiume Isonzo e sul colle di Buttrio.

b. Massi di *granito* del Tirolo Meridionale, rinvenuti sino a 700 metri sul *thalweg* più vicino, al monte Ciancul presso Ampezzo, al monte Arvenis verso le Vinadia, nel Canale di Vito d'Asio, nei dintorni di Claut e Cimolais, e sino al ciglio del Pian di Consiglio, a circa mille metri sul livello marino ed a oltre ottocento sul fondo della valle lapicina, pel lato sinistro del ghiacciajo del Piave.

c. Massi di *conglomerato quarzoso* del Trias inferiore (*Verrucano alpino*) piuttosto frequenti nei dintorni di Polcenigo, alle falde del monte Cavallo, che furono soperchiate dal ghiacciajo del Piave.

d. Massi molto voluminosi delle *roccie alpine e prealpine, che compongono le morene dell'anfiteatro* del Tagliamento, sparsi e sepolti nell'alluvione quaternaria sin oltre a due chilometri a sud di Udine ed a nove chilometri dalla più avanzata cerchia morenica di Plaino e S. Margherita: massi i quali non ponno essere stati rotolati fino a questa distanza dall' anfiteatro stesso per correnti di disgelo.

II. *Periodo glaciale.*

35. *Alluvioni ghiajose di trasporto diretto o di sfacelo morenico, foggiate a* talus *profondamente terrazzati - Diluvium.* — Per distinta conformazione della superficie e per alcune particolarità litologiche, dipendenti dalla geologica costituzione dei rispettivi bacini idrografici, distinguonsi assai chiaramente le seguenti *conoidi di dejezione*, le quali, l'una all'altra justaposte, formano la zona pedemontana della pianura friulana.

a. *Talus del torrente Conazzo*, da Dardago a Castello d'Aviano; prevalenza assoluta di calcari cretacei e giuresi; massima pendenza della conoide di 25 per 1000.

b. *Talus del torrente Zelline* di Montereale alle *Basse* di Pordenone; prevalenza di calcari e di

dolomie con qualche arenaria eocenica e con rari ciottoli di selce nera e rossa dalla formazione liasica; pendenza media della conoide dai 15 per 1000 da Montereale a S. Leonardo, più sotto dal 7 per 1000 da S. Quirino a Pordenone.

c. *Talus del torrente Colvera*, sino alla confluenza nel torrente Meduna; maggior abbondanza di arenarie e calcari marnosi per la erosione del gruppo eocenico di Fanna, Poffabro e Frisanco; pendenza media della conoide di 9 per 1000.

d. *Talus del torrente Meduna;* maggior abbondanza di dolomia e minor quantità di ciottoli selciosi, con qualche arenaria eocenica e glauconia miocenica; pendenza della conoide dall' 8 per 1000.

e. *Talus del torrente Cosa;* maggior abbondanza di elementi eocenici; assai distinte le dolomie farinose del monte Rossa; pendenza della conoide del 9 per 1000.

f. *Talus del torrente Tagliamento* o meglio degli scaricatori più occidentali del rispettivo ghiacciajo, in corrispondenza allo stretto di Pinzano ed alla valletta del torrente Ripudio. Sono prevalenti ed assai distinte le rocce carniche dei piani 5, 7 e 9; tra gli elementi erratici, qualche raro masso granitico o gneissico. Anche i porfidi sono assai più comuni di quello che dovrebbero essere se provenissero esclusivamente dagli affioramenti carnici di questa roccia (piani 6, 13 e 14); ond' è a ritenersi che provengano in gran parse dalla Carinzia. Pendenza della conoide, dalle falde del colle di S. Daniele a Dignano, 62 per 100; da Dignano a Gradisca, 4 per 1000.

g. *Talus del torrente Corno;* per natura alluvionale quasi identico al precedente, con maggiore abbondanza del porfido feldispatico e delle diabasi della valle del Fella e dell' Aupa; pendenza della conoide dalle falde di Riva d' Arcano a Nogaredo di Corno, 5, 5 per 1000; più sotto sino a Gradisca del 4, 5. Essa rappresenta lo scaricatore mediano più importante del ghiacciajo, durante la costruzione dell' anfiteatro morenico; ed anche in epoca posglaciale fu terrazzata da una corrente senza confronto più ricca dell' attuale. Lateralmente, verso oriente, sino alla conoide *i* sonvi più ristrette dejezioni di altri secondari scaricatori delle acque di disgelo, in corrispondenza alla depressione di S. Vito di Fagagna e degli Scoli Lavia e Tampognacco. La pendenza della piccola conoide terrazzata dalla scomparsa corrente sotto S. Vito di Fagagna è dal 7,5 per 1000.

h. *Talus del torrente Cormor*, lambito e terrazzato dalle correnti lungo il margine orientale, rasenta la base della conoide seguente. È caratterizzata dall'abbondanza delle rocce eoceniche, che pure sono assai frequenti nelle morene della porzione orientale dell' anfiteatro. Come sono del pari frequenti i ciottoli di conglomerati quarzosi del Carbonifero (piano 2 *b*). Pendenza della conoide, da Plaino a Campoformio, del 6,5 per 1000.

i. *Talus del torrente Torre.* Siccome questa corrente lambiva il lato sinistro del ghiacciajo carnico, così nelle sue alluvioni quaternarie non mancano rocce alpine del corrispondente versante. Però hanno assoluta prevalenza i calcari e le dolomie dell' alta valle del Torre, a monte della chiusa di S. Osvaldo. La ghiaja minuta è formata a preferenza di ciottoletti diasprigni, provenienti dallo sfacelo del conglomerato eocenico (piano 30). Pendenza della conoide, da Qualso a Ribis, dell' 8 per 1000.

j. *Talus del torrente Malina.* Consta quasi assolutamente di calcari marnosi e dello sfacelo dei conglomerati pseudo-cretacei; la terra fina è più plastica e più ferace che nelle altre alluvioni dell' altipiano udinese. Pendenza della conoide dell' 8 per 1000, dalle falde di colli sotto Attimis a Remanzacco.

k. *Talus del torrente Natisone.* Agli elementi dell'alluvione precedente si aggiunge la frequenza dei ciottoli dolomitici, provenienti dall' alta vallata, a monte del Pulfero. Gli elementi silicei sono scarsissimi. La pendenza della conoide, da Cividale a Premeriacco, è del 7 per 1000.

l. *Talus del torrente Judrio*, per composizione litologica analogo a quello del torrente Malina; però distinto dalla minore pendenza, del 7 per 1000.

m. *Talus del fiume Isonzo.* In quella guisa che la valle corrispondente presenta ammirabile simmetria con quella del torrente Zelline, così la composizione litologica di questo talus ripresenta i caratteri del talus, che ha il vertice a Maniago. Ma la spessezza di questa alluvione e per conseguenza anche la sua pendenza è di gran lunga minore che nel talus dello Zelline, toccando soltanto il rapporto del 6,8 per 1000; il che può dipendere a mio avviso dalla più lunga presenza su questo tratto di piano del ghiacciajo alpino, proveniente dalla valle dell' Isonzo e dall' indole più torrenziale dello Zelline in confronto del fiume Isonzo.

La marcatissima differenza tra lo sviluppo e la pendenza delle conoidi glaciali nelle due porzioni occidentale ed orientale del piano friulano, in confronto colle rispettive alluvioni posglaciali, sarebbe poi non soltanto una prova della più lunga dimora quivi avvenuta dei ghiacciai toccanti il mare, ma anche una conseguenza della forma morenica, sotto la quale lo sfacelo alpino rimase accumulato nell'anfiteatro, anzichè disperso più a valle dalle correnti.

36. *Alluvione sabbiosa o fangosa, coeva colla precedente, ma formata col lavaggio di questa; stesa in piani livellati e terrazzati nel bassopiano friulano. Avanzi del cordone litorale del 2° periodo glaciale. - Depositi lacustri negli allargamenti delle valli prealpine.* — Ritengo questa alluvione contemporanea alle precedenti e con essa anastomizzantesi alla base delle varie conoidi, in guisa da sopportarla, da intrecciarsi con essa e da ricoprirla. Essa corrisponde al *löss* del versante settentrionale delle Alpi. Rappresenta il lavorìo delle correnti stesse, che formarono le conoidi precedentemente esaminate, quando erano nei periodi di magra; nei quali periodi, alla base delle conoidi, con un numero molto maggiore di sorgive che al presente, dovevano le acque rinascere per l'incontro di un primo sottosuolo di terra fina e disperdere sopra un piano vasto e pochissimo inclinato i più minuti materiali. Questa alluvione nel Friuli occidentale è ancora visibile su larga estensione, specialmente nel tratto tra il fiume Livenza ed il fiume Sile. Ma ad oriente del Tagliamento essa è quasi ovunque ricoperta dalle alluvioni posglaciali; solo sporgendo a sud da Codroipo, appunto nel tratto tra la conoide posglaciale del Tagliamento e la base di quella parimenti posglaciale del Corno. Quet'ultima, per essersi il Corno esaurito appena dopo il disgelo dei ghiacciai, si è di poco estesa a valle e non si è protratta con un prisma di dejezione e con un apparato di delta come fecero il Tagliamento e l'Isonzo. È naturale che nel periodo posglaciale anche questa *alluvione di lavaggio,* per una nuova scelta di materiali più minuti e per il passaggio delle rispettive correnti ad un ciclo di periodi di magra, sia stata profondamente terrazzata. Per di più questo terrazzamento presenta le tracce evidenti di un esaurimento di parecchie e lo spostamento a valle di tutte le sorgive delle correnti, che lo hanno prodotto. Ho procurato in altro mio scritto di render ragione anche di questo dettaglio di una classe di alluvioni, che mi pare importantissima, specialmente per chi volesse estendere tal genere di studî a tutta la vallata padana.

Negli allargamenti di valle, che osservansi lungo il corso delle correnti secondarie, sono frequentissimi i lembi alluvionali profondamente terrazzati; ma non è agevole affermare che appartengano tutti al periodo glaciale; occorrendo per ciascuno rilevare il periodo, in cui la valle fu sgombra da ghiacci, se da ghiacci fu invasa, e distinguere accuratamente se si tratti di vere alluvioni distese in piani, oppure di conoidi, che ponno esser terrazzate anche se posglaciali o storiche. Non dubito pertanto che sieno glaciali le alluvioni terrazzate della valle Cimoliana, presso al suo sbocco nello Zelline a Claut, quelle del torrente Meduna tra i due Tramonti, quello di Val di Musi a Tanataviele, della Malina a Forame di Attimis, del Recca inferiore sopra Ruttars.

Già dissi a proposito del piano friulano come a sud di Aquileja e nelle lagune di Grado esistano rilievi molto più elevati degli attuali cordoni litorali e delle isole

di laguna e che non hanno alcuna relazione di allineamento coi cordoni stessi. Il maggiore è quello di *Belvedere,* ove la spiaggia è formata di un'*arenaria calcare,* che si innalza sin quasi a 6 metri sulla media marea. Se è questa veramente una traccia di un cordone litorale del 2° periodo glaciale, come io non dubito, si avrebbe un prezioso indizio della tenuità della sommersione posglaciale della regione circumadriatica; per modo che le altre prove geologiche di una ben più pronunciata sommersione convaliderebbero l'idea che tale sommersione sia avvenuta dopo la prima massima espansione glaciale, precisamente quando sembrami sia avvenuta la emersione dell'alta vallata padana dal mare *Sahariano.*

Riguardo agli elementi litologici di queste alluvioni di bassopiano, è naturale che corrispondano ad un dipresso a quelli delle rispettive conoidi; se non che è a prevedersi che gli elementi meno tenaci, quali la silice, le marne e le glauconie, sieno in queste alluvioni fine e rimaneggiate più abbondanti che nelle alluvioni di trasporto diretto o di sfacelo morenico.

37. *Morene dell'anfiteatro morenico dell'antico ghiacciajo del Tagliamento. Morene insinuate. Morene dei singoli rami del detto ghiacciajo.* — Poichè mi sono studiato di raccogliere una collezione di massi erratici e di ciottoli striati, che rappresentasse alcuni particolari di questo bellissimo apparato glaciale, e poichè si tratta di un ordine di osservazioni, che ponno venir spinte al più minuzioso dettaglio colla sicurezza di portar sempre maggior appoggio ad un complesso di nozioni ora mai assicurate, mi permetto di compendiare un breve catalogo di tale collezione.

a. *Anfiteatro morenico.*

1. *Gneiss* erratico dall'alta valle della Rienz, confluente dell'Adige, per le selle di Padola e della Mauria, rinvenuto a nord-ovest di S. Daniele.

2. *Idem* presso il paese di S. Daniele, al ponte sul torrente Ripudio.

3. *Idem* a S. Giacomo di Ragogna.

4. *Porfido quarzoso rosso-bruno*, dal Permiano dalla valle del But (piano 6), rinvenuto a S. Andrea, presso S. Daniele.

5. *Spilite amfibolica con calcite* (piano 4), a Fagagna.

6. *Calcare brecciato con calcite bianco-rosea* dal piano 8 in Carnia, a Fagagna.

7. Frammenti di un masso di *calcare saccaroide* con venule di *Fahlerz* e colorazioni di *carbonati idrati di rame*, dall'alta valle del Degano (piano 3) rinvenuti a S. Lorenzo di Buja per Ursinis.

8. *Calcare nero a* Fusulina Cylindrica, dal Carbonifero dei dintorni di Pontafel (piano 2), rinvenuto a Raspano di Collalto.

9. *Arenaria con* Myacites, dall'assai esteso piano n. 9 della Carnia, frequentissima nei colli morenici dei dintorni di Fagagna.

10. *Molassa* con *Turritella* e *Cardium*, dal piano 33 del colle di Osoppo, rinvenuta sul colle di Susans.

11. *Lignite resinosa, compatta, chiaramente striata,* rinvenuta sui colli di Malnisio ad ovest di Fagagna e certamente proveniente dallo stesso colle di Osoppo.

12. *Puddinga quarzosa a cemento micaceo* dal piano 2 dei dintorni di Pontebba, rinvenuta in parecchi punti della regione orientale dell'anfiteatro, nelle morene addossate sui colli eocenici di Montenars e nelle morene insinuate nelle valli di Resia e della Venzonazza.

13. *Puddinga* a ciottoli di *piromaca* e di *diaspro policromo*, dal piano eocenico n. 30. Caratteristica della porzione orientale dell'anfiteatro morenico.

14. *Calcare rosso brecciato*, dal piano liasico n. 22, probabilmente dal monte Chiampon, frequente nel tratto di colli morenici da Tricesimo a Tarcento.

15. *Ciottolo striato*, di calcare nero presso il lago di S. Daniele.

16. *Idem* bianco-sporco, a S. Lorenzo di Ragogna.

17. *Idem* di calcare nero, ad Ursinis di Buja.

18. *Idem*, *idem*, di Pagnacco.

19. *Idem*, *idem*, di Qualso presso Tricesimo.

b. *Morene insinuate e d'ostacolo.*

20. *Ciottolo striato*, al colle S. Rocco, Osoppo.

21. *Puddinga rossa quarzosa* (del piano 7) a Pinzano per Forgaria.

22. *Idem* ad Intissans presso Verzegnis, a circa 300^{m} sul *Thalweg.*

23. *Idem* alla sella di Interneppo, a soli 60^{m} sul Tagliamento.

24. *Idem* alla sella di Preone, a 400^{m} sul Tagliamento.

25. *Idem* sull'altipiano di conglomerato pliocenico da Socchieve a Pani di Raveo, a 200 ^{m} sul Tagliamento.

26. *Porfido augitico* dal piano n. 12 del canal di Gorto, presso Forni Avoltri, rinvenuto presso Bordano di Venzone.

27. *Idem* sul M. Comielli, a 350^{m} sul Tagliamento.

28. *Iperite* dal piano n. 5, affiorante nei dintorni di Rigolato, alla sella di Interneppo ed a 80^{m} sul Tagliamento.

29. *Porfido quarzifero*, dal piano n. 6 probabilmente dal Comelico (valle di Padola), rinvenuto tra Socchieve e Viaco.

30. *Puddinga rossa quarzosa* (del piano n. 7) da Forni Avoltri, rinvenuta a Ciasis sotto Ovaro.

31. *Gneiss granitico*, del Tirolo meridionale, piuttosto frequente nel canal di Socchieve e alla sella di Vignarosa, ai monti Ciancul e Pelois, nei dintorni di Socchieve, presso Pani della Vinadia e nell'altipiano di Verzegnis, nonchè presso il lago di Cavazzo.

32. *Idem* sul monte Forchia di Vito d'Asio, accennante ad una probabile invasione del ghiacciajo del Tagliamento nella valle dell'Arzino, per la sella di Chiampon.

33 *Idem* nei dintorni di Erto, direttamente portato dal ghiacciajo del Piave, che si insinuava nella valle del torrente Vajont sino alla sella di S. Osvaldo.

34. *Ciottoli calcari striati*, in tutte le accennate località.

35. *Felsite porfirica*, dalle colate del piano 13 nelle valli di Raibl, di Luschari e di Valbruna (Wolfsbach), rinvenuta nella valletta del R. Vogelsbach di Pontafel.

36. *Puddinga quarzosa a cemento micaceo* del piano carbonifero n. 2, dai dintorni di Pontebba, alla sella della Pradulina ad est di Paularo.

37. *Idem* nella valle della Studena, ad ovest di Pontebba, presso il passo di Aupa ed a Costa Landri.

38. *Idem* nella valle di Resia, tra Resia e Stolvizza.

39. *Arenaria con* MYACITES del piano 9 dell'Incarojo, insinuata nei dintorni di Moggessa attraverso il passo di Dagna, a nord-ovest di Illeggio

Periodo Posglaciale ed Antropozoico.

38. *Alluvione posglaciale, foggiata a* TALUS *ed a* PRISMI DI DEJEZIONE. — Questi *Talus* alluvionali sono insinuati presso al loro vertice nella intaccatura praticata dal terrazzamento nei *Talus* delle rispettive correnti di epoca glaciale, e naturalmente ne riproducono con pochissime modificazioni le condizioni litologiche, quali furono distinte più sopra. Esse rappresentano non soltanto una lunghissima sequela di secoli, ma una normale portata delle correnti ancora incomparabilmente più considerevole di quanto fu mai osservato in epoca storica. Sulla loro superficie, come si è detto nella prima parte a proposito della pianura, vagarono le correnti in epoche relativamente recentissime. Le più pronunciate di tali conoidi sono quelle del Tagliamento e dell'Isonzo, che si continuano con un rilievo prismatico, dalla cui projezione nel mare risultano gli apparati litorali ed il delta di queste due correnti.

Sono però pronunciatissime, in proporzione della portata attuale, anche quelle del Corno, del Cormor, del Torre e Natisone.

39. *Alluvione posglaciale sabbiosa o fangosa, dovuta al lavaggio della precedente e formante piani livellati e la porzione a valle dei prismi di dejezione; compresi gli attuali apparati litorali.* — Dopo quanto ho scritto su tale argomento, non occorrerà che mi dilunghi a proposito di questa formazione, se non per ripetere che gli apparati litorali delle principali correnti friulane, cioè del Tagliamento e dell' Isonzo, sono antichissimi e che nell' epoca storica la superficie complessiva della loro area emersa è piuttosto diminuita che accresciuta.

40. *Torbiere e fondi argillosi, su cui esse si stabilirono.* — Le torbiere che attualmente si coltivano in Friuli appartengono con poche eccezioni alla zona delle morene dell'anfiteatro; altre presentansi nella zona acquitrinosa, che separa la base delle conoidi alluvionali glaciali o posglaciali dalla meno inclinata alluvione; altre sono nella regione montuosa.

Le prime, più estese e più produttive, occupano le depressioni tra le cerchie moreniche nei comuni di S. Daniele, Fagagna, Collalto, Majano, Bueriis, Zegliacco e Magnano, sopra un' area di circa 3000 pertiche censuarie, delle quali soltanto un sesto venne assoggettato ad estrazione; oltrechè anche nelle torbiere esaurite gli escavi furono sempre superficiali, arrestandosi colla comparsa dell'acqua a poco più di un metro di profondità. Non furono nemmeno praticati degli scandagli per esplorare il sottosuolo nelle aree delle stesse torbiere, ove è facile che esistano più banchi di torba. Il combustibile non si assoggetta ad alcuna preparazione meccanica e vien posto in commercio col medio valore in sito di L. 1.50 al metro cubo.

Le analisi chimiche, istituite dal chiarissimo signor prof. Cossa Alfonso sopra due diversi campioni della torba di Fagagna, diedero i seguenti risultati:

Acqua igroscopica	12. 65	14. 15
Materie combustibili	67. 95	59. 18
Ceneri	19. 40	26. 67
	100. 00	100. 00
Materie volatili combustibili	43. 65	38. 15p%
Piombo ridotto da un grammo di combust.	13. 05	10. 30
Calorie corrispondenti	2955	2333. 62

Delle torbiere del bassopiano so che furono in questi anni lavorate quelle presso Pasiano di Pordenone, della Santissima presso Polcenigo, delle paludi di Mortegliano e di Strasoldo presso Palma; ma non ho potuto raccogliere alcun dato sulla loro estensione e produzione.

Le torbiere della regione montana, che corrispondono a ristretti bacini posti di solito alle selle di culmina o nei pianori risultanti dal terrazzamento orografico, che modellò la montagna, si osservano al passo del Nassfeld (C_1-1564), al passo di Aupa (C_1-1093), al passo di Sesis, da Avanza a Sappada, (A_1-B_1), presso il paese di Cludinico

ed al piano di Vignarosa tra Ampezzo e Forni di sotto ($A_1$776). La prima, per quanto io sappia, è l'unica coltivata.

Nella regione morenica e specialmente nella porzione orientale di essa, in corrispondenza dei colli eocenici di Montanars e di Magnano, gli strati argillosi alternati e circostanti alle torbe sono assai potenti e somministrano materiale per eccellenti laterizî; epperò la loro fabbricazione è la professione normale, che gli abitanti di quei dintorni esercitano in paese e quando emigrano,

Il sottostrato della torbiera alla Santissima, presso Polcenico, in corrispondenza alla natura assolutamente calcare dei colli circostanti, era d'indole marnosa, bianco-cinereo, e conteneva dai ciottoli singolarmente rammolliti di calcare marnoso.

PARTE TERZA.

Disposizione stratigrafica delle formazioni, che affiorano nel Friuli e principali relazioni tra la struttura geologica e la conformazione di questa provincia.

Nella descrizione orografica della Provincia di Udine, fatta nel primo capitolo, non si poterono omettere quei cenni stratigrafici, che erano indispensabili per intendere il carattere e la ragione dei più importanti accidenti del suolo friulano. Tali cenni però sarebbero insufficienti per chi volesse anche solo formarsi una prima idea della disposizione e quindi dell'andamento delle formazioni, antecedentemente enumerate; poichè non è ovunque semplice e continua tale posizione, nè comune a tutte le dette formazioni. Tantomeno poi basterebbero per chi volesse portarsi in sito, od estendere le osservazioni da me istituite alle regioni finitime, od approfondirsi sempre più nello studio delle varie e ricchissime faune fossili, che distinguono molti dei piani enunciati. Se non che è sempre malagevole cosa per chi scrive e specialmente per chi legge, il formarsi tale concetto dettagliato colla narrazione delle fatte osservazioni e colla minuziosa enumerazione degli affioramenti successivamente incontrati nelle varie escursioni; perciò ho pensato di descrivere brevemente la stratigrafia friulana secondo una sufficiente serie di spaccati, rilevati a breve distanza attraverso le varie regioni orografiche, in cui venne divisa la provincia. Questi spaccati vennero desunti dalla Carta Geologica presentata alla Provinciale Deputazione, nella scala di 1 : 86400 e successivamente ridotti alla scala di 1 : 200000; e nella interpretazione delle curve ebbi cura di attenermi sempre alla massima semplicità; trascurando quindi i locali disturbi e le contorsioni, molto frequenti specialmente nelle formazioni meno compatte, delle quali la potenza viene quindi dagli spaccati di molto esagerata. Gli spaccati si succedono da ponente a levante per cadauna regione.

Spaccato I. — Dimostra i rapporti stratigrafici tra le formazioni paleozoica e triasica, quali si presentano nella porzione più occidentale della Carnia. Quivi esiste anche il più importante campo minerario della provincia, pel filone di monte Avanza (con Fahlerz, calcopirite, galena e cinabro in ganga di quarzo e baritina) affiorante presso la vetta del monte Avanza, tra il calcare a gli scisti del carbonifero (1).

(1) Le relazioni stratigrafiche, rappresentate in questo spaccato, coincidono coi risultati di una visita fatta nell'anno scorso nella interessante località di monte Avanza dall'egregio geologo R. Hörnes, il quale ne comunicò una Nota al R. Comitato geologico di Roma. (Vedi Bollettino R. Com. Geol. ital. Vol. VIII p. 139).

Scorgesi la frattura di un' anticlinale, che fu la prima origine della *culmina* di Cima Sappada e la regolare successione dei piani del Trias inferiore e medio, dal basso all' alto, nei monti Tuglia e Cadino.

I porfidi augitici (12) sono talora decisamente cristallini; talora a struttura granulare e passano per gradi a dei tufi ed a delle marne intensamente colorate, compatte o sciolte.

Gli schisti ad *Halobia* sono assai distinti e ricchi di fossili nelle località attraversate da questo spaccato e specialmente nel versante settentrionale del monte Tuglia.

La formazione gessifera (8), la quale in questo tratto è di preferenza rappresentata dalla *dolomia cariata*, è chiaramente delimitata tra i due piani arenacei del *Servino* (7) e delle Arenarie variegate a *Myacites* e *Naticella costata* (9). Il primo affiora alla sella del R. Avoltruzzo; il secondo si trova invece appena sotto ai porfidi augitici (12) venendo da Cima Sappada a Forni Avoltri ed è separato dai tufi soltanto per pochi metri di calcari marnosi (10).

Questo tratto di paese è singolarmente importante per le transizioni, che esso offre tra le forme litologiche dei piani triasici dell'Agordino con quelle peculiari delle Alpi Carniche. Occorre studiarvi ulteriormente le relazioni stratigrafiche della formazione scistosa, inferiore al Calcare carbonifero, la quale non mi ha quivi presentato alcuna traccia organica; al pari del calcare stesso, che qui si presenta più che altrove subsaccaroide ed omogeneo.

Spaccato II. — Il piano di questo spaccato è ad un dipresso normale all' asse della grande *anticlinale* mesozoica delle Alpi Carniche, la quale, oltre la valle di Gail, si continua nei monti di Lienz e di cui i lembi meridionali, con disposizione ondulata, spaccati ed erosi, costituiscono gli spartiacque tra le valli della Carnia. Si rileva il carattere di semplice culmina, che presenta al suo principio la valle del Tagliamento, in corrispondenza ai piani calcareo-marnosi ed arenacei del Trias superiore, regolarmente compresi tra la dolomia di *Hallstatt* e la formazione retica (15-20).

Più a settentrione, nella valle del torrente Lumiei o di Sauris, è segnata una dislocazione, che è sicuramente accusata dall' affioramento presso al ponte della Maina dal piano 7; quasi al contatto dei calcari del piano 15, che poi formano i monti Veltri, Tinizza e Clapsavon. Tra la valle di Sauris e la valle Pesarina, si scorge il massimo sviluppo dei piani 8 e 9, dei quali l'inferiore, ricco di amigdale di gesso, offre in due località anche del solfo nativo. Ancora più a nord, lo spartiacque tra la valle Pesarina ed il Degano presenta la stessa successione di terreni che nello spaccato antecedente; ma con uno spessore alquanto minore, forse perchè quivi la inclinazione delle formazioni meglio coincide col piano dello spaccato. Si ripete la discordanza delle arenarie del *Servino* dalla serie paleozoica; specialmente manifesta nel lembo triasico del monte Vas. La serie paleozoica presenta una prevalente inclinazione a nord, coll'affioramento alle falde del monte Volaja della zona fossilifera (2) che da quivi si continua ai non lontani monti Coglians e Canale, ove sono ancora più abbondanti i fossili, specialmente gli *Orthoceras* e le *Chamarophoria*. A questo livello sono assai distinti i calcari mandorlati rossi, che litologicamente assai di leggieri si confonderebbero con quelli del piano 15 del monte Clapsavon e con quelli del piano liasico 22 di tutto il Veneto.

Spaccato III. — Le stesse relazioni stratigrafiche, accennate or ora, si riappalesano in questo profilo, pur esso normale all'asse stratigrafico delle Alpi Carniche; presentando però qualche importante divario. Vediamo come il canale di Socchieve da una semplice culmina, dovuta alla prevalente erodibilità dei piani arenaceo-marnosi del Trias superiore, si cangi in una vera valle di sollevamento, dovuta ad una rilevante faglia; in guisa che sulla sinistra della valle stessa affiorano le più profonde formazioni del Trias medio (8 e 9). Più a settentrione, anche la Pesarina mostrasi ingenerata in origine da una rottura di anticlinale, che presentava eziandio una curva secondaria, assai chiaramente accennata dall'affioramento del *Servino* (7) sopra Avausa.

Nella serie delle rocce paleozoiche sono indicati gli affioramenti dei *Grunstein* (5), dei quali non sono molto chiari i rapporti stratigrafici e per la tenuità della superficie di affioramento e per esser questa ricoperta da folta vegetazione. Quivi presso, nel tratto da Valpicetto a S. Giorgio di Comeglians, queste rocce sembrano insinuate al contatto degli scisti precarboniferi con banchi di calcare subsaccaroide, con essi alternati e che figurano anche nello schizzo. La semplicità della disposizione stratigrafica della serie triasica e la discordanza tra questa e la paleozoica sono parimenti evidentissime.

Lungo questo profilo si notano località fossilifere importanti; quali il monte Losa e la valle Pesarina per i fossili del piano 9 e le falde meridionali del monte Canale per i fossili del piano 2.

Spaccato iv. — È tra i più istruttivi fra la stratigrafia friulana; presentando sui precedenti il vantaggio di attraversare, ove è più completa, la formazione paleozoica e di mostrare la posizione stratigrafica del porfido permiano (5) al monte di Terzo, a nord-ovest di Paluzza. Questa interessantissima montagna presenta sui suoi due versanti a mezzogiorno e tramontana una diversissima serie; inquantochè l'affioramento porfirico meridionale non si continua punto nella massa del monte e tanto meno si appalesa verso R. monte Croce, mentre quivi si arresta la presenza delle *Iperiti*, normalmente inferiori alle rocce riferite al Permiano, delle quali soltanto un lembo occupa il fondo della valle con evidente discordanza dalla serie carbonifera del monte Pail.

Quest'ultimo monte, posto al partiacque tra il torrente But e la Gail, presentasi evidentemente costituito da un ventaglio per una stretta sinclinale, abbastanza continua, lungo la cresta più elevata delle Alpi Carniche. Vi si praticarono a più riprese degli escavi per un filone di minerali cupriferi analogo a quello di Avanza.

Nella regione triasica si pongono in rilievo non meno interessanti rapporti stratigrafici; tra i quali è assai singolare la posizione del piano con antracite del monte Falchia, che affiora sulla sinisinistra del Degano da Cludinico a Lauco ed è compreso in una massa di terreni del Trias superiore, incuneata per salto tra le gambe di una grandiosa volta, corrispondente alla valle di Socchieve. Tale accidente si comprende ancor meglio nello spaccato VIII.

Spaccato v. — La faglia or ora accennata, tra le due valli della Vinadia e del Tagliamento, si continua più a levante nell'area percorsa da questo spaccato, ed è manifesta per la struttura stratigrafica dal colle di Oltreviso, tra i torrenti Frondison e Chiarsò. Più a tramontana, al monte Cucco, la stratigrafia del Trias si fa regolarissima e riappare manifesta la sua discordanza dal Paleozoico. Al monte Paularo, sono indicati gli affioramenti degli interstrati iperitici e delle arcosi; più a settentrione, alle falde del Pizzo Avostano, alla zona dei calcoscisti fossiliferi del Carbonifero si associa la presenza di un filone cuprifero, affiorante nei dintorni della casera Primosio.

Spaccato vi. — Questo profilo è singolarmente interessante per le chiare relazioni, che esso dimostra tra la orografia e la stratigrafia; imperocchè tutte le selle e depressioni coincidono coll'affioramento delle formazioni più erodibili e servono mirabilmente ad isolare dei gruppi di monti tutti in vario modo interessanti. Sui due versanti della valle dell'Aupa è rimarchevole l'alternarsi delle colate dei porfidi 12 e 13 coi tufi e colle arenarie porfiriche a *Calamites arenaceus* e *Pterophyllum*. Al passo del Pizzul, che conduce da Paularo alla valle Pontebbana, si scorge un lembo di arenarie bucherellate variegate, che riferisco al Permiano, insinuato negli scisti argillo-micacei, che sono inferiori alla zona calcareo-scistosa del Carbonifero. Questo, unitamente ai soprastanti calcari subsaccaroidi grigi e rosei, forma il colosso del monte Germula, ed a settentrione di questo monte, al passo di Lanza, si scorge un secondo lembo permiano, appoggiato con discordanza agli scisti precarboniferi e ricoperto da un mantello di arenarie e di puddinghe quarzose rosse del *Servino* (7). Finalmente, allo spartiacque delle Carniche, lo spaccato tocca la vetta dell'Oharnach, costituita da calcoscisti fossiliferi (2), la quale è una delle più ricche località fossilifere del Paleozoico in questa catena.

Spaccato vii. — È il piu orientale della regione Carnica e passa per la sella di Saifnitz e per la interessantissima località, ove furono rinvenuti i *Graptoliti* illustrati dal signor Stache, nel punto segnato colla lettera *g*. Riferisco con dubbio al piano 8 il calcare dolomitico, che affiora lungo la destra del Fella, dalla sella di Saifnitz sino a Pontebba, negli strati più profondi delle quali formazioni il signor Stache avrebbe scoperto un piano fossilifero spettante al Permiano.

Più a mezzogiorno succede la serie triasica, in questa regione distinta dalle colate porfiriche dei piani 12 e 13 e dalla ricchezza dei fossili nel piano raibliano, presso alla località, dalla quale questo importantissimo orizzonte triasico trasse il suo nome. La serie triasica è molto continua; essendo solo interotta dalla trasgressione del superiore orizzonte gessifero, che non ho rintracciato più ad oriente della valle di Resia, confluente nel Fella a Resiutta.

Spaccato viii. — Questo spaccato attraversa tutta la Carnia, da levante a ponente, e mostra le ragioni stratigrafiche della orografia di questa contrada ed in qual guisa, ad onta di forti

inclinazioni e di non straordinaria potenza di deposito, possano i varî membri del Trias occupare una area di affioramento cotanto estesa.

La valle di Socchieve alle sue prime origini presentasi, come già si è detto, quale una semplice culmina. La valle di Sauris compare abbozzata da un considerevole salto, che per poco non fa affiorare il sottostante Paleozoico; essendo già riescito il torrente Lumiei ad intaccare i più profondi orizzonti triasici. Il salto poi è fatto manifesto dall'affioramento improvviso del calcare infraraibliano dei monti Pil e Veltri, che ricopre regolarmente la serie del Trias medio della valle del Degano.

In corrispondenza poi di questa valle, si presenta l'interessante sprofondamento di un lembo di Trias superiore, che comprende la formazione carboniosa, che fu erroneamente riferita prima al Paleozoico quindi al Trias inferiore; mentre i fossili raibliani si raccolgono abbondantissimi nel calcare, che forma il tetto al combustibile, tuttora attivamente escavato. E la quantità di tale sprofondamento è considerevole; stantechè per esso vengono ad affiorare allo sbocco del Degano presso Villa, a circa 400 metri sul livello marino, quegli stessi piani di calcare infraraibliano, che a nemmeno due chilometri di distanza coronano la vetta del monte Arvenis, alto circa due mila metri.

Anche il canale di S. Pietro o del torrente But, presenta un leggero spostamento, dimostrato dalla diversa altitudine ed inclinazione nei suoi due versanti dei piani triasici, regolarmente succedentisi sino alle vette quasi ugualmente elevate dai monti Arvenis e Terzadia. Presso alla prima di queste evvi un interessante affioramento degli scisti ad *Halobia*; presso la seconda si rinvennero parecchi strati dolomitici ricchi di *Chemnitzie*, di *Natiche*, di Ammoniti globose e di *Trachyceras*.

Finalmente un brusco cambiamento di inclinazione determina la valle del torrente Chiarsò e sul versante sinistro di questa valle si presenta, in breve area di affioramento eppure assai completa, la serie del Trias medio e superiore, sino alla dolomia retica, la quale forma la vetta della bellissima montagna, che si prospetta da Paularo.

Spaccato ix. — Decorre dalle falde delle colline di Sarone, costituite da conglomerati e da molasse del *Messiniano*, fino al monte Caulana, toccando la vetta del monte Cavallo (2250^{m}) e presenta speciale importanza poichè indica le relazioni stratigrafiche del piano *Titonico*, recentemente illustrato dal chiarissimo mio amico il prof. cav. G. A. Pirona; del qual piano abbiam veduto la composizione litologica nel capitolo precedente. Un più recente orizzonte fossilifero, del pari abbondante di Nerinee, diverse però da quelle del titonico, e con Rudiste, Pettini, Acteonine, Nerite e Turrilelle, compare poi nella porzione mediana del piano 25. La vetta del monte Cavallo è formata da un calcare corallino, a piccole Itierie, superiore allo strato a Rudiste di almeno 200 metri. Inferiormente a questi due orizzonti fossiliferi, affiorano verso Polcenigo le Filliti con Felci, che probabilmente spettano al Cretaceo medio.

Lo spaccato mostra il contatto discordante degli strati giuresi e cretacei sopra le testate della dolomia retica, come si osserva percorrendo la valletta del R. Caltea, che dal piano del Cavallo conduce a Barcis. Presso la vetta del monte Caulana, trovasi poi un lembo di calcare rosso ammonitico (22) spettante al Lias superiore e compreso tra due zone di ooliti; in guisa da indicare come questo lembo sia il residuo di una sinclinale quasi completamente esportata.

Dall'esistenza di alcuni affioramenti cretacei tra i conglomerati terziarî (32 e 33) delle colline di Sarone ed alle falde dei colli di Mezzomonte, ove delle rocce mesozoiche dovrebbero affiorare le *titoniche*, si può indurre che quivi sia avvenuto uno scorrimento; in guisa che la serie cretacea venne portata molto più in basso che nella massa del monte Cavallo. Un tale accidente stratigrafico verrebbe anche comprovato dall'esame dei due versanti della valletta di S. Tomè presso Dardago. Quivi infatti si scorge come verso il piano friulano gli strati cretacei piombino inclinatissimi a levante; mentre quelli formanti la massa della montagna sono incurvati in amplissima volta, ed oltre il confine occidentale del Friuli mostrano le loro testate sotto l'orlo dell' altipiano del Cansiglio, verso la valle di Lago Morto.

Il piccolo gruppo di colline terziarie presso Sarone rappresenta l'estremo lembo della zona di conglomerati e marne lignitifere (32 e 33), che da quivi si estende sino al colle di Ragogna, nei dintorni di S. Daniele. Alle falde dei monti di Aviano e di Maniago, meglio di conglomerati, sono brecce incompletamente cementate e specialmente nel tratto da Castello di Aviano a Montereale rappresentano quasi una scarpa di detrito cementato, che per qualche movimento sismico sia stata

bruscamente distaccata dalle prossime falde calcari della montagna. Queste brecce sono sicuramente più recenti dei conglomerati alluvionali, alternati colle molasse lignitifere dei prossimi colli di Sarone, Budoja e Caneva e dei colli Trevigiani, le quali rappresentano il *Sarmatico* o Pliocene inferiore e sono, al pari dei contemporanei conglomerati subappenninici, fortemente sollevati e contorti. Queste brecce corrispondono alle alluvioni del *pliocene recente*, che formano il sottosuolo della pianura, così nel Friuli come nella massima estensione della valle Padana. Più sotto, lungo le vallicole che intaccano la massa calcare dei monti di Coltura, si scorgono dei *talus* analoghi e parimenti preglaciali; tenacemente cementati e profondamente erosi, molto superiori e più inclinati dei *talus* quaternarî, che con ampio sviluppo si formarono dappoi.

Alcune di queste brecce e precisamente quelle, che si appoggiano ad un piccolo sprone cretaceo al Longon di Polcenigo, presentano una distinta compattezza ed una grande varietà di tinte; sicchè se ne ponno trarre delle elegantissime pietre di ornamentazione (1).

Spaccato x. — Questo spaccato attraversa dà nord a sud la interessantissima valle di Erto, a breve distanza dalla sella di S. Osvaldo, per la quale dal versante nel fiume Piave si passa a Cimolais, in quello del torrente Zelline. Una doppia sinclinale, che abbraccia l'intero monte Bergiad, spiega la ricomparsa sul versante meridionale di questo monte dei calcari liasici (22), che più in basso sono incisi dal torrente e che al di là di questo si innalzano sino alla vetta del monte Erto. Sotto al mantello liasico, la dolomia retica si presenta con diversa disposizione stratigrafica, prevalentemente inclinata a nord-est; ed ove la formazione liasica fu abrasa, essa dolomia si innalza a formare le bellissime montagne del Dignona e del Duranno, delle quali le aguglie si ponno scorgere anche da Udine.

Osservo come in questo spaccato lo spessore della formazione liasica venga considerevolmente esagerato per essere questa assai tormentata da curve secondarie e perchè il piano dello spaccato è obliquo all'asse della doppia sinclinale del monte Bergiad, la quale è diretta a sud-sud-est.

La discordanza delle formazioni eoceniche dalle liasiche e la mancanza dei piani intermedi della creta dimostrano che una depressione per erosione della serie mesozoica doveva quivi esistere sino dall'epoca, nella quale sotto al mare eocenico deponevansi le fanghiglie vulcaniche (27), che convertironsi in quella marna rossa scagliosa, così distinta e così costante alla base dei terreni terziarî del Friuli, fino al Vippacco e del Veneto orientale. Appunto in questa località, come nelle molte altre accennate nel precedente capitolo, si osserva l'alternanza di tale Scaglia rosssa colle arenarie e colle brecciole nummulitiche; la quale alternanza, unitamente alle relazioni stratigrafiche, concorre nel fare ritenere il deposito eocenico anzichè cretaceo, quale lo giudicarono ed indicarono i signori geologi austriaci.

Dopo di essere stata una bassura nel fondo marino eocenico, questa depressione si ridusse gradatamente ad una valle di comba, dalla quale vennero profondamente abrase le Formazioni assai erodibili dell'Eocene e probabilmente anche quelle del Miocene inferiore, le quali sembra che quivi esistessero, come ancora si trovano nel non lontano bacino nell'Alpago Bellunese. Sino a tanto che, nel periodo delle alluvioni plioceniche, una vasta pianura si estese là dove ora si avvallano i confluenti del torrente Vajont ed i lembi di essa, rappresentati da un conglomerato assai compatto, si osservano in parecchi punti del bacino e specialmente presso S. Martino di Erto e di fronte a Casso, oltre il torrente.

Più recentemente poi la valletta di comba e la sella di S. Osvaldo furono invase e superate da una espansione laterale del potentissimo ghiacciajo del Piave, che per di là venne a fondersi con quello dello Zelline; perciò, tanto presso alla sella quanto nei dintorni di Erto e specialmente nell'altipiano che vi sta di contro, non sono infrequenti i massi di granito e di conglomerato quarzoso del Trias inferiore, della cui provenienza ho parlato a suo luogo.

Spaccato xi. — Rilevato sopra un piano ad un dipresso parallelo al precedente, questo profilo presenta nella sua porzione mediana la continuazione della sinclinale di monte Bergiad, a nord di

(1) L'egregio signor D. Simone Chiaradia di Caneva ha aperto negli ultimi anni parecchie cave in queste località e trovò uno smercio assai facile dei materiali quivi lavorati.

Erto; ma questa curva è in questo tratto più depressa, più semplice e più erosa; avanzandone soltanto una parte in corrispondenza del monte Podeson, tutto liasico. Il Lias invece affiora più a settentrione in uno stretto lembo, residuo esso pure di una sinclinale, al versante settentrionale della val Ceresolina; e quivi principia una striscia liasica assai continua, la quale più ad oriente, spesso denudata dal suo piano superiore dei calcari rossi ammonitiferi e ridotta solo ai calcari selciferi od oolitici, corona le creste dei monti Naiarda, Resto, Verzegnis, Fajed, S. Simeone, monte Plauris, e monte Canino (?). In corrispondenza della valle Settimana evvi certamente un salto o per lo meno l'angolo di una assai stretta anticlinale; poichè presso alle sue origini affiora un ristrettissimo tratto di dolomia cariata e di dolomia scagliosa, bituminosa (piani 18 e 19), le quali rocce poi certamente nascondono un deposito gessifero, come viene accusato dalla assai ricca e molto salutare acqua solfo-magnesiaca della *Puzze*, nota soltanto ai valligiani e che sgorga quivi presso (A_2-S24). Ho constatato anche la esistenza di un lembo cretaceo sul fondo della erosione praticata nella sinclinale liasica di valle Clautana (torrente Zelline); trovandosi presso al thalweg alle falde del monte Ricitume, un calcare ad Ippuriti inferiore alla Scaglia rossa (27) la quale là, come nei dintorni di Erto, sostiene un tenue avanzo di arenarie e di brecciole eoceniche (30). Alla erosione poi di queste rocce devesi l'attuale ampiezza della valle dello Zelline allo sbocco dei suoi principali confluenti, presso Claut e Cimolais.

È d'altronde importantissimo il salto, che corrisponde alla valle di Barcis, in questo punto ancora percorsa dal torrente Zelline dopo ampia e tortuosa risvolta. In questo accidente diffatti, al pari che negli altri analoghi scorrimenti, che vedremo intaccare la serie mesozoica e determinare generalmente in tutto il Friuli il contatto discordante del calcare cretaceo (24 - 25) colla dolomia (20) noi vediamo essere abbozzato il contorno del golfo marino mio-pliocenico, che venne prima ricolmato dalle dejezioni e poscia dal sollevamento ridotto a far parte dell'attuale bacino adriatico.

Il versante cretaceo è abbastanza ricco di Rudiste, specialmente di *Ippurites*; ma non vi rinvenni la continuazione del piano a *Nerinee* del monte Cavallo.

Nel versante meridionale del monte Prebuttano, evvi un giacimento di piroscisti, il quale potrebbe essere convenientemente coltivato se meno infelici fossero le condizioni di viabilità in quella lontana e povera vallata.

Spaccato XII. — Prossimo e parallelo ad un dipresso al precedente, mostra sotto altre proporzioni la continuazione dei medesimi rapporti tra le varie formazioni mesozoiche e le terziarie; cioè: gli avanzi delle due sinclinali dei calcari liasici, colla abrasione del piano superiore del calcare rosso ammonitico; la dislocazione tra la formazione cretacea e la dolomia retica e la insinuazione, in corrispondenza di questo scorrimento, di un lembo eocenico, il quale continuasi con quello Barcis ed Andreis. Il dislocamento della massa dolomitica del monte Rault è dimostrato dall' affioramento alle falde settentrionali di esso monte del piano immediatamente inferiore alle dolomie retiche, visibile lungo la valle Silisia. In questa valle lo spaccato coincide eziandio con un lembo di conglomerato terziario (33). Sono anche distinti col segno corrispondente due giacimenti di piroscisti nella massa della dolomia retica, di cui il settentrionale, presso la valle di Viellia, ha somministrato dei bellissimi campioni.

Spaccato XIII. — Partendo dal colle miocenico di Sequals, questo profilo si dirigge al monte Resto attraverso la comba eocenica di valle Chiampon di Meduno, ove un lembo dei piani 27 e 30, che rappresenta la continuazione di quello di valle Clautana, quivi pure corrisponde all' appoggio discordante della creta alla dolomia retica. Ai monti Brusà e Resto si continuano i lembi liasici del monte Najarda e la massa dolomitica è quivi pure infranta da un salto, in corrispondenza della valletta del R. Chiarca. Un giacimento di piroscisti mi venne indicato presso gli stavoli di Omar.

Spaccato XIV. — Questo spaccato dimostra: la continuazione delle condizioni stratigrafiche, che esistono nei colli terziarî del Friuli occidentale e che meglio esamineremo nello spaccato XXIII; l' appoggio discordante del calcare cretaceo alla dolomia retica; l'avanzo di un lembo eocenico nella valle di Vito d'Asio in un'ampia depressione, corrispondente appunto al contatto delle due formazioni mesozoiche; le due sinclinali, contigue e coricate su d'un lato, al monte Fratta, quali si rilevano percorrendo la valle del torrente Arzino; nonchè la traccia, nel versante settentrionale dello

stesso monte, di un'altra sinclinale, che poi ripiegavasi per continuarsi col lembo parimenti liasico del monte Verzegnis. A queste due ultime località mancano però gli strati superiori del Lias.

La esistenza del piano gessifero 18 sotto la creta del monte Forchia è indotta dalla presenza presso Anduins di una fonte idrosolfurea, abbastanza frequentata, alla grotta *de lis Aganis* tra Vito d'Asio ed Anduins.

Spaccato xv. — Anche questo profilo porge un bell'esempio della condizione stratigrafica assai accidentata della formazione liasica, la quale costituisce il versante meridionale e la sommità del monte S. Simeone o Festa. I ripetuti affioramenti del calcare rosso ammonitico, del quale si percorrono le testate guadagnando i pascoli di S. Simeone per gli erti sentieri, che vi guidano da Interneppo e da Bordano, sono tra loro così identici che mal si potrebbe immaginare una ripetizione di deposito per una così ragguardevole potenza; tanto più che osservando le falde orientali ed occidentali del monte stesso, non si scorge se non che per piccolissimo tratto la loro continuazione e solo si osservano gli strati dolomitici variamente contorti e generalmente discendanti dalle formazioni liasiche. Specialmente verso la valle del Tagliamento, di fronte a Venzone e Portis, si ponno accompagnar coll' occhio le replicate rivolte degli strati del Lias inferiore, le quali poi si ripetono con poco mutamento ai monti Plauris e Chiampon e non hanno nulla di comune coll'inclinazione della sottosposta dolomia.

La valle di Socchieve, tra il monte Festa e l'Amariana, è totalmente dolomitica; anzi quivi la dolomia triasica sembra formare una vôlta assai stretta ed infranta secondo l'asse della valle medesima. La porzione superiore del monte Amariana è formata, come già si è detto, da calcari bianchi a *Conchodon* in strati più potenti, più regolari e discordanti da quelli delle dolomie triasiche a *Megalodon*, che li sopporta.

Verso mezzogiorno, lo spaccato stesso attraversa il colle eocenico di Buja e l'anfiteatro morenico, che vi si appoggia irradiando da questo ostacolo le sue cerchie meno elevate e più recenti.

Spaccato xvi. — Questo spaccato è disegnato allo scopo di dimostrare le condizioni stratigrafiche della regione, che sta tra la valle dell'Arzino e quella del Tagliamento; le quali condizioni differiscono da quelle indicate dallo spaccato xiv; inquantochè quivi la justaposizione della Creta alla Dolomia è coperta non solo dall'eocene, di cui rimane soltanto un residuo del piano più profondo (27) ma anche dal miocene, 32 e 33, il quale vi presenta una non trascurabile giacitura lignitica al Chianet di Peonis.

Il lembo liasico del monte Corno forma il versante settentrionale di questo monte, per dove è più agevole la salita; ma non vi rinvenni alcun fossile.

Spaccato xvii. — Questo spaccato attraversa la regione montuosa a mezzodì del corso inferiore del fiume Fella; mostrando come quivi si continuino le contorsioni della formazione liasica già svelate dai profili precedenti.

Alle falde meridionali del monte Plauris si osserva la continuazione di una delle sinclinali del monte Festa; mentre le altre due, allargandosi ed arrovesciandosi, si disegnano sulle falde settentrionali del monte Chiampon. Tra l'una e l'altra montagna decorre la valle Venzonazza, parallela alla principale depressione di sollevamento da levante a ponente e dovuta ad una evidente frattura della massa calcareo-dolomitica.

Alle falde meridionali del monte Chiampon, un altro piano di frattura interrompe di bel nuovo questa potentissima massa di calcari e di dolomie, e sul frammento sprofondato, che forma il monte Quarnan di Gemona, si conservano, secondo i signori professori Pirona e Suess, anche le rocce giuresi del Titonico e fors'anco più in alto le cretacee, le une e le altre abrase dalle montagne più elevate. Continuandosi mirabilmente i rapporti tectonici del Friuli occidentale, si scorge la dislocazione della massa dei calcari mesozoici; appoggiandosi la creta alle testate dolomitiche ed essendo il piano di contatto occupato da un lembo eocenico, che quindi si fonde più a mattina coll'area di massimo sviluppo di questa formazione. Lo spaccato stesso ne tocca una porzione nelle colline di Collugna e Montenars. Più a settentrione, attraversa una striscia di eocene, comprendente i piani 29 e 30, sulle falde di Plauris verso la valle del Fella, nella località ove dissi trovarsi un assai interessante giacimento di fossili del piano di Buttrio (a *Serpula spirulea*) ed incominciare un lembo di terreni eocenici, del quale vedremo più sotto la continuazione sino nella valle dell'Isonzo.

La valle del Fella coincide evidentemente con una dislocazione dei piani superiori del Trias, resa ancora più complicata da una stretta anteclinale, visibile allo sbocco del R. Resartico nel torrente Resia presso a Resiutta. Per tale dislocazione, sulla destra del fiume Fella da Ovedasso a Moggio, affiora la formazione gessifera keuperiana, che ritroveremo ancor più ad oriente nello spaccato che segue.

Spaccato xviii. — Questo spaccato attraversa dapprima la serie eocenica dei dintorni di Tarcento, ove essa appoggiasi colla solita discordanza al calcare cretaceo ed è ricoperta da un lembo, molto rialzato sull'attuale thalweg del torrente Torre, della più volte ricordata alluvione pliocenica (33). Quindi si presenta evidentissimo il noto scorrimento della massa mesozoica e l'insinuazione nel piano di questo scorrimento di un ampio lembo eocenico, tra i monti Crostis e Postonzic. Le curve della formazione liasica, assai ridotte e deformate, si lasciano idealmente ricomporre coi lembi di questa formazione, che restano ai monti Postonzic e Candin ed alla sella tra questo ed il monte Cuzher. Tra i due primi è indicata poi una frattura, che è la prima origine della valle Venzonazza. In corrispondenza della valle di Resia, è segnata una anticlinale spaccata, lo quale porta lo affioramento del piano gessifero, alquanto più rialzato sulla sinistra della valle. Più a settentrione, lo spaccato attraversa due volte il fiume Fella, prima ove esso segue da levante a ponente la direzione della formazione retica, poscia nei dintorni di Dogna, ove il fiume stesso per lo spazio di 3 chilometri segue l'affioramento del gruppo calcareo-marnoso di Raibl (17), che quivi presenta parecchie assai ricche località fossilifere. Specialmente abbondanti sono quelle sulla sinistra del Fella a Prerit di sopra e di sotto e quelle entro il Canal di Dogna, a R. del Ferro ed a Chiout di Pupa. Infine la vallicola del R. Luvaz è rimarchevole per la varietà delle rocce, che ne formano il versante meridionale e tra queste avvi qualche traccia dei porfidi augitici e felsitici di Kaltwasser, ma prevalgono i conglomerati porfirici riposanti sopra conglomerati calcari policromi, suscettibili di assai bella pulitura ed impiegati come materiale di costruzione lungo la strada postale e la ferrovia della Pontebbana, sino a Moggio.

Spaccato xix. — Piglia le mosse pur esso dalla regione collinesca dei dintorni di Tarcento; prima però attraversando un certo tratto della regione orientale dell'anfiteatro morenico. Mostra quivi l'appoggiarsi discordante dell'eocene medio (20) al calcare cretaceo del monte Bernadia, in questo punto senza nemmeno l'intermezzo della marna rossa scagliosa (27). Questa invece compare alla base dell'altro lembo eocenico, più settentrionale, il quale ricopre l'appoggio pur discordante o meglio lo scorrimento del detto calcare cretaceo sulle testate della dolomia retica del monte Postonzic. Su questo monte evvi un ultimo lembo della curva liasica attraversata dagli spaccati antecedenti, ed alle sue falde settentrionali appare manifesta la frattura, che diede origine alla valle dei Musi ed alla vallicola di un confluente del R. Uccea; in entrambi continuandosi la direzione della valle Venzonazza, che è poi parallela a quella della valle di Resia e della più meridionale comba eocenica, corrispondente al piano di scorrimento tra il calcare cretaceo e la dolomia.

Fra i monti Nisca e Burbia si deprime la sella, per cui si passa dalla valle di Resia alla valle di Uccea e quindi in quella dell'Isonzo (C_2-1056) ed è quivi dove si osserva un lembo eocenico, formato dei piani 27 e 30 e che rappresenta la continuazione di quello di Resiutta; il quale poi da questo punto verso oriente, oltre i confini della provincia si allarga e nelle vicinanze di Flisch (D_2-F454) occupa un bacino di erosione presso alla confluenza delle due valli della Goritenza e dell'Isonzo. È evidente ed ammirabile come questo lembo eocenico faccia in certo qual modo simmetria col lembo similmente disposto delle rocce stesse nei dintorni di Claut, nella valle dello Zelline (A_2-C663); ed è questa una delle tante coincidenze di simiglianza stratigrafica e di conformazione orografica, che ogni qual tratto richiamano alla mente dello stratigrafo le grandi linee delle principali fratture, le quali determinarono l'attuale rilievo alpino.

In corrispondenza alle prime origini del torrente Resia, lo spaccato mostra la maestosa movenza di un'ampia anteclinale triasica, la quale si traduce poi orograficamente nel già descritto rilievo del monte Canino (C_2-2479).

Spaccato xx. — Questo spaccato, al pari dei due che seguono, è normale alla direzione della formazione eocenica nel Friuli orientale e se con questi si confronta, comparirà manifesta la indipendenza stratigrafica di questa formazione dal calcare cretaceo, di cui gli affioramenti compajono distinti anche nello schizzo. Le curve, che sono presentate dalla formazione eocenica, sono del resto assai semplici ed il massimo sollevamento corrisponde al monte Matajur (D_3-1642) la vetta del qual monte è

composta delle stesse brecciole calcareo-marnose, che più a mezzodì, presso a San Pietro degli Schiavi (D_3-S. P. 171) presentano distinte nummuliti e radioli di echinidi. Gli interstrati ed il forte sviluppo, alla base di queste brecciole, della più volte menzionata marna rossa scagliosa rendono ancor più sicuro tale riferimento; quantunque quivi, come in tutta la zona profonda di detti conglomerati e delle brecciole ascritte anche dai geologi austriaci al *Flysch alpino*, non mi sia stato possibile rinvenire le nummuliti caratteristiche.

Spaccato xxi. — Serve a dimostrare le relazioni stratigrafiche tra i varî membri dell'Eocene-medio e specialmente tra il piano di Rosazzo, con abbondanti madrepore, e quello inferiore di Buttrio con *Conoclypus* e *Serpula spirulea* (30 *b* e 29). Presso all'affioramento discordante del calcare cretaceo presso al torrente Judrio, a Centa di Prepotto, vedesi poi la scaglia rossa 27 alternata colle arenarie del piano 20 ed indipendente dal calcare stesso, il quale sotto analoga inclinazione ricompare col mantello di conglomerati infraeocenici presso al fiume Isonzo. Per più chiara intelligenza, in questo spaccato e nei seguenti si è alterato il rapporto tra la scala delle altezze e quella delle distanze; d'onde l'esagerazione delle inclinazioni e dell'apparente potenza delle varie formazioni.

Spaccato xxii. — Attraversa due interessantissime località fossilifere, cretacea l'una e l'altra eocenica, a Medea ed a Russitz di Cormons. Presso all'affioramento più orientale della Creta al monte S. Valentino riappare il più profondo orizzonte nummulitico 29, che io penso equivalga a quello, che si appoggia al calcare cretaceo di Medea al Colle di S. Fosca e che quindi si ripeterebbe con parecchi banchi nella massa più profonda delle arenarie del piano 30 a Russitz ed a Ottelio di Buttrio. È questa anche nell'Istria e nel Carso triestino, la condizione normale della porzione inferiore dell'Eocene medio; colla differenza che per quanto io sappia mancherebbe nel Friuli il piano più profondo dell'Eocene inferiore o *Liburnico*, che nell'Istria e nell'Illiria generalmente sopporta il piano a *Conoclypus conoideus*.

Spaccato xxiii. — Questo spaccato, condotto con direzione nord-ovest nei dintorni di Maniago, mostra le relazioni stratigrafiche tra la formazione cretacea del monte S. Lorenzo e le arenarie e brecciole dell'Eocene medio, e tra queste e le più recenti arenarie glauconiose a *Scutella subrotunda*. Si scorge come entrambi questi passaggi sieno segnati da chiarissima discordanza, la quale, per essere sopra vasta estensione di paese riscontrata ad entrambi i livelli, lascia intravedere due periodi continentali; l'uno all'aurora dell'Eocene e l'altro all'epoca oligocenica, la quale non sarebbe, anche a parere dei signori Hörnes e Fuchs, rappresentata nemmeno nell'ampio lembo terziario dal vallone bellunese. La serie miocenica presenta del pari un disturbo, facilmente dovuto a scorrimento, avvenuto posteriormente al suo deposito; mentre i conglomerati sicuramente pliocenici, poco spostati e ricoperti dalla alluvione quaternaria, sono orizzontali. I fossili miocenici dei due piani 31 e 32 si raccolgono presso Fanna, appena sopra il paese e lungo il torrente Mizza; gli eocenici presso Alberedo.

Spaccato xxiv. — Tende a porre in luce analoghi rapporti stratigrafici, quali si rivelano, esaminando la successione dei terreni dal colle di Udine al colle di Osoppo e specialmente la discordanza del conglomerato sarmatico, formante la base del colle d'Osoppo ed il nucleo del colle di Udine, da quello parimenti terziario, ma più recente ed ancor quasi orizzontale sebbene contorto ed interrotto da fratture, che forma la parte superiore del colle stesso e che altrove trovasi al disotto delle alluvioni quaternarie. Lo spaccato attraversa eziandio un certo tratto dell'anfiteatro morenico ed il versante orientale della conoide quaternaria, ampiamente terrazzata, dal torrente Cormor.

Spaccato xxv. — Ancor meglio che nel precedente, appare manifesta la differenza tra la posizione stratigrafica del conglomerato marino o di estuario del Miocene e del piano sarmatico e la disposizione dell'altro conglomerato assolutamente alluvionale del Pliocene, il quale corona il colle di Ragogna, formandone anche la massa principale e riempie, a quanto pare, le depressioni dell'antico litorale miocenico; sopportando le alluvioni e le morene dell'anfiteatro glaciale.

Di questo anfiteatro morenico, vedonsi quattro cerchie, delle quali le più elevate è la seconda, cioè quella di Moruzzo ed a valle dell'anfiteatro riappare la conoide alluvionale del torrente Cormor, la quale corrisponde all'emuntorio orientale dello scomparso ghiacciajo. L'edifizio morenico si è disegnato in guisa da dimostrarlo quasi insinuato nelle alluvioni, che più a valle ne accompagnarono la costruzione e che gli prepararono al disotto la base; alluvioni, le quali, come si disse, sono nei loro

strati profondi disseminate di grossi blocchi erratici, comprovanti un'espansione del ghiacciajo del Tagliamento molto al di là dei limiti segnati dall'anfiteatro morenico. Escludendo ogni azione riescavatrice dell'antico ghiacciajo, dalle relazioni altimetriche tra la porzione più depressa del Campo di Osoppo e l'apice delle conoidi alluvionali a valle dell'anfiteatro morenico fui indotto necessariamente ad ammettere la contemporaneità delle une e dell'altro. L'alluvione quindi, che sta di sotto, non corrisponde punto all'alluvione preglaciale od *antica*, come l'intesero i Signori Gastaldi e Mortillet.

Spaccato xxvi. — È specialmente diretto a dimostrare l' enorme sviluppo e la pendenza della conoide quaternaria del torrente Zelline, la quale si dilata sulle più fine alluvioni, che certamente furono le prime a ricolmare le depressioni risultanti dalle sconnessioni della sottoposta alluvione pliocenica. Questa alluvione quivi, se non può mancare, è però di fatto più profonda che altrove, poichè essa non viene attinta nemmeno con pozzi, che quasi si spingono al livello marino. Però nel tratto tra Casarsa, Pordenone e S. Vito, nelle alluvioni più profonde, non è raro trovare dei banchi sporadici di conglomerato, il quale se non è pliocenico deve ad ogni modo essere assai antico.

Dallo spaccato si scorge abbastanza bene come alcuni tratti di alluvioni posglaciali si distendino sulla superficie ed alla base del *talus* dello Zelline e come da Casarsa a S. Vito declini rapidamente la conoide del fiume Tagliamento.

Spaccato xxvii. — Può servire a dimostrare sinteticamente tutto il sistema alluvionale e morenico di questa interessantissima regione. I rilievi di Ospedaletto, Artegna ed Udine sono una traccia della orografia preglaciale, che già presentava qualche tratto di piano per la alluvione pliocenica. Le morene dell'anfiteatro si innestano nelle alluvioni grossolane, che alla loro volta, in corrispondenza della zona di rinascimento delle acque, si sfumano nelle più fine alluvioni di lavaggio, segnate al n. 36 e continuantisi col residuo del cordone litorale del secondo periodo glaciale. Le alluvioni posglaciali, di trasporto diretto (38) e di lavaggio (39), si distendono sulle alluvioni del periodo glaciale e costituiscono l' apparato litorale, che venne alquanto sommerso sotto il livello marino. L' anfiteatro presenta la erosione del torrente Cormor, che lo ha profondamente terrazzato presso Ara e Cassacco e più a monte, presso al colle di Artegna, sono indicate le torbiere assai produttive di Bueris. Ancora più a monte, è segnata dubitativamente la probabile esistenza, sulle arenarie e marne eoceniche, di un lembo di conglomerato terziario, che congiunga quello di Ragogna e Susans a quello di Collugna presso Montenars. Più in alto infine la conoide posglaciale del Tagliamento si espande sui più fini detriti, che ne contornano la base, ove nasce e scorre il fiume Ledra e che le devono eziandio servire di letto; essendoche è indubitato che, almeno nelle frequenti e prolungate piene dell'epoca posglaciale il piano d'Osoppo doveva rimanere allagato, come avvenne anche in epoca storica nelle più disastrose escrescenze, che ha presentato il Tagliamento.

Spaccato xxviii. — Siccome la pianura friulana presenta da levante a ponente rilevanti diversità dipendenti dalla orografia circostante, così ho pensato di chiudere la serie degli spaccati con un profilo trasversale della pianura stessa, condotto dalle falde dei dossi di Caneva alle colline eoceniche, che fiancheggiano lo sbocco del fiume Isonzo nel piano. Nella porzione occidentale, per la non grande espansione orizzontale delle dejezioni grossolane dei rispettivi torrenti prealpini, rimangono allo scoperto le alluvioni di lavaggio (56), evidentemente terrazzate; mentre verso oriente, stante lo sviluppo delle conoidi posglaciali del Tagliamento, del Corno, del Cormor e del Torre, essa alluvione viene in generale ricoperta, solo affiorando presso alle origini del fiume Stella, che rappresenta la continuazione del torrente Corno; ove meno si estesero le alluvioni posglaciali e l'alluvione più fina fu in origine più potente, corrispondendo precisamente all'emuntorio principale e centrale dell'antico giacciajo carnico. Tra le alluvioni posglaciali, spicca singolarmente il prisma di dejezione del fiume Tagliamento, il quale dalle sue sponde sino alle origini del torrente Stella presenta la media pendenza del 2.5 per 1000. Nei dintorni di Cormons, si riaccosta alla superficie l'alluvione terziaria, messa a nudo dalla erosione del torrente Judrio e sopra essa si distende un tenue strato di alluvioni quaternarie, incomparabilmente meno sviluppate di quelle del torrente Zelline, del quale la vallata sembra sia stata molto più per tempo sgombra dal rispettivo ghiacciajo.

Abbracciata per tal modo l'area del Friuli con una serie di profili, i quali ponno servire a mostrarne la struttura stratigrafica, non sia discaro al lettore che per sommi

capi ne comprenda in poche linee i tratti principali, i quali serviranno in certo modo anche di riassunto a quanto ho esposto nel presente lavoro e nello stesso tempo di indicazione di quelle lacune, che io stesso mi accorgo di aver lasciate in questa succinta descrizione geologica della provincia esplorata.

1. La serie delle formazioni enumerate presenta alcuni orizzonti sufficientemente definiti, e questi sono: il Carbonifero superiore, il Permiano, il Trias inferiore, il Trias medio arenaceo-porfirico, il Raibliano, il piano Retico, il Lias superiore, il Titonico, il Cretaceo a *Radioliti*, l'Eocene medio, il Miocene ed il Messiniano, il Glaciale ed il Posglaciale: di molti di essi però, la suddivisione e lo studio delle faune è appena iniziato e potranno dar luogo ad altrettante monografie assai interessanti per la geologia alpina. Sono invece da definirsi e da estendersi con ulteriori osservazioni stratigrafiche i piani seguenti: il Siluriano e gli altri livelli precarboniferi, specialmente nel Friuli occidentale; i varî componenti od equivalenti del gruppo calcare infraraibliano, decomposto per interstrati arenaceo-marnosi; gli equivalenti dell'Infralias lombardo e del Lias inferiore e medio della regione retica; i varî piani della formazione giurese, sopra e sotto del Titonico; i componenti della serie cretacea, tanto negli equivalenti della zona a *Nerinee* del monte Cavallo quanto nei piani sino ad ora scarsi di fossili, che sopportano questa zona ed il piano a *Radioliti*.

2. Esiste nella Carnia una grande sinclinale, per erosione della quale venne messo allo scoperto un lembo di formazioni paleozoiche, continuantisi nella finitima valle della Gail e che nella Carnia si succedono in complesso da settentrione a mezzogiorno.

3. Le formazioni paleozoiche sono tormentate da ripiegature, alle quali sono affatto estranee le formazioni triasiche, assai meno contorte ma pure in vario modo sollevate, incurvate ed infrante.

4. Si rimarca una principale frattura in corrispondenza della valle del Tagliamento, la quale si continua, bipartendosi, col tronco inferiore della valle del Fella e colla valle di Resia. Questa frattura però venne ampiamente allargata dalla erosione, specialmente nella valle di Socchieve, ove è manifesta per evidentissimi salti, scorrimenti ed insinuamenti. Essa frattura d'altronde è parallela ad altre fratture, che più a settentrione hanno intersecata la massa del Trias superiore e medio e causata in origine la formazione delle valli di Sauris, di Pesariis, di Vinajo, dell' Incarojo inferiore, del R. Frondison e del torrente Varuvola di Moggessa. Tutte però queste valli vennero ampliate e poste in comunicazione col loro recipiente dalla erosione, mediante rofle, corrispondenti alle più compatte formazioni triasiche.

5. Anche le valli trasversali, che confluiscono nel Tagliamento e quelle dell'Aupa e del Fella tra Raccolana e Pontebba, se ponno essere determinate da discontinuità e da leggiere dislocazioni stratigrafiche, devono però la loro varia ampiezza ed il vario loro carattere orografico alla erosione, variamente esercitata nelle formazioni che successivamente esse valli attraversano nel loro decorso.

6. Una assai costante discordanza, spesso anche accompagnata da scorrimento, separa nella Carnia il gruppo dei calcari infraraibliani dalla superiore serie triasica.

7. Nella massa calcareo-dolomitica, che forma la zona prealpina a mezzodì della accennata principale frattura dal passo della Mauria al passo di Nevè, si avvertono pure

delle fratture parallele. Queste fratture poi attraversano delle chiuse, che irradiano dal piano friulano e le prime meglio delle seconde sono dovute ad accidenti, che accompagnarono il sollevamento. Di queste la più importante è quella, che separa la dolomia retica dalla serie degli affioramenti cretacei; e questa par quasi che abbozzi il perimetro dell' antico golfo miocenico, di cui i depositi marini mancano assolutamente nella Carnia, nè si spingono nel Friuli collinesco ad un'altitudine maggiore di 600 metri.

8. Una serie di combe eoceniche cela in generale il contatto dei due accennati terreni mesozoici, e questo contatto si può studiare soltanto ove i corrispondenti lembi di arenarie e brecciole nummulitiche sono profondamente intaccati dalle accennate valli irradianti dal piano.

9. I terreni eocenici sono assai più internati nella massa montuosa e più accidentati; essendo, per così dire, compresi nelle ripiegature delle formazioni mesozoiche. Si osservano sin nelle valli della Clautana, del Fella, di Uccea e dell'Isonzo e toccano i 1600 metri al monte Matajur. Sono prevalentemente sviluppati nel Friuli orientale, nella quale regione pare che non si estendesse di molto il suaccennato golfo miocenico. Nella loro direzione stratigrafica seguono, dal Bellunese alla valle del Fella, l'andamento delle Alpi Carniche; quindi piegano lentamente a sud-sud-est nel lembo di valle d'Uccea e Flisch; ed infine si allineano colla direzione delle Alpi Giulie e Dinariche, dal Tagliamento al golfo di Trieste. È noto poi come continuino colla direzione stessa nella penisola istriana e nelle isole del Quarnero.

10. Nella porzione sud-est della provincia, i terreni eocenici e cretacei sono assai più depressi che nell'alta vallata dell'Isonzo e nel gruppo del monte Cavallo e dei monti di Maniago. Abbiamo già veduto come questa differenza possa ascriversi ad uno scorrimento, avvenuto quando si delimitava la depressione adriatica, all'aurora del Pliocene superiore.

11. La continuità della serie eocenica è evidentemente interrotta dal golfo di Trieste, di cui la direzione è parallela a quella della formazione sarmatica nel Friuli occidentale, nel Trevigiano e persino nell' Apennino piacentino, pavese e tortonese.

12. La emersione ultima dell' area esaminata dal mare data dallo scorcio del periodo miocenico. Dopo d' allora si formarono una pianura alluvionale ed un sistema di fondi di valle, che furono ovunque infranti e spostati, erosi a monte e sepolti a valle dalle posteriori formazioni alluvionali e moreniche dell'epoca neozoica. In corrispondenza dell'altipiano udinese esisteva un rilievo, tuttora accusato dalla sporgenza dei cocuzzoli di sepolte colline mioceniche e messiniane.

13. Da un periodo di massima emersione, che corrisponde al periodo del Pliocene, l'area friulana si è continuamente sommersa e l'ultimo decisivo spostamento sembra avvenuto in principio dell'epoca glaciale. Anche in seguito poi avvenne una leggera sommersione, nemmeno tanto pronunciata però da togliere ogni traccia dell'apparato litorale del secondo periodo glaciale.

14. Il periodo ultimo continentale fu quindi lunghissimo ed appunto nelle varie fasi si è stabilita prima la orografia, quindi la idrografia attuale e le correnti hanno presentato una assai interessante migrazione; mirando continuamente ad

associarsi, a sprofondarsi, a farsi largo ove erano terreni più erodibili, ed a nascondersi in strette gore, ove erano limitate da pareti di viva roccia.

15. Oltre questo ultimo periodo continentale, si intravedono parecchi altri periodi di emersione sotto forme orografiche, le quali si perdono sempre più nel bujo delle precoci induzioni. Rimontando la serie delle epoche geologiche, sembrami di poter collocare questi periodi continentali allo scorcio dell'Eocene ed al principio dell'epoca stessa, almeno per la massa alpina. Furonvi poi delle numerosissime oscillazioni, le quali produssero l'alternanza di formazioni frammentizie con quelle di mare profondo. Epperò il ritmo delle pulsazioni telluriche è pur dimostrato da questo lembo di terreno e per esso venne per così dire misurata la inenarrabile armonia dei fenomeni esogeni ed endogeni, che hanno prodotto e ridotto il Friuli quali noi lo vediamo; coi suoi vetustissimi monti, colle sue ridenti colline, col suo piano, col mare, che inghiotte, elabora e nasconde i materiali dalle correnti friulane preparati pei continenti futuri.

Località, indicate dalla rispettiva quota altimetrica nello Schizzo orografico del Friuli.

Monti e Colli

2721 M. Coglians - N di Collina.
2690 M. Paralba - N O di T. Avoltri.
2678 M. Manghert - E N di Raibl.
2677 M. Cima di Lares - E di Pieve di Cadore.
2661 M. Wichberg - O di Raibl.
2583 M. Gridola - E di Pieve Cadore.
2563 M. Kaniuns - Alpi Giulie settentrionali.
2560 M. Quaterna - N E di Auronzo.
2516 M. Volaja - N E di Forni Avoltri.
2502 M. Cretaverde - N di Forni Avoltri.
2487 M. Canale - N E di Collina.
2479 M. Canino - E di Resia.
2477 M. Premaggiore - S di Forni di sopra.
2460 M Clapsavon - N di Forni di sotto.
2450 M. di Padola - N di Auronzo.
2450 ? M. Duranno - N di Erto.
2450 ? M. Tuglia - N di Pesariis.
2440 ? Pizzo Collina - N E di Collina.
2405 Monte Croce - N O di Timau.
2400 ? M. Siara - N O di Pesariis.
2400 M. Montasio - E di Raccolana.
2383 M. Terza Grande - S di Sappada.
2381 M. Grintouz - Alpi Giulie settentrionali.
2380 M. Cimone - E di Raccolana.
2370 M. Prisinig - Alpi Giulie settentrionali.
2350 ? Pizzo Avostano - N E di Timau.
2350 ? M. Rinaldo - N di Sappada.
2345 ? M. Cadino - N di Forni Avoltri.
2323 M. Vochu - Alpi Giulie settentrionali.
2330 M. Avanza - N di Forni Avoltri.
2300 M. Magor - O di Claut.
2300 Cima Erler - N di Sappada (Gailthal).
2282 Sonnenstein - detto.
2280 M. Crostis - S E di Collina.
2275 Gartnerkofel - S di Hermagor (Gailthal).
2250 ? M. Pregajene - N di Claut.
2250 Hochwinfel - S di Tropelach (Gailthal).
2241 M. Krn - E di Caporetto. Alpi Giulie.
2220 Sasso Lungherino - N O di Sappada.
2214 Pizzo di Timau - N di Timau.
2210 Pizzo Rombon - N E di Flysch.
2200 ? M. Lavris - S di Resia.
2185 M. Osternig - N di Malborghetto.
2180 M. Pertiche - S di Collina.
2150 ? M. Messer - O di Barcis.
2434 M. Cornon - N O di Forni di sopra.
2100 M. Najarda - S di Forni di sotto.
2098 Mittags-Kogel - S di Malborghetto.
2086 M. Sernio - S di Paularo.
2090 Rosskofel - N di Pontafel.
2079 M. Veltri - N O di Villa Santina.
2076 M. Tinizza - N di Ampezzo.
2050 ? M. Gleris - O di Dogna.
2050 ? M. Mezzaip - O di Tramonti.

2045 M. di Meledis.
2040 M. Novarza - N di Sauris.
2023 M. Rault - N di Frisanco.
2010 ? M. Resto - N E di Tramonti.
2000 ? Plauris - S di Moggio.
1998 Malurchkofel - N di Pontafel.
1980 M. Losa - O di Comeglians.
1978 M. Tierzine - N di Forni di sopra.
1975 M. Paularo - N di Paluzza.
1975 ? M. Ricidume - E di Claut.
1968 M. Terzadia - E di Paluzza.
1962 M. Arvenis - O di Arta.
1950 M. Valcalda - E N di Tramonti.
1948 M. Sarte - N di Resia.
1940 M. Lipnik - E di Pontafel.
1914 M. Verzegnis - S di Villa Santina.
1865 M. Amariana - E di Tolmezzo.
1850 ? M. Collazza - O di Pontebba.
1840 ? M. Taied - O di Alesso.
1800 ? Monte de' Musi - S di Resia.
1777 Alpe di Mauthen - Gailthal.
1750 ? M. Faroppo - N di Alesso.
1714 M. Chiampon - N di Gemona.
1700 M. Burbia - O di Alesso.
1650 ? Monte Laschiplas - N di Tarcento.
1642 M. Matajur - N di Cividale.
1616 M. Montemaggiore - N di Faedis.
1550 ? M. Spina - N di Travesio.
1500 ? M. Stole - N O di Caporetto.
1455 M. S. Simeone - E di Venzone.
1375 M. Rossa - O di Clauzzeto.
1137 M Colaurat - O di Volzano.
1129 M. Ciancul - O di Ampezzo.
1010 M. Cretis - N di Villa Santina.
975 ? M. Quarnan - E di Gemona.
970 ? M. Forchia - N di Vito d'Asio.
950 ? M. Ioanes - N di Faedis.
927 M. Jetza - S O di Volzano.
860 M. Chiarandet - E di Meduno.
850 M. Nariunt - E di Alesso.
802 M. Bernadia - N E di Tarcento.
680 M. Santo - N di Gorizia.
633 M. di Castel del Monte - E di Cividale.
385 Colle di Ragogna - O di S. Daniele.
352 Colle di Cesclans - N del lago di Alesso.
340 Colle di Osoppo - Forte Napoleone.
298 Colle di Buja - Chiesa di S. Stefano.
270 M. S. Martino - E di Gradisca.
250 M. di Cormons.
249 Colle di Rosazzo.
235 » di Solimbergo.
166 Colle di Buttrio - presso Ottellio.
140 » di Medea.
136 » di Udine.
130 » di Farra - N di Gradisca.
102 » di Polcenigo.
92 » di Variano - S O di Udine.
89 Rocca di Monfalcone.

Selle e Culmine

2271 Giogo Veranis - Sappada e Rigolato in Gailthal.
1900 ? Gran Colle - da Paularo a Moggio.
1836 Passo del Primosio - da Paularo in Gailthal.
1776 Passo di Chiaula - da Paularo per Gailthal.
1751 Passo del Razzo - da Sauris nel Comelico.
1740 Passo del M. Chiavalli - da Forni di sotto in V. Settimana.
1633 Passo di Padola - dal Comelico nella Sextenthal.
1600 Passo della Pradulina - da Paularo a Pontebba.
1570 ? Passo di Venchiared - da V. di Viella (Meduna) a Forni di sotto.
1564 Passo del Nassfeld - da Pontebba in Gailthal.
1508 Passo di Lavardet - da V. Pesarina, in Sappada.
1480 Passo di Lanza - dalla Pontebbana alle origini della valle del Chiarsò (Incarojo).
1414 Passo di Osternig - da Malborghetto a Faistriz.
1394 Passo di Karnitza - da Malborghetto a Egger.
1356 Passo di M. Croce - da Paluzza a Mauthen.
1323 Passo di Nevè - da Raccolana a Raibl.
1318 Passo della Clautana - da Claut a Meduno.
1310 Passo della Mauria - da Forni di sopra a Pieve di Cadore.
1305 Passo di Cima Sappada - da Forni di sopra a Sappada.
1145 ? Passo M. Resto - da Tramonti a Forni di sotto.
1056 Passo di Carnizza - di Resia ad Uccea.
1035 Passo di Krainberg - da Villacco in valle della Wurzersau.
1015 Passo del Durone - da Paluzza a Paularo.
947 Passo di Valcalda - da Comeglians a Paluzza.
864 Passo di Vignarosa - di Ampezzo a Forni di sotto.

858 Passo di Wurzen - da Tarvis alla valle della Wurzersau.

846 Passo di S. Osvaldo - da Cimolais val Zelline) ad Erto (V. del Vajont, confl. nel Piave).

790 Passo di Chiampon - dalla valle dell' Arzino (canale di S. Francesco) a Preone, nella valle del Tagliamento.

788 Passo di Saifniz - da Pontebba a Tarvis.

675 Pala Barzana - da Barcis a Frisanco e Meduno.

498 Sella di Palludon - da Clauzzeto in Canal di Vito (confl. dall'Arzino).

266 Passo di Starasella - dalla valle del Natisone a Caporeto sull'Isonzo.

250 Sella di Bordano - di Venzone ad Interneppo, presso il lago di Cavazzo.

Nomi di Città e di Paesi, che corrispondono alle iniziali vicine alla rispettiva quota altimetrica.

A 904 - Auronzo; — A 560 - Ampezzo carnico; — A 418 - Arta; — A 357 - Andreis; — A 168 - Alesso; — A 130 - Aviano; — A 2 - Aquileja. — B 8 - Belvedere di Aquileja; — B 85 - Buttrio; — B 345 - Barcis; — B 98 - Budoja. — C 1237 - Collina; — Ci 663 - Cimolais; — Cl 623 - Claut; — C 544 - Comeglians; — C 383 - Clauzzeto; C 354 - Canal di S. Francesco; — C 230 - Caporetto; — C 210 - Colloredo di Montalbano; — C 136 - Cividale; — C 82 - Canale; — C 54 - Cormons; — C 42 - Casarsa; C 39 - Codroipo; — C 35 - Caneva, Vallegher; — D 421 - Dogna; D 114 - Dignano; — D 919 - Doberdò. — E 789 - Erto. — Fs 903 - Forni di Sopra; — Fa 877 - Forni Avoltri; — Fi 776 Forni di Sotto; F 456 Frisanco; — F 454 - Flysch; — F 265 - Fagagna; — F 189 - Faedis. — G 573 Galizis di Moggio; — G 274 - Gemona; — G 71 - Gorizia, Stazione ferrov.; — G 32 - Gradisca; — G 4 - Grado. — K 1036 - Krainberg. — L 188 - Lestans; — L 10 - Latisana. — M 723 - Malborghetto; — M 680 - Moggessa; — M 316 - Moggio; — M 313 - Montereale; — M 273 - Maniago grande; — M 270 - Meduno; — M 252 - Moruzzo; — M. 40 - Mortegliano; — M 35 - Medea; — M 23 - Monfalcone; — M 2 - Marano. — N 210 - Nimis; — N. 146 - Nabresina. — O 205 - Ospedaletto; — O 185 - Osoppo; — O 9 - Oderzo. — P 886 - Pieve di Cadore; — P 644 - Paularo; — P 605 - Paluzza; — P 564 - Pontebba; — P 191 - Pulfero; — P 197 - Peonis; — P 194 - Pinzano; — P 75 - Pasian Schiavonesco; — P 75 - Pozzuolo; — P 102 - Polcenigo Colle; — P 30 - Palma; — P 28 - Pordenone; — P 96 - Portogruaro. — R 910 - Raibl; — R 734 - Rigolato; — R 427 - Resia, S. Giorgio; — R 368 - Raccolana; — R 315 - Resiutta; — R 234 - Raspano; — R 21 - Romans; — R 11 - Ronchis. — S 1375 - Sauris superiore; — S 1227 - Sappada (Granvilla); — S 922 - S. Stefano del Comelico; — S 973 - Sauris di sotto; — S H 581 - S. Hermagor; — S D 260 - S. Daniele; — S 171 - S. Pietro degli Schiavi; — S 131 - Spilimbergo; — S Q 104 - S. Quirino; — S M 100 - S. Marco; — S G 63 - S. Gio. di Manzano; — S 29 - Sagrado; — S V 29 - S. Vito al Tagliamento; — S 26 - Sacile; — S G 6 - S. Giorgio di Nogaro; — S D 4 - S Donà di Piave. — T 748 - Tarvis superiore; — T 561 - Tropelach; — T S 368 - Tramonti superiore; — T 336 - Tramonti inferiore; — T 323 - Tolmezzo; — T 222 - Tolmino; — T 195 - Travesio; — T 191 - Tricesimo. — U 108 - Udine, Stazione ferroviaria. — V A 433 - Vito d'Asio, Pieve; — V 230 - Venzone; — V 832 - Vinajo; — V 364 - Villa Santina; — W 195 - Wolzano; — W 858 - Wurzen.

N. B. Le linee rosse A B e C D indicano; la prima, l'asse orografico delle Alpi Giulie e l'asse stratigrafico della Formazione eocenica; la seconda, l'asse stratigrafico ed orografico delle Formazioni miocenica e pliocenica e della estremità settentrionale del Golfo Adriatico.

Le linee nere I a XXVIII corrispondono ai piani degli spaccati disegnati nelle Tavole seguenti.

SCHIZZO OROCRAFICO DEL FRIULI

Località corrispondenti ad alcuni num.i altimetrici ed alle lettere majuscole iniziali, segnati nello Schizzo.

Monti e Colli

2721 M. Coglians - N di Collina -- 2690 M. Peralba - N O di F. Avoltri -- 2678 M. Manghert - E N di Raibl. -- 2677 M. Cima di Lares-Est di Pieve di Cadore. -- 2583 M. Gridola - E di Pieve Cadore. -- 2516 M. Volaja - N E di Forni Avoltri. -- 2502 M. Cretaverde - N di Forni Avoltri. -- 2479 M. Canino - Est di Resia. -- 2477 M. Premaggiore - Sud di Forni di sopra. -- 2460 M. Clapsavon - N di Forni di sotto. -- 2450 M. di Padola - N di Auronzo. -- 2450 ? M. Tuglia - N di Pesariis. -- 2400 M. Montasio - E di Raccolana. -- 2370 M. Prisinig - Alpi Giulie settentrionali. 2330 M. Avanza - N di Forni Avoltri. -- 2300 M. Magor - O di Claut. -- 2300 Cima Erler - N di Sappada (Gailthal). 2275 Gartnerkofel - Sud di Hermagor (Gailthal). -- 2241 M. Krn - E di Caporetto -- Alpi Giulie. -- 2200 ? M. Lavris S. di Resia -- 2100 M. Najarda - S di Forni di sotto. -- 2079 M. Veltri - N O di Villa Santina. -- 2076 M. Tinizza - N di Ampezzo. -- 2040 M. Novarza - N di Sauris. -- 2023 M. Rault. -- N di Frisanco. -- 2000 M. Plauris - S di Moggio -- 1998 Malurchkofel - N di Pontafel. -- 1975 M. Paularo - N di Paluzza -- 1968 M. Terzadia - Est di Paluzza. -- 1962 M. Arvenis - O di Arta. -- 1914 M. Verzegnis - S di Villa Santina. -- 1865 M. Amariana - E di Tolmezzo. -- 1714 M. Chiampon - N di Gemona. -- 1650 ? Monte Laschiplas - N di Tarcento. -- 1642 M. Matajur - N di Cividale. -- 1455 M. S. Simeone - E di Venzone. -- 1129 M. Ciancul - O di Ampezzo. -- 950 ? M. Ioanes - N. di Faedis. -- 802 M. Bernadia - N E di Tarcento. -- 680 M. Santo - N di Gorizia. -- 385 Colle di Ragogna - O di S. Daniele. 352 Colle di Cesclans - Nord del lago di Alesso. -- 340 Colle di Osoppo - Forte Napoleone. -- 298 Colle di Buja - Chiesa di S. Stefano. -- 250 M. di Cormons. -- 249 Colle di Rosazzo. -- 235 Colle di Solimbergo. -- 166 Colle di Buttrio - presso Ottellio. -- 140 Colle di Medea. -- 136 Colle di Udine -- 92 Colle a Variano - S O di Udine.

Selle e Culmine

2271 Giogo Veranis - da Sappada e Rigolato in Gailthal. -- 1836 Passo del Primosio - da Paularo in Gailthal. -- 1776 Passo di Chiaula - da Paularo per Gailthal. -- 1633 Passo di Padola - dal Comelico nella Sextenthal. -- 1570 ? Passo di Venchiared - da V. di Viellia (Meduna) a Forni di sotto. -- 1564 Passo del Nassfeld - da Pontebba in Gailthal. 1356 Passo di M. Croce - da Paluzza a Mauthen. -- 1323 Passo di Nevè - da Raccolana a Raibl. -- 1310 Passo della Mauria - da Forni di sopra a Pieve di Cadore. -- 1145 Passo di M. Resto - da Tramonti a Forni di sotto. -- 1056 Passo di Carnizza - di Resia ad Uccea. -- 1015 Passo del Durone - da Paluzza a Paularo. -- 864 Passo di Vignarosa - di Ampezzo a Forni di sotto. -- 846 Passo di S. Osvaldo - da Cimolais (val Zelline) ad Erto (V. del Vajont, confl. nel Piave). -- 790 Passo di Chiampon - dalle valle dell' Arzino (canale di S. Francesco) a Preone, nelle valle del Tagliamento. -- 788 Passo di Saifniz - da Pontebba a Tarvis. -- 266 Passo di Starasella - dalla valle del Natisone a Caporetto sull' Isonzo.

Nomi di Città e di Paesi, che corrispondono alle iniziali vicine alla rispettiva quota altimetrica

A 904 - Auronzo; — A 569 - Ampezzo carnico; — A 418 - Arta; — A 357 - Andreis; — A 168 - Alesso; — A 130 - Aviano; — A 2 - Aquileja. — B 8 - Belvedere di Aquileja; — B 85 - Buttrio; — B 345 - Barcis; — B 98 - Budoja. — C 1237 - Collina; — Ci 663 - Cimolais; — Cl 623 - Claut; — C 544 - Comeglians; — C 383 - Clauzzeto; C 354 - Canal di S. Francesco; — C 230 - Caporetto; — C 210 - Colloredo di Montalbano; — C 136 - Cividale; — C 82 - Canale; — C 54 - Cormons; — C 42 - Casarsa; — C 39 - Codroipo; — C 35 - Caneva, Vallegher. — D 421 - Dogna; D 114 - Dignano; — D 99 - Doberdò. — E 789 - Erto. — Fs 903 - Forni di Sopra: — F A 877 - Forni Avoltri; — Fi 776 Forni di Sotto; F 456 - Frisanco; — F 454 - Flysch; — F 265 - Fagagna; — F 189 - Faedis. — G 573 - Galizis di Moggio; — G 274 - Gemona; — G 71 - Gorizia, Stazione ferrov.; — G 32 - Gradisca; — G 4 - Grado. — K 1036 - Krainberg. L 188 - Lestans; — L 10 - Latisana. — M 723 - Malborghetto; — M 680 - Moggessa; — M 316 - Moggio; — M 313 - Montereale; — M 273 - Maniago grande; — M 270 - Meduno; — M 252 - Moruzzo; — M 40 - Mortegliano; — M 35 - Medea; — M 23 - Monfalcone — M 2 - Marano. — N 210 - Nimis; N 146 - Nabresina. — O 205 - Ospedaletto; — O 185 - Osoppo; — O 9 - Oderzo. — P 886 Pieve di Cadore; — P 644 - Paularo; — P 605 - Paluzza; — P 564 - Pontebba; — P 191 - Pulfero; — P 197 - Peonis; — P 194 - Pinzano; — P 75 - Pasian Schiavonesco; — P 75 - Pozzuolo; — P 102 - Polcenigo, Colle; — P 30 - Palma; — P 28 - Pordenone; — P 96 - Portogruaro. — R 910 - Raibl; — R 734 - Rigolato; — R 427 - Resia, S. Giorgio; — R 368 - Raccolana; — R 315 Resiutta; — R 234 - Raspano; — R 21 - Romans; — R 11 - Ronchis. — S 1375 - Sauris superiore; — S 1227 - Sappada (Granvilla); — S 922 - S. Stefano del Comelico; — S 973 - Sauris di sotto; — S H 581 - S. Hermagor; — S D 260 S Daniele; — S 171 - S Pietro degli Schiavi; — S 131 - Spilimbergo; — S Q 104 - S Quirino; — S M 100 - S. Marco; — S G 63 - S. Gio. di Manzano; — S 29, Sagrado; — S V 29 - S. Vito al Tagliamento; — S 26 - Sacile; — SG 6 - S. Giorgio di Nogaro; — S D 4 - S Donà di Piave. — T 748 - Tarvis superiore; T 561 - Tropelach; — T S 368 - Tramonti superiore; — T 336 - Tramonti inferiore; — T 323 - Tolmezzo; — T 222 - Tolmino; — T 195 - Travesio; T 191 - Tricesimo — U 108 - Udine, Stazione ferroviaria. — V A 433 - Vito d' Asio, Pieve; — V 230 - Venzone; — V 832 - Vinajo; — V 364 - Villa Santina. — W 195 - Wolzano; — W 858 - Wurzen.

NB. Le linee rosse A B e C D indicano; la prima, l' asse orografico delle Alpi Giulie e l' asse stratigrafico della Formazione eocenica; la seconda, l' asse stratigrafico ed orografico delle Formazioni miocenica e pliocenica e della estremità settentrionale del Golfo Adriatico.

Le linee nere I a XXVIII corrispondono ai piani degli spaccati disegnati nelle Tavole seguenti.

Per le altre località vedi il testo.

T. Taramelli dis.

Pavia, Stab. Tip. e Lit. Sarchi e Marelli

SCHIZZO OROCRAFICO DEL FRIULI

Località corrispondenti ad alcuni num.i altimetrici ed alle lettere majuscole iniziali, segnati nello Schizzo.

Monti e Colli

2721 M. Coglians - N di Collina -- 2690 M. Peralba - N O di F. Avoltri -- 2678 M. Manghert - E N di Raibl. -- 2677 M. Cima di Lares - Est di Pieve di Cadore. -- 2583 M. Gridola - E di Pieve Cadore. -- 2516 M. Volaja - N E di Forni Avoltri. -- 2502 M. Cretaverde - N di Forni Avoltri. -- 2479 M. Canino - Est di Resia. -- 2477 M. Premaggiore - Sud di Forni di sopra. -- 2460 M. Clapsavon - N di Forni di sotto. -- 2450 M. di Padola - N di Auronzo. -- 2450 ? M. Tuglia - N di Pesariis. -- 2400 M. Montasio - E di Raccolana. -- 2370 M. Prisinig - Alpi Giulie sottentrionali. 2330 M. Avanza - N di Forni Avoltri. -- 2300 M. Magor - O di Claut. -- 2300 Cima Erler - N di Sappada (Gailthal). 2275 Gartnerkofel - Sud di Hermagor (Gailthal). -- 2244 M. Krn - E di Caporetto -- Alpi Giulie. -- 2200 ? M. Lavris S. di Resia -- 2100 M. Najarda - S di Forni di sotto. -- 2079 M. Veltri - N O di Villa Santina. -- 2076 M. Tinizza - N di Ampezzo. -- 2040 M. Novarza - N di Sauris. -- 2023 M. Rault. -- N di Frisanco. -- 2000 M. Plauris - S di Moggio -- 1998 Malurchkofel - N di Pontafel. -- 1975 M. Paularo - N di Paluzza -- 1968 M. Terzadia - Est di Paluzza. -- 1962 M. Arvenis - O di Arta. -- 1914 M. Verzegnis - S di Villa Santina. -- 1865 M. Amariana - E di Tolmezzo. -- 1714 M. Chiampon - N di Gemona. -- 1650 ? Monte Laschiplas - N di Tarcento. -- 1642 M. Matajur - N di Cividale. -- 1455 M. S. Simeone - E di Venzone. -- 1129 M. Ciancul - O di Ampezzo. -- 950 ? M. Ioanes - N. di Faedis. -- 802 M. Bernadia - N E di Tarcento. -- 680 M. Santo - N di Gorizia. -- 385 Colle di Ragogna - O di S. Daniele. 352 Colle di Cesclans - Nord del lago di Alesso. -- 340 Colle di Osoppo - Forte Napoleone. -- 298 Colle di Buja - Chiesa di S. Stefano. -- 250 M. di Cormons. -- 249 Colle di Rosazzo. -- 235 Colle di Solimbergo. -- 166 Colle di Buttrio - presso Ottellio. -- 140 Colle di Medea. -- 136 Colle di Udine -- 92 Colle a Variano - S O di Udine.

Selle e Culmine

2271 Giogo Veranis - da Sappada e Rigolato in Gailthal. -- 1836 Passo del Primosio - da Paularo in Gailthal. -- 1776 Passo di Chiaula - da Paularo per Gailthal. -- 1633 Passo di Padola - dal Comelico nella Sextenthal. -- 1570 ? Passo di Venchiared - da V. di Viellia (Meduna) a Forni di sotto. -- 1564 Passo del Nassfeld - da Pontebba in Gailthal. 1356 Passo di M. Croce - da Paluzza a Mauthen. -- 1323 Passo di Nevè - da Raccolana a Raibl. -- 1310 Passo della Mauria - da Forni di sopra a Pieve di Cadore. -- 1145 Passo di M. Resto - da Tramonti a Forni di sotto. -- 1056 Passo di Carnizza - di Resia ad Uccea. -- 1015 Passo del Durone - da Paluzza a Paularo. -- 864 Passo di Vignarosa - di Ampezzo a Forni di sotto. -- 846 Passo di S. Osvaldo - da Cimolais (val Zellina) ad Erto (V. del Vajont, confl. nel Piave). -- 790 Passo di Chiampon - dalle valle dell' Arzino (canale di S. Francesco) a Preone, nelle valle del Tagliamento. -- 788 Passo di Saifniz - da Pontebba a Tarvis. -- 266 Passo di Starasella - dalla valle del Natisone a Caporetto sull' Isonzo.

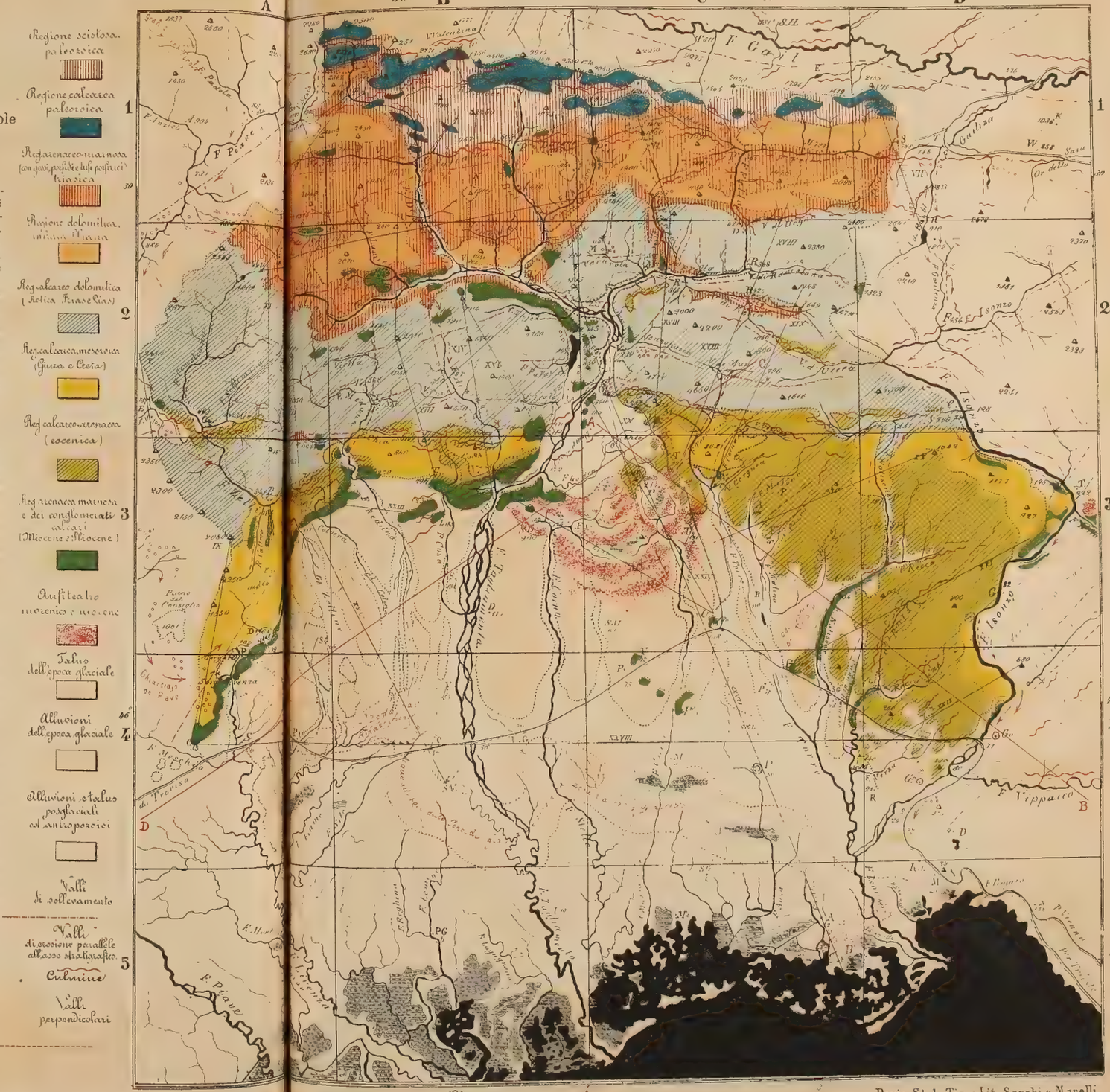
Nomi di Città e di Paesi, che corrispondono alle iniziali vicine alla rispettiva quota altimetrica

A 904 - Auronzo; — A 569 - Ampezzo carnico; — A 418 - Arta; — A 357 - Andreis; — A 168 - Alesso; — A 130 - Aviano; — A 2 - Aquileja. — B 8 - Belvedere di Aquileja; — B 85 - Buttrio; — B 345 - Barcis; — B 98 - Budoja. — C 1237 - Collina; — Ci 663 - Cimolais; — Cl 623 - Claut; — C 544 - Comeglians; — C 383 - Clauzzetto; C 354 - Canal di S. Francesco; — C 230 - Caporetto; — C 210 - Colloredo di Montalbano; — C 136 - Cividale; — C 82 - Canale; — C 54 - Cormons; — C 42 - Casarsa; C 39 - Codroipo; — C 35 - Caneva, Vallegher. — D 421 - Dogna; D 414 - Dignano; — D 99 - Doberdò. — E 789 - Erto. — Fs 903 - Forni di Sopra: — F A 877 - Forni Avoltri; — Fi 776 Forni di Sotto; F 456 - Frisanco; — F 454 - Flysch; — F 265 - Fagagna; — F 189 - Faedis. — G 573 - Galizis di Moggio; — G 274 - Gemona; — G 71 - Gorizia, Stazione ferrov.; — G 32 - Gradisca; — G 4 - Grado. — K 1036 - Kraionberg. L 188 - Lestans; — L 10 - Latisana. — M 723 - Malborghetto; — M 680 - Moggessa; — M 316 - Moggio; — M 313 - Montereale; — M 273 - Maniago grande; — M 270 - Meduno; — M 252 - Moruzzo; — M 40 - Mortegliano; — M 35 - Medea; — M 23 - Monfalcone — M 2 - Marano. — N 210 - Nimis; N 146 - Nabresina. — O 205 - Ospedaletto; — O 185 - Osoppo; — O 9 - Oderzo. — P 886 Pieve di Cadore; — P 644 - Paularo; — P 605 - Paluzza; — P 564 - Pontebba; — P 191 - Pulfero; — P 197 - Peonis; — P 194 - Pinzano; — P 75 - Pasian Schiavonesco; — P 75 - Pozzuolo; — P 102 - Polcenigo, Colle; — P 30 - Palma; — P 28 - Pordenone; — P 96 - Portogruaro. — R 910 - Raibl; — R 734 - Rigolato; — R 427 - Resia, S. Giorgio; — R 368 - Raccolana; — R 315 Resiutta; — R 234 - Raspano; — R 21 - Romans; — R 41 - Ronchis. — S 1375 - Sauris superiore; — S 1227 - Sappada (Granvilla); — S 922 - S. Stefano del Comelico; — S 973 - Sauris di sotto; — S H 581 - S. Hermagor; — S D 260 S Daniele; — S 171 - S Pietro degli Schiavi; — S 131 - Spilimbergo; — S Q 104 - S Quirino; — S M 100 - S. Marco; — S G 63 - S. Gio. di Manzano; — S 29, Sagrado; — S V- 29 - S. Vito al Tagliamento; — S 26 - Sacile; — SG 6 - S. Giorgio di Nogaro; — S D 4 - S Donà di Piave. — T 718 - Tarvis superiore; T 561 - Tropelach; — T S 368 - Tramonti superiore; — T 336 - Tramonti inferiore; — T 323 - Tolmezzo; — T 222 - Tolmino; — T 195 - Travesio; T 191 - Tricesimo - U 108 - Udine, Stazione ferroviaria. — V A 433 - Vito d' Asio, Pieve; — V 230 - Venzone; — V 832 - Vinajo; — V 364 - Villa Santina; — W 195 - Wolzano; — W 858 - Wurzen.

NB. Le linee rosse A B e C D indicano; la prima, l' asse orografico delle Alpi Giulie e l'asse stratigrafico della Formazione eocenica; la seconda, l'asse stratigrafico ed orografico delle Formazioni miocenica e pliocenica e della estremità settentrionale del Golfo Adriatico.

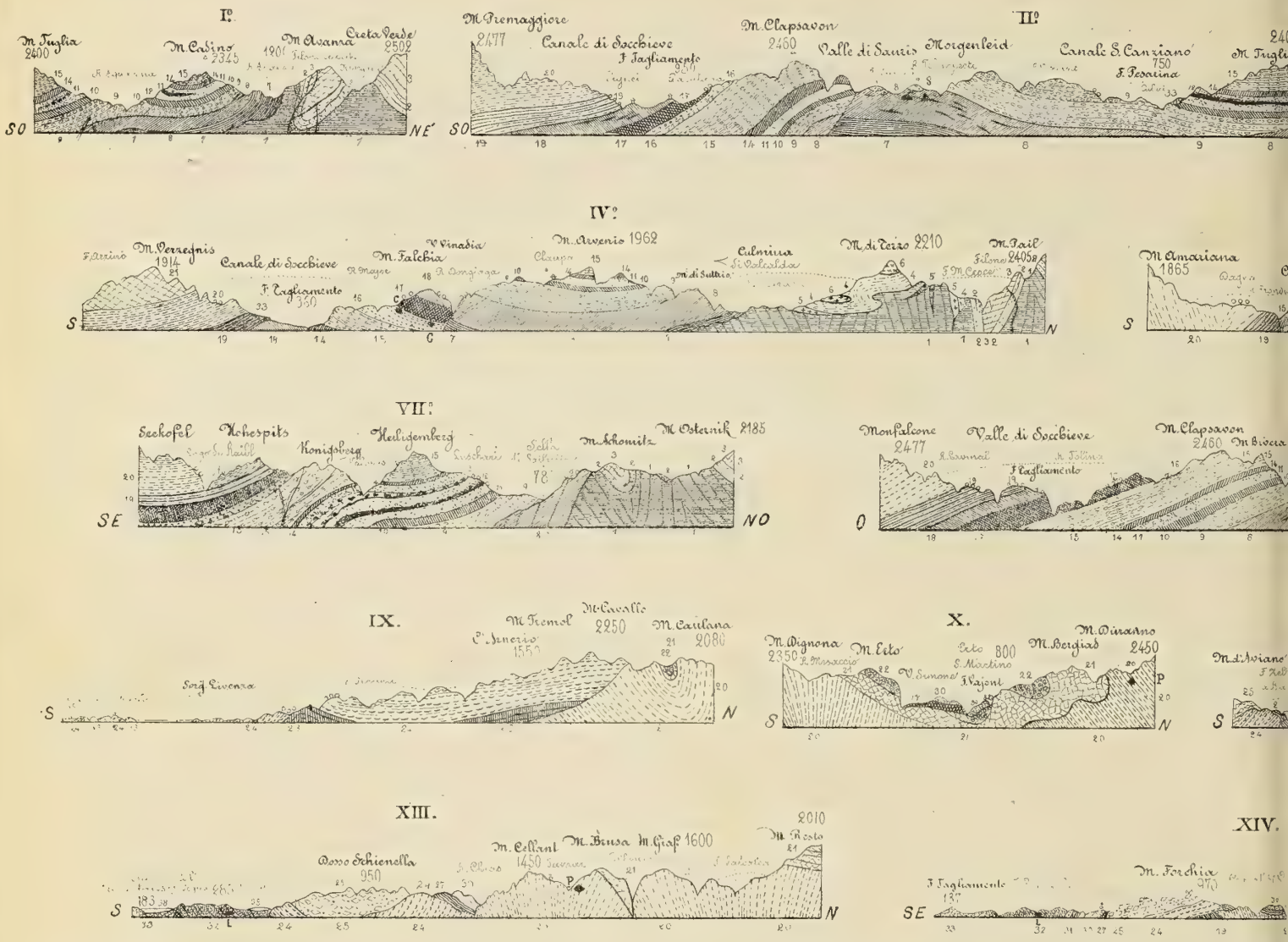
Le linee nere I a XXVIII corrispondono ai piani degli spaccati disegnati nelle Tavole seguenti.

Per le altre località vedi il testo.



T. Taramelli dis.

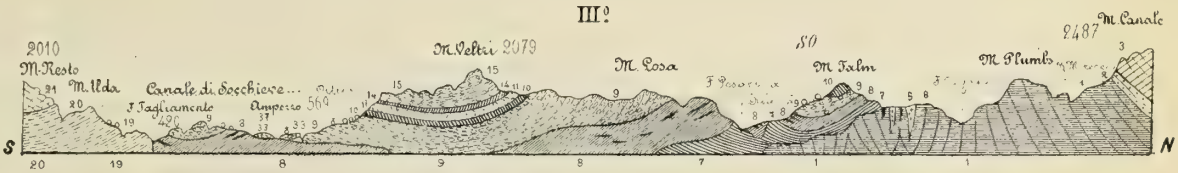
Pavia, Stab. Tip. e Lit. Sarchi e Marelli



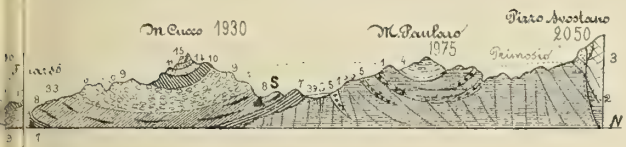
SILURIANO: 1-Scisti quarzosi, argillomicacei a Graptoliti. CARBONIFERO: 2-Cal
grigi o rossi, zona dei filoni cuprifori. PERMIANO: 4-Argilloscisti, arenarie, spiliti, grovacc
TRIAS: 7-Arenarie micacee e puddinga quarzosa rossa 8-Marne e dolomie cariate gessi
e tufi augitici 12-Porfidi augitici 13 Porfidi felsitici e conglomerati porfirici 14
Arenarie con Antracite 17-Calcari marnosi del Raibliano ad Hörnesia Johannis-
Dolomia principale a Dicerocardium
LIAS E GIURA 21 Calcari selciferi ed oolitici 22-Calcari rossi a clocitici ad Ammon
CRETA 24 Calcari compatti, fillidi; zona a Caprotina 25-Calcari a Radiolidi; ooli
EOCENE 27 Marne rosse, scagliose 28-Conglomerati, calcari, marnosi; piroscisti
b Banchi madreporici.
MIOCENE E PLIOCENE 31 glauconie e molasse; a Terreno sideritico 32 C
NEOZOICO 34 ∞ Massi erratici e limite di massima potenza dei ghiacciai carnici
periodo glaciale 38 Alluvione posglaciale, grossolana 39- della, di lavaggio
SEGNI CONVENZIONALI L = Lignite ◆ P Piroscisto • C Litantrace ▲ S Solfo ≈ Gesso Xg

T. Taramelli dis.

III?

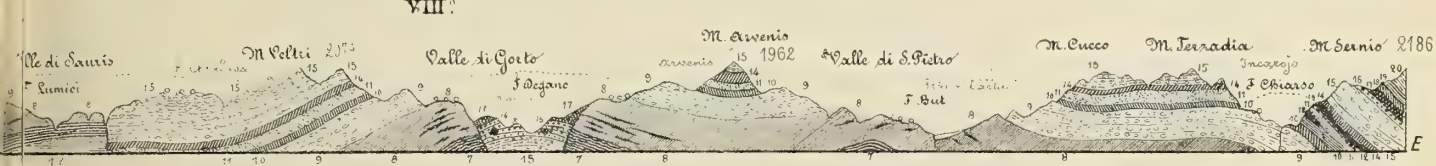


V.

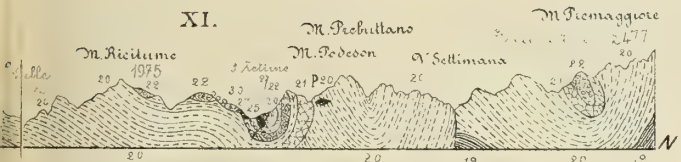


VI?

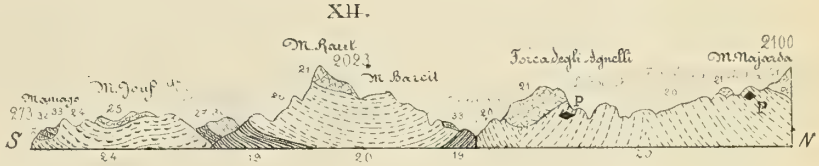
VIII?



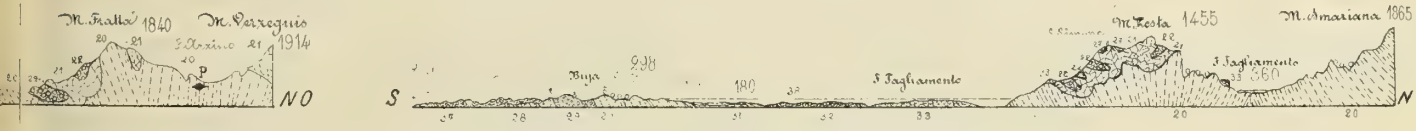
XI.



XII.



XV.

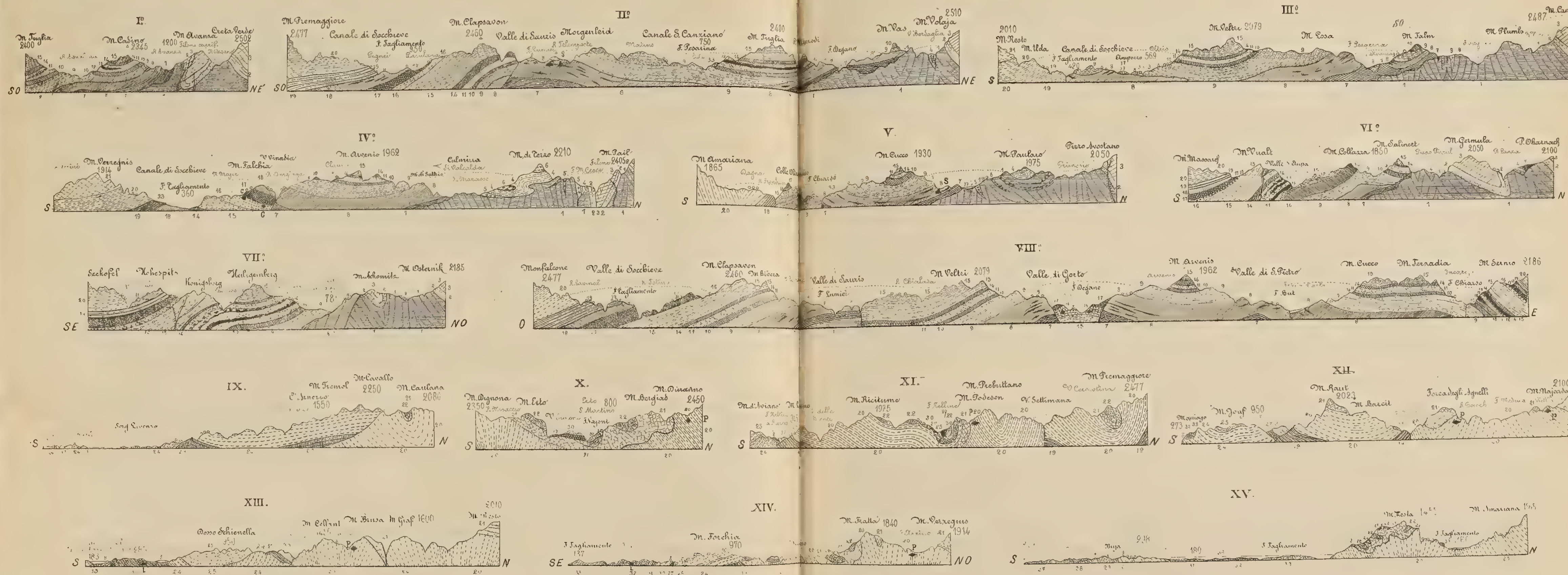


…renarie filliti, zona fossilifera ad Enomphalus tuberculatus 3-Calcari subsaccaroidi
5-Asaniti, iperiti, arcosi 6-Porfido quarzifero e conglomerato porfirico
9-Arenarie a Naticella costata 10-Calcari nodulosi e brecce policrome 11-Arenarie
…ad Halobia 15-Dolomia inferiore o dello Schlern zona dei filoni cinciferi 16
…iae 18-Marne iridate gessifere 19-Dolomia scagliosa, scisti di Vidali 20-

…frons 23-Calcari e brecciole a Ptygmatis Bruntutana (Titonico inferiore?)
…superiore a Nerinee 26-Breccie con interstrati marno-scagliosi
29-Brecciole nummulitiche a Conoclypus 30-Arenarie e puddinghe quarzose

…rato marino e molasse lignitifere 33-Conglomerato alluvionale, pliocenico.
5-Alluvione di trasporto diretto 36-Alluvione di lavaggio 37-Morene del secondo
-Torbiere.
…io nativo. Filoni cupriferi. Filoni cinciferi.

Pavia, Stab. Tip. e Lit. Giuseppe Marelli.



SILURIANO: 1-Scisti quarzosi, argillomicacei a Graptoliti. CARBONIFERO: 2-Calcescisti, arenarie filliti, zona fossilifera ad Euomphalus tuberculatus 3-Calcari subsaccaroidi grigi o rosei, zona dei filoni cupriferi. PERMIANO: 4-Argilloscisti, arenarie, spiliti, grovacche 5-Afaniti, iperiti, arcosi 6-Porfido quarzifero e conglomerato porfirico

TRIAS: 7-Arenarie micacee e puddinga quarzosa rossa 8-Marne e dolomie cariate gessifere 9-Arenarie a Naticella costata 10-Calcari nodulosi e brecce policrome 11-Arenarie e tufi augitici 12-Porfidi augitici 13 Porfidi felsitici e conglomerati porfirici 14 Scisti ad Halobia 15-Dolomia inferiore o dello Schlern zona dei filoni zinciferi 16 Arenarie con Antracite 17-Calcari marnosi del Raibliano ad Hörnesia Johannis-Austriae 18-Marne iridate gessifere 19-Dolomia scagliosa, scisti di Vidali 20-Dolomia principale a Dicerocardium

LIAS E GIURA 21 Calcari selciferi ed ooliti 22-Calcari rossi o encrinitici ad Ammonites bifrons 23-Calcari e brecciole a Pygmatis Bruntutana (Titonico inferiore)

CRETA 24 Calcari compatti, filliti; zona a Caprotina 25-Calcari a Radioliti; oolitiche zona superiore a Nerinee 26-Breccie con interstrati marno-scagliosi

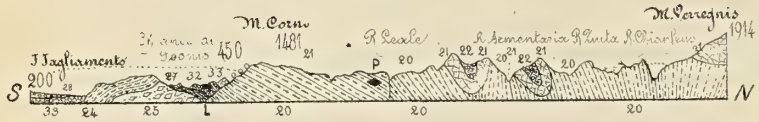
EOGENE 27 Marne rosse, scagliose 28-Conglomerati, calcari, marnosi; piroscisti 29- Brecciole nummulitiche a Conoclypus 30-Arenarie e puddinghe quarzose banchi madreporici

MIOCENE E PLIOCENE 31 glauconie e molasse; a Terreno siderolitico 32 Conglomerato marino e molasse lignitifere 33-Conglomerato alluvionale, pliocenico.

NEOZOICO 34 Massi erratici, e limite di massima potenza dei ghiacciai carnici 35-Alluvione di trasporto diretto 36-Alluvione di lavaggio 37-Morene del secondo periodo glaciale 38 Alluvione posglaciale, grossolana 39- detta, di lavaggio 40-Torbiere.

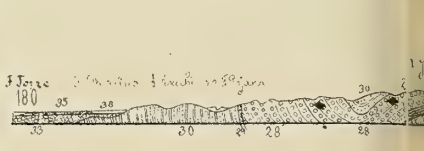
SEGNI CONVENZIONALI L = Lignite ◆ P Piroscisto • C Antracite ▲ S Solfo ≈ Gesso Xg Mercurio nativo Filoni cupriferi. Filoni zinciferi.

XVI.

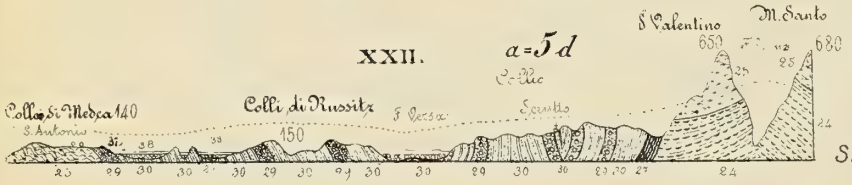


XVII.

XIX.



XXII. $a = 5\,d$

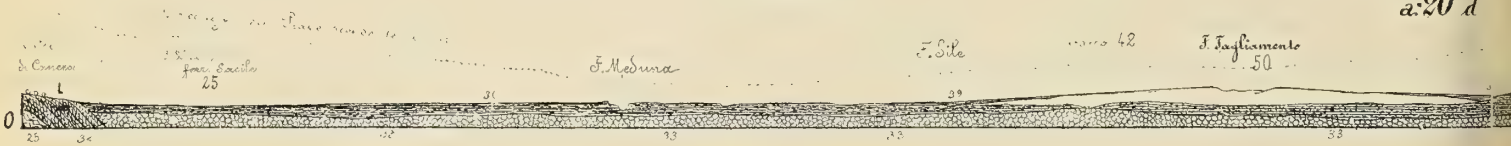


XXIII $a = 5\,d$

XXVI

XXVIII.

$a = 20\,d$



TRIAS: **7**- Arenarie micacee e puddinga quarzosa rossa **8**- Marne e dolomie cariate gessifere e tufi augitici **12**- Porfidi augitici **13** Porfidi felsitici e conglomerati porfirici **14** Arenarie con Antracite **17**- Calcari marnosi del Raibliano ad Hörnesia Johannis-Austriae Dolomia principale a Dicerocardium

LIAS E GIURA **21** Calcari selciferi ed oolitici **22**- Calcari rossi a cloritici ad Ammoniti

CRETA **24** Calcari compatti, fillitici; zona a Caprotina **25**- Calcari a Radioliti; oolitici

EOCENE **27** Marne rosse, scagliose **28**- Conglomerati, calcari marnosi; piroscisti e banchi madreporici.

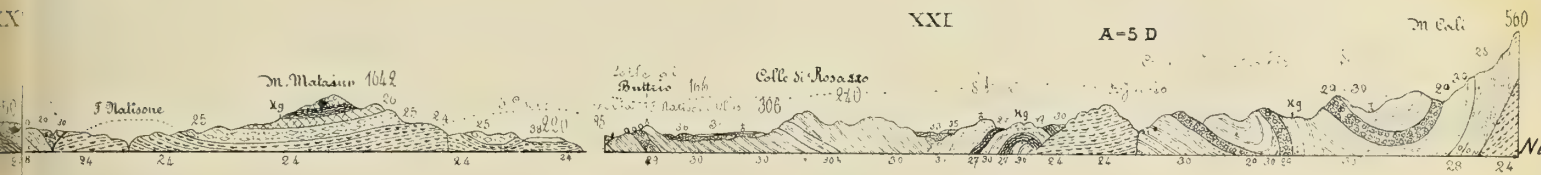
MIOCENE E PLIOCENE **31** glauconie e molasse; a. Terreno siderolitico **32** Cag

NEOZOICO **34** °° Massi erratici e limite di massima potenza dei ghiacciai carnici periodo glaciale **38** Alluvione posglaciale, grossolana **39**- della, di lavaggio

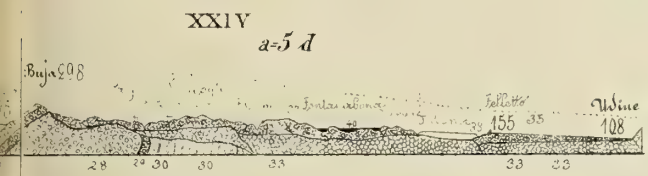
SEGNI CONVENZIONALI L = Lignite ◆ P Piroscisto • C Litantrace ▲ S Solfo ≈ Gesso Xg

XVIII.

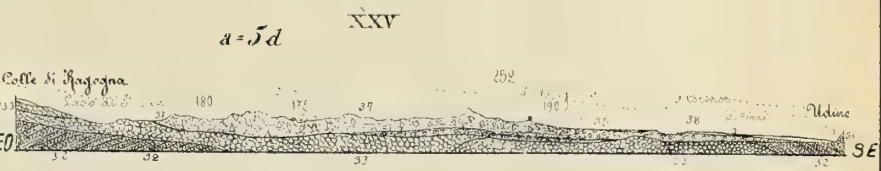
XXI



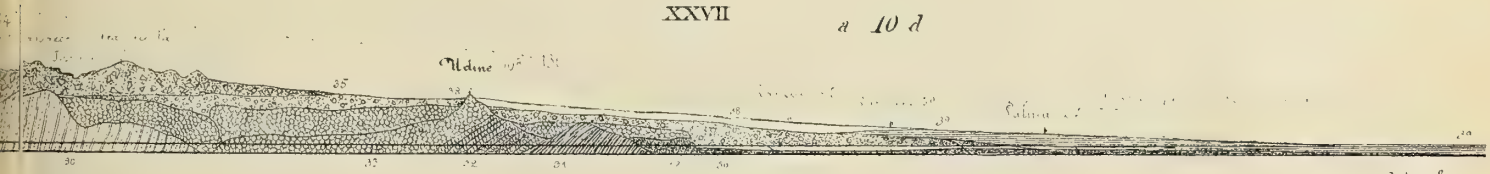
XXIV



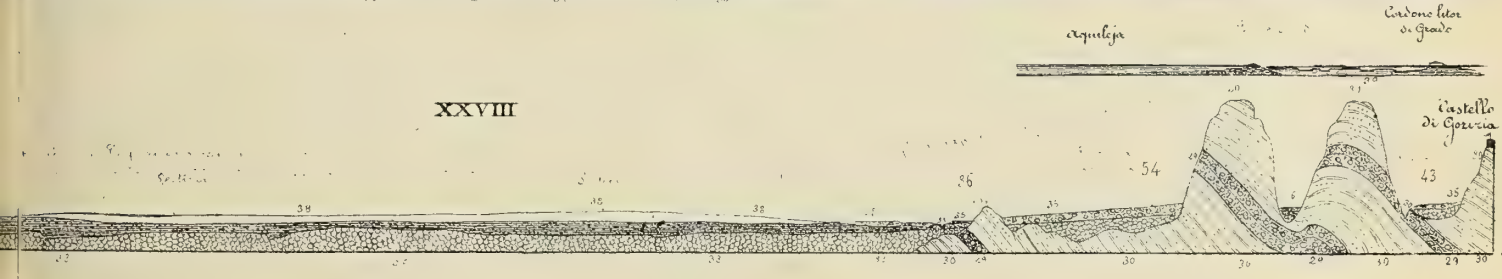
XXV



XXVII



XXVIII

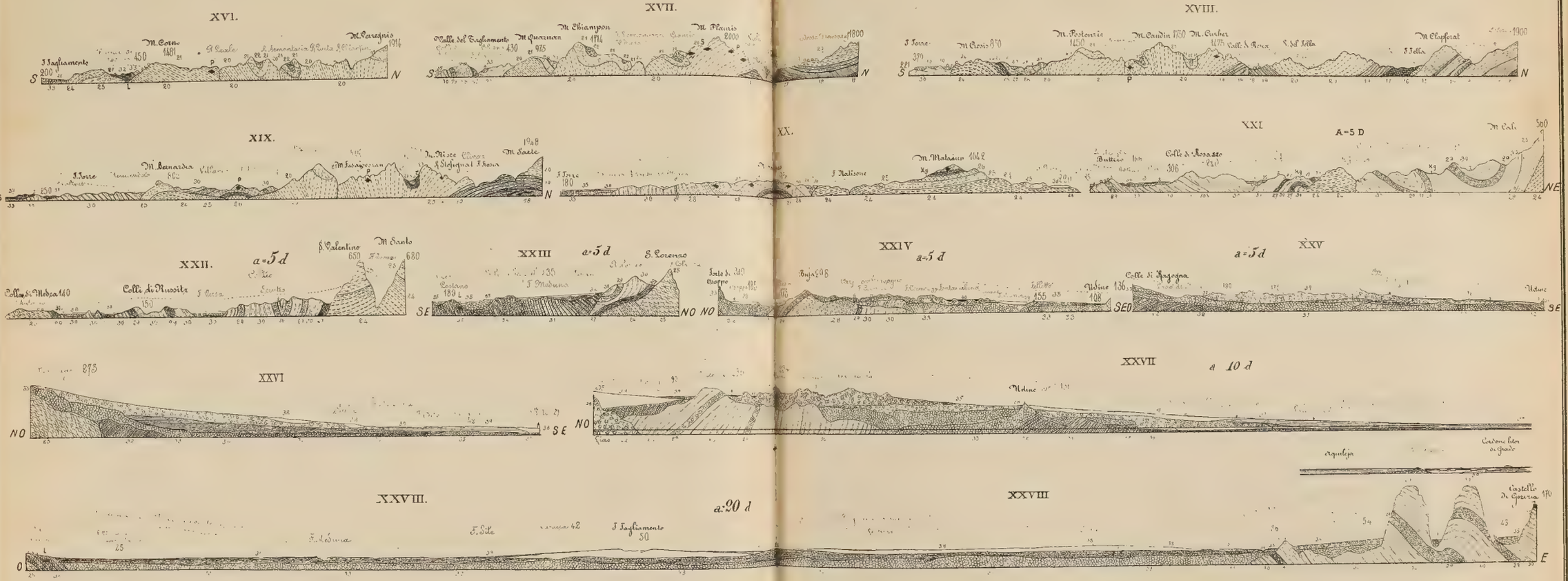


9-Arenarie a **Naticella costata** **10**-Calcari nodulosi e breccie policrome **11**-Arenarie
Halobia **15**-Dolomia inferiore o dello **Seblern** zona dei filoni zinciferi **16**
18-Marne iridate gessifere **19**-Dolomia scagliosa, scisti di **Vidali** **20**-

23-Calcari e brecciole a **Ptygmatis Bruntrutana** (Titonico inferiore?)
superiore a **Nerinee** **26**-Breccie con interstrati marno-scagliosi
29-Brecciole nummulitiche a **Conoclypus** **30**-Arenarie e puddinghe quarzose

33-Conglomerato alluvionale, pliocenico.
36-Alluvione di trasporto diretto **37**-Morene del secondo

nativo Filoni cupriferi Filoni zinciferi.



TRIAS: **7**- Arenarie micacee e puddinga quarzosa rossa **8**-Marne e dolomie carriate gessifere **9**-Arenarie a Naticella costata **10**-Calcari nodulosi e breccie policrome **11**-Arenarie e tufi augitici **12**-Porfidi augitici **13** Porfidi felsitici e conglomerati porfirici **14** Scisti ad Halobia **15**-Dolomia inferiore o dello Schlern zona dei filoni zinciferi **16** Arenarie con Antracite **17**-Calcari marnosi del Raibliano ad Hörnesia Johannis-Austriae **18**-Marne iridate gessifere **19**-Dolomia scagliosa, scisti di Vidali **20**-Dolomia principale a Dicerocardium

LIAS E GIURA **21** Calcari selciferi ed oolitici **22**-Calcari rossi o cloritici ad Ammoniti Bisfrons **23**-Calcari e brecciole a Ptygmatis Bruntrutana (Titonico inferiore)

CRETA **24** Calcari compatti, fillitici: zona a Caprotina **25**-Calcari a Radioliti; oolitici zona superiore a Nerinee **26**-Breccie con interstrati marno-scagliosi.

EOCENE **27** Marne rosse, scagliose **28**-Conglomerati, calcari marnosi; pitoscisti **29**-Brecciole nummulitiche a Conocliypus **30**-Arenarie e puddinghe quarzose a banchi madreporici.

MIOCENE E PLIOCENE **31** glauconie e molasse; a Terreno siderolitico **32** Conglomerato marino e molasse lignitifere **33**-Conglomerato alluvionale, pliocenico.

NEOZOICO **34** ∘∘ Massi erratici e limite ..... dimassima potenza dei ghiacciai carnici **35**-Alluvione di trasporto diretto **36**-Alluvione di lavaggio **37**-Morene del secondo periodo glaciale **38** Alluvione posglaciale, grossolana **39**-Detta, di lavaggio **40**-Torbiere.

SEGNI CONVENZIONALI L Lignite P Piroscisto C Litantrace S Solfo Gesso Xg Mercurio nativo Filoni cupriferi Filoni zinciferi.

IL M. SERNIO DA PAULARO. CARNIA.

CANALE DI S. PIETRO CARNIA.

Cromoht. Oscar Dresler Milano

Stolvizza.

M. CANINO (2479 m.)

veduto dalla valle di RESIA, Friuli orientale

Cromolit. Oscar Dressler. Milano

LAGO DI CAVAZZO FRIULI.

Balenottere fossili e Pachyacanthus dell'Italia Meridionale.

Memoria del prof. G. CAPELLINI

letta nella seduta del 6 maggio 1877.

Allorchè intrapresi lo studio dei misticeti fossili toscani ed ebbi la fortuna di poter verificare i loro rapporti coi cetacei fossili dei dintorni di Anversa, mi proposi di rivedere altresì alcuni resti di cetacei che fino dal 1868 aveva osservati nel museo geologico e paleontologico della R. Università di Napoli e che, in parte, aveva già ricordati trattando dei Cetoterii bolognesi (1).

Recatomi a Napoli verso la fine di ottobre del 1875, per la gentile condiscendenza dell'amico prof. Guiscardi, potei vedere tutti quanti i resti di cetacei fossili che si trovavano nel museo affidato alla sua direzione, e persuaso della convenienza di esaminare più accuratamente quelli che si riferivano ai misticeti, ne ottenni la promessa che, qualora S. E. il Ministro della pubblica Istruzione assentisse, i preziosi avanzi mi sarebbero stati spediti a Bologna e avrei potuto studiarli e illustrarli.

Non occorre che io dica con quanta gratitudine accogliessi immediatamente la cortese offerta dell'ottimo collega, cui oggi sono lieto di rinnovare i più sinceri ringraziamenti, e dopo averlo pregato per alcune informazioni sulla esatta provenienza degli esemplari più interessanti, tornai a Bologna e nel gennaio del 1876 ricevetti i desiderati fossili. Quel primo invio comprendeva alcuni resti di una balenottera proveniente da Briatico e che il prof. Guiscardi, a mia istanza, aveva in gran parte assai abilmente estratti dalla roccia nella quale si trovavano impegnati allorchè furono acquistati dal museo, alcune grandi vertebre incomplete raccolte a Gravina, poche vertebre ed un frammento di mandibola di una balenottera dei dintorni di Galatone. A queste ossa riferibili a misticeti, il prof. Guiscardi si compiacque aggiungere un atlante incompleto di altro cetaceo, che per la sua forma particolare aveva attirato la mia attenzione, e che in gran parte era ancora impegnato nella roccia la quale riconobbi essere pietra leccese.

Di tutti questi avanzi e di pochi altri che si trovano nel museo provinciale di Lecce (2), nella privata raccolta del dott. Cosimo De Giorgi, pure in Lecce, e nella collezione del prof. Seguenza a Messina, oggi ho l'onore di poter presentare all'Accademia una breve descrizione accompagnata da figure eseguite con ogni diligenza, ed

(1) Capellini, *Sui Cetoterii bolognesi* (con due tav.) pag. 30. Mem. dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie III Tomo V. Bologna, 1875.

(2) Devo i più sinceri ringraziamenti all'amico cav. U. Botti il quale, col consenso della Deputazione provinciale di Terra d'Otranto, mi comunicò gentilmente tutti i resti di vertebrati provenienti dalla pietra leccese e conservati nel museo di storia naturale da esso fondato in Lecce.

oso sperare che in seguito i cultori di geologia e paleontologia dell'Italia meridionale, persuasi della importanza dei resti di cetacei fossili, per giungere a ben precisare i diversi piani dei terreni terziarî, con nuove e accurate ricerche riesciranno ad arricchire la scienza e le collezioni, mediante nuove ed importanti scoperte.

In una breve Nota inserita nei Resoconti dell'Accademia di Bologna e in una lettera che il prof. Van Beneden si compiacque di fare inserire nel Bollettino dell'Accademia Reale del Belgio, fino dallo scorso anno aveva indicato a quali specie riteneva potessero riferirsi i misticeti fossili del museo di Napoli e segnatamente la balenottera di Briatico (1). Fino allora quei resti erano stati appena menzionati dal prof. Gervais, il quale, in una nota sui mammiferi fossili italiani, dopo aver ricordato le balenottere fossili del Piemonte, della Toscana, del Piacentino e del Bolognese, riferite al *Plesiocetus Cortesii*, aggiunge: « La province de Naples en fournit également, comme le prouvent les pièces trouvées à Briatico, golfe de Saint-Théophême, que possède le musée de l'université de Naples, et que m'a communiquées M. Guiscardi. Parmi ces pièces est un fragment très-caractéristique de maxillaire inférieur (2) ».

Il prof. Guiscardi avendomi comunicato, in diverse lettere, tutte le notizie raccolte intorno alla provenienza e al giacimento del misticeto fossile calabrese, prima di esaminare a qual tipo si debba riferire e quali sieno i suoi rapporti con le specie già note, credo opportuno di riferire quanto può servire per completarne la storia e per farne meglio apprezzare l'importanza scientifica.

La balenottera di Briatico fu scavata dal signor Pompeo Massoni, il quale si trovava a Briatico in qualità di ingegnere di miniere. Il signor Massoni fece trasportare in Napoli quei resti fossili ed il signor ingegnere Mauget ne avvertì il prof. Guiscardi, il quale ne fece acquisto pel museo geologico della R. Università di Napoli nel 1865.

Scoprendo i frammenti delle coste rappresentate nella figura 15 Tav. I, il prof. Guiscardi trovò nella roccia piccole ostriche, qualche terebratula, impronte di cardio, due nuclei di troco e frammenti di denti di pesci, come si ricava dal seguente brano di una lettera che in proposito mi indirizzava il 12 marzo 1876.

« Nella roccia in che è seppellita la balenottera di Briatico, a parte certe pic-
« cole ostriche, che non mi è stato possibile ottenere intiere, ed un *Pecten* (una sola
« valva), la *Terebratula sinuosa* Br. è frequente. Questa specie si trova altrove in
« Calabria provincia di Catanzaro, a Pallagorio ecc., e in Sicilia ».

A questi cenni l'egregio professore aggiungeva uno schizzo, col quale il signor ingegnere Fiocca accompagnava il dono di un frammento di mascellare, pure di balenottera, trovato nel conglomerato del Pizzo, a otto chilometri circa da Briatico e da esso ricavasi che il conglomerato stesso riposa immediatamente sulle rocce cristalline. Da tutte queste informazioni, e per quanto ho potuto argomentare dall'esame del conglomerato di Briatico e dei pochi resti di molluschi che io pure vi ho riscontrati, ma

(1) Capellini, *Cetacei fossili dell'Italia meridionale*. Resoconto dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, seduta 4 maggio 1876.

(2) Gervais P. *Coup d'oeil sur les Mammifères de l'Italie*. Bulletin de la Société géologique de France 2me Série T. XXX p. 92. Paris, 1872.

più ancora dallo studio di alcuni fossili dei dintorni di Catanzaro avuti dal mio allievo signor ingegnere Rambotti (1), il conglomerato in cui furono scavati i resti delle balenottere di Briatico e del Pizzo va riferito alla porzione superiore del pliocene inferiore e fa parte del messiniano superiore, secondo le divisioni proposte ultimamente da Mayer. In seguito a informazioni raccolte dall'ingegnere Rambotti, anche nei dintorni di Catanzaro furono trovati avanzi di cetacei, ma a quanto pare andarono dispersi e nulla si sa intorno all'esatto loro giacimento.

Premesse le brevi notizie intorno ai resti della balenottera di Briatico, dirò che quelle ossa costituiscono il materiale principale, fra quanto ebbi in comunicazione dal museo di Napoli; avendovi riscontrato gran parte dell'apparato auditivo destro e porzione del sinistro, le due mandibole incomplete, frammenti di mascellare superiore, alcune vertebre cervicali e dorsali, parecchie coste più o meno incomplete.

Nella già citata comunicazione all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nella seduta 4 maggio 1876, credetti di potere annunziare che la balenottera di Briatico era da ritenersi come *Plesiocetus* (*Plesiocetopsis*) *Hupschii* di Van Beneden, ma in seguito a uno studio più accurato e dopo essermi procurato nuove misure e nuovi disegni delle ossa relative all'apparato auditivo del *Pl. Hupschii*, vi ho riscontrato notevoli differenze, mi sono trovato nella necessità di fare altri confronti e per ultimo ho creduto di dover distinguere la balenottera fossile di Briatico come specie nuova.

Intanto il prof. Van Beneden, preparando il suo colossale lavoro sui misticeti fossili del Belgio, pensava di far rivivere alcune sue antiche denominazioni, che in parte aveva abbandonate dopo i lavori pubblicati dal Brandt sui cetacei fossili di Europa; e da una recente pubblicazione del signor Mourlon sappiamo che, per il *Plesiocetopsis Hupschii* e per altre balenottere dello stesso tipo, il Van Beneden adotterà il nome generico di *Heterocetus* col quale già da molto tempo aveva distinto parecchie specie di misticeti fossili di Anversa.

A questo punto, e stando le cose in questi termini, io non poteva esitare nè sulla indicazione del genere al quale si doveva riferire la balenottera di Briatico, nè sulla scelta di un nome per segnalarla come specie nuova; offrendomisi opportuna occasione di dare un pubblico attestato di stima e di riconoscenza al mio amico e collega prof. G. Guiscardi, ho pensato di dedicargli il nuovo misticeto fossile e perciò lo chiamerò *Heterocetus Guiscardii*, adottando il nome generico preferito dal professore Van Beneden, per le balenottere fossili di questo tipo scoperte in Belgio.

Heterocetus Guiscardii, Capellini.

Come già ho accennato, pochi sono gli avanzi dello scheletro di questo animale, fortunatamente però si hanno porzioni notevoli dell'apparato auditivo; anzi per mezzo di questo essendomi stato possibile di fare opportuni confronti con parecchie altre specie e fissarne i principali caratteri differenziali, prima di tutto descriverò i resti

(1) Il sig. Rambotti ha già pubblicato interessanti notizie sulla geologia dei dintorni di Catanzaro. V. Bollettino del R. Comitato geologico, anno 1876.

di quell' organo importantissimo, rappresentati in grandezza naturale nella Tav. I fig. 1-8 (1).

Cassa timpanica. — Le figure 1, 2 Tav. I rappresentano la cassa timpanica destra, la meglio conservata, la quale, benchè sia essa pure incompleta, ricorda immediatamente la forma caratteristica di quei misticeti, già Plesioceti o Cetoterii, che oggi il prof. Van Beneden preferisce di riferire al genere *Heterocetus*.

I primi confronti fra quest' osso ed i corrispondenti riferiti a talune specie dei dintorni di Anversa, non ancora completamente figurate e descritte dal prof. Van Beneden e quindi pochissimo conosciute, se ci limitiamo a quanto è stato finora pubblicato, mi indussero a sospettare che la balenottera di Briatico potesse riferirsi al *Plesiocetus Hupschii* V. B. Una cassa auditiva incompleta che parecchi anni or sono mi fu donata dallo stesso mio carissimo amico prof. Van Beneden, mi era sembrata abbastanza somigliante a quella di Briatico per ciò che è la porzione columellare, però appena ebbi fatte le sezioni, secondo il metodo da me ideato e del quale ho reso conto nella illustrazione della *Balenottera di Mondini* (2), mi accorsi che in realtà esistevano tali differenze da dover sospettare che non potessero essere senza influenza su tutto il resto dell' apparato auditivo stesso; infatti oggi mi sono persuaso che tutto quanto si riferisce all' *Heterocetus Hupschii* differisce, proporzionatamente, dai resti dell' *H. Guiscardii*.

I primi avanzi che il prof. Van Beneden fino dal 1859 distinse col nome di *Plesiocetus Hupschii*, pei quali nel 1872 adottò il nome di *Cetotherium Hupschii* e che oggi vanno riferiti al genere *Heterocetus*, non gli permisero di entrare fin da principio in molte particolarità e dovette limitarsi a rilevare i rapporti e le differenze di quella specie fossile con la vivente *Balaenoptera rostrata*. Il prof. Brandt, citando la figura 18 Pl. XVI della *Ostéographie des cétacés vivants et fossiles* di Gervais et Van Beneden, nota che la cassa timpanica del *Cetotherium* (*Plesiocetopsis*) *Hupschii*, differisce da quella del *Pl. Garopii* e del *Cetotherium Burtinii*, avendo una estremità molto più grande dell' altra e quindi una forma ottusamente conica. Con queste scarse indicazioni e con le caratteristiche attribuite all'apofisi posteriore esterna o tempo-ro-occipitale della cassa auditiva stessa, è facile immaginare il primo ravvicinamento che ebbi a fare dell' importante ceto-otolito del quale si tratta.

Per rinfrescare la memoria degli studî fatti anche nel 1875 sui preziosi materiali che si trovano nel museo di Storia naturale di Bruxelles, col consenso dell'egregio direttore e mio carissimo amico prof. E. Dupont, per mezzo del valente preparatore De Paw mi procurai diverse misure e taluni schizzi pei quali potei convincermi che la balenottera di Briatico non si poteva identificare con alcuna delle specie fossili di Anversa. Limitandomi per ora all' esame della cassa timpanica, bisogna convenire che dopo l' *H. Hupschii*, fra le specie di *Heterocetus* del Belgio, quella che per la forma somiglia alquanto all' esemplare dell'*H. Guiscardii* è la cassa dell' *H. Affinis* V. B.,

(1) L' importanza delle ossa dell'apparato auditivo per distinguere i generi e le specie dei grandi cetacei, segnalata per la prima volta da Van Beneden nel 1836, in seguito fu apprezzata da tutti coloro che si occuparono di misticeti viventi e fossili.

(2) Capellini, *Sulla Balenottera di Mondini. Rorqual de la mer Adriatique* di Cuvier. Memorie dell' Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie III Tomo VII. Bologna, 1877.

la quale però è tuttavia meno tondeggiante e ne differisce non poco per la forma delle apofisi e per le dimensioni.

Dalle figure 1-3 Tav. I, specialmente da quella che rappresenta la sezione, meglio che da una minuta descrizione, si possono rilevare i principali caratteri della cassa timpanica dell' *H. Guiscardii*. La columella è notevolmente robusta e la sua sezione è più tondeggiante di quella di tutte le altre specie finora a me note, ad eccezione della balenottera bolognese (*C. Capellinii*), la cui cassa timpanica ricorda questa dell' *H. Guiscardii* essendo però molto più piccola; il labbro columellare presenta una sinuosità la quale si riscontra anche più spiccata nell'*H. Hupschii*, la estremità posteriore non è arrotondata ma offre una specie di prominenza o protuberanza che le dà un carattere particolare e l'attacco dell' apofisi corrispondente è molto robusto.

Benchè riesca difficile di calcolare quale dovesse essere la lunghezza di quest'osso, ossia il suo diametro antero-posteriore, pure, tenendo conto della mancante estremità anteriore, si può ritenere che la cassa dell' *H. Guiscardii* fosse lunga circa m. 0,100; la sua massima altezza, ossia il principale diametro trasverso corrispondente alla piega che porta il martello, m. 0,062; il diametro columellare m. 0,036 come si rileva anche dalla sezione; il margine inferiore ed il laterale interno senza angolosità e piuttosto tondeggiante.

Esistono frammenti della cassa auditiva sinistra, ma da essi non fu possibile di ricavare nulla di più di quanto ebbi a notare per la cassa auditiva destra.

La figura 4*b* Tav. I rappresenta la staffa dell'apparato destro ricostrutta con un frammento *a* (la porzione inferiore), trovato nella roccia che era ancora aderente ad una porzione del periotico destro, nel quale si vede l'interno di una parte della chiocciola. Questo esemplare non fu disegnato essendo troppo guasto ed incompleto.

Apofisi anteriore. — L'apofisi anteriore ricorda moltissimo la forma di talune delle attuali balenottere e fra le altre la *Balaenoptera rostrata* ed il *Sibbaldius Mondinii*. Nella figura 5 Tav. I quest' osso è rappresentato per la faccia superiore e laterale esterna e si può vedere anche la porzione della rocca che si fonde con esso. La forma è quella di una piramide la quale con la sua base si salda e ricopre la faccia anteriore del periotico, la superficie è scabra in tutta quella parte che deve innestarsi col temporale, piuttosto liscia e con strie che corrono dalla base verso la estremità anteriore nella faccia che chiamerò laterale inferiore interna e che non ha rapporto con altre ossa. Nell' ultima faccia notata si distingue il punto in cui questa apofisi si saldava con la cassa timpanica, un poco al davanti della fossetta contro la quale si dirigeva la testa del martello.

Il lato maggiore, trascurando ciò che può appartenere alla rocca, ossia dall'apice *a* fino al tubercolo *b* misura m. 0,076; il lato minore ossia *a*, *c* m. 0,051; la grossezza ossia il diametro trasverso calcolato dalla metà della linea *b*, *c* alla metà della linea di base della faccia opposta, e cioè fra i due attacchi della rocca e della cassa timpanica, m. 0,034.

Anche di questa apofisi si ha un frammento dell'esemplare sinistro.

Apofisi posteriore o temporo-occipitale. — Le figure 6-8 Tav. I rappresentano l' apofisi temporo-occipitale destra vista per due lati e la relativa sezione alla metà

circa della sua lunghezza. Quest'osso tanto importante e tanto caratteristico, con le sue dimensioni e con la forma tozza e robusta rivela immediatamente i suoi rapporti con la cassa timpaniça, parimente tozza e robusta, che abbiamo sopra descritta.

La forma generale è quella che si riscontra nelle balenottere del tipo *Sibbaldius* e, pei caratteri notati da Van Beneden nell'apofisi dell'*H. Hupschii*, si potrebbe sospettare che la balenottera di Briatico altro non fosse che una delle balenottere fossili del Belgio: ma, come già ho accennato, essendomi procurato alcuni disegni delle apofisi non solo dell'*H. Hupschii* ma eziandio delle altre specie, ho potuto notare che il nostro esemplare, mentre ricorda un poco non solo la specie citata ma eziandio il *Plesiocetus rostratus*, non si può identificare nè con questi tipi nè con altri.

Una qualche analogia ho altresì riscontrato fra l'apofisi in esame e la corrispondente del *C. Capellinii*, questa però ha forma assolutamente diversa ed è più piccola dell'altra, benchè in complesso l'*H. Guiscardii* non dovesse essere più grande del *C. Capellinii*; pei caratteri che si riscontrano nell'apparato auditivo e per la forma delle mandibole, credo si possa sospettare che l'*H. Guiscardii* avesse un cranio più largo e un rostro proporzionatamente più corto di quello del *C. Capellinii*.

La forma di questa apofisi è piuttosto piatta; la sua lunghezza non si può fissare con esattezza mancando la estremità; dal suo punto di attacco verso la estremità si allarga sensibilmente, ma non tanto quanto si nota nel *Pl. rostratus* V. B; la sua maggiore larghezza è m. 0,061, la grossezza m. 0,026. La sezione condotta a metà circa della lunghezza dell'esemplare permette di meglio apprezzarne la forma e dai confronti di essa con le sezioni di altre specie ne ho potuto pure rilevare notevoli differenze.

Mandibole. — Le figure 12, 13 Tav. I rappresentano i resti delle mandibole; la destra, fig. 13, vista superiormente e la sinistra, fig. 12, vista per la faccia esterna, entrambe $^1/_3$ della grandezza naturale. Il frammento della mandibola destra che si è potuto ricomporre è lungo m. 1,20 seguendo la curva esterna, ed in essa benchè alquanto guasta sussiste tuttavia la estremità condiloidea.

Il foro mascellare interno sbocca a circa m. 0,22 dall'estremità condiloidea, è piuttosto ampio, si continua in alto e posteriormente in forma di solco e svanisce a circa m. 0,08 dal condilo verso il margine superiore della mandibola.

Questi apprezzamenti si possono fare benissimo anche in ciò che resta della mandibola opposta, ed è facile di riconoscere come queste ossa presentino tutti i caratteri delle mandibole delle balenottere.

L'apofisi coronoide non è molto spiccata, ma però si alza sufficientemente e svanisce un poco prima che si incontri lo sbocco dell'ultimo foro del mento contando dall'avanti all'indietro a m. 0,55 dall'estremità posteriore, sempre seguendo la curva esterna dell'osso. In questo frammento di mandibola destra si hanno sei fori del mento, che stanno fra loro a distanze diverse, le quali variano da otto a quattordici centimetri. La figura 14 rappresenta la sezione della mandibola a m. 0,80 dalla estremità condiloidea. Della mandibola sinistra si ha pure una porzione della lunghezza di m. 1,45, Tav. I fig. 12; mancano le due estremità anteriore e posteriore, il margine del foro interno del canale dentario è intero, l'apofisi coronoide è meglio conservata di quella della mandibola destra e se ne può apprezzare benissimo la forma.

Lungo il margine superiore interno vi hanno parecchi fori allineati, i quali corrispondono al solco alveolare o canale dentario propriamente detto. Sulla faccia esterna si vedono i fori del mento più o meno nei medesimi rapporti e alle medesime distanze di quelli notati nella mandibola destra.

Mascellari. — Dei mascellari propriamente detti si hanno due frammenti che ho riferito al mascellare sinistro; il maggiore lungo circa m. 0,20 corrisponde alla estremità anteriore. Intorno a quest'osso si può notare che anche dai frammenti che restano apparisce che doveva essere molto robusto. Vi ha pure un insignificante frammento di temporale e mancano completamente i frontali, i parietali, l'occipitale e le altre ossa del cranio.

Vertebre. — Le figure 9, 10, 11 Tav. I rappresentano in grandezza $^1/_3$ del vero cinque vertebre cervicali, ridotte quasi ai soli corpi, le quali si trovavano unite fra loro mediante lastre di roccia, della grossezza di due o quattro millimetri che occupavano il posto delle cartilagini intervertebrali.

Queste vertebre corrispondono alla III, IV, V, VI, VII cervicale; non si hanno avanzi nè dell'atlante nè dell'asse.

La 3ª cervicale incompleta, Tav. I fig. 10 *c*, si vede restaurata nella stessa tavola fig. 9, la sua faccia anteriore è un poco convessa e nel centro presenta una leggera prominenza la quale ricorda la forma dell'apofisi odontoide dell'asse di talune balenottere; la faccia posteriore è corrispondentemente concava. Le epifisi hanno una grossezza che varia da un millimetro e mezzo a due millimetri e sono perfettamente saldate col corpo della vertebra la cui lunghezza, o diametro antero-posteriore, misurata nel centro della vertebra è eguale a m. 0,027 e diminuisce un poco verso il margine; in corrispondenza delle apofisi inferiori si nota una differenza di un millimetro in meno.

La 4ª vertebra cervicale, Tav. I fig. 10 *d*, presenta più o meno i caratteri notati nella vertebra precedente, ma è meno curva, vi ha debole traccia della corda dorsale ed offre le seguenti dimensioni; larghezza m. 0,137, altezza m. 0,093, diametro antero-posteriore o lunghezza circa m. 0,025; in corrispondenza delle apofisi trasverse inferiori la grossezza aumenta circa due millimetri.

Il corpo della 5ª vertebra cervicale, Tav. I fig. 10 *e*, è ancora più piatto di quello della precedente; la sua grossezza è più uniforme e si riscontra eguale a m. 0,025—0,026. Vi sono resti delle apofisi trasverse superiori e inferiori.

La 6ª vertebra cervicale, Tav. I fig. 10 *f*, differisce pochissimo dalla precedente e le sue faccie sono quasi decisamente piane; la sua lunghezza è m. 0,028, la larghezza m. 0,132, l'altezza m. 0,096. Vi sono resti delle apofisi trasverse tanto superiormente che inferiormente.

La 7ª cervicale, Tav. I fig. 10 *g*, manca completamente delle apofisi trasverse inferiori; il suo corpo è di forma meno rettangolare delle vertebre precedenti, ossia inferiormente è più rotondato e accenna già alla forma delle vertebre dorsali. La larghezza è m. 0,135, l'altezza m. 0,092, la lunghezza m. 0,034.

Della 1ª dorsale si ha soltanto un frammento corrispondente al lato superiore destro; la lunghezza di questa vertebra è di m. 0,037.

A completare quanto si riferisce agli avanzi della balenottera di Briatico mi resta

da aggiungere poche parole intorno ad alcuni frammenti di coste che ho creduto conveniente di suggerire di tenere insieme alla roccia nella quale giacevano sepolte.

La figura 15 Tav. I è la riduzione a $^1/_5$ di un lucido che il prof. Guiscardi ebbe la gentilezza di inviarmi dopo avere preparato convenientemente e messo allo scoperto quelle porzioni di coste le quali si trovano ancora disposte nei loro rapporti naturali.

La forma piuttosto piatta che si riscontra in tutta la lunghezza di queste ossa ci rivela il carattere notato dai cetologi nei misticeti della divisione *Balaenopteridae* e, per quanto si può giudicare dalla forma e dalle dimensioni dei frammenti che sono rappresentati nella figura citata, il frammento *a* dovrebbe appartenere alla quarta o alla quinta costa; per cui contando progressivamente secondo le lettere *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, si avrebbero notevoli porzioni delle coste della regione mediana, ossia delle più lunghe, e si arriverebbe fino a *g* che rappresenterebbe un bel frammento della decima o della undecima costa.

Si sa che nelle balenottere le coste variano di numero da undici fino a sedici paia, ben inteso comprese alcune coste spurie; riesce quindi difficile di diagnosticare qual potesse essere il numero delle coste dell'*Heterocetus Guiscardii*, ma per le analogie con le specie affini si può sospettare che questa specie avesse tredici o quattordici coste.

Altri resti di misticeti provenienti da Briatico e dal Pizzo.

Fra gli avanzi di balenottere del museo paleontologico della R. Università di Napoli ho trovato una porzione di cassa timpanica sinistra, la quale, pei confronti istituiti con alcuni esemplari di Anversa avuti dal prof. Van Beneden, riferisco, dubitativamente però, al *Plesiocetus Garopii* V. B.

Riferibile allo stesso animale vi ha pure la rocca dell'apparato destro. Questo esemplare è assai male conservato, ma interessante per lo studio, perchè si può vedere una parte dell'interno della chiocciola e vi si trova unita l'apofisi anteriore o temporale, per mezzo della quale possiamo accertarci delle sensibili differenze con la specie prima descritta, ossia con l'*Heterocetus Guiscardii*.

Nel museo di paleontologia della R. Università di Napoli vi ha pure un frammento di mandibola di balenottera, lungo circa m. 1,40, trovato al Pizzo, a otto chilometri da Briatico, in una roccia corrispondente a quella di Briatico; non azzardo di indicare a quale specie si possa riferire, ma è assai probabile che spetti al *Pl. Garopii*. L' esemplare fu donato al museo dal signor ingegnere Fiocca, il quale accompagnò il fossile con uno abbozzo di sezione geologica, per render conto dei rapporti stratigrafici del conglomerato in cui giaceva sepolto.

Balenottera di Gravina — Plesiocetus Garopii, V. B.

Riferisco a questa specie alcuni avanzi di balenottera provenienti da Gravina e che il professore Guiscardi si compiaceva di comunicarmi, per studio, insieme ai resti delle balenottere calabresi.

Fra questi avanzi, l'esemplare più importante, per mezzo del quale ho potuto distinguere a quale specie dovevasi riferire la balenottera di Gravina, è il corpo della seconda vertebra cervicale, ossia l'asse, che ridotto a un $^1/_3$ del vero si vede disegnato e restaurato nella fig. 16 Tav. I.

L' esemplare è rappresentato per la sua faccia anteriore; conserva un frammento dell'apofisi trasversa inferiore destra, la quale doveva unirsi all'apofisi superiore per costituire una specie di anello, come si riscontra negli esemplari provenienti dal *crag grigio* di Anversa (Van Beneden et Gervais, *Ostéographie des cétacés vivants et fossiles*, pl. XVI fig. 5). L'apofisi odontoide è poco sviluppata; l'altezza del corpo di questa vertebra nella faccia anteriore è eguale a m. 0,117 e nella faccia posteriore cresce fino a m. 0,125. La larghezza della faccia posteriore, tenuto conto di quanto manca nel lato sinistro, si può ritenere approssimativamente eguale a m. 0,200; la grossezza o lunghezza misurata nel centro m. 0,063. La vertebra intera non doveva avere meno di cinquanta centimetri di larghezza dall'una all'altra estremità delle sue apofisi trasverse.

Dello stesso animale mi fu pure comunicato un frammento di altra vertebra cervicale che giudico potesse essere la terza; quel frammento consiste in una piccola porzione di corpo di vertebra mancante delle *epifisi* ed il suo diametro antero-posteriore o lunghezza è eguale a m. 0,043; a questo frammento è pure unita una porzione di apofisi trasversa.

Da un corpo di vertebra dorsale assai guasto ho potuto desumere le dimensioni della vertebra intera, restando parte del lato superiore, che concorre a formare il canale vertebrale, ed una parte dei lati e della faccia inferiore. L'altezza è m. 0,150, la larghezza doveva essere approssimativamente da m. 0,130 a m. 0,140.

Fra la diverse epifisi di vertebre più o meno complete ve ne è una la quale per la forma piuttosto larga ricorda ancora il tipo delle vertebre cervicali, per cui si può ritenere come assai probabile che appartenesse ad una delle prime dorsali; quest'osso presenta le seguenti dimensioni: altezza m. 0,216, larghezza m. 0,250.

Una porzione superiore di costa molto schiacciata e che ritengo dovesse essere la prima, manca della estremità, per cui non se ne possono rilevare i caratteri principali. Da informazioni avute dal prof. Guiscardi con lettera 30 gennaio 1876, resulta che questi resti di balenottera di Gravina sono quelli stessi che il prof. Scacchi ha ricordato nelle sue *Lezioni di geologia* or sono più di trenta anni.

Nella pagina 124 dell'opera citata, si legge in nota: « Nel tufo terziario delle « vicinanze di Gravina in Puglia, si sono trovate di recente molte costole e vertebre « di cetacei che si conservano nel R. museo geognostico (1).

Il prof. Scacchi aggiunse verbalmente che le ricordate ossa fossili « furono rinvenute nel costruire il cimitero di Gravina ».

L'orizzonte geologico al quale spettano questi resti di *Pl. Garopii*, di Gravina, è ben precisato, poichè i tufi o sabbioni dai quali provengono sono ricchissimi di molluschi fossili riferibili al piano superiore del pliocene inferiore.

(1) Scacchi A, *Lezioni di geologia* pag. 214. Napoli, 1843.

Balenottera di Galatone gen. Aulocetus Van Beneden.

Nel museo paleontologico della R. Università di Napoli si conservano alcuni avanzi di cetacei fossili raccolti in Terra d'Otranto dal fu prof. Oronzio Gabriele Costa e che ebbi pure in comunicazione, per studio, dal collega prof. Guiscardi, con le seguenti indicazioni:

« Ossa di cetacei provenienti dalla raccolta Costa.

« La scheda attaccata ad esse è concepita così: *Vertebre e frammenti di costole « di Balena ? tratti dal tufo della contrada detta Luna all' Est Sud Est di Galatone* 1856. *Dalla profondità di palmi* 34 *dal livello del suolo?* »

Il 7 febbraio 1869 in occasione di una seconda escursione geologica in Terra d'Otranto, visitando i dintorni di Galatone, ebbi a notare che la roccia la più superficiale era un calcare grossolano molto simile a quello di Bari, indubitatamente riferibile al pliocene inferiore, ma a breve distanza intorno al paese trovai i calcari dei piani inferiori. La roccia trovata aderente alle ossa fossili raccolte dal prof. O. G. Costa a Galatone a 34 palmi, ossia m. 8,91 di profondità, presentava tutti i caratteri degli strati più recenti o superiori della così detta pietra leccese, e, riguardo alle ossa, ebbi a notare fin da principio che, mentre la maggior parte di esse si riferivano ad un misticeto del tipo dei Cetoterii, vi era però un atlante, per mala ventura un poco guasto, il quale indubitatamente apparteneva al genere *Pachyacanthus*, animale per ora pochissimo conosciuto, intorno al quale anche di recente furono espressi giudizi affatto opposti da parte di due grandi autorità in fatto di cetologia, voglio dire il prof. Brandt di Pietroburgo e il prof. Van Beneden di Louvain. Questa scoperta inattesa, mentre rivelava nuovi rapporti fra i terreni terziarî italiani e quelli del Bacino di Vienna (1), contribuiva a precisare l'orizzonte geologico al quale spettano, almeno in parte, i misticeti di Terra d'Otranto e lasciava intravedere quali rapporti dovessero avere con quelli di altre regioni abbastanza lontane.

Il genere *Pachyacanthus*, del quale tratterò per ultimo in questa Memoria, finora era stato trovato soltanto nel Bacino di Vienna ed il suo giacimento era stato ben determinato come riferibile al *piano Sarmatiano* che inferiormente riposa sulla formazione mediterranea superiore II° o *calcare di Leitha,* e superiormente è limitato dagli *strati a Congeria;* quindi il tufo o la varietà di pietra leccese nella quale erano sepolte le ossa fossili di Galatone si può confrontare con il calcare grossolano sarmatiano che nei piani superiori piglia il nome di calcare a Cerizii e serve come eccellente materiale da costruzione per la città di Pest e nel Bacino di Vienna. I resti del misticeto di Galatone sono tali da non potere azzardare di entrare in raffronti specifici; ma tenendo conto di taluni rapporti e differenze che vi si riscontrano

(1) Vedi in proposito le seguenti pubblicazioni: Capellini, *Giacimenti petroleiferi di Valacchia e loro rapporti coi terreni terziarî dell' Italia centrale.* Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie II Tom. III, Bologna, 1868. Id. *Sui terreni terziarî di una parte del versante settentrionale dell'Apennino.* Mem. dell'Accademia delle Scienze di Bologna. Serie III Tomo VI. Bologna, 1876.

con gli ordinarî Cetoterii, e dietro la scorta del piano geologico al quale appartengono, credo di potere argomentare che siano da riferirsi al genere *Aulocetus*, accettando i risultamenti di alcuni studî fatti da poco tempo dal prof. Van Beneden intorno ai cetacei fossili del Bacino di Vienna (1).

Il dottissimo cetologo belga dopo avere dimostrato che il prof. Brandt aveva confuso talune ossa spettanti a misticeti con altre riferibili a sirenoidi, conclude che la *Balaenoptera molassica* (*Balaenodon lentianus* H. von Meyer, *Cetotheriopsis linziana* Brandt), si abbia a ritenere come sinonimo di *Aulocetus linzianus*, intendendo di riprendere il nome generico proposto fin dal 1861 per alcuni misticeti fossili di Anversa (2).

Van Beneden ritiene che l'animale intero avesse circa 6 metri di lunghezza e, dopo aver notato che finora era stato trovato soltanto nella molassa di Linz con avanzi di *Pachyacanthus*, sospetta che vi si possano pure riferire taluni avanzi di misticeti trovati nella molassa di Baltringen nel Wurtemberg ed altri trovati in Croazia.

Come ognuno vede il riferimento dubitativo che ho creduto di fare degli avanzi del misticeto di Galatone ha per base principale la sua concomitanza col *Pachyacanthus*, ma non bisogna credere che non abbia tenuto gran conto dei rapporti evidenti di quelle ossa con ciò che si riferisce non solo alle balenottere ma eziandio ad altri tipi intermedî fra esse e le vere balene.

Il frammento di mandibola lungo appena venti centimetri presenta la sezione che si vede rappresentata in grandezza naturale nella Tav. II fig. I, la quale per la sua forma, per l'intima struttura e per la distribuzione dei canali che imitano il *tessuto areolare* differisce da ciò che si può notare negli ordinarî Cetoterii e nel genere *Heterocetus* e ricorda quanto si osserva nella struttura del *Balaenotus* e altri generi affini.

Quella porzione dell'osso la quale negli ordinarî *Cetoterii* forma quasi una zona periferica compatta più o meno larga, qui si limita ad una parte della faccia esterna della mandibola e pel rimanente si direbbe che il tessuto osseo si sdoppia e che la struttura, apparentemente areolare, prevale, come appunto ho verificato anche nelle mandibole del genere *Balaenotus* (3).

Fra gli avanzi di vertebre ho creduto di poter distinguere la 6ª cervicale già

(1) Van Beneden, *Les ossements fossiles du genre Aulocète au musée de Linz.* Bulletin de l'Académie R. de Belgique. 2.me Série T. XL. n. 11 nov. 1875.

(2) È probabile che anche la balenottera fossile di Linz venga in seguito riferita al genere *Heterocetus* che sembra debba essere definitivamente preferito da Van Beneden per tutti i misticeti del tipo *Cetotherium*.

(3) Dall'esame istologico si rileva che i canali di Havers amplissimi nella porzione dell'osso che ricorda le ossa spugnose dei mammiferi terrestri, diventano piccolissimi ove si ha la struttura più compatta; ma le lamelle haversiane si distribuiscono egualmente tanto intorno ai piccoli canali con sezione più o meno rotonda o elittica quanto intorno ai canali grandissimi a sezione multiforme e che imitano l'ordinario tessuto areolare. Le figure 1, 6, 7 Tav. II sono destinate a rendere conto della intima struttura delle mandibole dei cetoterii provenienti dalla pietra leccese. Le sezioni delle mandibole furono eseguite con lo stesso metodo che si usa per ridurre le roccie in lamine sottili e in parte furono preparate dal sig. Finocchi mio allievo, studente di scienze naturali. I disegni furono eseguiti sotto la direzione del prof. Ciaccio che si compiacque di verificare egli pure quanto ho sopra accennato intorno alla struttura delle mandibole dei misticeti.

sprovvista naturalmente di apofisi trasverse inferiori, come si verifica nel *Cetotheriophanes Capellinii*; inoltre vi hanno i corpi di tre vertebre dorsali 1ª, 2ª, 3ª, e finalmente gran parte di una caudale, forse la prima.

Il corpo della 6ª cervicale, Tav. II fig. 2, offre le seguenti dimensioni: larghezza m. 0,138, altezza m. 0,097, lunghezza o diametro antero-posteriore m. 0,040. Delle vertebre dorsali ho figurato la 3ª, Tav. II fig. 3, e la 6ª, Tav, II fig. 4, e anche dalla semplice ispezione delle figure si può apprezzare come la forma e le dimensioni del corpo delle vertebre stesse varii rapidamente, partendo dalle prime dorsali, che tanto assomigliano alle cervicali, e progredendo verso la regione lombare.

Per brevità riassumerò nel seguente specchietto le dimensioni delle tre dorsali della balenottera in quistione:

	IIª dors.	IIIª dors.	VIª dors.
Larghezza	m. 0,138	m. 0,147	m. 0,132
Altezza	0,094	0,092	0,096
Lunghezza	0,052	0,062	0,105

Conviene notare che la larghezza della 6ª dorsale è misurata alla base delle apofisi trasverse. La figura 5 Tav. II rappresenta una delle prime vertebre caudali ridotta a $^1/_3$ della sua grandezza e vista per il lato sinistro; l'apofisi spinosa manca e le apofisi trasverse sono corte e forate verticalmente per il passaggio delle arterie.

L'altezza della vertebra è m. 0,145; non si può precisare la larghezza la quale però doveva essere approssimativamente eguale; la sua lunghezza ossia il diametro antero-posteriore è m. 0,165.

Altri avanzi di misticeti fossili di Terra d'Otranto.

Nel museo provinciale di Storia naturale che, in questi ultimi anni e dopo le mie prime escursioni scientifiche in Terra d'Otranto, è sorto in Lecce per l'iniziativa e le assidue cure del cav. Ulderico Botti, vi hanno parecchi avanzi di misticeti fossili che gioverà ricordare, specialmente per l'interesse nella determinazione cronologica dei diversi giacimenti ove furono raccolti, e per mettere in avvertenza sulla possibilità di trovare altri resti meno incompleti e più importanti.

Fra i diversi avanzi merita di essere ricordato per primo un frammento di mandibola destra lunga m. 0,35, dell'altezza media di 0,085, con una larghezza di m. 060; questo frammento ricorda la forma della mandibola dell'*Aulocetus* di Galatone, ma per la struttura corrisponde benissimo agli ordinari Cetoterii e si vede una distinta zona, di più che un centimetro di grossezza, di struttura compatta, che costituisce la parte periferica dell'osso. Sulla faccia esterna vi ha un foro del mento ben conservato e sussistono le traccie di altri due; sicchè dal loro modo di essere si può riconoscere che il detto frammento spetta al ramo mandibolare destro.

L' esemplare fu trovato nelle cave di pietra leccese di S. Cesario presso Lecce nel 1876 e fu donato al museo dal Duca Sigismondo Castromediano.

Altro frammento di mandibola destra lungo m. 0,12, alto m. 0,08, largo m. 0,065 ricorda la forma della sezione della balenottera di Briatico e, per lo stato di conservazione, offre qualche analogia con la balenottera di Gravina. Evidentemente proviene dagli strati di leccese grossolana e fu raccolto a *Specchiagallone* presso Minervino, a due metri circa di profondità.

In occasione della mia recente escursione a Taranto e Lecce, avendo potuto anche esaminare la privata collezione paleontologica del signor dott. Cosimo De Giorgi, vi ho notato parecchi frammenti di ossa di misticeti, oltre quelli sopra ricordati.

Il dott. De Giorgi nelle sue *Note geologiche sulla provincia di Lecce*, parlando dei sabbioni pliocenici di Nardò, scrive:

« Dagli stessi sabbioni deriva pure un frammento di costola appartenente pro-
« babilmente a qualche grosso cetaceo, di specie poco determinabile, che ho nella
« mia collezione, donatami dall' amico signor Luigi Maria Personè (1) ».

Il gentilissimo amico avendomi permesso di studiare l'esemplare sopra ricordato, vi ho riconosciuto l'estremità di una piccola mandibola di Cetoterio? spaccata longitudinalmente. Questo frammento è lungo appena diciasste centimetri e alto da sette a otto centimetri; proviene dalla contrada *La Cenata*, presso la Serra della Madonna dell' Alto. vicinanze di Nardò, e fu raccolto nel febbraio 1876. La roccia che trovai ancora aderente al fossile mi parve identica al calcare a briozoi di Massafra.

Altro frammento di piccola mandibola di *Cetotherium* proviene dalle cave di pietra leccese *di Melpignano* ove fu raccolto nel 1869; questo esemplare è lungo appena 14 centimetri ed è assai sciupato, però si nota che la distribuzione del tessuto a grandi canali e del tessuto a forma compatta, come anche la sezione della mandibola, è quella istessa che si osserva nelle balenottere del tipo dei Cetoterii. Da Melpignano proviene altresì un bel frammento di vertebra cervicale larga circa m. 0,090 con un diametro antero-posteriore o lunghezza di centimetri due; esso fu raccolto nel novembre 1869 e forse spetta allo stesso animale al quale si riferisce il frammento della mandibola sopra indicata.

Un piccolo frammento di mandibola di balenottera fu trovato nella pietra leccese di Lecce vicino all' orto botanico, e con questo esemplare, che interessa soltanto per il giacimento, ho finito di dire anche degli avanzi di misticeti che finora furono raccolti dal dott. De Giorgi.

Interessandomi di comprendere in questo lavoro sui misticeti fossili dell' Italia meridionale, anche una sommaria indicazione degli avanzi di questi animali trovati in Sicilia, mi rivolsi al prof. Seguenza per avere notizie in proposito.

Il prof. Seguenza fino dall' aprile dello scorso anno 1876 mi accennava che presso Messina erano stati trovati i resti dello scheletro di una balena, della quale mi prometteva di darmi in seguito più ampie informazioni; infatti ecco quanto mi scriveva in proposito:

(1) De Giorgi dott. C., *Note geologiche sulla provincia di Lecce*, Vol. I pag. 220 Lecce, 1876.

Messina 1° del 1877.

« Discavando le argille per la confezione dei mattoni alla contrada Gravitelli presso Messina, « in un banco di dura arenaria interposto alle argille, furono trovati i residui di una Balena o genere « affine; sgraziatamente lo stato di fragilità delle ossa, in opposizione alla durezza della roccia, fece « sì che i lavoranti volendoli estrarre li hanno ridotti in frammenti che potrebbero quasi riguar- « darsi siccome inservibili. Essendo stato informato di tale fatto, mi portai sul luogo ed ottenni « quanto si era ricavato e mi convinsi che tutti quei mucchi di minuti frantumi derivavano senza « dubbio da molte vertebre barbaramente rovinate; tali vertebre pare che si trovassero disposte « tutte insieme ed associate, ma io non ne ebbi che frammenti, mi adoprai quindi alla restaura- « zione e sono riescito, con grande stento a ricomporre tre porzioni di vertebre, costituite da molti « piccoli frammenti, che danno chiara idea della forma e della grandezza. Tutto il resto del ma- « teriale resta accomodato in grandi ceste e con grandissimo stento si potrà giungere a ricavarne « qualche lieve utilità.

« Quanto al giacimento, io sono ormai sicuro che trattasi proprio degli *strati mio-pliocenici* « da lei tanto bene studiati in Toscana.

« Sopra il conglomerato miocenico giacciono degli strati di origine lacustre, sabbia e argille « con strati di lignite, sovrastono quindi strati marini con *Nassa semistriata* var., *Ancillaria obso-* « *leta* var., *Cardita rudista*, *Arca diluvii*, *Pecten duodecimlamellatus etc. etc.*

« È in questi strati marini che uniti ai lacustri formano il Messiniano del Mayer, da non « confondersi collo Zancleano che immediatamente sovrasta, che furono rinvenuti i resti di balena.

« Per completare l' idea della serie messinese le faccio conoscere che in altri luoghi sul con- « glomerato giacciono, in precedenza degli strati a lignite, il Calcare di Leitha e le molasse con fauna « tortoniana, come si vede presso Sampiero.

« Le annetto infine un grossolano disegno di alcune delle vertebre restaurate perchè Ella possa « giudicarne in qualche modo. Le soggiungo che in Reggio Calabria mi è occorso di vedere una « vertebra di Cetoterio più piccola di quelle che possiedo, ma non posso darle altra notizia ».

G. Seguenza.

Dalle figure delle due vertebre incomplete inviatemi dal prof. Seguenza, ho creduto di poter rilevare che esse debbano riferirsi ad un grande *Heterocetus*, che potrebbe avere rapporti con una specie della quale ho ritrovato parecchie vertebre presso la Pieve di Santa Luce nella valle della Fine in Toscana e che per ora non ho ancora caratterizzato.

Una cassa timpanica sinistra incompleta di *Heterocetus*, proveniente pure dalla Pieve Santa Luce, e che si trova nel museo di Storia naturale di Firenze, probabilmente ha rapporto con lo stesso tipo di cui si trovarono avanzi anche in Sicilia.

Una delle vertebre restaurate dal prof. Seguenza ha la lunghezza o diametro antero-posteriore di m. 0,165 con una larghezza approssimativa di m. 0,130 e sembra appartenere alle ultime dorsali; l'altra è una lombare larga m. 0,180, ma incompleta per modo che non se ne può apprezzare la lunghezza.

Il giacimento delle vertebre di *Heterocetus* di Gravitelli corrisponde esattamente al piano in cui ho raccolto le vertebre di *Heterocetus* nella valle della Fine e dal quale proviene altresì la cassa timpanica che suppongo riferibile allo stesso animale che si trova nel museo di Firenze.

Sono appena due anni che trattando dei Cetoterii bolognesi ebbi occasione di accennare che, in Italia, i primi resti di Cetoterii si trovano nella pietra leccese, che in parte si può identificare con la pietra di Malta, nella quale pure furono segnalati avanzi di Cetoterii. Ritenendo allora che la pietra leccese fosse da considerarsi interamente corrispondente all' arenaria calcarifera di Malta e fosse tutta quanta più antica del calcare

di Leitha (col quale invece credo che si dovrà in parte identificare), esprimeva la mia grande sorpresa che negli strati a *Congeria*, nel piano Sarmatiano e nel calcare di Leitha (ossia nei piani corrispondenti a queste divisioni della formazione terziaria), in Sicilia, in Terra d'Otranto, in Toscana e nel Bolognese non si fossero ancora trovati avanzi di misticeti.

« Se in Italia (scrivevo nel 1875), dovunque si riscontreranno e si studieranno « i piani corrispondenti al calcare di Leitha, agli strati sarmatiani, e agli strati a « *Congeria*, si dovesse verificare questa mancanza di resti di Cetoterii, bisognerebbe « ammettere che per circostanze speciali, quelli animali sul finire del periodo mio- « cenico avessero emigrato dal mare italiano e non vi fossero tornati per un certo « periodo di tempo; mantenendosi invece nelle regioni del Caspio e del Mar Nero e « nel Bacino Austro-Germanico, poichè nel calcare di Leitha nel Sarmantiano e negli « strati a *Congeria* di Crimea e di Bassarabia troviamo copiosi avanzi del sottotipo « *Eucetotherium* al quale spettano pure gli avanzi trovati nel calcare di Leitha del « Bacino di Vienna ».

Lo studio dei cetacei fossili dell'Italia meridionale e nuove ricerche non solo intorno al loro esatto giacimento, ma anche riguardo agli altri fossili che li accompagnano; le straordinarie scoperte sui misticeti fossili della Toscana, nuovi studî stratigrafici e nuovi fossili trovati nel Bolognese, oggi mi mettono in grado di annunziare che la lacuna avvertita due anni or sono è già scomparsa.

Se taluni avanzi di Cetoterio trovati insieme con resti di *Squalodon* (1) e altri delfinoidi, denti di *Carcharodon megalodon*, avanzi di *Stereodon melitensis?* ec. ec., dovranno riguardarsi come aquitaniani, bisognerà riconoscere che ve ne hanno pure altri provenienti dalla pietra leccese superiore, la quale deve considerarsi corrispondente al calcare di Leitha, come già avevo sospettato altra volta. Inoltre il tufo, o leccese bastarda, di Galatone, per la scoperta del *Pachyacanthus* ci si rivela come Sarmatiano e in esso abbiamo pure trovato un misticeto che ricorda quelli che, insieme al *Pachyacanthus Suessi*, incontransi nello stesso piano nel Bacino di Vienna e che il Van Beneden riporta al genere *Aulocetus*. La porzione inferiore delle marne bianche con cristalli di gesso e concrezioni di limonite, con *pteropodi, foraminifere, Ostrea cochlear* o *navicularis, Pecten duodecimlamellatus, P. denudatus* var.? *Columbella thiara* ecc. delle valli della Fine, della Sterza e della Cecina in Toscana; le marne glauconifere del Bolognese con *Ostrea cochlear, Pecten duodecimlamellatus, P. denudatus* var.? *P. Brummeli*, Nyst., che ricorda il *P. spinulosus*, devono almeno in parte essere il rappresentante marino dei veri strati a *Congeria*. E poichè da essi derivano la maggior parte dei resti di misticeti fossili della Toscana, quelli finora trovati in Sicilia e dubitativamente alcuni delle Calabrie, abbiamo oramai quanto mancava per rannodare i più antichi misticeti di Terra d'Otranto con quelli già conosciuti nelle provincie dell'Emilia e in Toscana, e con gli altri di Calabria e delle Puglie.

(1) Fra i fossili avuti in comunicazione dal museo provinciale di Lecce, riconobbi un bel cranio di *Squalodon Gastaldii* Brdt; disgraziatamente sussistono ancora soltanto due denti. Il dott. Foresti mi aiutò per liberare dalla roccia il prezioso esemplare di cui si conserva un modello nelle collezioni del museo geologico di Bologna.

provenienti dai veri strati pliocenici. Quando avrò completato lo studio dei misticeti fossili toscani, e in seguito a nuove scoperte, si potrà giungere ancora ad altre e più importanti conclusioni; quanto ho rapidamente accennato valga intanto a mettere in evidenza la importanza dei misticeti fossili già raccolti nei terreni terziarî dell'Italia meridionale.

Genere Pachyacanthus J. F. Brandt.

Il genere *Pachyacanthus* fondato dal dottore J. F. Brandt (1) con alcuni avanzi di vertebrati fossili marini provenienti dagli strati sarmatiani di Nussdorf e di Hernals, venne analizzato e discusso dal prof. Van Beneden nel 1875 e fu dimostrato che le diverse ossa, dal dottore Brandt riferite a questo nuovo genere, appartenevano ad animali di più ordini; ma che il nome *Pachyacanthus* poteva ritenersi per l'animale al quale spettavano le vertebre e le coste (2). Il dottore Brandt dopo essere rimasto lungamente incerto sul posto da assegnare all'animale al quale riferì le ossa diverse che si trovano specialmente nel museo imperiale mineralogico e nella privata collezione del signor Letocka a Vienna (3), lo giudicò un misticeto; adottò il nome di *Pachyacanthus* per indicare la grossezza straordinaria delle apofisi spinose delle vertebre e dichiarò che, da un lato il genere *Balaena* e dall'altro il genere *Pachyacanthus* erano i tipi generici i più anormali ed estremi, si intende sempre fra i misticeti.

Il prof. Van Beneden dopo avere esaminato e ristudiato accuratamente tutti quanti i resti fossili riferiti ai *Pachyacanthus*, vi riconobbe avanzi di Cetoterii, di Cetodonti, di Sirenoidi e perfino un frammento di mascellare di bue.

Fra le vertebre avendo trovato che le due prime cervicali erano specialmente interessanti e che invece di assomigliare a vertebre di misticeti presentavano le caratteristiche del *Dugong* e del *Lamantino* e anche nelle coste avendo riscontrato i caratteri proprî dei sirenoidi, concluse che: quelle vertebre e quelle coste potevano ritenersi pel genere *Pachyacanthus* ma che questo nuovo animale invece di essere collocato fra i misticeti doveva costituire un nuovo genere di sirenoidi; disgraziatamente per ora nulla si conosce di avanzi del cranio e nel Bacino di Vienna non furono trovati neppure denti o frammenti della mandibola.

Fra i resti di talassoteriani avuti in comunicazione dall'egregio prof. G. Guiscardi, trovai un piccolo atlante incompleto proveniente da Galatone in Terra d'Otranto e tuttavia impegnato, in parte, entro un calcare grossolano del tipo della pietra leccese ma a grana meno fina, come appunto si verifica nei piani superiori per quelle varietà che vanno sotto il nome di tufo, leccese bastarda, o simile.

(1) Brandt J. F., *Pachyacanthus*. Bullet. sc. d. l'Acad. Imp. d. St. Petersbourg. T. XVI 1871; Mélang. biol., T. VIII p. 194; Bullet. sc., T. XVII 1872; Mélang. biol. ibid. p. 322, 323 et 329. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Bd. LXV. I Abth. April 1872.

(2) Van Beneden P. I., *Les Pachyacanthus du musée de Vienne*. Bulletin de l'Acad. R. de Belgique. 2me Série T. XL n. 9 et 10. Bruxelles, 1875.

(3) Brandt J. F., *Untersuchungen über die fossilen und subfossilen Cetaceen Europa's* Mém. Acad. Imp. des Sc. de Saint-Pétersbourg. VIIe Série T. XX n. 1, 1873. — *Ergänzungen zu den fossilen Cataceen Europa's*, ibid. Tom. XXI n. 6, 1874, Tav. XIV, XV, XVI, XVII et XVIII fig. 1-4.

Dalle figure e dalle descrizioni pubblicate dal dott. Brandt (1) nelle sue considerazioni sui cetacei fossili e subfossili di Europa, e da quanto ne aveva scritto recentemente il Van Beneden, mi riescì facile di riconoscere che la vertebra fossile di Galatone, Tav. III fig. 1-3, corrispondeva alla prima cervicale del *Pachyacanthus*, fino allora trovato soltanto del Bacino di Vienna.

Nella breve comunicazione all'Accademia delle Scienze di Bologna *sui cetacei fossili dell'Italia meridionale* e nella lettera che il prof. Van Beneden mi fece l'onore di fare inserire nel Bollettino della Accademia R. del Belgio (2) non esitai ad accettare le vedute del valentissimo cetologo belga e aggiunsi, che probabilmente parecchi dei frammenti di coste di sirenoidi provenienti dalla pietra leccese avevano appartenuto al *Pachyacanthus*; infatti fra le coste di sirenoidi del museo di Lecce una ve n'ha la quale presenta i medesimi caratteri di quelle dei *Pachyacanthus* del museo di Vienna che potei studiare nel settembre dello scorso anno. Se non che, mentre per l'esame dei resti di *Pachyacanthus* di quel museo imperiale, mi convinsi che non mi era male apposto giudicando dell'atlante proveniente da Galatone, d'altra parte mi parve di riconoscere che mentre le coste attribuite a detto genere avevano decisamente i caratteri delle coste dei sirenoidi, l'atlante invece ricordava la forma propria di alcuni delfini piuttosto che quella degli atlanti dei sirenoidi viventi e fossili.

La descrizione che il professore Van Beneden ha data di quest'osso, corrisponde assai bene anche al bellissimo esemplare che si trova nel museo di Napoli, e che, soltanto per grandezza e per essere meno incompleto differendo dagli esemplari che ho potuto studiare nel museo di Vienna, non credo, per ora, che si possa neppure considerare come appartenente ad una specie distinta.

Nella figura 1 Tav. III questo atlante è rappresentato per la sua faccia anteriore e in grandezza naturale per poterne apprezzare la forma generale e quindi anche la forma del canale rachidiano e delle faccie articolari; le linee punteggiate indicano le apofisi superiori trasverse e la porzione dell'arco superiore che mancano in questo esemplare come mancano in quelli raccolti finora del Bacino di Vienna (v. Tav. III fig. 4-5 atlante di *P. Suessi* $^1/_2$ del vero da un modello di esemplare esistente nell'imperiale museo mineralogico).

Una prima ispezione basta per convincersi che non si tratta di un atlante di misticeto; ma anche ritenendo che l'animale fosse un sirenoide, e tale dovrebbe essere se veramente gli appartengono le coste che gli furono attribuite, non saprei disconoscere talune somiglianze che trovo fra gli atlanti di *Pachyacanthus* e quelli di taluni cetodonti dei generi *Platanista, Inia, Pontoporia*.

La forma generale di questa vertebra, le sue faccie articolari anteriori e posteriori, il margine posteriore dell'arco inferiore conformato a becco che va a dare appoggio alla seconda vertebra cervicale, la forma e la disposizione delle apofisi

(1) Brandt J. F., *Untersuchungen über die fossilen und subfossilen Cetaceen Europa's*. Mem. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. VII Série. Tome XX n. 1 Pl. XIV fig. 8-9. St. Pétersbourg, 1873.

(2) Bulletin de l'Acad. R. de Belgique, Tome XLI n. 5 mai 1876.

trasverse e perfino la sua lunghezza o diametro antero-posteriore corrispondono assai meglio alle caratteristiche degli atlanti dei cetodonti dei generi citati, che non a quelle degli atlanti dei sirenoidi coi quali ho potuto compararla: *Halicore* o Dugong, *Manatus* o Lamantino, *Halitherium*, *Felsinotherium*. V. Tav. III fig. 6, 7, 8, 9, 10. Un sottile frammento dell' arco superiore e il modello della superficie interna di esso benissimo conservato dalla roccia, mi hanno permesso di poter tracciare esattamente la forma del canale rachidiano e la fig. 1 Tav. III permette di apprezzare come differisca dalle forme che si osservano nei sirenoidi finora conosciuti e assomigli invece alla forma che si riscontra nell' atlante del genere *Platanista*, Tav. III fig. 11 (1).

Per la forma delle faccie articolari anteriori e posteriori, sussistono pure i rapporti e le differenze che ho già avvertite per la forma del canale rachidiano e parmi che non si possa esitare a riconoscere nel delfino del Gange una parentela con il *Pachyacanthus*, per ciò che si riferisce alla prima vertebra cervicale. Le faccie articolari posteriori sono disgiunte fra loro per mezzo di una faccetta scavata in modo da ricevere la testa dell' apofisi odontoide dell' asse ; ma anche questo carattere mentre non si trova nel *Dugong*, come aveva già osservato il prof. Van Beneden, mentre manca nell'*Haliterio* e nel *Felsinoterio*, si riscontra invece nei diversi generi di delfini del Gange e del Rio della Plata, già più volte ricordati. La smarginatura davanti l'arco superiore per il passaggio dell' arteria vertebrale è abbastanza larga e profonda e corrisponde tanto a ciò che si osserva nei sirenoidi quanto a ciò che si nota nei delfini dei generi *Inia* e *Platanista*.

La figura 3 Tav. III permette di apprezzare la faccia inferiore di questa vertebra e unitamente alla fig. 2, nella quale lo stesso osso è visto dal lato destro, parmi che venga a confermare i rapporti e le differenze intorno alle quali ho creduto di dovermi intrattenere e che si possono riscontrare col confronto delle figure dell' atlante del genere *Inia*, Tav. III fig. 13, 14, 15 (2).

Delle apofisi trasverse restano soltanto le inferiori e queste, per la loro forma e posizione, ricordano quelle dell' atlante dei generi *Inia* e *Pontoporia*, ma in nessun modo parmi che si possano confrontare con i tubercoli che stanno a rappresentare apofisi inferiori trasverse negli atlanti dei sirenoidi. V. Tav. III fig. 6-10.

Per fare viemmeglio apprezzare quanto sieno grandi i rapporti di forma dell' atlante del *Pachyacanthus* con quello dei tipi di delfini che si potrebbero dire di estuario o di acqua salmastra, e nel tempo stesso per facilitare i confronti coi principali tipi di sirenoidi viventi e fossili, ho pensato di far copiare gli atlanti di *Dugong* o *Lamantino*, Tav. III fig. 9-10, pubblicati dal Cuvier (3) ed ho fatto disegnare dal vero l'atlante dell' *Haliterio*, Tav. III fig. 6-7, e quello del *Felsinoterio*, Tav. III fig. 8, giovandomi degli esemplari del museo geologico e paleontologico di Bologna. Per gli atlanti dei delfini dei generi *Platanista*, *Inia*, *Pontoporia* le figure furono

(1) Van Beneden et Gervais, *Ostéographie des cétacei vivants et fossiles*. Pl. XXX fig. 1-3.

(2) Van Beneden et Gervais, Op. cit. Pl. XXXII fig. 1, *a*, *b*, *c*.

(3) Cuvier, *Recherches sur les ossements fossiles*. Tom. V^me^ 1^re^ Partie. Pl. XIX fig. 12 A. B. Pl. XX fig. 15, Paris, 1823.

copiate dall'opera classica di Van Beneden et Gervais (1) sui Cetacei viventi e fossili più volte ricordata e dalla Memoria del prof. Burmeister pubblicata negli Annali del museo pubblico di Buenos Ayres (2). Ho aggiunto un disegno dell'atlante nel *Pachyacanthus Suessi* il tutto ridotto a un terzo o alla metà della grandezza naturale.

Se le coste, con decisi caratteri di sirenoidi, e le vertebre dorsali e lombari che hanno offerto i caratteri pei quali è stato scelto il nome generico *Pachyacanthus*, spettano allo stesso animale al quale si riferiscono gli atlanti raccolti a Nussdorf e a Hernals nel Bacino di Vienna e a Galatone in Terra d'Otranto, bisogna convenire essere ben giustificata la proposta di un genere nuovo, poichè si tratterebbe di animali i quali evidentemente avrebbero dovuto avere rapporti coi delfini e coi sirenoidi. In seguito a ulteriori scoperte e quando si possederanno avanzi del cranio, si potrà decidere francamente se il *Pachyacanthus* sia da ritenersi fra i sirenoidi, come ha sospettato il prof. Van Beneden, ovvero se si debba riportare ai cetodonti; in ogni modo è da escludersi affatto che potesse essere un misticeto, come aveva sospettato il dott. Brandt.

La vertebra trovata a Galatone ha grandissima importanza tanto per la paleontologia quanto per la geologia, perchè mostra nuovi rapporti e ci offre nuovo termine di confronto fra i terreni terziarî italiani e quelli del Bacino di Vienna.

(1) Van Beneden et Gervais, Op. cit. Pl. XXIX fig. 1-6: Pl. XXX fig. I1-3; Pl. XXXII fig. 1 *a*, *b*, *c*.

(2) Burmeister H., *Descripcion de cuatro especies de delfinides de la costa argentina en el Oceano atlantico.* Anales del Museo publico de Buenos Ayres. Entrega sexta Pl, XXVI fig. 4, Buenos Ayres, 1869.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I.

Fig. 1-8 — Resti dell' apparato auditivo destro dell'*Heterocetus Guiscardii*, in grandezza naturale. Fig. 1. La cassa timpanica vista per la estremità posteriore. — Fig. 2. Lo stesso osso visto per la sua faccia superiore. — Fig. 3. Sezione trasversa della cassa timpanica. — Fig. 4. Frammento della staffa in parte ricostrutta e in grandezza doppia del vero. — Fig. 5. Apofisi anteriore o temporale vista per la faccia laterale esterna. — Fig. 6. Apofisi posteriore o temporo-occipitale vista per il lato superiore. — Fig. 7. L'apofisi stessa vista per la faccia interna inferiore, considerando l'apparato auditivo al suo posto; la linea punteggiata indica ciò che si suppone che manchi. — Fig. 8. Sezione trasversa dell' apofisi posteriore.

Fig. 9. — Ricostruzione della 3ª vertebra cervicale vista per la faccia anteriore; $^1/_3$ del vero.

Fig. 10. — Vertebre cervicali dalla 3ª alla 7ª viste dal lato sinistro; $^1/_3$ del vero.

Fig. 11. — Ultima vertebra cervicale vista per la faccia posteriore; $^1/_3$ del vero.

Fig. 12. — Mandibola sinistra vista per la faccia esterna; $^1/_5$ del vero.

Fig. 13. — Mandibola destra vista per il margine superiore; $^1/_5$ del vero.

Fig. 14. — Sezione della mandibola destra; $^1/_5$ del vero.

Fig. 15. — Coste probabilmente del lato sinistro; $^1/_5$ del vero.

Fig. 16. — Seconda vertebra cervicale del *Plesiocetus Garopii* restaurata; $^1/_5$ del vero.

Tav. II.

Fig. 1. — Sezione della mandibola della Balenottera di Galatone. *Aulocetus* sp.? in grandezza naturale per fare apprezzare la disposizione del tessuto a grandi canali e del tessuto compatto. e la maniera di distribuzione dei canali di Havers.

Fig. 2. — Sesta vertebra cervicale vista per la faccia anteriore; $^1/_3$ del vero.

Fig. 3. — Terza vertebra dorsale; $^1/_3$ del vero.

Fig. 4. — Sesta vertebra dorsale; $^1/_3$ del vero.

Fig. 5. — Prima vertebra caudale vista dal lato sinistro.

Fig. 6. — Sezione trasversale di mandibola di Balenottera fossile di Terra d'Otranto con grandi canali di Havers che simulano un tessuto spongioso ordinario. Obbiettivo N.° 2 Hartnack; camera lucida Oberhauser.

Fig. 7. — Sezione della porzione più compatta della mandibola della balenottera fossile di Galatone con canali di Havers molto piccoli. Ingrandimento come sopra.

Tav. III.

Fig. 1-3. — Atlante del *Pachyacanthus* di Galatone, in grandezza naturale. — Fig. 1. L'atlante visto per la faccia anteriore; le linee punteggiate indicano le porzioni mancanti delle apofisi trasverse e dell' arco superiore. — Fig. 2. La stessa vertebra vista per il lato inferiore.

Fig. 4-5. — Atlante del *Pachyacanthus Suessi* $^1/_2$ del vero; da un modello di esemplare del museo imperiale mineralogico di Vienna.

Fig. 6. — Atlante di *Halitherium Schinzii*; $^1/_3$ del vero visto per la faccia anteriore; da un esemplare del R. museo geologico di Bologna.

Fig. 7. — Lo stesso visto per la faccia inferiore.

Fig. 8. — Atlante del *Felsinotherium Forestii*; $^1/_3$ del vero visto per la faccia anteriore.

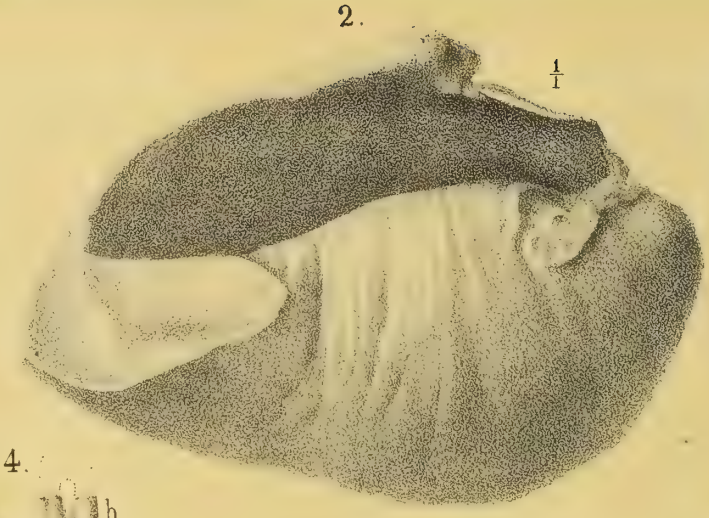
Fig. 9. — Atlante di *Manatus*; $^1/_3$ del vero, copia.

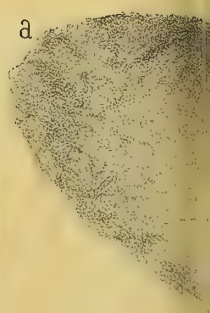
Fig. 10. — Atlante di *Halicore*; $^1/_3$ del vero, copia.

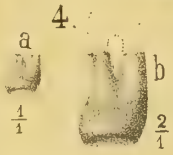
Fig. 11. — Atlante di *Platanista*; $^1/_2$ del vero, copia.

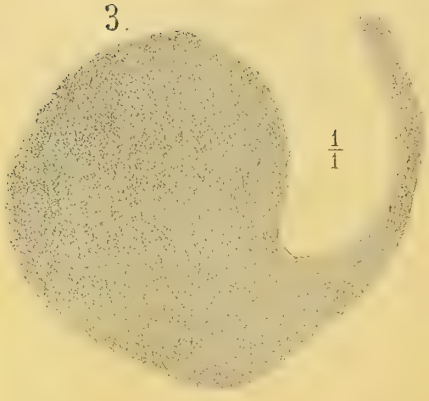
Fig. 12. — Atlante di *Pontoporia*; $^1/_2$ del vero, copia.

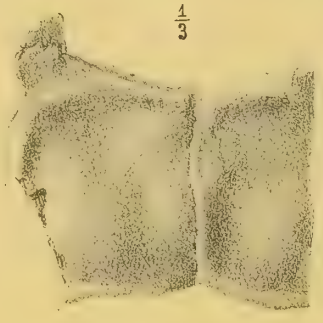
Fig. 13-15. — Atlante di *Inia*; $^1/_3$ del vero, copia. 13 lato inferiore; 14 faccia posteriore; 15 faccia anteriore.

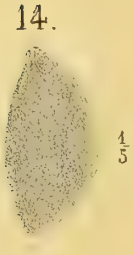


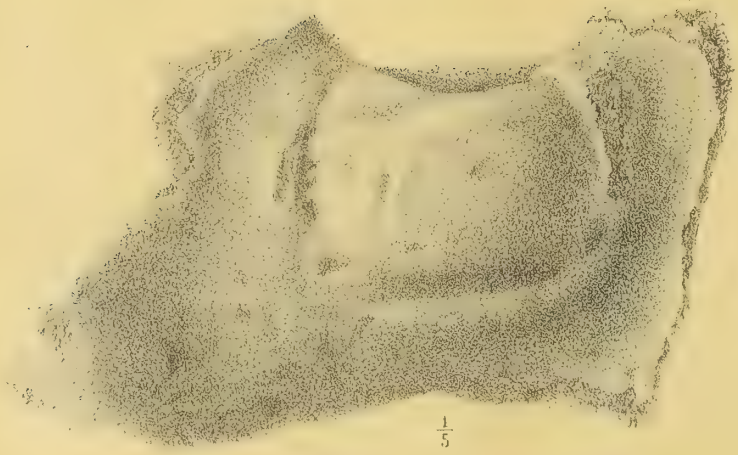






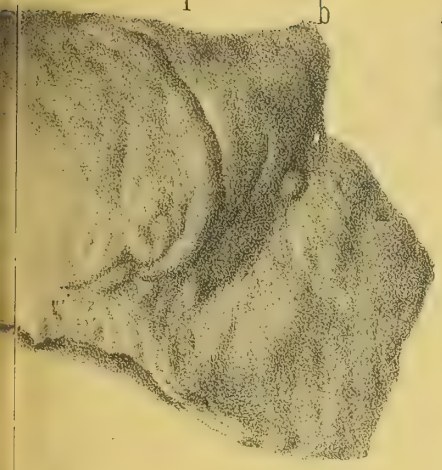




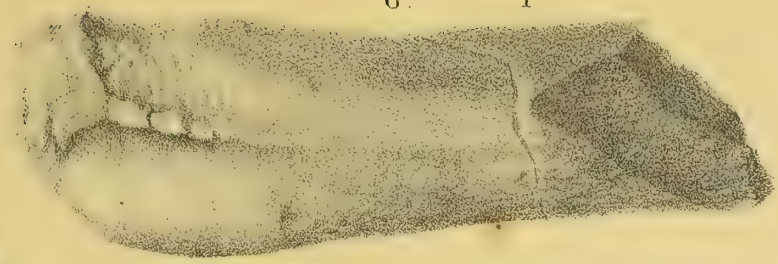


E. Contoli dis.° dal vero e in pietra.

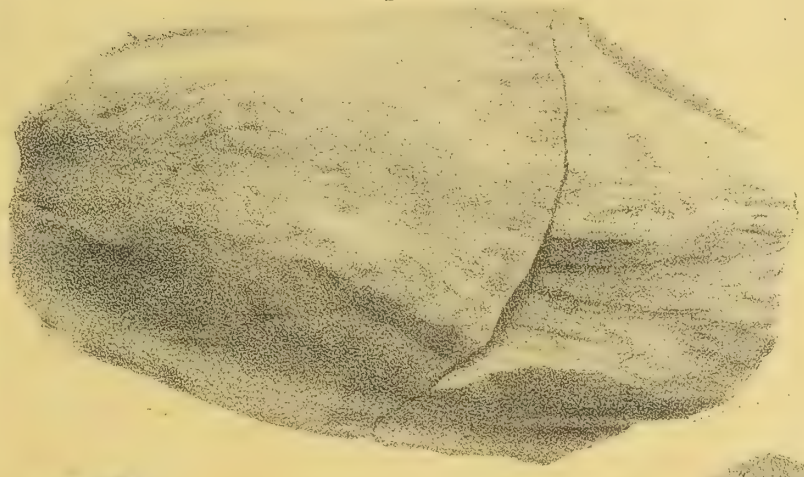
5. $\frac{1}{1}$



6. $\frac{1}{1}$

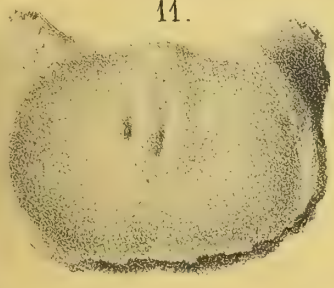


$\frac{1}{1}$ 7.

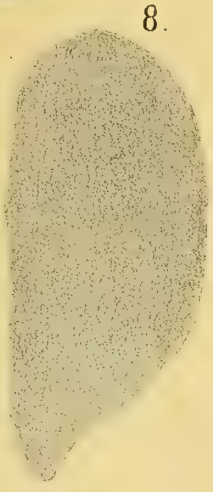


$\frac{1}{3}$

11.

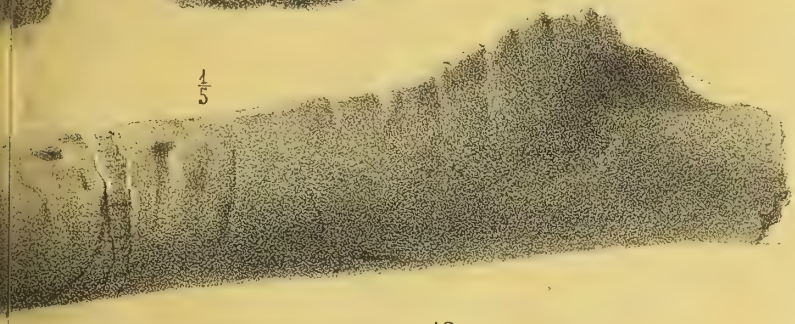


8.

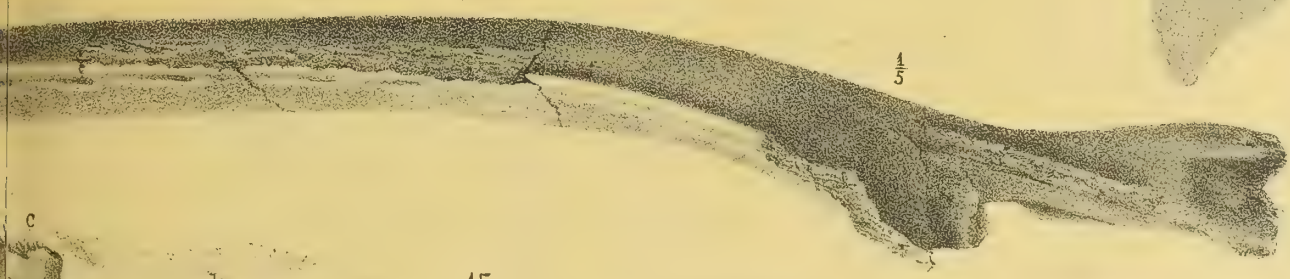


$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{5}$



13.



$\frac{1}{5}$

c

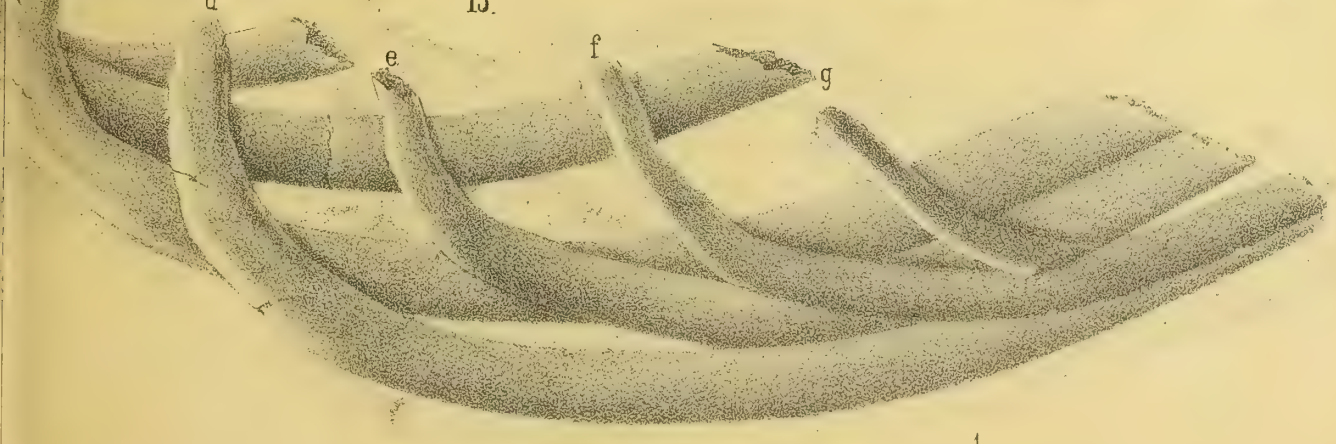
d

15.

e

f

g



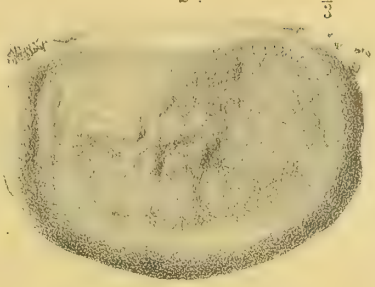
$\frac{1}{5}$

1.
a
b
1/1
2.
1/1
3.
1/1
4.
a
b
1/1
2/1
9.
1/3
10
c
d
e
g
1/3
11.
12
1/5
14.
1/5
16.
1/5
13.
1/5
15.
a
c
d
e
f
g
1/5
5.
1/1
a
b
6.
1/1
7.
1/1
8.
1/1

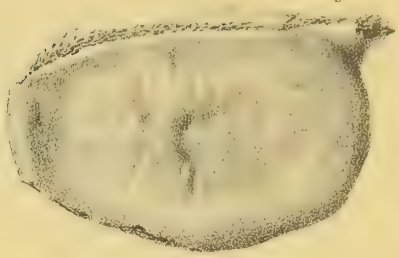
1.

$\frac{1}{1}$

2. $\frac{1}{3}$

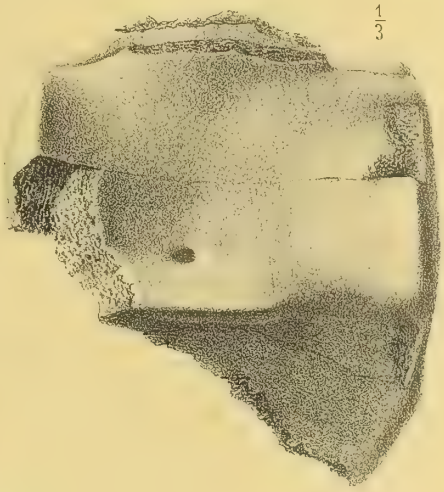


3. $\frac{1}{3}$

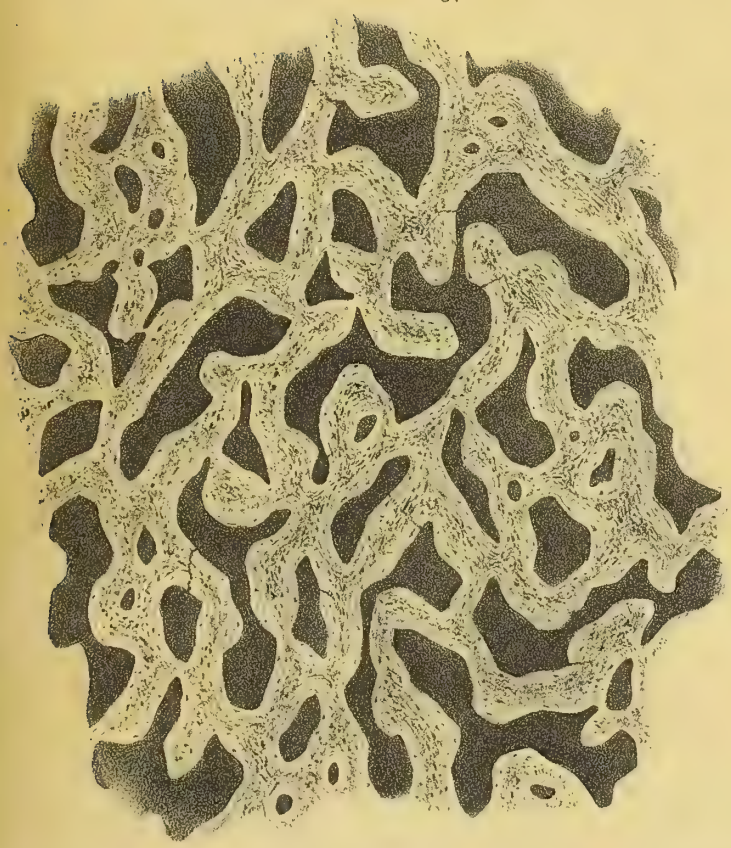


4. $\frac{1}{3}$

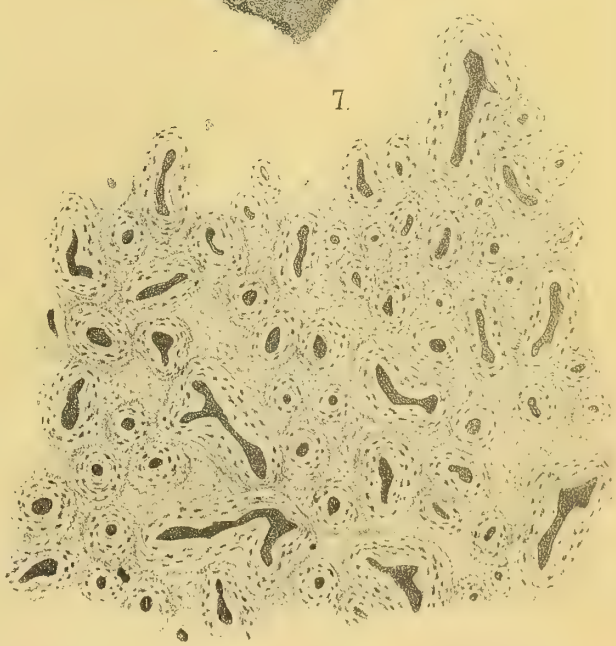
5. $\frac{1}{3}$

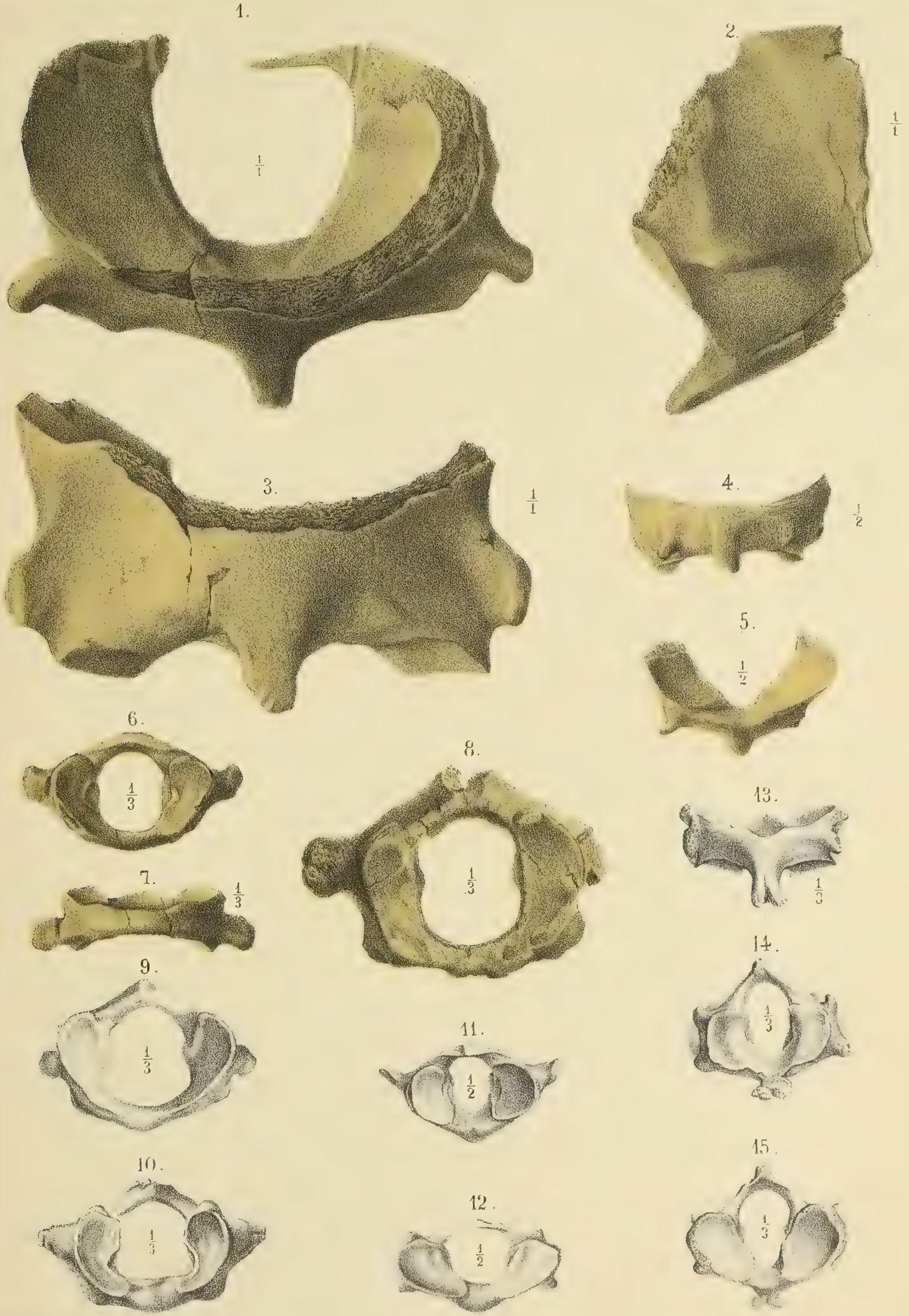


6.



7.




1.
1/1
2.
1/1
3.
1/1
4.
1/2
5.
1/2
6.
1/3
7.
1/3
8.
1/3
9.
1/3
10.
1/3
11.
1/2
12.
1/2
13.
1/3
14.
1/3
15.
1/3

Sul movimento per una linea di 2° ordine.

Nota del Socio G. BATTAGLINI

letta nella seduta del 3 giugno 1877.

Nel fascicolo dei *Comptes Rendus* del 9 aprile del corrente anno il signor Bertrand ha proposto la questione: Conoscendo che i pianeti descrivono delle sezioni coniche, e non supponendo altro, trovare l'espressione delle componenti della forza che li sollecita, in funzione delle coordinate del suo punto d'applicazione. Ammettendo che la forza dipenda dalla sola posizione del mobile, e che la velocità nella posizione iniziale del mobile possa essere del tutto arbitraria, si dimostra che la forza acceleratrice deve essere centrale, e se ne trova allora facilmente l'espressione nei due casi notissimi, quando la direzione della forza passa per un fuoco, o pure pel centro della conica. Nel fascicolo seguente dei *Comptes Rendus* il signor Bertrand annunzia poi che la questione proposta è stata risoluta dal signor Darboux, quando la direzione della forza passa per un punto qualunque nel piano della conica. Ora in questa Nota ho cercato di risolvere in modo generale il problema del movimento per una linea di 2° ordine; il problema di sua natura è indeterminato, e non esige necessariamente la condizione che la forza acceleratrice sia centrale.

Le coordinate di un punto qualunque di una conica potendo essere espresse in funzione di un parametro, si avranno tutti i movimenti possibili per la conica supponendo che quel parametro sia una funzione arbitraria del tempo: se le circostanze del movimento debbono riprodursi periodicamente, tale funzione sarà assoggettata alla sola condizione di essere semplicemente periodica, il periodo essendo il tempo fra due successivi passaggi del mobile per uno stesso punto della curva. Con questa osservazione si hanno immediatamente le formole per determinare ad ogni istante la posizione del mobile, la velocità e l'accelerazione: la funzione arbitraria del tempo, contenuta in queste formole, sarà poi determinata, per mezzo dell'integrazione di un'equazione differenziale, allorchè si pone una condizione alla forza acceleratrice, relativamente al suo valore, o alla sua direzione. Così supponendo che, nel percorrere il mobile una conica, la direzione della forza passi sempre per un punto fisso, arbitrario rispetto alla conica, si trova che la forza è proporzionale alla distanza del mobile da quel punto, ed al cubo inverso della distanza del mobile da una retta, la quale è la polare del punto fisso rispetto alla conica; da ciò si deducono immediatamente i noti risultati, quando il punto fisso è il centro, o un fuoco della conica. Viceversa, prendendo ad arbitrio un punto ed una retta, si può determinare la conica

che sarebbe percorsa da un mobile sollecitato da una forza, secondo la legge suddetta relativamente a quel punto ed a quella retta, con date condizioni iniziali di posizione e di velocità del mobile. In generale, quando un mobile percorre una conica, trovo che la forza acceleratrice si può considerare come risultante di due forze, l'una diretta secondo il raggio vettore condotto da un punto fisso qualunque, e l'altra diretta secondo la tangente della curva; la prima forza è proporzionale al raggio vettore, al cubo inverso della distanza del mobile dalla retta polare del punto fisso rispetto alla conica, e ad una funzione arbitraria del parametro che determina la posizione del mobile sulla curva; la seconda forza è proporzionale poi alla distanza inversa del punto fisso dalla tangente della conica, al quadrato inverso della distanza del mobile dalla polare del punto fisso, e ad un'altra funzione del parametro, che è la metà della derivata della prima funzione rispetto a quel parametro. Per ogni posizione del mobile si può determinare una conica, che ha con la conica proposta doppio contatto, sulla polare del punto fisso, alla quale la direzione della forza è tangente; e la forza stessa è proporzionale alla distanza inversa della sua direzione dal punto fisso, al quadrato inverso della distanza del mobile dalla polare del punto fisso, ed a quella funzione dal parametro che entra nella espressione della componente della forza secondo la tangente della conica.

Lo sviluppo di ciò che si è detto procede nel seguente modo.

1. Riferiamo una conica S a due assi coordinati, i quali siano le polari coniugate ortogonali corrispondenti ad un punto arbitrario O del piano; per fissare le idee supporremo O interno alla curva. Se

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

rappresenta la retta R polare di O rispetto ad S, l'equazionè della conica sarà

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = P^2.$$

Poniamo

$$\mu x = P\cos\theta\,, \qquad \nu y = P\operatorname{sen}\theta\,,$$

e per brevità

$$\Theta = \mu\nu - \alpha\nu\cos\theta - \beta\mu\operatorname{sen}\theta = \frac{\gamma\mu\nu}{P};$$

si avrà

$$(1) \qquad x = \frac{\gamma\nu\cos\theta}{\Theta}\,, \qquad y = \frac{\gamma\mu\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\,.$$

L'equazione della tangente di S nel punto determinato dal parametro θ sarà

$$(2) \qquad \mu x\cos\theta + \nu y\operatorname{sen}\theta = P\,,$$

e le distanze p ed r del punto O da questa tangente e dal suo punto di contatto saranno date da

$$(3) \quad \frac{\gamma^2}{p^2} = (\alpha - \mu\cos\theta)^2 + (\beta - \nu\operatorname{sen}\theta)^2, \qquad \frac{\gamma^2}{r^2} = \frac{\Theta^2}{\mu^2\operatorname{sen}^2\theta + \nu^2\cos^2\theta}\,.$$

Ciò posto, se un elemento materiale percorre liberamente la conica S, il parametro θ sarà una funzione del tempo t: differenziando quindi rispetto a t le formole (1),

e ponendo $\frac{1}{\Theta^2}\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{T}$, si avranno per le componenti ξ, η, secondo gli assi, della velocità v del mobile, le formole

$$(4) \qquad \xi = \frac{dx}{dt} = \mathrm{T}\gamma\mu\nu\,(\beta - \nu \operatorname{sen}\theta)\,, \quad \eta = \frac{dy}{dt} = -\,\mathrm{T}\gamma\mu\nu\,(\alpha - \mu\cos\theta),$$

onde

$$v = \mathrm{T}\gamma\mu\nu\sqrt{\left((\alpha - \mu\cos\theta)^2 + (\beta - \nu\operatorname{sen}\theta)^2\right)} = \frac{\mathrm{T}\gamma^2\mu\nu}{p}\,.$$

Differenziando poi rispetto a t le (4), si avranno per le componenti X, Y, secondo gli assi, della forza acceleratrice F del mobile, le formole

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\mathrm{T}^2\Theta^2\gamma\mu\nu^2\cos\theta + \mathrm{T}\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\Theta^2\gamma\mu\nu\,(\beta - \nu\operatorname{sen}\theta), \\ \mathrm{Y} &= \frac{d^2y}{dt^2} = -\,\mathrm{T}^2\Theta^2\gamma\mu^2\nu\operatorname{sen}\theta - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\Theta^2\gamma\mu\nu\,(\alpha - \mu\cos\theta). \end{aligned}$$

Segue da ciò che la forza F si può considerare come risultante di due forze F′, F″, di cui le componenti, secondo gli assi, sono rispettivamente

$$-\,\mathrm{T}^2\Theta^2\gamma\mu\nu^2\cos\theta\,, \qquad -\,\mathrm{T}^2\Theta^2\gamma\mu^2\nu\operatorname{sen}\theta\,,$$

e

$$\mathrm{T}\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\Theta^2\gamma\mu\nu\,(\beta - \nu\operatorname{sen}\theta), \qquad -\,\mathrm{T}\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\Theta^2\gamma\mu\nu\,(\alpha - \mu\cos\theta);$$

la forza F′ è diretta secondo il raggio vettore condotto da O al punto θ, la forza F″ è diretta secondo la tangente di S in θ, e si ha

$$(6) \qquad \mathrm{F}' = \frac{\mathrm{T}^2\gamma^3\mu^4\nu^4\gamma}{\mathrm{P}^3}\,, \qquad \mathrm{F}'' = \frac{\mathrm{T}\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\gamma^4\mu^3\nu^3}{\mathrm{P}^2 p}\,;$$

adunque: se un mobile M percorre liberamente una conica S, esso sarà sollecitato da due forze F′, F″, l'una diretta secondo il raggio vettore condotto da un punto qualunque O, e l'altra diretta secondo la tangente della curva; la prima forza è proporzionale al raggio vettore, al cubo inverso della distanza di M dalla retta R, polare di O rispetto ad S, e ad una funzione del parametro θ che determina la posizione del mobile sulla curva; la seconda forza è proporzionale alla distanza inversa di O dalla tangente di S in M, al quadrato inverso della distanza di M dalla retta R, e ad un'altra funzione di θ, che è la metà della derivata della prima funzione rispetto a θ.

L'equazione della retta secondo la quale agisce la forza acceleratrice F del mobile sarà

$$(7) \qquad \mu x\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\cos\theta - \mathrm{T}\operatorname{sen}\theta\right) + \nu y\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \mathrm{T}\cos\theta\right) = \frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\,\mathrm{P},$$

sicchè ponendo $T = \sigma \operatorname{sen} \tau$, $\frac{dT}{d\theta} = \sigma \cos \tau$, verrà

$$\mu x \cos(\theta + \tau) + \nu y \operatorname{sen}(\theta + \tau) = P \cos \tau :$$

questa equazione, paragonata con (2), dimostra che la direzione di F è tangente ad una conica S_θ, variabile con θ, che ha con S doppio contatto sulla retta R, essendo $\theta + \tau$ il parametro del punto di contatto di F con S_θ. Indicando con Q la distanza di O dalla direzione di F, è chiaro che sarà

$$F = \frac{T \frac{dT}{d\theta} \gamma^4 \mu^3 \nu^3}{P^2 Q},$$

o finalmente, chiamando χ l'angolo che il raggio vettore fa con la tangente,

$$F = \frac{\gamma^3 \mu^3 \nu^3}{P^3 p} \sqrt{\left\{ T^4 \mu^2 \nu^2 p^2 \gamma^2 + 2T^3 \frac{dT}{d\theta} \gamma \mu \nu P p \cos \chi + T^2 \left(\frac{dT}{d\theta}\right)^2 \gamma^2 P^2 \right\}}.$$

La relazione fra θ e t sarà data dall'equazione

$$\frac{1}{\Theta^2} \frac{d\theta}{dt} = T, \quad \text{onde} \quad t = \int \frac{d\theta}{T\Theta^2}.$$

Ora, se si vuole che le circostanze del movimento si riproducano periodicamente, dovrà essere T, al pari di Θ, una funzione periodica di θ, di periodo 2π; ponendo allora in generale

$$\frac{1}{T\Theta^2} = C + \sum_1^\infty (A_i \cos i\theta + B_i \operatorname{sen} i\theta),$$

verrà

$$t = C\theta + \sum_1^\infty \left(\frac{A_i}{i} \operatorname{sen} i\theta - \frac{B_i}{i} \cos i\theta \right), \tag{8}$$

e quindi prendendo $\int \frac{d\theta}{T\Theta^2}$ fra i limiti θ e $\theta + 2\pi$, si avrà pel tempo invariabile $t_\varkappa$ fra due successivi passaggi del mobile per uno stesso punto della curva, la formola $t_\varkappa = 2\pi C$.

Secondo la natura della condizione cui si assoggetta T, il movimento che ne risulta sarà o non sarà periodico; così, per esempio, se nelle relazioni $T = \sigma \operatorname{sen} \tau$, $\frac{dT}{d\theta} = \sigma \cos \tau$, si voglia supporre σ costante, essendo $T^2 + \left(\frac{dT}{d\theta}\right)^2 = \sigma^2$, e ponendo $A^2 + B^2 = \sigma^2$, si troverà $T = A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta$; ora questa funzione ha il periodo 2π, quindi il movimento corrispondente sulla conica sarà periodico: al contrario, se nelle stesse relazioni si supponga τ costante, essendo $\frac{dT}{T} = d\theta \cot \tau$, verrà $T = C\, e^{\theta \cot \tau}$, funzione che non ha il periodo 2π se non nel caso inammissibile di $\cot \tau = \sqrt{-1}$; adunque nella suddetta supposizione il movimento sulla conica non sarà periodico; la direzione della forza acceleratrice del mobile sarà in tal caso sempre tangente alla

conica $\mu^2x^2 + \nu^2y^2 = P^2\cos^2\tau$, che ha con la conica proposta S un doppio contatto sulla retta R.

2. Supponiamo che la direzione di F passi pel punto O; sarà allora $F'' = 0$, quindi T eguale ad una costante C, ed $F = \frac{C^2\gamma^3\mu^4\nu^4 r}{P^3}$; adunque, se un mobile M percorre liberamente una conica S, essendo sollecitato da una forza diretta ad un punto fisso O, questa forza sarà proporzionale alla distanza di M da O, ed al cubo inverso della distanza di M dalla retta R, polare di O rispetto ad S.

Se il punto O è il centro di S, si avrà $\alpha = \beta = 0$, e verrà $F = C^2\mu^4\nu^4 r$, cioè la forza acceleratrice proporzionale alla distanza del mobile dal centro della conica; se poi O è un fuoco di S si avrà $\mu = \nu = \lambda$, onde $P = \lambda r$, e verrà $F = \frac{C^2\gamma^3\lambda^5}{r^2}$, o sia la forza acceleratrice proporzionale al quadrato inverso della distanza del mobile dal fuoco della conica; risultati ben conosciuti.

Per la relazione fra θ e t, verrà

$$Ct = \int \frac{d\theta}{\Theta^2} = \int \frac{d\theta}{(\mu\nu - \alpha\nu\cos\theta - \beta\mu\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}.$$

Supponiamo la conica un'ellisse, onde la condizione $\delta^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2} + \frac{\beta^2}{\nu^2} < 1$; osservando che si ha

$$\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{\alpha\nu\,\mathrm{sen}\,\theta - \beta\mu\cos\theta}{\Theta} = \frac{1}{\Theta^2}\left[(\mu^2\nu^2 - \alpha^2\nu^2 - \beta^2\mu^2) - \mu\nu\Theta\right],$$

verrà

$$\mu^2\nu^2(1-\delta^2)\int\frac{d\theta}{\Theta^2} = \frac{\alpha\nu\,\mathrm{sen}\,\theta - \beta\mu\cos\theta}{\Theta} + \mu\nu\int\frac{d\theta}{\Theta}.$$

Da un'altra parte essendo

$$\mu\nu - \Theta = \alpha\nu\cos\theta + \beta\mu\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \frac{d\Theta}{d\theta} = \alpha\nu\,\mathrm{sen}\,\theta - \beta\mu\cos\theta,$$

si avrà

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + (\mu\nu - \Theta)^2 = \mu^2\nu^2\delta^2,$$

e quindi

$$\int\frac{d\theta}{\Theta} = -\int\frac{-\frac{d\Theta}{\Theta^2}}{\sqrt{\left[-1 + \frac{2\mu\nu}{\Theta} - \frac{\mu^2\nu^2(1-\delta^2)}{\Theta^2}\right]}} = \frac{1}{\mu\nu\sqrt{1-\delta^2}}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{\Theta - \mu\nu(1-\delta^2)}{\delta\Theta},$$

onde finalmente

$$C\mu^2\nu^2(1-\delta^2)t = \frac{\alpha\nu\,\mathrm{sen}\,\theta - \beta\mu\cos\theta}{\Theta} + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{\Theta - \mu\nu(1-\delta^2)}{\delta\Theta}.$$

Il movimento sulla conica è periodico, ed il tempo t_x della rivoluzione periodica sarà dato dalla formola

$$C\mu^2\nu^2 t_x = \frac{2\pi}{(1-\delta^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (9)$$

Prendiamo ad arbitrio il punto O e la retta R, e cerchiamo la conica S che sarebbe descritta da un mobile M sotto l'azione della forza F diretta al punto O, ed espressa da $F = \frac{Kr}{P^3}$, tenendo conto delle condizioni iniziali del movimento. Condotti provvisoriamente per O gli assi rettangolari, rispetto ai quali la conica S deve avere un' equazione della forma

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = P^2,$$

le equazioni (4) daranno

$$(10) \qquad \xi = C\gamma\mu\nu\left(\beta - \frac{\nu^2 y}{P}\right), \quad \eta = -C\gamma\mu\nu\left(\alpha - \frac{\mu^2 x}{P}\right),$$

onde

$$x\eta - y\xi = C\gamma^2\mu\nu;$$

sicchè indicando con (x_0, y_0) le coordinate iniziali del mobile, e con (ξ_0, η_0) le sue velocità iniziali secondo gli assi, si avrà

$$(11) \qquad \mu^2 = \frac{P_0}{x_0}\left(\alpha + \frac{\gamma\eta_0}{x_0\eta_0 - y_0\xi_0}\right), \quad \nu^2 = \frac{P_0}{y_0}\left(\beta - \frac{\gamma\xi_0}{x_0\eta_0 - y_0\xi_0}\right),$$

e l'equazione di S diverrà

$$(12) \qquad \left(\alpha + \frac{\gamma\eta_0}{x_0\eta_0 - y_0\xi_0}\right)\frac{x^2}{x_0} + \left(\beta - \frac{\gamma\xi_0}{x_0\eta_0 - y_0\xi_0}\right)\frac{y^2}{y_0} = \frac{P}{P_0}.$$

La conica sarà ellisse, parabola o iperbole, secondo che

$$\frac{\alpha^2 x_0}{\alpha(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) + \gamma\eta_0} + \frac{\beta^2 y_0}{\beta(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) - \gamma\xi_0} \gtreqless \frac{P_0}{x_0\eta_0 - y_0\xi_0}.$$

Eliminando C, μ e ν tra l'equazione $K = C^2\gamma^3\mu^4\nu^4$, e le (10), dopo di avervi sostituito per x, y, ξ, η i loro valori iniziali, si troverà

$$(13) \qquad P_0^2[\alpha(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) + \gamma\eta_0][\beta(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) - \gamma\xi_0] = K\gamma x_0 y_0.$$

Essendo data la posizione iniziale del mobile, se i due assi rettangolari delle coordinate si conducono arbitrariamente per O, l'equazione (13) determinerà il valore della velocità iniziale, quando ne è data la direzione, o viceversa dato questo valore della velocità, ne determinerà la direzione, che potrà essere duplice per ogni posizione iniziale del mobile; con queste condizioni iniziali, il mobile sollecitato dalla forza F percorrerà la conica S rappresentata dall'equazione (12), la quale conica passerà per la posizione iniziale del mobile, avrà in tal punto per tangente la direzione della velocità iniziale, e rispetto ad S la retta R sarà la polare del punto O, e gli assi delle x e delle y saranno le polari coniugate ortogonali relative al medesimo punto. Se poi per la posizione iniziale del mobile si conosce il valore della velocità, ed anche la sua direzione, l'equazione (13) servirà per determinare la posizione delle polari coniugate ortogonali, relative al punto O, rispetto alla conica S percorsa dal mobile sotto l'azione della forza F; questa conica passerà per la posizione iniziale del mobile, toccherà la direzione della velocità iniziale, e rispetto ad S la retta R sarà la polare del punto O. Questa determinazione delle polari coniugate ortogonali si farà nel seguente modo.

Siano r_0 e φ_0 le coordinate polari della posizione iniziale del mobile rispetto al polo O ed all'asse polare perpendicolare alla retta R; siano v_0 e ψ_0 la velocità iniziale

del mobile, e l'angolo che la sua direzione fa con l'asse polare suddetto; finalmente sia q la distanza del punto O dalla retta R, ed ω l'angolo che la direzione di questa distanza fa con l'asse delle x, una delle polari coniugate ortogonali richieste: si avrà

$$\alpha = \cos\omega, \quad \beta = \operatorname{sen}\omega, \quad \gamma = -q,$$

$x_0 = r_0\cos(\varphi_0 + \omega)$, $y_0 = r_0\operatorname{sen}(\varphi_0 + \omega)$; $\xi_0 = v_0\cos(\psi_0 + \omega)$, $\eta_0 = v_0\operatorname{sen}(\psi_0 + \omega)$: con ciò all'equazione (13) potrà darsi la forma

$$(14)\quad \left[\frac{q}{\operatorname{sen}(\psi_0 - \varphi_0)} - \frac{r_0\cos\omega}{\operatorname{sen}(\psi_0 + \omega)}\right]\left[\frac{q}{\operatorname{sen}(\psi_0 - \varphi_0)} + \frac{r_0\operatorname{sen}\omega}{\cos(\psi_0 + \omega)}\right] = \frac{\mathrm{K}q}{\mathrm{P}_0^2}\frac{r^2{}_0}{v^2{}_0},$$

in cui P_0 è la distanza iniziale del mobile dalla retta R; questa equazione sviluppata farà conoscere $\tan 2\omega$, e quindi la posizione delle polari coniugate richieste.

Se le tangenti R′, R″ alla conica (12) condotte per O sono date, sarà dato il rapporto $\frac{\mu^2}{\nu^2}$; poniamo allora $\frac{\mu^2}{\nu^2} = \frac{a}{b}$ ed $ab = \mathrm{K}\gamma$; saranno date a e b, e le equazioni (11) e (13) daranno

$$(15)\qquad \alpha(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) + \gamma\eta_0 = \frac{ax_0}{\mathrm{P}_0}, \qquad \beta(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) - \gamma\xi_0 = \frac{by_0}{\mathrm{P}_0},$$

in cui a e b si possono prendere insieme positive, o negative; queste equazioni faranno conoscere (ξ_0, η_0), quando sono date (x_0, y_0), e viceversa, gli assi delle coordinate essendo le bisettrici degli angoli delle due rette R′, R″.

In particolare se si vuole che il punto O sia un fuoco della conica S, sarà $\mu = \nu$, onde $a = b = \sqrt{\mathrm{K}\gamma}$, e le equazioni (15) diverranno

$$\alpha(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) + \gamma\eta_0 = \frac{x_0}{\mathrm{P}_0}\sqrt{\mathrm{K}\gamma}, \quad \beta(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) - \gamma\xi_0 = \frac{y_0}{\mathrm{P}_0}\sqrt{\mathrm{K}\gamma}.$$

Se nelle formole precedenti si volessero supporre ignote le quantità α, β, γ che determinano la retta R, invece note le quantità μ^2, ν^2 e quindi conosciute le tangenti R′, R″ condotte alla conica S da O, le equazioni (11), insieme all'altra $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, serviranno per trovare α, β, γ, gli assi delle coordinate essendo le bisettrici degli angoli delle due rette R′, R″. Date ad arbitrio la posizione iniziale del mobile, e la sua velocità iniziale, la conica S percorsa dal mobile sotto l'azione della forza $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{K}r}{(\mu^2x^2 + \nu^2y^2)_2}$ (dipendente dal punto O e dalle rette R′, R″) passerà per la posizione iniziale del mobile, toccherà la direzione della velocità iniziale, avrà R′ ed R″ per le tangenti condotte da O, e rispetto ad S la polare di O sarà la retta R, determinata nel modo che si è sopra indicato.

3. Ritornando al movimento generale per una conica, consideriamo contemporaneamente più movimenti sulla stessa conica S, dovuti alle forze $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_i, \ldots$, le componenti $\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i$ di F_i secondo gli assi essendo date dalle formole

$$\mathrm{X}_i = -\mathrm{T}_i^2\Theta^2\gamma\mu\nu^2\cos\theta + \mathrm{T}_i\frac{d\mathrm{T}_i}{d\vartheta}\Theta^2\gamma\mu\nu(\beta - \nu\operatorname{sen}\theta),$$

$$\mathrm{Y}_i = -\mathrm{T}_i^2\Theta^2\gamma\mu^2\nu\operatorname{sen}\theta - \mathrm{T}_i\frac{d\mathrm{T}_i}{d\theta}\Theta^2\gamma\mu\nu(\alpha - \mu\cos\theta).$$

Tutti questi movimenti si comporranno in un movimento unico su di S dovuto alla forza F, di cui le componenti X, Y secondo gli assi saranno date dalle formole (5), essendo

$$T^2 = T^2_1 + T^2_2 + \ldots = \Sigma T_i^2, \quad \text{e} \quad T\frac{dT}{d\theta} = T_1\frac{dT_1}{d\theta} + T_2\frac{dT_2}{d\theta} + \ldots = \Sigma T_i\frac{dT_i}{d\theta};$$

e se l'equazione della retta secondo la quale agisce la forza F_i si pone sotto la forma

$$(16)\quad \Phi_i = \mu x\left(T_i\frac{dT_i}{d\theta}\cos\theta - T_i^2\operatorname{sen}\theta\right) + \nu y\left(T_i\frac{dT_i}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + T_i^2\cos\theta\right) - T_i\frac{dT_i}{d\theta}P = 0,$$

l'equazione (7) della retta secondo la quale agirà la forza F diverrà $\Sigma\Phi_i = 0$.

Se la direzione della forza F_i passa per un punto O_i, di coordinate (x_i, y_i), l'equazione (16) darà per determinare T_i la condizione

$$\frac{dT_i}{T_i} = \frac{\mu x_i\operatorname{sen}\theta - \nu y_i\cos\theta}{\mu x_i\cos\theta + \nu y_i\operatorname{sen}\theta - P_i}\,d\theta,$$

onde (indicando con c_i una costante arbitraria)

$$(17)\quad T_i^2 = \frac{c_i^2}{(\mu x_i\cos\theta + \nu y_i\operatorname{sen}\theta - P_i)}, \quad T_i\frac{dT_i}{d\theta} = -\frac{c_i^2(\mu x_i\operatorname{sen}\theta - \nu y_i\cos\theta)}{(\mu x_i\cos\theta + \nu y_i\operatorname{sen}\theta - P_i)^3}.$$

L'espressione della forza F_i, per le cose dette precedentemente, sarà della forma $F_i = \frac{K_i\rho_i}{\Pi_i^3}$, essendo K_i una costante, e ρ_i, Π_i le distanze del mobile dal punto O_i e dalla sua retta polare R_i rispetto ad S. Supponendo che tutte le forze F_1, F_2 ... passino rispettivamente per altrettanti punti fissi O_1, O_2 ... si avrà con la loro azione simultanea un movimento sulla conica S, ciascuna forza essendo proporzionale alla distanza del mobile dal corrispondente punto fisso, ed al cubo inverso della distanza del mobile dalla polare di quel punto fisso rispetto alla conica S; le forze componenti si ridurranno ad una sola forza F diretta al punto O, proporzionale alla distanza del mobile da O ed al cubo inverso della distanza del mobile dalla retta R, polare di O rispetto ad S, quando si abbia la condizione

$$T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_i^2 + \ldots = C^2,$$

essendo C una quantità costante.

Un caso speciale di tal movimento per una conica fu notata dal sig. Sylvester (*Educ. Times*) quando cioè il mobile è sollecitato simultaneamente da due forze dirette ai fuochi della conica, ed inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze del mobile da essi, ed inoltre da una terza forza diretta al centro della conica, e proporzionale alla distanza del mobile dallo stesso centro.

Studî chimico-fisiologici sulle materie coloranti della retina.

Nota di STEFANO CAPRANICA
presentata dal Socio TOMMASI CRUDELI

nella seduta del 6 maggio 1877.

PRIMA COMUNICAZIONE

(Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia e Fisiologia comparata nella R. Università di Roma XI).

È assioma della fisica moderna che soltanto quei raggi luminosi i quali vengono assorbiti, sono capaci di una azione chimica e fisica sui corpi. Volendosi applicare questo principio in tutta la sua estensione all'atto della visione, nell'esame fisiologico della sensazione della luce e dei colori, sarebbero in prima linea da considerarsi soltanto quelli elementi che sono veramente capaci di assorbimento, cioè a preferenza, le sostanze colorate le quali entrano nella composizione della membrana che sente la luce.

Fra le sostanze colorate a preferenza capaci di assorbire, possono distinguersi nella retina dei vertebrati anatomicamente tre diverse specie.

Primo, il pigmento; granuli neri brunastri, di forma prismatica o a bastoncelli, i quali formano il contenuto delle cellule esagonali dell'epitelio retinico pigmentato.

Secondo, il rosso retinico (Sehroth); una sostanza colorante rossa, rapidamente distruggibile dalla luce, unita alla sostanza lamellare, la quale forma i membri esterni dello strato dei bastoncelli e dei coni.

Finalmente ancora, una terza materia colorante, la quale in genere appare collegata con finissime gocciole di una sostanza oleosa. Queste gocciole oleose e colorate, le quali non sembrano far difetto nell'occhio di nessun vertebrato, nelle diverse classi di questo tipo occupano differenti posizioni.

Nei pesci e nei mammiferi, si trovano esclusivamente nell'interno delle cellule esagonali dell'epitelio retinico, a lato dei granuli nero-brunastri, mai però negli elementi dello strato dei bastoncelli e coni. All'opposto nei rettili e negli uccelli, non si rinvengono mai nelle cellule di pigmento, ma sempre nello strato dei bastoncelli e coni, occupando senza eccezione il punto di contatto fra il membro esterno ed il membro interno. Fra questi due gruppi così nettamente distinti, gli anfibî tengono il posto di mezzo, in quanto che presso di loro le gocciole oleose esistono tanto nello strato dei bastoncelli e dei coni, quanto nelle cellule esagonali dell'epitelio retinico. Ma soltanto le ultime contengono la sostanza colorante, rimanendo le prime sempre incolori.

La presente Nota si occupa esclusivamente della fisiologia e della chimica della sostanza colorante che si trova nelle gocciole oleose. Che questa sostanza rappresentasse la materia prima per la ripristinazione del rosso retinico consumato, fu

già reso molto probabile dalle ricerche di Boll (1): e noi fondandoci unicamente sui risultati delle sue esperienze intraprese sulle rane, abbiamo voluto prima di tutto stabilire per la retina di queste, microscopicamente e chimicamente, le proprietà delle gocciole oleose.

Queste gocciole di color giallo d'oro, e di forma regolarmente sferica, si riscontrano dentro le singole cellule di pigmento in numero assai variabile; si trovano costantemente a lato di loro altre gocciole incolori per lo più, di minor grandezza e di forma più irregolare, le quali come viene provato facilmente dalla reazione dell'acido osmico, consistono in una sostanza grassa. Nelle retine in cui, dopo precedente illuminazione per luce molto intensa, aveva avuto luogo una rigenerazione del rosso retinico, immediatamente prima dell'esame microscopico, si trovano a lato delle gocciole di arancio cupo, dei globetti completamente incolori, numerose gocciole più pallide di colore giallo arancio. Queste ultime gocciole, nelle quali evidentemente la quantità della sostanza colorante è diminuita, mancano completamente nelle retine rimaste nella oscurità assoluta o nella luce rossa.

La sostanza contenuta nelle gocciole gialle è insolubile nell'acqua e nelle soluzioni acquose alcaline, acide o neutre; invece con la più grande facilità si scioglie nei seguenti liquidi: alcool etilico, alcool amilico, alcool metilico, benzina, cloroformio, etere ordinario, solfuro di carbonio. Tutte queste soluzioni sono di color giallo d'oro come le gocciole istesse, mentre che la soluzione nel solfuro di carbonio si mostra di un color rosso eguale a quello del rosso retinico, colorazione che può ottenersi anche indirettamente, sostituendo nelle soluzioni gialle il solfuro di carbonio agli altri solventi. In tutte queste soluzioni, oltre ad una materia colorante, sono contenute sostanze grasse e colesterina, le quali sinora non siamo riusciti a separare in totalità dalla materia colorante.

Fra le molte reazioni microchimiche che abbiamo istituite in queste gocciole colorate, tre sole ci dettero risultati caratteristici.

1. Acido solforico concentrato, aggiunto sotto il microscopio, muta il colore giallo d'oro delle gocciole istantaneamente in un bellissimo violaceo oscuro, il quale presto passa in un blù molto cupo (Coll'acido selenico una tale reazione non ha luogo).

2. Acido nitrico concentrato colora le gocciole momentaneamente in blù verdastro, scolorandole completamente subito dopo.

3. Soluzione di iodio (2), cambia il color giallo delle gocciole in un verde bellissimo, poi in blù verdastro (Bromo soluto in bromuro potassico non produce nessuna reazione di colorazione, ma scolora completamente le gocciole).

Quest'ultima reazione del iodio essendo già stata istituita, con eguale e positivo risultato da altri (3), sulle gocciole dei rettili e degli uccelli, abbiamo voluto esaminare anche le altre due reazioni nei loro rapporti con questi elementi anatomici.

(1) *Sull'Anatomia e Fisiologia della Retina.* Atti dell'Accademia dei Lincei. 1876-77 Serie III^a Vol. I.°

(2) La soluzione adoperata (acqua 100 c. c. — ioduro potassico 0,5 — iodio 0,25) si raccomanda per le ricerche isto-chimiche, perchè la sua concentrazione si trova possibilmente adattata alla concentrazione del liquido plasmatico che bagna i tessuti.

(3) Graefe e Saemisch, *Handbuch der gesammten Augenheilkunde* I p. 414. 1874.

Dall'esame risulta il più completo accordo: le gocciole color giallo canario che si trovano nelle retine dei rettili (lucertola, camaleonte), mostravano dopo l'aggiunta del iodio, dell'acido azotico, e dell'acido solforico, gli identici cambiamenti di colore come le gocciole giallo d'oro dello strato pigmentato della rana. Lo stesso si verifica con gli uccelli, nei quali tutte le gocciole, tanto le rosse, quanto le arancie e le gialle pallide, vengono colorate in modo identico dai detti reattivi (1). Questo accordo fa supporre che le differenze nel colore delle gocciole, non sono di natura specifica, ma vengono cagionate da una accumulazione più o meno intensa della sostanza colorante. Questa supposizione si conferma osservando sotto il microscopio il processo solutivo di queste gocciole, che ha luogo dopo l'aggiunta della benzina: si osserva nel modo più evidente come il colore intenso delle pallette rosso-rubino impallidisce sempre più, e a poco a poco passa in un rosso d'arancio scuro.

In tali circostanze non è da dubitare che indipendentemente dal colore, dapertutto nelle gocciole oleose, indifferentemente se siano poste nello strato del pigmento o in quello dei bastoncelli e coni, esiste una e medesima sostanza chimica. Questo viene provato non solo per le suddette reazioni, ma anche per l'identità delle solubilità. I medesimi liquidi che sciolgono la sostanza gialla delle gocciole della rana, sciolgono egualmente anche le gocciole gialle dei rettili, e le gocciole variamente colorate degli uccelli; ed anche in questi due ultimi casi, si verifica il fatto rimarchevole, che la soluzione della sostanza colorante, fatta per mezzo del solfuro di carbonio, si distingue da tutte le altre soluzioni, per un colore rosso più vivo. Con speciale evidenza questo si verifica con le soluzioni preparate dalle gocciole variamente colorate degli uccelli; meno spiccato è il fenomeno con la sostanza colorante estratta dalla retina della lucertola, la soluzione della quale presenta un colore molto più pallido, verdastramente giallo.

L'esame spettroscopico ci fornì risultati altrettanto concordanti fra loro, quanto le reazioni chimiche e l'esame delle solubilità. Come punto di partenza di queste ricerche spettrali, ci siamo serviti della sostanza colorante estratta dalla retina del pollo, potendosi da essa preparare quantità relativamente considerevoli, senza gravi difficoltà pratiche. In genere abbiamo impiegato venti retine, trattandole con 20 c. c. di alcool assoluto di una densità di 0,798 a + 26°,2; riscaldandole lentamente a bagno-maria, si estrae in pochi minuti la totalità della sostanza colorante. La soluzione filtrata ed evaporata alla metà del suo volume primitivo, mostra in uno strato spesso 5 mill. un colore giallo arancio. La sua densità, che abbiamo determinato per mezzo del picnometro, variava nelle nostre diverse determinazioni da 0,832 a 0,829, alla temperatura di + 26°,2 (Il colore e lo spettro di quella rappresentata dalla fig. 1ª, aveva per densità 0,829 a + 26°,2). La soluzione sulfocarbonica rossa, l'abbiamo preparata aggiungendo a 10 c. c. della descritta soluzione alcoolica 20 c. c. di solfuro di carbonio; coll'agitazione una parte del solfuro si sostituisce all'alcool, e la soluzione così ottenuta mostra in uno strato spesso 5 mill. un bel colore rosso

(1) Le medesime tre reazioni riescono ugualmente col pigmento diffuso deposto nei rettili e negli uccelli, nella sostanza dei membri interni, il quale possiede un color giallo canario nella lucertola, un color quasi giallo brunastro nel camaleonte e un bel color rosso nel piccione.

vivo. Queste due soluzioni, che vogliamo chiamare soluzione normale arancio-gialla, e soluzione normale rossa, abbiamo diluite per la quarta parte del loro volume, per dimostrare in esse la possibile esistenza di strie d'assorbimento speciali. Essendoci riuscita questa dimostrazione in modo perfettamente soddisfacente, abbiamo stimato superfluo di fare anche della sostanza colorante dell'occhio delle rane, e di quello della lucertola, soluzioni normali di determinata densità e forte concentrazione. Tanto per la rana quanto per la lucertola, ci siamo contentati di preparare delle soluzioni arbitrarie, e determinare in esse la presenza delle linee di assorbimento.

Per i risultati speciali dell'esame spettroscopico, richiamiamo l'attenzione sulla tavola aggiunta a questa Nota. La fig. 1ª rappresenta lo spettro di assorbimento totale della soluzione normale arancio-gialla (alcoolica): le due estremità dello spettro vengono assorbite, l'estremità rossa sino ad un punto che si trova nel mezzo fra *B* e *C*, l'estremità violacea da *b* in poi; lascia quindi passare la maggior parte del rosso, l'arancio, il giallo ed una parte del verde. Diluendo questa soluzione per la quarta parte del suo volume con l'alcool, si ottiene lo spettro riprodotto nella fig. 2ª, il quale è caratterizzato per la presenza di due linee caratteristiche di assorbimento, le quali però non riescono visibili che colla luce solare diretta o coll'illuminazione al magnesio. La prima di queste due strie si trova nel limite del blù verso il verde, e corrisponde esattamente alla linea *F*; la seconda più larga si trova in mezzo fra *F* e *G*, però più vicina a *G*. La soluzione normale rossa assorbe una parte dello spettro notevolmente più grande che non l'arancio-gialla (vedi fig. 3ª). La parte dello spettro che rimane inalterata, si estende dalla linea *B* fino alla metà fra *D* ed *E*. La soluzione assorbe dunque tutti i raggi verdi quasi completamente. La soluzione diluita mostra nella luce solare ed in quella del magnesio, l'identico paio di linee d'assorbimento caratteristiche che si trovano nella soluzione arancio-gialla diluita: soltanto queste due strie sembrano un po' spostate verso la parte meno refrangibile dello spettro, cosicchè la prima di esse non coincide più con la linea *F*, ma evidentemente si trova al lato rosso di essa. Nelle soluzioni alcooliche ed eteree preparate dalle gocciole della rana e da quelle della lucertola, le strie d'assorbimento coincidono quasi esattamente con quelle della soluzione normale arancio-gialla. Ci siamo limitati a riprodurre soltanto quelle della rana (vedi fig. 5ª).

Le nostre osservazioni sulle qualità spettroscopiche delle gocciole oleose, sembrano contraddire, almeno in parte, le sole ricerche che finora nella letteratura si trovano su quest'argomento. Talma (1), il quale ha esaminato le gocciole oleose della retina del piccione al microspettrometro, asserisce che le pallette giallo-verdastre oscurano le due estremità dello spettro, lasciando passare inalterati soltanto i raggi gialli e verdi; che le palle arancie assorbono tutta l'estremità violacea dello spettro da un punto situato nel mezzo fra *D* e *b;* e che finalmente le pallette rosse assorbono tutta la luce da *D* fino all'estremità violacea dello spettro. Questa ultima asserzione sembra inconciliabile con i risultati del nostro esame spettroscopico, trovandosi anche nel più assorbito degli spettri da noi raffigurati, fra la parte assorbita violacea e la linea *D*, sempre ancora un campo luminoso di una larghezza abbastanza

(1) *Over licht- en kleur-perceptie.* Utrecht, 1873. p. 36.

considerevole. Ci è però riuscito di eliminare questa contraddizione: per questo abbiamo adoperato per l'esame spettroscopico la soluzione normale arancio-rossa, preparata con le gocciole diversamente colorate del pollo, in uno strato spesso fra i 4 e 5 centimetri; in questo caso ottenemmo anche noi un risultato concorde con l'asserzione di Talma, cioè un assorbimento completo della parte violacea dello spettro dalla linea *D* in poi. Le rimanenti asserzioni di Talma sulle qualità assorbenti delle pallette giallo-verdastre e delle pallette giallo-arancie, possono combinarsi senz'altro coi risultati delle nostre ricerche spettrali, perchè alle prime corrisponde quasi esattamente il nostro spettro fig. 1ª ed alle seconde quello della fig. 3ª. Per le pallette rosso-rubino della retina degli uccelli si deve fare l'ipotesi, che in esse la sostanza colorante esista in una concentrazione almeno dieci volte più forte di quella delle gocciole arancie, essendo necessario per la produzione del loro spettro d'assorbimento, uno strato quasi dieci volte più spesso.

Ma con questi fatti spettroscopici non sono ancora esauriti i rapporti che ha la sostanza colorante con la luce, anzi ci rimane ancora a stabilire la sua particolarità fisiologicamente più importante, cioè la sua sensibilità fotochimica. Nel corso delle nostre ricerche, fummo colpiti dal fatto che le soluzioni esposte all'aria e alla luce non di rado da un giorno all'altro, o erano diventate completamente incolore, o avevano perduta la maggior parte delle loro colorazioni. Esperienze speciali stabilirono il fatto che alla luce sola deve attribuirsi questo scoloramento, imperocchè questo non ha mai luogo nelle soluzioni esposte all'aria e conservate all'oscurità, mentre che costantemente si osserva per l'azione della luce anche nel vuoto barometrico. Fu poi dimostrato da una seconda serie di ricerche fatte con vetri monocromatici, che quell'effetto è dovuto esclusivamente alla luce più rifrangibile dalla linea *D* in poi, essendo completamente inefficace, a questo riguardo, la luce rossa al di là della linea *D*. Dobbiamo aggiungere che le soluzioni sulfocarboniche si scolorano più rapidamente e più completamente delle soluzioni gialle fatte nell'alcool, nell'etere e nella benzina. Relativamente alle singole specie animali (pollo, rana, lucertola) non si è trovata differenza ragguardevole nella sensibilità fotochimica, e nello scoloramento delle soluzioni per mezzo di essa più rapidamente o più lentamente prodotto.

Qui finisce il nostro studio sulla sostanza colorante contenuta nelle gocciole oleose della retina, essendo state esposte da noi per la prima volta le sue reazioni chimiche, le sue solubilità, le sue qualità spettrali e la sua sensibilità fotochimica. In tutti questi rapporti (e questo è un fatto molto rimarchevole) la nostra sostanza colorante coincide completamente con un altro pigmento animale, noto ai chimici già da vario tempo, il quale, d'accordo con Hoppe-Seyler, vogliamo chiamare anche noi luteina.

La luteina fu contemporaneamente preparata nell'anno 1866, da Holm e Staedeler (1) e da Piccolo e Lieben (2) dai corpi gialli dell'ovario della vacca e descritta con identiche qualità. I due primi autori hanno dimostrato la presenza della medesima sostanza anche nel torlo dell'ovo della gallina; ritengono che sia identica con

(1) Journal fuer praktische Chemie Vol. 100 p. 142, 1867.

(2) *Studi sul corpo luteo della vacca.* Giornale di scienze naturali ed economiche di Palermo Anno II. Vol. II p. 258, 1866.

l'ematoidina, e per questo si astengono di darle un nome speciale. Piccolo e Lieben invece insistono nelle sua speciale individualità chimica e propongono per essa il nome di luteoematoidina, o di emoluteina. Evidentemente senza conoscere il lavoro di questi ultimi autori, descrive Thudichum (1) nell'anno 1869 la luteina come un pigmento giallo, che secondo lui sarebbe molto diffuso nel regno animale e vegetale; il quale identifica con l'ematoidina di Holm e Staedeler, dicendo espressamente che finora non sia ancora chimicamente differenziato da altri. Secondo Thudichum la luteina normalmente si trova nei corpi lutei dei mammiferi, nel siero del sangue, nelle cellule del tessuto adiposo, e nel grasso giallo del latte (burro). Inoltre, come hanno già trovato Holm e Staedeler, la luteina si trova nel torlo dell'uovo degli ovipari. Nei vegetali si osserva nei semi (maïs), nelle buccie e nelle parti carnose dei frutti; nelle radici (carota gialla), nelle foglie, negli stami, nella corolla e nei petali di molti fiori. Dopo il Thudichum il solo Hoppe-Seyler si è occupato dettagliatamente dell'esame della luteina. I fatti nuovi trovati da lui si trovano esposti nel suo manuale d'Analisi Chimica Fisiologica e Patologica.

Noi abbiamo preparato come Holm e Staedeler e come Piccolo e Lieben la luteina dai corpi lutei dell'ovario della vacca, ed anche noi ottenemmo come ultimo risultato, cristalli microscopici pleocromatici, i quali con un forte ingrandimento furono dimostrati appartenere a due forme nettamente distinte. Gli uni sono prismi a base rombica (identici con la figura di Thudichum). Gli altri sono tavole irregolarmente romboidali (corrispondenti alle figure di Piccolo e Lieben). Questi ultimi probabilmente non sono niente altro che tavole di colesterina colorata dalla luteina, ed anco rispetto ai cristalli della prima forma abbiamo qualche dubbio, se debbono essere considerati come cristalli di luteina chimicamente pura. Però su questa questione, come nella questione della costituzione della luteina in genere, ci riserbiamo di tornarci sopra in un'altra occasione.

I. *Reazioni chimiche della luteina.* — L'identità della luteina con la sostanza colorata contenuta nelle gocciole oleose della retina risulta dall'identità delle loro reazioni chimiche.

1. La suddescritta reazione così bella e così caratteristica, che l'acido solforico produce con le gocciole oleose, fu già istituita con eguale successo da Piccolo e Lieben coi loro cristalli di luteina.

2. La reazione con l'acido azotico, la quale sembra esser sfuggita a Piccolo e Lieben, viene prima ben descritta da Thudichum e confermata da Hoppe-Seyler.

3. La reazione col iodio finalmente, la quale fu tentata da Piccolo e Lieben con risultato negativo, e che nessun altro menziona, a noi è riuscita con i cristalli di luteina, altrettanto bene quanto con le gocciole oleose.

II. *Solubilità della luteina.* — Tutti i liquidi sopramenzionati, i quali sciolgono la sostanza colorante delle gocciole oleose, lo fanno senza veruna eccezione con i cristalli della luteina. Fu già osservato da Holm e Staedeler che la soluzione sulfocarbonica si distingue da tutte le altre per il suo colore rosso intenso.

(1) *Ueber das Lutein und die Spektren gelbgefaerbter organischer Substanzen.* Centralblatt fuer die medizin. Wissensch., 1869, p. 1.

III. *Qualità spettroscopiche della luteina.* — Il primo che abbia esaminato la luteina allo spettroscopio è Thudichum op. cit., ove dice: « Lo spettro di queste solu- « zioni è caratterizzato dal forte splendore della parte rossa, gialla e verde, e per « tre strie d'assorbimento, le quali trovansi nella parte azzurro-indaco, e nella parte « violacea. La posizione delle strie d'assorbimento varia un poco secondo i diversi « solventi ».

Queste asserzioni di Thudichum vengono precisate da Hoppe-Seyler nel modo seguente: « le soluzioni della luteina assorbono con molta intensità la luce blù e violacea. « Le soluzioni diluite grado a grado con l'alcool e con l'etere, mostrano due strie « d'assorbimento caratteristiche, una delle quali comprende in sè la linea *F*, incli- « nando però piuttosto verso *G*, che non verso *b*, la seconda stria sta all'incirca nel « mezzo fra *F* e *G*. Come fu già trovato da Thudichum, la posizione delle strie « varia alquanto secondo il solvente ».

I risultati della nostra propria analisi della luteina, sono completamente d'accordo con quello che dice Hoppe Seyler, e coincidono esattamente con i sopra descritti risultati, sulle qualità spettroscopiche della sostanza colorante, contenuta nelle gocciole oleose della retina. Una soluzione alcoolica della luteina, la densità della quale corrisponde all'incirca a quella della soluzione arancio-gialla normale delle gocciole oleose, mostra il bel colore giallo-cromo, riprodotto alla fig. 6ª, e dà uno spettro d'assorbimento totale (fig. 6ª), il quale sta quasi esattamente nel mezzo fra quello della soluzione normale arancio-gialla e quello della soluzione normale rossa delle gocciole oleose, assorbendo la parte violacea dello spettro un pochino al di là della linea *E*. Il colore e lo spettro d'assorbimento totale della soluzione sulfocarbonica più rossa della luteina (fig. 8ª) corrispondono quasi esattamente a quelli della soluzione normale rossa delle gocciole oleose; nel medesimo modo la posizione delle strie d'assorbimento della soluzione alcoolica diluita della luteina (fig. 7ª) coincide esattamente con quella della soluzione normale arancio-gialla, mentre le strie che mostra la soluzione sulfocarbonica diluita sembrano anche esse un po' spostate verso la parte rossa dello spettro (fig. 9ª). La terza stria d'assorbimento descritta da Thudichum, e situata nel violaceo, noi come Hoppe-Seyler non abbiamo mai potuto dimostrare.

IV. *Sensibilità fotochimica della luteina.* — Già Piccolo e Lieben fanno menzione che i loro cristalli di luteina si scoloravano all'aria; rimase però a Hoppe-Seyler di scoprire la vera ragione di quello scoloramento, cioè l'azione della luce. Noi abbiamo ripetuto le medesime esperienze sopradescritte con le soluzioni delle gocciole oleose, con le soluzioni della luteina, alcooliche, eteree e sulfocarboniche, ed abbiamo ottenuto sempre i medesimi risultati. Merita di esser rilevato che le soluzioni di luteina, e più specialmente la sulfocarbonica, si scolorano del tutto in un tempo considerevolmente più breve, che non la soluzione delle gocciole oleose, mentre queste ultime richiedono per il loro scoloramento completo o più giorni, o almeno sempre una serie più lunga di ore. Con le soluzioni della luteina si produce il medesimo effetto in una mezz'ora alla luce diretta del sole. Sopra un foglio di carta impregnato di una soluzione di luteina, e disseccato previamente all'oscurità, si ottiene la riproduzione di un disegno qualunque a traforo fatto sopra una carta nera e applicato

sul foglio sensibilizzato dalla luteina, con una esposizione alla luce solare di circa 25 a 30 minuti primi, rimanendo inalterati gli spazî coperti dal nero e completamente scolorati quelli che ricevevano la radiazione solare.

Nel modo del tutto identico come la luteina preparata dai corpi lutei della vacca, si comporta la sostanza colorante contenuta nel torlo delle uova di gallina. Le sue reazioni chimiche e le sue solubilità sono esattamente le medesime, e mostra in soluzione alcoolica, l'identico paio di strie d'assorbimento caratteristiche, come la sostanza colorante delle gocciole d'olio, e le soluzioni della luteina preparata dai corpi gialli (fig. 10ª).

Finalmente viene anche scolorata per i raggi più rifrangibili della luce solare, quantunque non con tanta rapidità, come la luteina preparata dai corpi lutei della vacca. Inoltre la sua sensibilità fotochimica è molto più tarda di quella della sostanza colorante delle gocciole oleose, perchè per arrivare al suo scoloramento completo, si richiedono sempre parecchi giorni.

L'ultimo risultato delle nostre ricerche è adunque quello, che già dentro l'uovo esiste preformata una sostanza colorante, destinata nella formazione dell'organismo ad entrare nella composizione materiale della retina, per servire in essa alla sensazione della luce, o più esattamente a quella dei raggi più refrangibili dello spettro. Questa sostanza adunque deve essere considerata come una delle filogeneticamente più antiche combinazioni chimiche del corpo animale: dobbiamo supporre che nei primi movimenti della materia organica, esisteva già la molecola della luteina sensibile alla luce, e possiamo figurarci che l'origine di questa molecola sia stato il vero *Fiat Lux* della creazione, quando si formò quel primo e meraviglioso vincolo fra la luce del sole e la materia, la quale si era finora sviluppata nelle sue tenebre primordiali e che poi per ultimo risultato diede l'occhio dell'uomo, di cui, con altissima fantasia, disse Goethe (1) far parte del Sole, ed essere cosa del Sole.

Disgraziatamente le ricerche finora intraprese non permettono ancora nessun certo giudizio sulla costituzione chimica di questo corpo fisiologicamente così interessante. La ragione di questa mancanza di conoscenze esatte sulla luteina, ci sembra, d'accordo con l'Hoppe-Seyler, trovasi nella circostanza che in tutte le parti del corpo animale, dove essa si trova, è legata a varî corpi grassi, dai quali sembra che non si sia finora riuscito a separarla completamente. La quantità più o meno grande di queste sostanze grasse collegate con la luteina, sembra esistere in un rapporto inverso alla sensibilità fotochimica della luteina; almeno la luteina più ricca di grassi (preparata dal torlo dell'uovo della gallina) mostra la sensibilità più ottusa, mentre che la luteina più povera di grassi (corpi lutei della vacca) si scolora con più grande rapidità alla luce solare. Nel mezzo fra queste due sostanze, in rapporto alla loro sensibilità fotochimica, stanno le soluzioni preparate dalle gocciole oleose della retina (2).

(1) « Waer' nicht das Auge Sonnenhaft, || Die Sonne koennt' es nie erblicken ».

(2) Dopo aver osservato lo scoloramento della luteina, per i raggi più refrangibili dello spettro, ci sembrò interessante studiare anche i reattivi chimici, i quali producono egualmente una decolorazione delle soluzioni di luteina. — Un tale effetto producono i nitriti degli alcool primarî (etilico, amilico, metilico). Le soluzioni di luteina scolorate dai nitriti, ritornano colorate dopo l'aggiunta

Fra le diverse soluzioni della luteina, la sulfocarbonica per il suo colore e la sua sensibilità fotochimica più grande, occupa un posto speciale che merita di esser studiato: si ottiene questa soluzione o direttamente, o con una sostituzione di solventi. Una soluzione di luteina arancio-giallo alcoolica, dibattuta con il solfuro di carbonio cede a questo la sostanza colorante, e diviene essa stessa incolora, mentre il solfuro di carbonio si tinge in rosso fiamma acceso. Nel medesimo modo, come il solfuro di carbonio, si può sostituire all'alcool anche la benzina, senza però che abbia luogo il menzionato cambiamento di colore, il quale per ciò sembra essere una qualità speciale ed inerente del solfuro di carbonio. Noi saremmo inclinati a spiegarci questo cambiamento di colore e la sensibilità fotochimica maggiore che lo accompagna, con l'ipotesi che la luteina nella sua soluzione sulfocarbonica, si trova in uno stato molecolare più attenuato che non nelle altre soluzioni (1).

Una simile ipotesi sembra che serva a spiegare anche i rapporti esistenti fra la luteina e l'eritropsina di Boll; almeno non si può disconoscere l'analogia esistente fra quest'ultima e la modificazione molecolare prodotta per il solfuro di carbonio, avendo ambedue in comune il color rosso e la maggiore sensibilità fotochimica, quantunque in rapporto a quest'ultima qualità l'eritropsina si trovi ancora decisamente superiore alla modificazione sulfocarbonica della luteina. Osiamo adunque fin d'ora di pronunciare che l'eritropsina deriva chimicamente dalla sua sostanza madre la luteina, dalla quale differisce forse soltanto per una attenuazione maggiore, quindi è fotochimicamente più sensibile. Speriamo di poter fra poco aggiungere prove concludenti che dimostrino la giustezza di questa asserzione.

degli alcali (questa ripristinazione del colore è indipendente dalla formazione di un derivato colorato in giallo che gli alcali producono in questi nitriti). Nello scoloramento della luteina per mezzo dei nitriti, la molecola che entra in azione è evidentemente quella di Az O^2. Ciò risulta dalle esperienze seguenti. Nitrito di potassio in soluzione acquosa, non vale di per sè solo a scolorare la luteina, ma mettendo in libertà la molecola d'azotilo con l'aggiunta dell'acido solforico, ha subito luogo lo scoloramento. Così ha anche luogo lo scoloramento della luteina, quando si sviluppa nella sua soluzione stessa Az O^2, con il rame metallico e l'acido azotico. Lo scoloramento della luteina si ottiene anche per l'azione degli acidi ossigenati del cloro e del bromo. Tutte queste reazioni dimostrano che lo scoloramento della luteina è basato sopra un processo d'ossidazione. L'idrogenazione della luteina scolorata per l'azione solare, mediante l'amalgama di sodio non vale a ripristinare il colore.

(1) Questo comportarsi della luteina si potrebbe comparare con quello della molecola del iodio, la quale secondo i diversi solventi offre colori diversi. — Un colore giallo-bruno nell'alcool, nell'etere e nel ioduro potassico, ed un color violaceo nel cloroformio, nella benzina e nel solfuro di carbonio. È evidentemente giusto l'ammettere che nelle ultime soluzioni, il colore delle quali coincide con quello dei vapori del iodio, il iodio si trova in uno stato molecolare molto più attenuato che non nelle prime.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1.ª Colore e spettro d'assorbimento totale della soluzione normale alcoolica arancio-gialla delle gocciole oleose della retina del pollo.

Fig. 2.ª Strie d'assorbimento della medesima soluzione diluita.

Fig. 3.ª Colore e spettro d'assorbimento totale della soluzione normale rossa sulfocarbonica, delle gocciole oleose della retina del pollo.

Fig 4.ª Strie d'assorbimento della medesima soluzione diluita.

Fig. 5.ª Strie d'assorbimento della soluzione alcoolica delle gocciole oleose della retina della rana.

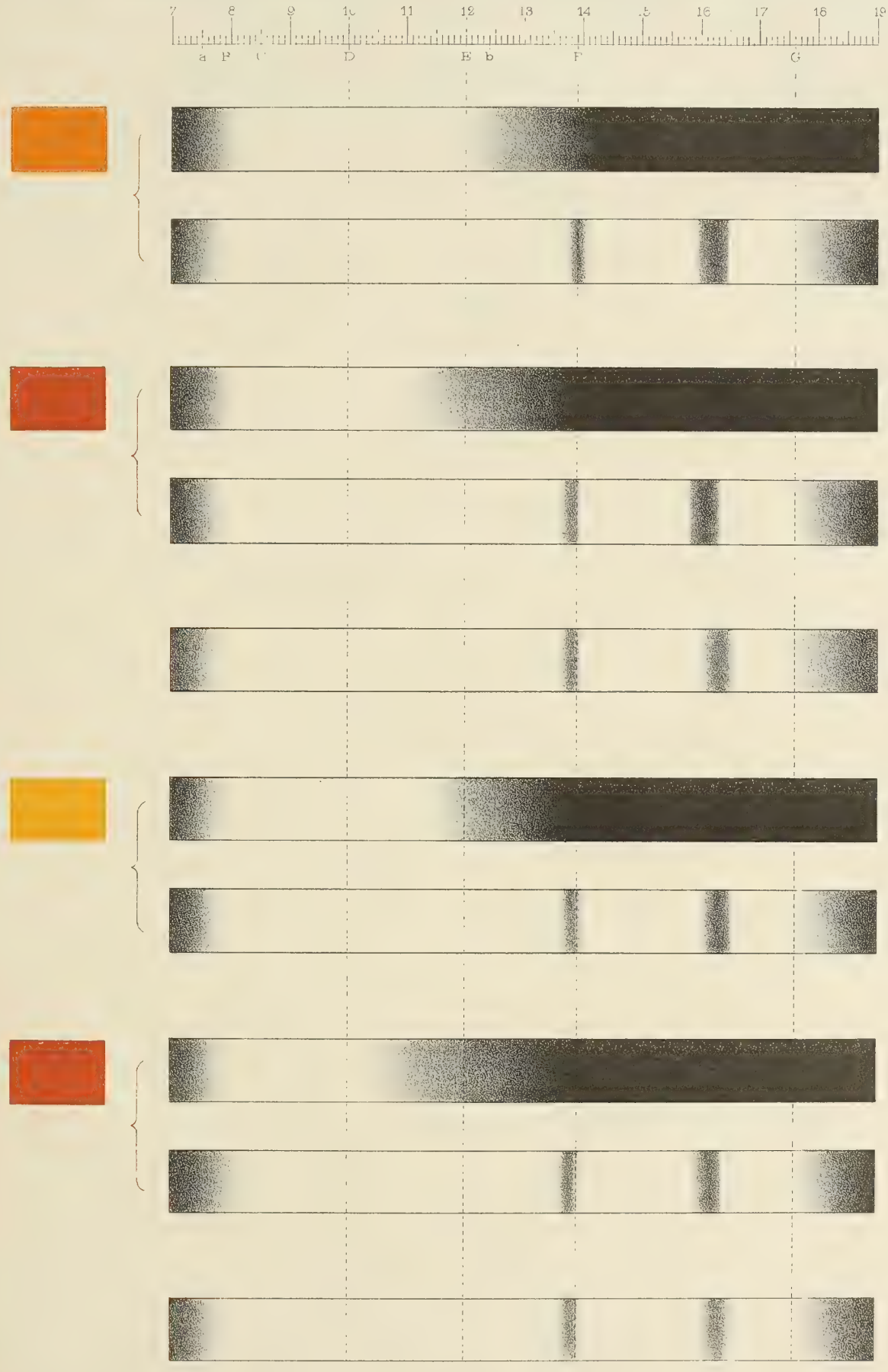
Fig. 6.ª Colore e spettro d'assorbimento totale della soluzione alcoolica della luteina, preparata dai corpi lutei della vacca.

Fig. 7.ª Strie d'assorbimento della medesima soluzione diluita.

Fig. 8.ª Colore e spettro d'assorbimento totale della soluzione rossa sulfocarbonica della luteina preparata come sopra.

Fig. 9.ª Strie d'assorbimento della medesima soluzione diluita.

Fig. 10.ª Strie d'assorbimento della soluzione alcoolica della luteina preparata dal torlo dell'uovo della gallina.


7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
a P C D E b F G
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Nuovi teoremi sull'Hexagrammum Mysticum.

Memoria di GIUSEPPE VERONESE
presentata dal Socio G. BATTAGLINI
nella seduta dell' 8 aprile 1877.

CENNO STORICO

Come egli è già noto a tutti gli studiosi delle scienze matematiche, Pascal ancor giovanetto nel 1640 trovò il famoso teorema che stabilisce la condizione perchè sei punti siano situati in una curva del 2° ordine, chiamando la figura da essi formata *Hexagrammum mysticum* (1). Nessun geometra da quel tempo sino al 1806 aveva pensato di estendere questo teorema quando appunto in quell'anno Brianchon ne deduceva quello non meno importante delle sei tangenti ad una curva di 2ª classe, rendendo così più importante ed elegante ad un tempo la figura detta di Pascal (2). D'allora divenne celebre l'*Hexagrammum* per gli studî, specialmente fatti su di esso da alcuni dei più rinomati geometri del secol nostro. Infatti fu Steiner il primo a richiamare l'attenzione dei matematici nell'anno 1828, dimostrando che potendosi formare con 6 punti di una conica 60 esagoni differenti, le 60 rette di Pascal, che a questi corrispondono, s'incontrano tre a tre in 20 punti G, chiamati punti di Steiner. Egli credette che questi 20 punti fossero posti quattro a quattro in 5 rette concorrenti in un punto, mentre Plücker, trovando scorretto quest'ultimo teorema, asserì che i 20 punti G sono invece situati quattro a quattro in quindici rette, che chiamerò per questo rette di Steiner-Plücker (3). Hesse disse che la figura dei punti di Steiner appartiene veramente alle più eleganti scoperte della geometria moderna (4). Dopo i risultati di Steiner e Plücker progredirono sempre più gli studî sull'*Hexagrammum*. Molto si occupò Hesse in alcune sue Memorie e ne' suoi trattati, e pervenne a scoprire che i 20 punti di Steiner sono due a due conjugati rispetto alla conica fondamentale dei sei punti e mostrò che la figura di Steiner è identica a quella formata da tre triangoli a due a due prospettivi per un medesimo centro. I 9 lati dei tre triangoli, le tre rette concorrenti nel centro comune e le tre rette di prospettiva rappresentano le 15 rette di Steiner-Plücker (5). Cayley considerò la stessa figura e cercò specialmente nei suoi lavori di rappresentare queste rette con delle

(1) *Essai pour les coniques.* 1640.

(2) *Mémoire sur les lignes du 2e ordre.*

(3) Annales de Gergonne T. XVIII. 1828 — *Systematische Entwickelung der Abh. der geom. Gestalten* pag. 311 e Plücker, *Ueber ein neues Princip der Geometrie* pag. 275.

(4) Hesse, Vol. 75 del Giornale di Crelle pag. 1.

(5) Hesse, Vol. 24 p. 40 *Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid* e Vol. 41 p. 269 di Crelle.

annotazioni abbreviate (1). Staudt e Grossman s'occuparono pure di questi punti di Steiner, *Steiner'sche Gegenpunkte*, partendo ambidue dalla considerazione di due triangoli 123, 456 inscritti nella conica; il lavoro di Staudt specialmente è pregevole per la sua eleganza (2).

Alle scoperte dei matematici francesi e tedeschi sono reciproche in certa guisa le scoperte dei matematici inglesi. Kirkman dimostrò che le sessanta rette di Pascal dei 60 esagoni non solamente s'incontrano tre a tre nei 20 punti G, ma bensì anche tre a tre in 60 altri punti, che vengono chiamati punti di Kirkman. Egli dimostrò, pure che questi 60 punti sono allineati due a due in 90 rette, ciascuna delle quali passa rispettivamente per il punto d'incontro di due dei quindici lati ottenuti dai 6 punti della conica fondamentale (3). Cayley e Salmon contemporaneamente trovarono che i 60 punti di Kirkman sono collocati tre a tre in 20 rette, che chiamerò rette di Cayley-Salmon (4). Salmon poi ebbe a dimostrare che queste rette s'incontrano quattro a quattro in 15 punti, che si chiamano punti di Salmon, e che ciascuna di esse passa per un solo punto di Steiner (5).

Quantunque lo studio della figura si facesse sempre più complicato pure chiaramente si vedeva che le proprietà dell'*Hexagrammum* non erano del tutto esaurite. Infatti Hesse nel 1868 rilevò in esso una certa reciprocità tra le rette di Pascal e i punti di Kirkman, tra i punti di Steiner e le rette di Cayley-Salmon, tra le rette di Steiner-Plücker e i punti di Salmon. Se dei quindici lati dei 6 punti fondamentali si tralasciano quelli di un esagono, restano ancora 9 lati che determinano altri 3 esagoni, le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, che corrisponde in certa guisa alla retta di Pascal di quel primo esagono. Mentre tre rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, i tre punti di Kirkman ad esse corrispondenti giacciono nella retta di Pascal corrispondente a quel primo punto, alle tre rette di Pascal che s'incontrano in un punto di Steiner corrispondono tre punti di Kirkman situati nella retta di Cayley-Salmon ad esso corrispondente, così alle rette di Steiner-Plücker corrispondono i punti di Salmon. Ed egli è appunto per questa corrispondenza trovata da Hesse, ch'egli dubitò dell'esistenza di una reciprocità polare rispetto ad una conica che chiamò *ideale*, egli però dice: « Es ist mir nicht gelungen das vermuthete Reciprocitäts Gesetz zu entdecken, im Gegentheil weiss ich dass dieniege Reciprocität der Pascal' schen Linien und der Kirkman' schen Punkten sich *nicht* in dem Sinne von Polaren und Polen auffassen lässt, wenigstens nicht im Rüksicht auf dem Kegelschnitt dem die 60 Pascal'sche Sechsecke einbeschrieben sind ». Egli infine della sua Memoria dice: « Es fehlt zur Zeit jedoch ein Bild für die Pascal'sche Linien und die Kirkman' sche Punkte. Ein zu erfindender Satz, der die Endeigenschaften der Figur im Auge hat wird dieses Bild deutlich machen können (6) ».

(1) Cayley, Vol. 31 pag. 216, Vol. 34 pag. 272 di Crelle.

(2) Grossman, Vol. 58 pag. 174 Crelle — Staudt, *Ueber die Steiner'sche Gegenpunkte* Vol. 62 pag. 142 Crelle.

(3) e (4) Cayley, Vol. 41 di Crelle. *Notes sur quelques théorèmes de la Géom. de position* pag. 66 e 84

(5) Salomon-Fiedler, *Analytische Geom. der Ebene* III Aufl. n. 284. 1873.

(6) Hesse, Vol. 63 di Crelle pag. 193 anno 1868, *Analytische Geom. der Ebene-Bemerkung.*

Bauer nel 1874 si occupò pure della figura partendo dalla considerazione di due triangoli 123, 456 inscritti nella conica fondamentale e considerandoli come triangoli conjugati rispetto ad una conica Σ. Egli trovò che la coppia di punti di Steiner che corrisponde al simbolo 123 (essendo 123 le cifre in posto dispari che rimangono fisse nei sei esagoni delle rette di Pascal di quei due punti) hanno per rette polari, rispetto alla conica Σ le due rette di Cayley-Salmon che rispettivamente passano per essi (1).

Schröter nella sua nuova edizione delle *Steiner'sche Vorlesungen* pubblicata nel maggio 1876 presentò la quistione di Hesse in brevi parole, aggiungendo che invece di una reciprocità polare potrebbe esistere una correlazione generale (2).

Siccome io dovevo preparare un lavoretto per tenere una conferenza tra i miei amici studenti di matematica del Politecnico di Zurigo nel *Mathematisches Seminar* diretto dagli illustri sigg. prof. Fiedler e Frobenius, nel giugno dell'anno testè passato, così mi proposi allora di risolvere la questione di Hesse e di Schröter, e poichè io credo di averla non solo completamente risoluta, ma ben anco avervi aggiunti altri teoremi importanti, così mi faccio animo di presentare ora questo mio piccolo lavoro ai miei sigg. professori dell'Università Romana, con la speranza ch'egli sia ben accettato. È certo che ad un giovane studente riesce malagevole di riordinare in un bel tutto le proprie idee, egli prosiegue anzi dubbioso ed incerto; ma è solamente mediante questi dubbî che gli sorgono da ogni parte alla mente che egli si fa padrone poco a poco di sè e della scienza.

Io dimostro che le 60 rette di Pascal si scindono in sei gruppi di dieci rette che contengono i loro dieci punti di Kirkman corrispondenti e che sono polari di essi rispetto ad una conica, che chiamo π, onde in tutto l'*Hexagrammum* abbiamo sei di tali coniche. Cinque di questi gruppi determinano il sesto. Oltre di ciò dimostro che non solamente c'è il sistema $[Kp]$ delle 60 rette di Pascal e dei 60 punti di Kirkman ma bensì infiniti di cotesti sistemi, ciascun dei quali si compone di sei gruppi analoghi a quelli del sistema $[Kp]$, che danno luogo ad altre sei coniche; cinque di essi determinano un gruppo del sistema precedente e uno del seguente. La figura dei punti di Steiner e delle rette di Cayley è comune a tutti questi sistemi vale a dire i 60 punti di un sistema sono posti tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon e le 60 rette dello stesso sistema s'incontrano tre a tre nei 20 punti di Steiner.

Essi sono inoltre legati da certi punti e rette fisse e da certe involuzioni, che sono generate dalle 60 rette e dai 60 punti degli infiniti sistemi intorno ai punti di Steiner e sovra le rette di Cayley-Salmon, che hanno importanti proprietà. Siccome l'*Hexagrammum* è, si può dire, la figura dei triangoli prospettivi, così è appunto per mezzo di essi che io spiego quasi tutti i teoremi, ed è per questo che faccio precedere al mio studio sull'*Hexagrammum* alcuni teoremi sulle figure prospettive, i quali, per quanto io so, non furono ancora considerati.

(1) G. Bauer, *Ueber das Pascal' sche Theorem.* Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II CL CL Bd. III. Abth. 1874

(2) Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen.* Neue Aufl. 1876 pag. 217-218.

SOPRA I TRIANGOLI PROSPETTIVI

1. *Teorema I.* Con nove punti situati tre a tre in tre rette che passano per un punto si formano trentasei terne di triangoli due a due prospettivi. Per ogni terna le tre rette di prospettiva s'incontrano in un punto, i trentasei punti che corrispondono così alle trentasei terne giaciono quattro a quattro in ventisette rette.

Infatti con nove punti $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ situati tre a tre in tre rette diverse concorrenti in un punto si formano ventisette triangoli, i cui vertici sono posti rispettivamente in quelle tre rette. Con questi 27 triangoli possiamo formare trentasei terne di triangoli; i triangoli di una terna non hanno alcun vertice comune e un triangolo formato con tre dei nove punti dati si ripete in quattro terne. Le tre rette di prospettiva date dai tre triangoli di una terna s'incontrano in un punto, i quattro punti che corrispondono in tal modo a quattro terne, che hanno un triangolo comune, sono situati in una retta. Consideriamo infatti le quattro terne che hanno il triangolo $A_1 B_1 C_1$ comune ossia:

$A_1 B_1 C_1$	$A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$
»	$A_2 B_2 C_3$, $A_3 B_3 C_2$
»	$A_2 B_3 C_2$, $A_3 B_2 C_3$
»	$A_2 B_3 C_3$, $A_3 B_2 C_2$

Per la prima terna le tre rette di prospettiva, date dai seguenti punti in linea orizzontale:

$A_1 B_1 . A_2 B_2$, $A_1 C_1 . A_2 C_2$, $B_1 C_1 . B_2 C_2$
$A_1 B_1 . A_3 B_3$, $A_1 C_1 . A_3 C_3$, $B_1 C_1 . B_3 C_3$ s'incontrano in un punto S_1
$A_2 B_2 . A_3 B_3$, $A_2 C_2 . A_3 C_3$, $B_2 C_2 . B_3 C_3$

Per la seconda terna le tre rette di prospettiva

$A_1 B_1 . A_2 B_2$, $A_1 C_1 . A_2 C_3$, $B_1 C_1 . B_2 C_3$
$A_1 B_1 . A_3 B_3$, $A_1 C_1 . A_3 C_2$, $B_1 C_1 . B_3 C_2$ » » S_2
$A_2 B_2 . A_3 B_3$, $A_2 C_3 . A_3 C_2$, $B_2 C_3 . B_3 C_2$

Quelle della terza

$A_1 B_1 . A_2 B_3$, $A_1 C_1 . A_2 C_2$, $B_1 C_1 . B_3 C_2$
$A_1 B_1 . A_3 B_2$, $A_1 C_1 . A_3 C_3$, $A_1 C_1 . B_2 C_3$ » » S_3
$A_2 B_3 . A_3 B_2$, $A_2 C_2 . A_3 C_3$, $B_3 C_2 . B_2 C_3$

E quelle della quarta

$A_1 B_1 . A_2 B_3$, $A_1 C_1 . A_2 C_3$, $B_1 C_1 . B_3 C_3$
$A_1 B_1 . A_3 B_2$, $A_1 C_1 . A_3 C_2$, $B_1 C_1 . B_2 C_2$ » » S_4
$A_2 B_3 . A_3 B_2$, $A_2 C_3 . A_3 C_2$, $B_2 C_2 . B_3 C_3$

Si scorge facilmente che un triangolo formato con tre punti, che sono rispettivamente situati nelle tre rette di prospettiva di una terna e che stanno in linea verticale

come, p. es. il triangolo $A_1 B_1 . A_2 B_2$, $A_1 B_1 . A_3 B_3$, $A_2 B_2 . A_3 B_3$, è dato anche dai tre punti situati rispettivamente nelle tre rette di prospettiva di un' altra terna e che stanno pure in linea verticale. Siccome i triangoli

$$\begin{array}{lll} A_1 B_1 . A_2 B_2, & B_1 C_1 . B_3 C_2, & A_1 C_1 . A_2 C_2 \\ A_1 B_1 . A_3 B_3, & B_1 C_1 . B_2 C_3, & A_1 C_1 . A_3 C_3 \\ A_2 B_2 . A_3 B_3, & B_3 C_2 . B_2 C_3, & A_2 C_2 . A_3 C_3 \end{array}$$

che son dati rispettivamente nel modo suddetto dalle terne prima e seconda, prima e terza, seconda e terza, sono prospettivi due a due per le tre rette date, come rette di prospettiva, così i tre centri S_1, S_2, S_3 giacciono in una retta. Egualmente si dimostrerebbe che il punto S_4 esiste nella stessa retta. Le ventisette rette che così si ottengono sono diverse fra di loro nel caso generale.

Teorema II. Se di quattro triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, $A_4 B_4 C_4$, il primo è prospettivo col secondo, il secondo col terzo, il terzo col quarto ed il quarto col primo, in modo però che i vertici delle stesse lettere siano corrispondenti, e se i quattro centri di prospettiva giacciono in una retta; le quattro rette di prospettiva s'incontrano in un punto F.

Siano $S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}$ i quattro centri di prospettiva che giacciono nella retta f; $s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{41}$ siano le quattro rette di prospettiva determinate dai seguenti punti:

$$\begin{array}{llll} s_{12} & \text{dai punti} & B_1 C_1 . B_2 C_2 = a_{12}, & A_1 C_1 . A_2 C_2 = b_{12}, \quad A_1 B_1 . A_2 B_2 = c_{12} \\ s_{23} & \text{»} & B_2 C_2 . B_3 C_3 = a_{23}, & A_2 C_2 . A_3 C_3 = b_{23}, \quad A_2 B_2 . A_3 B_3 = c_{23} \\ s_{34} & \text{»} & B_3 C_3 . B_4 C_4 = a_{34}, & A_3 C_3 . A_4 C_4 = b_{34}, \quad A_3 B_3 . A_4 B_4 = c_{34} \\ s_{41} & \text{»} & B_4 C_4 . B_1 C_1 = a_{41}, & A_4 C_4 . A_1 C_1 = b_{41}, \quad A_4 B_4 . A_1 B_1 = c_{41} \end{array}$$

Come ben si vede i vertici del triangolo $A_4 B_4 C_4$ sono dati dai punti d'incontro delle tre rette $S_{41} A_1$, $S_{41} B_1$, $S_{41} C_1$ rispettivamente con le tre rette $S_{34} A_3$, $S_{34} B_3$, $S_{34} C_3$. Se noi projettiamo dal punto S_{12} i vertici del triangolo $A_1 B_1 C_1$ rispettivamente sulle rette $S_{34} A_3$, $S_{34} B_3$, $S_{34} C_3$ otteniamo un nuovo triangolo che chiamo $A_5 B_5 C_5$. Questo triangolo è evidentemente prospettivo col triangolo $A_1 B_1 C_1$ pel centro S_{12}, e prospettivo col triangolo $A_4 B_4 C_4$ pel centro S_{34}, poichè come sappiamo le rette $S_{34} A_3$, $S_{34} B_3$, $S_{34} C_3$ su cui si trovano rispettivamente i punti A_5, B_5, C_5 passano anche rispettivamente per i punti A_4, B_4, C_4. Ora i triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_4 B_4 C_4$, $A_5 B_5 C_5$ sono prospettivi due a due per i tre centri S_{41}, S_{12}, S_{34}, che stanno in linea retta, cioè nella retta f; ma siccome i vertici delle stesse lettere sono corrispondenti, così ne viene di conseguenza che i tre triangoli suddetti hanno due a due la stessa retta di prospettiva, vale a dire che pei punti d'incontro dei lati $B_4 C_4$ e $B_1 C_1$ ossia a_{41}, $A_4 C_4$ e $A_1 C_1$ ossia b_{41}, $A_4 B_4$ e $A_1 B_1$ ossia c_{41} passano rispettivamente le rette $B_5 C_5$, $A_5 C_5$, $A_5 B_5$. Ma il punto A_5 è dato dall'intersezione della retta $S_{12} A_1$ ossia $A_1 A_2$ con la retta $S_{34} A_3$ ossia $A_3 A_4$, come pure i punti B_5 e C_5 sono dati rispettivamente dai punti d'intersezione delle rette $B_1 B_2$, $B_3 B_4$ e $C_1 C_2$, $C_3 C_4$ e poichè la retta $B_5 C_5$ passa pel punto a_{41}, così vuol dire che la retta che congiunge i punti $B_1 B_2 . B_3 B_4$ e $C_1 C_2 . C_3 C_4$ (retta che io indico col simbolo $C_1 C_2 . C_3 C_4 — B_1 B_2 . B_3 B_4$)

passa pel punto a_{41}; analogamente si vede che la retta $C_1 C_2 . C_3 C_4 - A_1 A_2 . A_3 A_4$ passa pel punto b_{41}. Ora il triangolo $A_5 B_5 C_5$ è anche prospettivo col triangolo $A_2 B_2 C_2$ pel centro S_{12}, poichè le rette $A_1 A_2 A_5$, $B_1 B_2 B_5$, $C_1 C_2 C_5$ s'incontrano in S_{12}, ed è prospettivo col triangolo $A_3 B_3 C_3$ pel centro S_{34}, perchè le rette $A_3 A_4 A_5$, $B_3 B_4 B_5$, $C_3 C_4 C_5$ s'incontrano nel punto S_{34}, mentre il triangolo $A_2 B_2 C_2$ è prospettivo col triangolo $A_3 B_3 C_3$ pel centro S_{23}. Ma siccome i vertici delle stesse lettere nei tre triangoli $A_5 B_5 C_5$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ sono corrispondenti e i tre centri S_{12}, S_{34}, S_{23} stanno in una retta, cioè nella retta f, così se ne deduce che essi hanno due a due la stessa retta di prospettiva, cioè che per i punti d'incontro delle rette $B_2 C_2$ e $B_3 C_3$ ossia a_{23}, $A_2 C_2$ e $A_3 C_3$ ossia b_{23} e $A_2 B_2$ e $A_3 B_3$ ossia c_{23} passano rispettivamente le rette $B_5 C_5$, $A_5 C_5$, $A_5 B_5$, ossia per quello che abbiamo visto sopra la retta $C_1 C_2 . C_3 C_4 - B_1 B_2 . B_3 B_4$ e la retta $C_1 C_2 . C_3 C_4 - A_1 A_2 . A_3 A_4$ passano rispettivamente per i punti a_{23} e b_{23}, onde le rette $C_1 C_2 . C_3 C_4 - B_1 B_2 . B_3 B_4$ e $C_1 C_2 . C_3 C_4 - A_1 A_2 . A_3 A_4$ che hanno in comune il punto $C_1 C_2 . C_3 C_4$ sono rispettivamente le congiungenti dei punti $a_{41} a_{23}$, $b_{41} b_{23}$. Con questa osservazione siamo ora in caso di dimostrare il teorema. Scelgo le tre rette s_{12}, s_{23}, s_{41} e voglio dimostrare ch' esse s'incontrano in un punto F. Perciò considero i due triangoli $a_{12} a_{23} a_{41}$ e $b_{12} b_{23} b_{41}$ che hanno i vertici rispettivamente su quelle tre rette, come si scorge facilmente dal quadro delle rette s. Questi due triangoli sono infatti prospettivi perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti, cioè:

$$a_{12} . a_{23} - b_{12} . b_{23} = C_2; \quad a_{12} . a_{41} - b_{12} . b_{41} = C_1; \quad a_{23} . a_{41} - b_{23} . b_{41}$$

sono situati nella retta $C_1 C_2$ (vedasi tabella precedente dei punti a e b). È evidente che anche il punto $a_{23} . a_{41} - b_{23} . b_{41}$ è situato nella retta $C_1 C_2$, poichè abbiamo visto sopra, che le rette $a_{23} . a_{41}$ e $b_{23} . b_{41}$ non sono altro che le rette $C_1 C_2 . C_3 C_4 - B_1 B_2 . B_3 B_4$, $C_1 C_2 . C_3 C_4 - A_1 A_2 . A_3 A_4$ che s'incontrano nel punto $C_1 C_2 . C_3 C_4$ situato nella retta $C_1 C_2$.

Nella stessa maniera si dimostrerebbe che le tre rette s_{12}, s_{23}, s_{34} s'incontrano in un punto, ossia nel punto F; onde è dimostrato il teorema.

Teorema III. Se i vertici di due quadrangoli $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$ sono allineati due a due in quattro rette con un centro S_{12}, quelli del secondo e quelli di un terzo $A_3 B_3 C_3 D_3$ con un centro S_{23}, questi e quelli di un quarto $A_4 B_4 C_4 D_4$ con un centro S_{34} mentre questi ultimi sono allineati con quelli del primo due a due con un centro S_{41}, in maniera che i vertici delle stesse lettere siano rispettivamente allineati con i quattro centri, e se i quattro centri giaciono in una retta, i quattro punti F, che secondo il teorema II corrispondono rispettivamente ai quattro gruppi di triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, $A_4 B_4 C_4$ e $A_1 B_1 D_1$, $A_2 B_2 D_2$ ecc. $A_1 C_1 D_1$, $A_2 C_2 D_2$ ecc., $B_1 C_1 D_1$, $B_2 C_2 D_2$ ecc., che risultano dai quadrangoli suddetti, sono situati in una retta.

Corollario. Se i vertici di tre quadrangoli $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$, $A_3 B_3 C_3 D_3$ sono allineati tre a tre in quattro rette concorrenti in un punto S, con essi si formano quatto terne di triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$; $A_1 C_1 D_1$, $A_2 C_2 D_2$, $A_3 C_3 D_3$ ecc. Le tre rette di prospettiva di una

terna s'incontrano in un punto, i quattro punti così ottenuti dalle quattro terne sono situati in una retta.

Teorema IV. Se due triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ sono prospettivi, i tre punti d'incontro della retta $B_1 A_2$ con $A_1 B_2 = C_3$, della retta $C_2 A_1$ con $C_1 A_2 = B_3$ e della retta $B_1 C_2$ con $C_1 B_2 = A_3$ formano un triangolo prospettivo ai due primi e i tre centri di prospettiva sono situati in una retta.

Per dimostrare questo teorema basta dimostrare che le tre rette p. es. $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ s'incontrano in un punto, e questo si fa considerando i due triangoli $A_1 A_2 B_3$, $B_1 B_2 A_3$ i cui vertici sono rispettivamente situati in quelle tre rette e che sono prospettivi.

Ci serviremo del I, II e IV di questi teoremi per dimostrare in seguito alcune proprietà dell'*esagrammo*. Chiamo *esagrammo* tutto l'insieme di punti e rette e sistemi polari, che si deducono dalla combinazione che sei punti siano situati in una curva del 2° ordine.

Hexagrammum Mysticum

2. Siano dati 5 punti di una conica T T_1 A B C, chiamando a, b, c ed a_1, b_1, c_1 i raggi che projettano da T e T_1 i punti A, B, C si ha:

$$(T.\,A\,B\,C\ldots) \barwedge (T_1.\,A\,B\,C\ldots) \barwedge (a\,b\,c\ldots) \barwedge (a_1\,b_1\,c_1\ldots)$$

Seghiamo il fascio $a_1 b_1 c_1$ con una retta o qualunque del piano e siano a', b', c' i raggi che ne uniscono i punti d'incontro col punto T, onde si avrà:

$$(a\,b\,c\ldots) \barwedge (a'\,b'\,c'\ldots)$$

Siano A_1, B_1, C_1 gli altri punti d'incontro di a', b', c' con la conica, onde si avrà:

$$(T\,A\,B\,C\ldots) \barwedge (T_1\,A_1\,B_1\,C_1\ldots)$$

onde i punti d'incontro delle rette $T A_1, T_1 A$; $T B_1, T_1 B$ ecc. sono situati nella retta o. Le rette a ed a' incontrano la retta o in due punti corrispondenti α, α' delle due punteggiate sovrapposte in o date su di essa dai fasci $a\,b\,c$, $a_1\,b_1\,c_1$ intorno ai punti T e T_1. Questi punti α, α' sono anche punti corrispondenti nelle due punteggiate projettive date in o dai fasci (A. T B C...) e (A_1. T B C...), dunque tutte le coppie di punteggiate projettive sovrapposte nella retta o, che sono date in essa dalle coppie di fasci projettivi intorno alle coppie di punti corrispondenti T T_1, A A_1, B B_1 ecc. che formano una projettività di punti della conica, fasci che si ottengono projettando da T T_1, A A_1, B B_1 ecc. i punti della conica, sono identiche vale a dire che si riducono ad una sola coppia; essendone identici i punti uniti (reali o immaginarî) che sono i punti d'incontro (reali od immaginarî) della retta o con la conica data. Prendiamo ora a considerare i fasci (A. T B C...) e (A_1. T B C...) e siano a^* ed $a^{*'}$ le rette che uniscono i punti A ed A_1 col punto B. Queste rette danno sopra di o una coppia di punti corrispondenti nella coppia suddetta di punteggiate projettive sovrapposte in o, e siccome a^* ed a_1^* (a_1^* essendo il raggio che unisce il punto A con B_1) danno pure due punti corrispondenti in o di queste due punteggiate, così i raggi $a_1^*, a^{*'}$ devono incontrarsi nella retta o. Dunque anche il punto d'incontro delle

due rette $A B_1$, $A_1 B$ è situato nella retta o, cioè la retta qualunque o diventa la retta di Pascal. Così resta dimostrato il teorema di Pascal, e quello di Brianchon per la legge di dualità, ove invece della trasversale o entra un punto O qualunque di projezione.

Teorema V. Un esagono è inscritto in una conica quando i tre punti d'incontro delle tre coppie di lati opposti sono situati in linea retta (1).

Teorema VI. Un esagono è circoscritto ad una conica quando le tre rette di congiunzione delle tre coppie di vertici opposti s'incontrano in un punto (2).

3. Con sei punti di una conica si ottengono 1.2.3.4.5.6 esagoni, ciascuno dei quali si ripete dodici volte, perchè se noi consideriamo ad esempio l'esagono 123456, vediamo ch'esso ha per lati le rette 12,23,34, 45,56,61, e che gli esagoni 234561, 345612, 456123, 561234, 612345, 654321, 543216, 432165, 321654, 216543, 165432 hanno precisamente gli stessi lati; per la qual cosa con 6 punti di una conica si ottengono sessanta esagoni differenti e perciò sessanta rette di Pascal dotate di molte interessanti proprietà. Le rette che congiungono i sei punti della conica due a due, che noi chiameremo *lati fondamentali*, sono quindici, ciascuno di questi lati viene incontrato dagli altri in quattordici punti, otto dei quali cadono quattro a quattro nei due *punti fondamentali* (così si chiamano i sei punti della conica) situati in esso; gli altri sei rimanenti siano chiamati punti P. In tutto l'esagrammo adunque questi punti P sono quarantacinque.

Consideriamo ora i tre triangoli seguenti:

12,34,56; 45,61,23; 36,25,14

i cui lati sono lati fondamentali dell'esagrammo. Questi tre triangoli sono due a due prospettivi p. es. il primo e il secondo hanno per retta di prospettiva la retta di Pascal dell'esagono 123456; infatti questa viene determinata dai punti 12.45,23 56,34.61 che sono precisamente i tre punti d'incontro dei lati corrispondenti dei due triangoli. Dunque le rette che ne congiungono i vertici corrispondenti, cioè le rette di Pascal dei tre esagoni 163452, 123654, 143256 s'incontrano in un punto G chiamato punto di Steiner (3). È facile di vedere che queste tre rette di Pascal passano anche rispettivamente per i tre vertici del terzo triangolo, infatti trovando i punti P di queste rette nella stessa maniera con la quale abbiamo trovato i punti P della retta di Pascal dell'esagono 123456, si vede che i punti 36.25, 36.14,25.14 sono rispettivamente punti P delle rette di Pascal suddette. Le tre rette di prospettiva dei tre triangoli sopra indicati, presi due a due s'incontrano in un altro punto G, e sono le rette di Pascal dei tre esagoni 123456, 143652, 163254. Se noi consideriamo la terna dei primi tre esagoni cioè 163452, 123654, 143256 noi vediamo che il secondo ed il terzo si ottengono dal primo scambiando in modo ciclico le cifre in posto pari mentre rimangono fisse in tutti e tre le cifre in posto dispari, che sono 135. Ora uno dei tre ultimi esagoni cioè

(1) Pascal, *Essai pour les coniques.* 1640.

(2) Brianchon, *Mémoire sur les lignes du 2e ordre.* 1808.

(3) Steiner, *System. Entw. der Abh. geom. Gestalten.* pag. 311.

12 34 56, 14 36 52, 16 32 54 vien dato da uno dei tre primi con lo scambio di due cifre in posto pari, mentre la terza cifra in posto pari rimane fissa con quelle in posto dispari, p. es. l'esagono 123456 si ottiene dall'esagono 123456 con lo scambio di 6 con 4. I tre ultimi poi si deducono fra di loro nella stessa maniera dei tre primi. Noi diremo che i due punti di Steiner che corrispondono a queste due terne di esagoni appartengono al simbolo 135, essendo 135 le cifre in posto dispari nei 6 esagoni di quelle due terne. In tutto l'esagrammo adunque abbiamo dieci coppie di punti di Steiner che hanno rispettivamente i dieci simboli seguenti:

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156.

Si badi bene che il simbolo 456 appartiene agli stessi due punti di Steiner del simbolo 123, onde gli altri 10 simboli

456, 356, 346, 345, 256, 246, 245, 236, 235, 234.

sono in certo modo complementari ai primi ed appartengono rispettivamente alle stesse coppie di punti di Steiner. Dunque:

Teorema VII. I quindici lati formati con i 6 punti fondamentali della conica s'incontrano due a due, oltre a questi 6 punti, in 45 punti P.

Le rette di Pascal dei due esagoni che si ottengono permutando in modo ciclico da un esagono qualunque i vertici in posto pari, mentre restano fissi quelli in posto dispari, s'incontrano con la retta di Pascal rappresentata da quest'ultimo in un punto G di Steiner.

Teorema VIII. I 20 punti di Steiner si separano in 10 coppie di punti conjugati rispetto alla conica fondamentale data (1).

Per dimostrare questo teorema mi servo della seguente dimostrazione di Staudt (2). Se si ha un triangolo 123 inscritto in una conica, Staudt chiama polo di esso il punto d'incontro delle tre rette che ne congiungono i vertici coi poli dei lati opposti rispetto alla conica, e polare di esso la polare del suo polo rispetto alla medesima. Siano ora due triangoli 123, 456 inscritti in una conica ed ai vertici dell'uno corrispondano rispettivamente i vertici dell'altro, è facile di vedere che i poli dei due triangoli, le polari e i punti d'incontro (immaginarî) XX_1, YY_1 di queste con la conica sono punti e rette corrispondenti nei due sistemi projettivi 123, 456, in modo che ai punti XX_1 corrispondono i punti YY_1. Siccome i fasci che projettano da 4 e 1 rispettivamente le punteggiate $123\,XX_1$ e $456\,YY_1$ sono projettivi così la retta di Pascal data dall'esagono 162435 passa pel punto d'incontro G delle rette XY_1, X_1Y. Egualmente si dimostra che le rette di Pascal date dagli esagoni 142536, 152634 passano per quel punto G che è perciò un punto di Steiner. Le altre tre rette di Pascal 142635, 162534, 152436 passano pel punto d'incontro delle rette XY, X_1Y_1 che è pure un punto G di Steiner. Questi due punti di Steiner appartengono al simbolo 123 e sono, come si vede, punti diagonali del quadrangolo $XY\,X_1Y_1$ onde essi sono divisi armonicamente dai punti d'incontro della retta che li congiunge con la conica e dai due poli dei due triangoli. Per capir bene questa dimostrazione

(1) Hesse, *Ueber das gerad. Sechseck auf dem Hyperboloid.* Vol. 24 Crelle pag. 40. Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen.* Neue Aufl. pag. 159. 1876.

(2) Staudt, *Ueber die Steiner'sche Gegenpunkte.* Vol. 62 Crelle pag. 142.

basta rammentarsi che la coppia dei punti immaginarî XX_1 ovvero YY_1 può essere determinata dai punti doppî di un' involuzione ellittica e che in essa i due punti doppî vengono distinti fra di loro mediante il doppio senso dell'involuzione (1).

Da questa dimostrazione segue anche un teorema di Staudt, cioè:

Teorema IX. Due punti conjugati di Steiner sono divisi armonicamente dai punti P e Q, ove P e Q sono rispettivamente i punti d'incontro delle rette che congiungono i vertici dei due triangoli 123, 456 coi poli dei lati opposti rispetto alla conica fondamentale, essendo 123 le cifre in posto dispari dei 6 esagoni dei due punti conjugati di Steiner.

4. Consideriamo ora la retta di Pascal dell'esagono 123456 che rappresento col simbolo $p^1_{345} = 123456$; presto ne vedremo la ragione. I lati dell'esagono che la determinano sono 12, 16, 23, 34, 45, 56, onde restano ancora i nove altri lati fondamentali 13, 14, 15, 24, 25, 26, 35, 36, 46; con questi si possono formare tre esagoni le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto chiamato punto di Kirkman, che rappresento col simbolo K^1_{12} nominando le tre rette di Pascal che s'incontrano in esso:

$$p^1_{123} = 135264; \quad p^1_{124} = 136425 \quad p^1_{125} = 153624$$

Infatti i due triangoli 13, 26, la retta di Pascal 136245, e 52, 14, 36, i cui vertici giaciono due a due su quelle tre rette, sono prospettivi ed hanno per retta di omologia la retta di Pascal dell'esagono 145263. Si dice che il punto K^1_{12} corrisponde alla retta di Pascal p^1_{345}, dunque:

Teorema X. Se dei quindici lati fondamentali dell'esagrammo si tralasciano quelli di un esagono, ne restano ancora nove, con i quali si formano tre esagoni le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, che corrisponde in certa guisa alla retta di Pascal di quel primo esagono. Questi punti di Kirkman sono 60 (2).

Questo teorema può esser dimostrato anche nel modo seguente. I due triangoli 135 e 246 sono circoscritti ad una conica, per la qual cosa le tre rette di congiunzione dei vertici opposti di uno degli esagoni da essi formati circoscritti a questa nuova conica s'incontrano secondo il teorema VI, in un punto; ora per un di questi esagoni, cioè per l'esagono che ha per coppie di vertici opposti le coppie di punti 13. 26, 35. 46; 13. 42, 64. 51 e 15. 62, 35. 24, le tre rette di congiunzione dei vertici opposti sono le rette p^1_{123}, p^1_{124}, p^1_{125}, dunque è dimostrato il teorema. Si osservi che con le nove rette che congiungono i vertici di uno dei triangoli 135 e 246 a quelli dell'altro, si ottengono sei esagoni, le cui rette di Pascal s'incontrano rispettivamente tre a tre nei due punti conjugati di Steiner del simbolo 135.

(1) Vedasi Staudt, *Beiträge zur Geom. der Lage* 1. Heft. § 7. *Imaginäre Elemente* pag. 76-86: oppure Fiedler, *Darstell. Geom. in Verbindung mit der Geom. der Lage*, sopra la determinazione degli elementi immaginarî in geometria.

(2) Vedasi Cayley, Vol. 41 di Crelle pag. 66. e Salmon-Fiedler, *Analy. Geom. der Ebene*, III Aufl. pag. 317.

Noi poniamo

$$K^{I}_{12} = p^{I}_{123}\, p^{I}_{124}\, p^{I}_{125}$$

Troviamo ora i punti di Kirkman corrispondenti alle tre rette di Pascal che s'incontrano nel punto K^{I}_{12} e chiamiamoli rispettivamente K^{I}_{45}, K^{I}_{35}, K^{I}_{34}. Nel punto K^{I}_{45} s'incontrano le rette di Pascal seguenti:

$$p^{I}_{345} = 123456\,, \quad p^{I}_{245} = 154236\,, \quad p^{I}_{145} = 124365$$

onde si ha

$$K^{I}_{45} = p^{I}_{145}\, p^{I}_{245}\, p^{I}_{345}$$

Ora le rette di Pascal

$$p^{I}_{345} = 123456\,, \quad p^{I}_{235} = 145326\,, \quad p^{I}_{135} = 126534$$

s'incontrano nel punto K^{I}_{35} che corrisponde alla retta p^{I}_{124} dunque:

$$K^{I}_{35} = p^{I}_{135}\, p^{I}_{235}\, p^{I}_{345}$$

finalmente nel punto K^{I}_{34} che corrisponde alla retta p^{I}_{125} s'incontrano le rette di Pascal

$$p^{I}_{345} = 123456, \quad p^{I}_{234} = 132546, \quad p^{I}_{134} = 125643$$

ossia si ha

$$K^{I}_{34} = p^{I}_{134}\, p^{I}_{234}\, p^{I}_{345}$$

da qui si ricava subito che i tre punti di Kirkman K^{I}_{45}, K^{I}_{35}, K^{I}_{34} che corrispondono alle tre rette p^{I}_{123}, p^{I}_{124}, p^{I}_{125} che s'incontrano nel punto K^{I}_{12}, sono situati nella retta p^{I}_{345}, che corrisponde al punto K^{I}_{12}. Ora troviamo i punti di Kirkman che corrispondono alle rette di Pascal $p^{I}_{245}\, p^{I}_{145}$, $p^{I}_{235}\, p^{I}_{135}$, $p^{I}_{234}\, p^{I}_{134}$ e chiamiamoli, come già può essere manifesto, $K^{I}_{13}\, K^{I}_{23}$; $K^{I}_{14}\, K^{I}_{24}$; $K^{I}_{15}\, K^{I}_{25}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
p^{I}_{123}\, p^{I}_{134}\, p^{I}_{135} &= K^{I}_{13} \\
p^{I}_{123}\, p^{I}_{234}\, p^{I}_{235} &= K^{I}_{23} \\
p^{I}_{124}\, p^{I}_{134}\, p^{I}_{145} &= K^{I}_{14} \\
p^{I}_{124}\, p^{I}_{234}\, p^{I}_{245} &= K^{I}_{24} \\
p^{I}_{125}\, p^{I}_{135}\, p^{I}_{145} &= K^{I}_{15} \\
p^{I}_{125}\, p^{I}_{235}\, p^{I}_{245} &= K^{I}_{25}
\end{aligned}$$

Se si vuol trovare il punto di Kirkman corrispondente ad una delle rette di Pascal che s'incontrano in uno dei punti $K^{I}_{13}\, K^{I}_{23}$, $K^{I}_{14}\, K^{I}_{24}$, $K^{I}_{15}\, K^{I}_{25}$ si vede che si ritorna ad uno dei punti già trovati p. es. pigliando la retta p^{I}_{123}, essa ha per corrispondente il punto K^{I}_{45} dato dalle rette p^{I}_{145}, p^{I}_{245}, p^{I}_{345}. Queste rette di Pascal e questi punti di Kirkman testè considerati formano adunque una figura che è chiusa in se stessa, vale a dire che da una qualunque di queste rette di Pascal non si può passare nel modo indicato ad un punto di Kirkman, che non sia uno dei punti della figura (1).

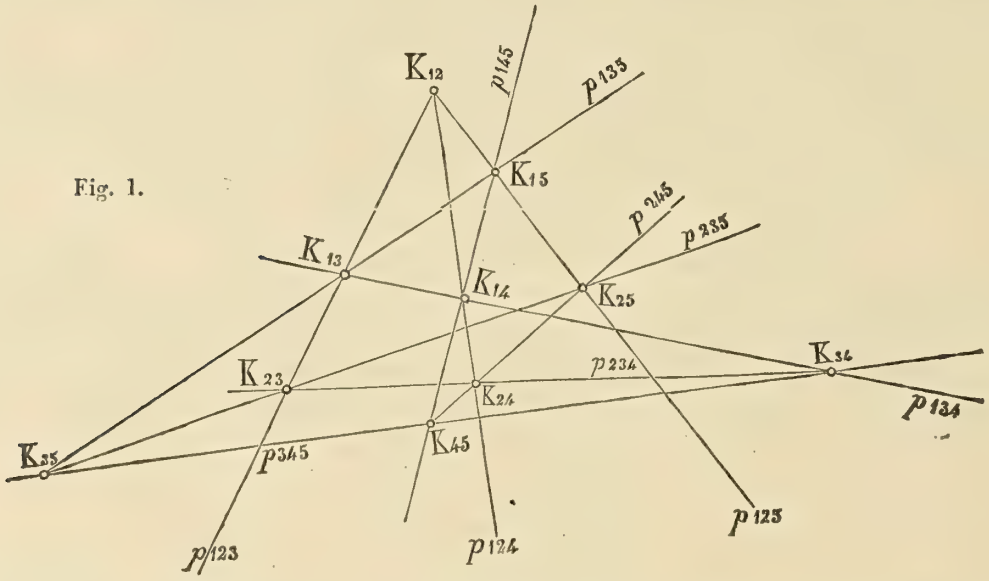
(1). Ciò è in contraddizione con una considerazione di Hesse nel Vol. 68 di Crelle p. 193. Egli dice: Nach dem Vorhergehenden entsprechen einer gegebenen Pascal'schen Linie drei andere Pascal'sche Linien welche sich in dem idealen Pole (Punto corrispondente di Kirkman ovvero polo della retta di Pascal data rispetto alla conica ideale di Hesse) schneiden. Jeder der letzteren entsprechen Wieder drei, also in gewisser Weise entsprechen der gegebenen Pascal'schen Linie neun Pascal'sche Linien sodann 27 und so weiter ». Noi invece abbiamo visto che ad una retta di Pascal non ne corrispondono in questo modo che nove.

Le rette di Pascal di questa figura sono dieci cioè $p^{I}_{345}, p^{I}_{123}, p^{I}_{124}, p^{I}_{125}, p^{I}_{134}, p^{I}_{135}, p^{I}_{145}, p^{I}_{234}, p^{I}_{235}, p^{I}_{245}$ e i dieci punti di Kirkman corrispondenti sono K^{I}_{12}, K^{I}_{45}, K^{I}_{35}, K^{I}_{34}, K^{I}_{25}, K^{I}_{24}, K^{I}_{23}, K^{I}_{15}, K^{I}_{14}, K^{I}_{13}, queste rette di Pascal s'incontrano tre a tre nei dieci punti di Kirkman, per esempio le rette $p^{I}_{123}, p^{I}_{124}, p^{I}_{125}$ s'incontrano nel punto K^{I}_{12}, gli indici $_{12}$ del quale sono quelli comuni alle tre rette che s'incontrano in esso.

Teorema XI. Le sessanta rette di Pascal p ed i sessanta punti di Kirkman K formano sei figure π, di dieci punti K posti tre a tre sopra le dieci rette corrispondenti p.

Le rette di Pascal e i punti di Kirkman della figura I avranno l'indice romano I, le altre invece gli indici II, III, IV, V, VI secondo la figura a cui apparterranno. In

Fig. 1.



tutte queste sei figure ad un punto di Kirkman K_{12} corrisponde la retta p_{345}, cioè quella retta che porta i tre indici $_{345}$ complementari degli indici $_{12}$ di esso sino al numero 5. Onde data una retta di Pascal (punto di Kirkman) di una delle sei figure π noi sapremo trovare tosto i punti di Kirkman che sono situati in essa (rette di Pascal che passano per quel punto) e quale sia il suo punto di Kirkman (retta di Pascal) corrispondente (1). — Se si considera il sistema dei due triangoli $K_{13}\ K_{14}\ K_{15}$, $K_{23}\ K_{24}\ K_{25}$ di una figura π vediamo che essi sono prospettivi pel centro K_{12} e per la retta p_{345}, essi possono considerarsi come triangoli polari rispetto ad una conica, ed allora si vede che i punti K_{12}, $K_{13}\ K_{14}\ K_{15}$, $K_{23}\ K_{24}\ K_{25}$ hanno per polari le loro rette di Pascal corrispondenti, cioè p_{345}, $p_{245}\ p_{235}\ p_{234}$, $p_{145}\ p_{135}\ p_{134}$. Le rette che congiungono i vertici corrispondenti di quei due triangoli sono le rette di Pascal p_{123}, p_{124}, p_{125}, esse hanno per poli rispettivamente i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè i punti di Kirkman K_{45}, K_{35}, K_{34} (Fig. I). Dunque:

(1) Io prego l'egregio mio lettore di aver un po' di pazienza nell'impratichirsi in questa notazione, che io credo necessaria pel mio lavoro. Al num. 5. ho data una tabella delle sei figure ove al simbolo di una retta di Pascal sta accanto l'esagono, dal quale essa vien data.

Teorema XII. Le sei figure π formano sei sistemi polari differenti (1) rispetto ai quali le dieci rette di Pascal e i dieci punti di Kirkman corrispondenti, che rispettivamente ad esse appartengono, sono poli e polari.

Con i dieci punti di Kirkman di una figura si possono formare adunque cinque quadrangoli cioè

$K_{12}K_{13}K_{14}K_{15}$, $K_{21}K_{23}K_{24}K_{25}$, $K_{31}K_{32}K_{34}K_{35}$, $K_{41}K_{42}K_{43}K_{45}$, $K_{51}K_{52}K_{53}K_{54}$,

i cui lati sono rette di Pascal, onde in tutto l'esagrammo si ottengono trenta quadrangoli i lati dei quali sono rette di Pascal. Reciprocamente le rette di Pascal si lasciano aggruppare in trenta quadrilateri i vertici dei quali sono punti di Kirkman.

5. Qui sotto segue il quadro delle sei figure π. Il punto G che sta a sinistra di ogni retta di Pascal è il punto di Steiner situato sopra di essa, gli indici di esso non indicano punto il simbolo a cui appartiene secondo il num. 3, ma bensì dipendono dalla combinazione di tre figure π come vedremo subito. Dopo di questo quadro seguono le rette di Pascal ordinate nei venti gruppi che danno i punti di Steiner.

Chiamo sistema $[Kp]$ la figura formata dalle sessanta rette di Pascal e dai punti di Kirkman.

Tabella delle sei figure π.

	I^a		II^a		III
G_{123}	$123456 = p_{345}$	G_{123}	$125634 = p_{345}$	G_{123}	$163254 = p_{345}$
G_{145}	$135264 = p_{123}$	G_{245}	$153246 = p_{123}$	G_{356}	$153462 = p_{123}$
G_{156}	$136425 = p_{124}$	G_{246}	$154623 = p_{124}$	G_{345}	$156243 = p_{124}$
G_{146}	$153624 = p_{125}$	G_{256}	$135426 = p_{125}$	G_{346}	$135642 = p_{125}$
G_{126}	$124365 = p_{145}$	G_{126}	$126543 = p_{145}$	G_{234}	$142563 = p_{145}$
G_{136}	$154236 = p_{245}$	G_{236}	$136254 = p_{245}$	G_{134}	$132456 = p_{245}$
G_{124}	$126534 = p_{135}$	G_{125}	$124356 = p_{135}$	G_{236}	$146352 = p_{135}$
G_{134}	$145326 = p_{235}$	G_{235}	$163524 = p_{235}$	G_{136}	$123546 = p_{235}$
G_{125}	$125643 = p_{134}$	G_{124}	$123465 = p_{134}$	G_{235}	$143625 = p_{134}$
G_{135}	$132546 = p_{234}$	G_{234}	$152364 = p_{234}$	G_{135}	$154326 = p_{234}$
	IV^a		V^a		IV^a
G_{456}	$125436 = p_{345}$	G_{456}	$145632 = p_{345}$	G_{456}	$165234 = p_{345}$
G_{124}	$153264 = p_{123}$	G_{125}	$135246 = p_{123}$	G_{236}	$135462 = p_{123}$
G_{234}	$156423 = p_{124}$	G_{135}	$134625 = p_{124}$	G_{126}	$136245 = p_{124}$
G_{134}	$135624 = p_{125}$	G_{235}	$153426 = p_{125}$	G_{136}	$153642 = p_{125}$
G_{345}	$124563 = p_{145}$	G_{345}	$126345 = p_{145}$	G_{156}	$142365 = p_{145}$
G_{346}	$134256 = p_{245}$	G_{356}	$156234 = p_{245}$	G_{146}	$152436 = p_{245}$
G_{145}	$126354 = p_{135}$	G_{245}	$163542 = p_{135}$	G_{356}	$146532 = p_{135}$
G_{146}	$143526 = p_{235}$	G_{256}	$165324 = p_{235}$	G_{346}	$125346 = p_{235}$
G_{245}	$123645 = p_{134}$	G_{145}	$125463 = p_{134}$	G_{256}	$145623 = p_{134}$
G_{246}	$152346 = p_{234}$	G_{156}	$132564 = p_{234}$	G_{246}	$134526 = p_{234}$

(1) Vedremo più tardi al num. 10 come i sistemi polari siano differenti.

Tabella dei punti G *di Steiner.*

$$\left.\begin{array}{l} 123456 = p^{I}_{345} \\ 125634 = p^{II}_{345} \\ 163254 = p^{III}_{345} \end{array}\right\} G_{123} = 135$$

$$\left.\begin{array}{l} 123465 = p^{II}_{134} \\ 143562 = p^{I}_{135} \\ 153264 = p^{IV}_{123} \end{array}\right\} G_{124} = 136 \qquad \left.\begin{array}{l} 146325 = p^{II}_{234} \\ 136524 = p^{III}_{145} \\ 156423 = p^{IV}_{124} \end{array}\right\} G_{234} = 126 \qquad \left.\begin{array}{l} 165423 = p^{III}_{245} \\ 145326 = p^{I}_{235} \\ 135624 = p^{IV}_{125} \end{array}\right\} G_{134} = 125$$

$$\left.\begin{array}{l} 124356 = p^{II}_{135} \\ 134652 = p^{I}_{134} \\ 164253 = p^{V}_{123} \end{array}\right\} G_{125} = 145 \qquad \left.\begin{array}{l} 142536 = p^{II}_{235} \\ 152634 = p^{III}_{134} \\ 162435 = p^{V}_{125} \end{array}\right\} G_{235} = 123 \qquad \left.\begin{array}{l} 162345 = p^{III}_{234} \\ 132546 = p^{I}_{234} \\ 152643 = p^{V}_{124} \end{array}\right\} G_{135} = 124$$

$$\left.\begin{array}{l} 124365 = p^{I}_{145} \\ 134562 = p^{II}_{145} \\ 154263 = p^{VI}_{124} \end{array}\right\} G_{126} = 146 \qquad \left.\begin{array}{l} 146352 = p^{III}_{135} \\ 136254 = p^{II}_{245} \\ 126453 = p^{VI}_{123} \end{array}\right\} G_{236} = 156 \qquad \left.\begin{array}{l} 163245 = p^{I}_{245} \\ 123546 = p^{II}_{235} \\ 153642 = p^{VI}_{125} \end{array}\right\} G_{136} = 134$$

$$\left.\begin{array}{l} 125436 = p^{IV}_{345} \\ 145632 = p^{V}_{345} \\ 165234 = p^{VI}_{345} \end{array}\right\} G_{456} = 135$$

$$\left.\begin{array}{l} 146532 = p^{VI}_{135} \\ 156234 = p^{V}_{245} \\ 126435 = p^{III}_{123} \end{array}\right\} G_{356} = 136 \qquad \left.\begin{array}{l} 164352 = p^{VI}_{235} \\ 134256 = p^{IV}_{245} \\ 124653 = p^{III}_{125} \end{array}\right\} G_{346} = 145 \qquad \left.\begin{array}{l} 126345 = p^{V}_{145} \\ 136542 = p^{IV}_{145} \\ 156243 = p^{III}_{124} \end{array}\right\} G_{345} = 146$$

$$\left.\begin{array}{l} 142365 = p^{IV}_{145} \\ 132564 = p^{V}_{234} \\ 152463 = p^{I}_{124} \end{array}\right\} G_{156} = 126 \qquad \left.\begin{array}{l} 163425 = p^{VI}_{245} \\ 143526 = p^{IV}_{235} \\ 153624 = p^{I}_{125} \end{array}\right\} G_{146} = 123 \qquad \left.\begin{array}{l} 126354 = p^{IV}_{135} \\ 136452 = p^{V}_{134} \\ 146253 = p^{I}_{123} \end{array}\right\} G_{145} = 156$$

$$\left.\begin{array}{l} 142356 = p^{IV}_{235} \\ 132654 = p^{VI}_{134} \\ 162453 = p^{II}_{125} \end{array}\right\} G_{256} = 125 \qquad \left.\begin{array}{l} 164325 = p^{IV}_{234} \\ 134526 = p^{VI}_{234} \\ 154623 = p^{II}_{124} \end{array}\right\} G_{246} = 124 \qquad \left.\begin{array}{l} 123645 = p^{IV}_{134} \\ 163542 = p^{V}_{135} \\ 153246 = p^{II}_{123} \end{array}\right\} G_{245} = 134$$

Come ben si vede dalla prima tabella le dieci rette di Pascal di una figura non hanno nessun punto P comune, esse passano per dieci punti di Steiner differenti. Due figure qualunque hanno quattro punti di Steiner comuni come p. es., la I^{a} e la II^{a} hanno in comune i punti di Steiner G_{123} G_{124} G_{125} G_{126}. Esse hanno anche i seguenti punti P comuni

13.24	dato dalle rette	p^{I}_{124}, p^{II}_{125}
14.23	»	p^{I}_{235}, p^{II}_{234}
15.26	»	p^{I}_{125}, p^{II}_{124}
35.46	»	p^{I}_{123}, p^{II}_{123}
36.54	»	p^{I}_{245}, p^{II}_{245}
16.52	»	p^{I}_{234}, p^{II}_{235}.

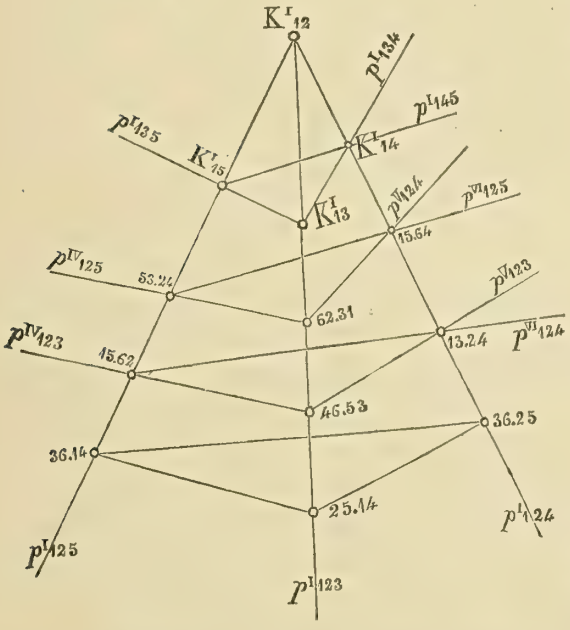
Questi punti sono situati tre a tre sulle quattro rette di Pascal p^{III}_{345}, p^{IV}_{123}, p^{V}_{123}, p^{VI}_{124}, che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure, dunque due figure combinate insieme determinano una retta di Pascal di ciascuna delle altre quattro. Queste quattro rette passano per i punti di Steiner comuni alle due figure. Tre figure π hanno invece un solo punto di Steiner comune, onde il punto G che risulta dalla combinazione delle tre figure I II III lo chiameremo G_{123} e quello invece che risulta dalla combinazione delle altre tre figure IV V VI lo chiameremo G_{456}. Ecco adunque il significato degl' indici dei punti G.

I punti di Steiner che contengono indici complementari sino al 6, come p. e. G_{123} e G_{456} sono punti conjugati, cioè mentre tre figure π qualunque prese insieme danno un punto di Steiner, la combinazione delle tre rimanenti ci dà il punto a questo conjugato. Da una figura si passa ad un' altra con lo scambio di una o due cifre, p. es. si passa dalle rette di Pascal della I figura rispettivamente a quelle della II e III mediante lo scambio di due cifre, p. es. dalla retta p^{I}_{345} si passa alla retta p^{II}_{345} mediante lo scambio di 3 con 5 e di 6 con 4, e così da tutte le rette della I a quelle della II figura, mentre si passa dalle rette di Pascal della I o II o III a quelle di una delle altre tre figure IV V VI mediante lo scambio di una sola cifra, come ben si può veder dalla tabella delle sei figuro π.

Dalla seconda tabella vediamo che le tre cifre che stanno a destra di ciascun punto di Steiner indicano a qual simbolo esso appartiene secondo il num. 3, p. es. le tre cifre 135 che stanno a destra del punto G_{123} indicano ch' esso appartiene al simbolo 135, ossia che le tre cifre in posto dispari degli esagoni che lo determinano sono 135.

Per avere le 4 rette di Pascal determinate dalla combinazione di due figure π p. es. della I e II, e che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure, basta prendere i quattro punti di Steiner G, gli indici dei quali contengono le cifre 12; le quattro rette di Pascal che passano rispettivamente per essi e che appartengono alle altre quattro figure III IV V VI, ossia le rette p^{III}_{345}, p^{IV}_{123}, p^{V}_{123}, p^{VI}_{124}, sono le rette richieste. Infatti, come prima abbiam visto, sono precisamente queste le rette che passano due a due per i punti P 13.24, 14.23, 15.26, 35.46, 36.54, 16.52 che sono comuni alle due figure I e II.

Fig. 2.



6. Siano ora date le rette

$$p^{I}_{123} = 135264 = \begin{vmatrix} 13.26 \\ 35.64 \\ 52.41 \end{vmatrix}$$

$$p^{I}_{124} = 136425 = \begin{vmatrix} 13.42 \\ 36.25 \\ 64.51 \end{vmatrix}$$

$$p^{I}_{125} = 153624 = \begin{vmatrix} 15.62 \\ 53.24 \\ 36.41 \end{vmatrix}$$

(vedasi la tabella delle sei figure π) che s'incontrano nel punto K^{I}_{12}, (Fig. 2). Nella retta p^{I}_{123} sono situati i punti K^{I}_{23}, K^{I}_{13} oltre al punto K^{I}_{12}, come si è visto al num. 4, così nelle rette p^{I}_{124} e p^{I}_{125} sono situati rispettivamente i punti K^{I}_{24} K^{I}_{14} e K^{I}_{25} K^{I}_{15} oltre al punto K^{I}_{12}. In queste tre rette sono situati anche i nove punti P che sono sopra indicati e che si possono veder segnati anche nella fig. 2. C'è il triangolo 14.25, 14.36, 25.36, che ha i suoi vertici rispettivamente

situati nelle tre rette di Pascal suddette; ebbene separiamo i vertici di questo triangolo dagli altri sei punti P di queste rette, cioè supponiamo che questo triangolo sia tenuto in disparte, allora con gli altri sei punti P ossia con i punti 35.46, 62.31; 15.64, 13.24; 53.24, 15.62 otterremo quattro coppie di triangoli non aventi alcun vertice comune, una di queste sarà la coppia dei triangoli 35.46, 15.62, 13.24, e 13.62, 35.24, 15.64; ciascuna di queste quattro coppie determina col triangolo 14.25, 14.36, 25.36 una terna di triangoli prospettivi due a due pel centro K^{I}_{12}, le tre rette di prospettiva adunque di ciascuna terna s'incontrano in un punto, i quattro punti così ottenuti per le quattro terne, formate dalle quattro coppie suddette col triangolo 14, 25, 36, sono situati secondo il teorema I in una retta. Si considerino adunque le quattro terne suddette e disponendole a guisa delle quattro terne di triangoli che nel num. 1 avevano il triagolo $A_1\ B_1\ C_1$ comune avremo:

	14.25, 14.36, 25.36	35.46, 15.62, 13.24; 13.62, 35.24, 15.64
	»	35.46, 15.62, 15.64; 13.62, 35.24, 13.24
(*)	»	35.46, 35.24, 13.24; 13.62, 15.62, 15,64
	»	35.46, 35.24, 15.64; 13.62, 15.62, 13.24

Siccome le rette che congiungono le coppie di vertici 35.46, 15.62; 35.46, 13.24; 15.62, 13.24 del 2° triangolo della prima terna sono ordinatamente le rette p^{IV}_{123}=153264, p^{V}_{123}= 135246 e p^{VI}_{124}= 136245 e quelle che uniscono le coppie di vertici del 3° triangolo della stessa terna sono le rette p^{IV}_{125}=135624, p^{V}_{124}=134625 e p^{VI}_{125}=153642, come si può vedere dalla tabella delle sei figure π, così potremo scrivere queste quattro terne nel seguente modo, ove introduciamo in luogo dei vertici de' triangoli i loro lati, cioè:

	14,25,36	p^{IV}_{123}	p^{V}_{123}	p^{VI}_{124}		p^{IV}_{125}	p^{V}_{124}	p^{VI}_{125}
(**)		p^{IV}_{123}	46	15		p^{IV}_{125}	13	24
		35	p^{V}_{123}	24		26	p^{V}_{124}	15
		35	46	p^{VI}_{124}		26	13	p^{VI}_{125}

Ora il secondo e terzo triangolo della prima terna essendo prospettivi pel centro K^{I}_{12}, come già l'abbiamo detto di sopra, i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia i punti K^{IV}_{12}, K^{V}_{12}, K^{VI}_{12}, che corrispondono alle tre rette di Pascal p^{IV}_{345}, p^{V}_{345}, p^{VI}_{345} concorrenti nel punto G_{456} (vedasi tabella dei punti di Steiner) giaciono in una retta, che io chiamerò retta di Cayley-Salmon e che rappresenterò col simbolo c_{456}; questa corrisponde in certa guisa al punto di Steiner G_{456}. Ora le altre due rette di prospettiva della prima terna cioè le rette di prospettiva del 1° triangolo col 2° e 3° sono le due rette p^{III}_{345} = 163254 e p^{II}_{345} = 125634, poichè p. es. i lati del 1° triangolo incontrano i lati corrispondenti del secondo nei tre punti 14.32, 25.16, 36.54 situati nella retta p^{III}_{345} (1), e poichè le due rette p^{III}_{345}, p^{II}_{345} s'incontrano nel punto G_{123}, così vuol dire che la retta di Cayley-Salmon c_{456} deve passare pel punto G_{123}, che è conjugato al punto G_{456}, del quale essa è corrispondente.

(1) Siccome noi ci serviremo sempre tanto della tabella delle 6 figure π e dei punti G, così farà bene il lettore di tenersele sempre sott'occhio.

Si potrebbe anche dimostrare che la retta c_{456} passa per G_{123} considerando nella prima terna il triangolo $p^{I}_{135}\, p^{I}_{134}\, p^{I}_{145}$ invece del triangolo 14,25,36, però bisognerebbe suppor noto il teorema XV, dunque abbiamo:

Teorema XIII. I tre punti di Kirkman che corrispondono secondo il teorema X alle tre rette di Pascal, che s'incontrano in un punto di Steiner, sono situati in una retta di Cayley-Salmon, che corrisponde a questo punto di Steiner. Le rette di Cayley-Salmon sono 20 in tutto l'esagrammo, ciascuna di esse passa per il punto di Steiner, conjugato a quello a cui essa è corrispondente (1).

Ciò che abbiamo detto dei punti di Steiner al num. 5 relativamente alle combinazioni delle 6 figure π due a due, o tre a tre, possiamo ripetere per le rette di Cayley-Salmon, cioè due figure prese insieme p. es. la I e II hanno in comune quattro rette di Cayley-Salmon cioè le rette c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126}, che sono corrispondenti ai quattro punti G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}, che come sappiamo sono comuni alle due figure I e II. Tre figure π invece hanno in comune una sola retta di Cayley-Salmon p. es. le figure I, II, III hanno in comune la retta c_{123}. Tutto questo si vede assai facilmente quando si scrivino o si pensino scritte le sei figure π ordinate secondo i punti di Kirkman corrispondenti alle rette di Pascal, che le compongono. Per es. invece della retta p^{I}_{345} nella figura I, ove è posto il punto G_{123}, considereremo il punto K^{I}_{12} ad essa corrispondente pel quale passa la retta c_{123} e così per le altre rette di Pascal.

Finora però noi abbiamo considerato solamente la prima delle quattro terne (**) di triangoli, ed abbiamo con essa dimostrato il teorema XIII. Ora osserviamo che le tre rette di prospettiva della seconda terna sono le rette

$p^{II}_{234} = 152364$, $p^{III}_{145} = 142563$, $p^{IV}_{124} = 156423$ che s'incontrano in G_{234} perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti dei triangoli di quella terna presi due a due, sono ordinatamente i punti P di queste tre rette.

Egualmente si vede che le tre rette di prospettiva dei triangoli della terza terna sono:

$p^{II}_{235} = 163524$, $p^{III}_{134} = 143625$, $p^{V}_{125} = 153426$ che s'incontrano in G_{235}

e quelle della quarta:

$p^{III}_{135} = 146352$, $p^{II}_{245} = 136254$, $p^{VI}_{123} = 135462$ » G_{236}

mentre quelle della prima terna s'incontrano nel punto G_{123}, come già abbiam visto, dunque pel teorema I si ha che i punti G_{123}, G_{234}, G_{235}, G_{236}, che sono comuni alle figure II e III, giaciono in una retta, perchè le quattro terne (*) sono formate da 9 punti, che sono i punti P delle tre rette $p^{I}_{123}, p^{I}_{124}, p^{I}_{125}$ ed inoltre esse hanno un triangolo comune, cioè il triangolo 14.25, 14.36, 25.36. Questa retta sia chiamata retta di Steiner-Plücker, e sia rappresentata col simbolo g_{23}, essa appartiene in un certo modo alla combinazione delle due figure II e III, onde quando diremo la retta di Steiner-Plücker appartenente o corrispondente o comune a due figure π, intenderemo la retta g che unisce i punti di Steiner a loro comuni. Siccome le combinazioni delle due figure π sono 15, così sono 15 anche le rette di Steiner-Plücker. Mentre p. es. nella retta g_{23} giaciono i punti di Steiner G_{123}, G_{234}, G_{235}, G_{236}, gli

(1) Vedi Cayley, Vol. 41 di Crelle pag. 66.

indici dei quali contengono le cifre dell'indice della retta g_{23}, per un punto G_{123} invece passano le tre rette g_{12}, g_{13}, g_{23} date dalle combinazioni delle tre figure π I, II e III che lo hanno comune. Si ha dunque riassumendo quel che si è detto:

Teorema XIV. Due figure π hanno in comune quattro punti di Steiner e le quattro rette di Cayley-Salmon corrispondenti. Tre figure π hanno in comune un punto di Steiner e la retta di Cayley-Salmon ad esso corrispondente. Due figure π hanno 6 punti P comuni, situati tre a tre in quattro rette di Pascal che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure e passano rispettivamente per i quattro punti di Steiner comuni alle due prime figure π.

Teorema XV. I quattro punti di Steiner G comuni a due figure π sono situati in una retta di Steiner-Plücker g, che è così comune alle due figure. Queste rette sono 15 in tutto l'esagrammo, tre a tre passano per un punto di Steiner (1).

Altra dimostrazione di questo teorema. — Se noi consideriamo (Fig. 2) il triangolo $p^{I}_{135} = 126534$, $p^{I}_{145} = 124365$, $p^{I}_{134} = 125643$ i cui lati congiungono rispettivamente i punti K^{I}_{15}, K^{I}_{13}, K^{I}_{14} e il triangolo $p^{IV}_{123} = 153264$, $p^{VI}_{124} = 136245$, $p^{V}_{123} = 135246$ vediamo ch'essi sono prospettivi pel centro K^{I}_{12}: ora i punti d'incontro dei lati corrispondenti sono:

$$p^{I}_{135}\ p^{IV}_{123} = G_{124}$$
$$p^{I}_{145}\ p^{VI}_{124} = G_{126}$$
$$p^{I}_{134}\ p^{V}_{123} = G_{125}$$

dunque i punti G_{124}, G_{126}, G_{125} giaciono in una retta, cioè nella retta g_{12}. Ora per dimostrare ch'essa passa anche pel punto G_{123}, si consideri anche il triangolo $p^{I}_{235} = 145326$, $p^{I}_{245} = 154236$, $p^{I}_{234} = 132546$, i cui lati congiungono rispettivamente i punti K^{I}_{25}, K^{I}_{23}, K^{I}_{24}, che sono situati rispettivamente nelle tre rette p^{I}_{125}, p^{I}_{123}, p^{I}_{124} che s'incontrano in K^{I}_{12}, onde questo triangolo è prospettivo ai due testè considerati pel centro K^{I}_{12}. La retta di prospettiva di questo col primo dei due triangoli considerati ossia col triangolo $p^{I}_{135}\ p^{I}_{145}\ p^{I}_{134}$ è la retta p^{I}_{345}, perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia $p^{I}_{235}\ p^{I}_{135} = K^{I}_{35}$, $p^{I}_{245}\ p^{I}_{145} = K^{I}_{45}$, $p^{I}_{234}\ p^{I}_{134} = K^{I}_{34}$ sono situati precisamente nella retta p^{I}_{345}, e la retta di prospettiva del triangolo $p^{I}_{235}\ p^{I}_{245}\ p^{I}_{234}$ col secondo dei triangoli considerati ossia $p^{IV}_{123} = 153264$, $p^{VI}_{124} = 136245$, $p^{V}_{123} = 135246$ è la retta $p^{III}_{345} = 163254$; infatti i punti d'incontro dei lati corrispondenti $p^{I}_{235}\ p^{IV}_{123} = 14.32$, $p^{I}_{245}\ p^{VI}_{124} = 45.63$, $p^{I}_{234}\ p^{V}_{123} = 52.61$ sono i punti P della retta $p^{I}{}_{345}$. Ma le rette p^{I}_{345} e p^{III}_{345} s'incontrano nel punto G_{123}, per questo dunque deve passare anche la retta di prospettiva dei due primi triangoli ossia la retta g_{12}.

Abbiamo visto ora che nei punti P della retta p^{III}_{345} (che è una delle rette determinate dalla I e II figura π come si è visto al num. 5) s'incontrano rispettivamente le rette $p^{I}_{235}\ p^{IV}_{123}$, $p^{I}_{245}\ p^{VI}_{124}$, $p^{I}_{234}\ p^{V}_{123}$, ma per essi passano anche le tre

(1) Vedi Steiner, *System. Entw. der Abh. geom. Gestalten*, pag. 311 e Plücker, Vol. 5 di Crelle pag. 275. *Ueber ein neues Princip der Geometrie.*

rette $p^{II}_{234} = 152364$, $p^{II}_{245} = 136254$, $p^{II}_{235} = 163524$ della seconda figura (vedasi num. 5); dunque noi possiamo formare i due triangoli prospettivi seguenti:

$$p^{I}_{235}\ p^{I}_{245}\ p^{I}_{234} \quad ; \quad p^{II}_{234}\ p^{II}_{245}\ p^{II}_{235}$$

ossia

$$K^{I}_{25}\ K^{I}_{23}\ K^{I}_{24} \quad ; \quad K^{II}_{24}\ K^{II}_{23}\ K^{II}_{25}$$

Infatti i lati p^{I}_{235}, p^{II}_{234} ecc. s'incontrano nella retta p^{III}_{345}, dunque le rette che congiungono i vertici corrispondenti cioè le rette $K^{I}_{25}\ K^{II}_{24} = c_{125}$, $K^{I}_{23}\ K^{II}_{23} = c_{126}$, $K^{I}_{24}\ K^{II}_{25} = c_{124}$ che sono tre rette di Cayley-Salmon s'incontrano in un punto, che si chiama punto di Salmon; io lo rappresenterò col simbolo S_{12}. Considerando invece i due triangoli formati dalle rette della I e II figura π, che s'incontrano nei punti P di una delle altre tre rette p^{IV}_{123}, p^{VI}_{124}, p^{V}_{123} che con la p^{III}_{345} sono determinate dalle due figure, si dimostra che anche la retta c_{123} passa pel punto S_{12}. Dunque le quattro rette c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126} che sono comuni a due figure s'incontrano in un punto S_{12}. Diremo che questo punto S_{12} appartiene od è comune alle due figure I e II. Esso corrisponde in certo modo alla retta g_{12}, che le due figure I e II hanno in comune, perchè le quattro rette di Cayley-Salmon c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126} corrispondono ai punti di Steiner G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}.

Teorema XVI. Le quattro rette di Cayley-Salmon che corrispondono ai quattro punti di Steiner comuni a due figure π passano per un punto di Salmon, che corrisponde alla retta di Steiner-Plücker sulla quale giaciono quei quattro punti G. Le venti rette di Cayley-Salmon s'incontrano così in 15 punti di Salmon, che giaciono tre a tre in ciascuna di esse.

Tabella delle rette di Steiner-Plücker e dei punti di Salmon.

$g_{12} = G_{123}\ G_{124}\ G_{125}\ G_{126}$	$S_{12} = c_{123}\ c_{134}\ c_{125}\ c_{126}$
$g_{13} = G_{123}\ G_{134}\ G_{135}\ G_{136}$	$S_{13} = c_{123}\ c_{134}\ c_{135}\ c_{136}$
$g_{14} = G_{124}\ G_{134}\ G_{145}\ G_{146}$	$S_{14} = c_{124}\ c_{134}\ c_{145}\ c_{146}$
$g_{15} = G_{125}\ G_{135}\ G_{145}\ G_{156}$	$S_{15} = c_{125}\ c_{135}\ c_{145}\ c_{156}$
$g_{16} = G_{126}\ G_{136}\ G_{146}\ G_{156}$	$S_{16} = c_{126}\ c_{136}\ c_{146}\ c_{156}$
$g_{23} = G_{123}\ G_{234}\ G_{235}\ G_{236}$	$S_{23} = c_{123}\ c_{234}\ c_{235}\ c_{236}$
$g_{24} = G_{124}\ G_{234}\ G_{245}\ G_{246}$	$S_{24} = c_{124}\ c_{234}\ c_{245}\ c_{246}$
$g_{25} = G_{125}\ G_{235}\ G_{245}\ G_{256}$	$S_{25} = c_{125}\ c_{235}\ c_{245}\ c_{256}$
$g_{26} = G_{126}\ G_{236}\ G_{246}\ G_{256}$	$S_{26} = c_{126}\ c_{236}\ c_{246}\ c_{256}$
$g_{34} = G_{134}\ G_{234}\ G_{345}\ G_{346}$	$S_{34} = c_{134}\ c_{234}\ c_{345}\ c_{346}$
$g_{35} = G_{135}\ G_{235}\ G_{345}\ G_{356}$	$S_{35} = c_{135}\ c_{235}\ c_{345}\ c_{356}$
$g_{36} = G_{136}\ G_{236}\ G_{346}\ G_{356}$	$S_{36} = c_{136}\ c_{236}\ c_{346}\ c_{356}$
$g_{45} = G_{145}\ G_{245}\ G_{345}\ G_{456}$	$S_{45} = c_{145}\ c_{245}\ c_{345}\ c_{456}$
$g_{46} = G_{146}\ G_{246}\ G_{346}\ G_{456}$	$S_{46} = c_{146}\ c_{246}\ c_{346}\ c_{456}$
$g_{56} = G_{156}\ G_{256}\ G_{356}\ G_{456}$	$S_{56} = c_{156}\ c_{256}\ c_{356}\ c_{456}$

Da questo quadro è facile di vedere che le due figure delle rette di Steiner-Plücker e quella dei punti di Salmon sono due figure duali e che la figura delle rette di Steiner-Plücker è eguale a quella di tre triangoli prospettivi come p. es. $G_{124}\ G_{134}\ G_{234}$, $G_{125}\ G_{135}\ G_{235}$, $G_{126}\ G_{136}\ G_{236}$, i cui vertici sono situati in tre rette concorrenti in un punto, cioè nelle tre rette g_{12}, g_{13}, g_{23} che s'incontrano nel punto G_{123}. I nove lati di questi tre triangoli sono rette di Steiner-Plücker, le tre rette di prospettiva sono le tre rette g_{45}, g_{46}, g_{56} che s'incontrano nel punto G_{456} conjugato di G_{123}, mentre i punti d'incontro dei lati con esse sono altrettanti punti di Steiner. Si vede pure che la figura è simmetrica rispetto a questi punti (1).

Osservazione — Abbiamo visto al num. 3 che i punti di Steiner si separano in dieci coppie di punti conjugati rispetto alla conica fondamentale. Ora per due punti di Steiner di una di queste coppie p. es. $G_{123}\ G_{456}$ passano rispettivamente le rette di Cayley-Salmon ad essi corrispondenti, ossia pel punto G_{123} passa la retta c_{456} e pel punto G_{456} passa la retta c_{123}. Io dico che queste due rette, ossia le due rette di Cayley-Salmon corrispondenti a due punti conjugati di Steiner, *non sono* due rette conjugate rispetto alla conica fondamentale. Nel punto G_{123} s'incontrano le tre rette di Pascal $p^{I}_{345} = 123456$, $p^{II}_{345} = 125634$, $p^{III}_{345} = 163254$ mentre nel punto G_{456} s'incontrano le rette $p^{IV}_{345} = 125436$, $p^{V}_{345} = 145632$, $p^{VI}_{345} = 165234$.

Supponiamo che le rette c_{123} e c_{456} siano rette conjugate rispetto alla conica fondamentale, allora una di esse almeno deve esser la polare del suo punto corrispondente di Steiner; infatti è evidente che se la retta c_{456} non è la polare del punto G_{456}, la polare di quest'ultimo dovrà incontrare la retta c_{456} nel punto G_{123}, che sarà il polo della retta c_{123}, secondo l'ipotesi fatta, poichè tutti i punti di una retta p. es. della c_{123} hanno per conjugati il polo della retta, onde il punto G_{456} non può avere altro punto conjugato nella retta c_{456} all'infuori del punto G_{123}; dunque se la retta c_{456} non è la polare del punto G_{456} sarà la retta c_{123} la polare del punto G_{123}. Quest'ultima retta è data dai punti di Kirkman, che corrispondono rispettivamente alle rette di Pascal che s'incontrano nel punto G_{123} ossia:

$$K^{I}_{12} = p^{I}_{123}\ p^{I}_{124}\ p^{I}_{125} = \begin{vmatrix} 135264 \\ 136425 \\ 153624 \end{vmatrix}$$

$$K^{II}_{12} = p^{II}_{123}\ p^{II}_{124}\ p^{II}_{125} = \begin{vmatrix} 153246 \\ 154623 \\ 135426 \end{vmatrix}$$

$$K^{III}_{12} = p^{III}_{123}\ p^{III}_{124}\ p^{III}_{125} = \begin{vmatrix} 153462 \\ 156243 \\ 135642 \end{vmatrix}$$

Per trovare il polo della retta p^{I}_{345} basta trovare il punto d'incontro delle polari di due dei suoi punti p. es. dei punti 12, 45, 23. 56. Le polari di questi punti sono

(1) Vedi Cayley, Vol. 31 di Crelle pag. 216 e Vol. 34 pag. 272. — Hesse, Vol. 41 di Crelle pag. 269 e Vol. 75 pag. 1.

rispettivamente le rette che congiungono i punti 15.24, 14.25 e 25.36, 35.26, queste due rette devono incontrarsi secondo l'ipotesi fatta in un punto della retta c_{123}, cioè nel polo della retta di Pascal p^{I}_{345}.

Noi abbiamo le tre rette c_{123}, 15.24 — 14.25, e 25.36 — 35.26. Noi possiamo formare i seguenti triangoli:

$$K_1 \quad 14.25 \quad 25.36 \quad ; \quad K_2 \quad 15.24 \quad 35.26$$

i cui vertici sono situati due a due in quelle tre rette. Questi triangoli essendo prospettivi, i punti d'incontro dei lati corrispondenti devono esser situati in una linea retta.

Ora i punti d'incontro dei lati corrispondenti sono

$$135264 - 153246 = 35.46$$
$$136425 - 135426 = 13.42$$
$$25 \quad - 153462 = 25 - 153462$$

dunque questi tre punti devono esser situati in linea retta, ma la retta che congiunge i due primi punti è la retta di Pascal 135246, essa incontra il lato 25 nel punto 25.16 ma non nel punto 25 — 153462, dunque vuol dire che la retta c_{123} e le rette 15.24 — 14.25, 25.36 — 35.26 non s'incontrano in un punto, ossia che la retta c_{123} non passa pel polo della retta di Pascal $p^{I}_{345} = 123456$, ossia che la retta c_{123} non è la polare del punto G_{123}, *ossia che le rette di Cayley-Salmon* c_{123} *e* c_{456} *che corrispondono ai due punti di Steiner* G_{123} *e* G_{456} *conjugati non sono rette conjugate rispetto alla conica fondamentale.*

7. Consideriamo ora una retta di Pascal p. es. la retta: $p^{I}_{345} = 123456$ e consideriamo il triangolo 14, 25, 36, ove i due punti fondamentali di un lato sono dati da due vertici dell'esagono 123456 fra i quali ne esistono altri due. Il triangolo 14, 25, 36 suddetto sia chiamato triangolo Δ della retta di Pascal p^{I}_{345}; onde ogni retta di Pascal ha il suo triangolo Δ formato nel modo testè indicato. Ora dalla tabella dei punti di Steiner si vede che i vertici del triangolo 14, 25, 36 della retta p^{I}_{345} sono situati rispettivamente nelle tre rette di Pascal, che s'incontrano nel punto G_{456}, conjugato del punto G_{123} situato nella retta p^{I}_{345}; onde i tre triangoli Δ, che appartengono rispettivamente alle tre rette di Pascal p. es. $p^{I}_{345} = 123456$, $p^{II}_{345} = 125634$, $p^{III}_{345} = 163254$ che s'incontrano nel punto G_{123}, hanno i loro vertici rispettivamente situati nelle tre rette $p^{IV}_{345} = 125436$, $p^{V}_{345} = 145632$, $p^{VI}_{345} = 165234$ che s'incontrano nel punto G_{456} conjugato del punto G_{123}. Questi tre triangoli Δ li chiameremo pure triangoli Δ del punto di Steiner G_{456}. Osserviamo inoltre che le due terne di triangoli Δ di due punti di Steiner conjugati come p. es. G_{123}, G_{456}, sono formate dagli stessi nove lati fondamentali; infatti i triangoli Δ del punto G_{123} sono 14, 23, 56; 16, 43, 52; 12, 63, 54 e quelli del punto G_{456} sono 14, 25, 36; 16, 23, 54; 12, 65, 34.

Dalla tabella dei punti di Steiner si rileva pure che il triangolo Δ 12, 65, 34 è comune alle rette $p^{III}_{345} = 163254$, $p^{IV}_{123} = 153264$, $p^{V}_{123} = 164253$, $p^{VI}_{124} = 154263$, che come sappiamo sono determinate dalla combinazione della I e II figura π, onde il triangolo Δ suddetto corrisponde alla combinazione della I e II figura e siccome sono quindici le combinazioni delle sei figure π due a due, così si hanno 15 triangoli Δ, che corrispondono ordinatamente alle 15 combinazioni. Apporremo al segno Δ gli indici ik al piede, essendo $i = 1,2,3,4,5,6$ e $k = 1,2,3,4,5,6$,

indicando con essi la combinazione delle due figure π a cui appartiene il triangolo Δ, combinazione che è data dagli indici romani di esse; facendo p. es. $i=1$ e $k=2$ si ottiene il triangolo Δ_{12}, che appartiene alla combinazione della I e II figura π, s'intende bene che $\Delta_{21}=\Delta_{12}$ e che i e k devono esser sempre differenti fra di loro. Ora il triangolo Δ_{12} per la ragione esposta di sopra ha i suoi vertici situati nelle rette di Pascal che a tre a tre s'incontrano nei punti di Steiner, conjugati di quelli situati rispettivamente nelle rette p^{III}_{345}, p^{IV}_{123}, p^{V}_{123}, p^{VI}_{124}, ossia dei quattro punti G della retta g_{12}, comune alle due figure I e II. Questi punti di Steiner sono G_{456}, G_{356}, G_{346}, G_{345} le cui rette di congiunzione sono rette di Steiner-Plücker, cioè le rette g_{56}, g_{46}, g_{36}, g_{45}, g_{35}, g_{34}. Dalla tabella dei punti di Steiner osserviamo che le dodici rette di Pascal, che passano a quattro a quattro pei vertici 12.56, 12.34, 56,34 del triangolo Δ_{12}, cioè le rette p^{V}_{345} p^{VI}_{135} p^{III}_{125} p^{IV}_{145}, p^{IV}_{345} p^{III}_{123} p^{VI}_{235} p^{V}_{145}, p^{VI}_{345} p^{V}_{245} p^{IV}_{245} p^{III}_{124}, appartengono tre a tre rispettivamente alle altre quattro figure III, IV, V, VI e s'incontrano tre a tre nei quattro punti di Kirkman corrispondenti alle quattro rette p^{III}_{345}, p^{IV}_{123}, p^{V}_{123}, p^{VI}_{124}, cioè nei punti K^{III}_{12}, K^{IV}_{45}, K^{V}_{45}, K^{VI}_{35}, che sono situati nelle rette di Cayley-Salmon comuni alle due figure I e II, cioè nelle rette c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126}, le quali passano rispettivamente pei punti G_{456}, G_{356}, G_{346}, G_{345}, nei quali s'incontrano quelle stesse dodici rette tre a tre.

Da quanto si è detto si ricava che per nessun vertice del triangolo Δ_{12} passa una retta della I o una retta della II figura, onde i 30 punti P di una figura π (vedasi tabella delle sei figure π) sono dati dai vertici dei triangoli Δ, che appartengono a quelle combinazioni di due delle sei figure π, che non contengono la figura π data. Dunque:

Teorema XVII. I punti P del teorema VII formano 15 triangoli Δ_{ik}, che corrispondono rispettivamente alle 15 combinazioni delle 6 figure π I, II, III, IV, V, VI due a due, ove gli indici i e k sono eguali agli indici romani delle due figure π della combinazione a cui corrisponde il triangolo Δ_{ik}. Pei vertici di un triangolo Δ_{ik} non passa alcuna retta di Pascal delle due figure π, a cui appartiene il triangolo Δ_{ik}; i 30 punti P di una figura π sono dati dunque dai vertici dei triangoli Δ_{ik} di quelle combinazioni delle 6 figure due a due, nelle quali non c'entra la figura π data. Le dodici rette di Pascal che passano per i tre vertici di un triangolo Δ_{ik} s'incontrano tre a tre in quattro punti di Steiner e in quattro punti di Kirkman; questi ultimi corrispondono alle quattro rette di Pascal determinate dalle due figure, i cui indici romani sono rispettivamente indicati dagli indici i e k del triangolo Δ_{ik}, secondo il teorema XIV e i quattro punti di Steiner sono situati nelle quattro rette di Cayley-Salmon delle stesse due figure i e k.

Tabella dei triangoli Δ.

12.34.56 I II	14.25.36 II III	15.26.34 III V
16.23.54 I III	15.23.46 II IV	12.35.46 III VI
14.26.35 I IV	16.24.35 II V	12.36.45 IV V
13.25.46 I V	13.26.45 II VI	16.25.34 IV VI
15.24.36 I VI	13.24.56 III IV	14.23.56 V VI.

8. Se ora consideriamo il lato fondamentale 12, per i punti 12 passano i lati 13, 14; 26, 25; con essi si formano le seguenti rette di Pascal:

$$\begin{vmatrix} 13.26 \\ 14.25 \end{vmatrix} = p^{I}_{123} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 13.25 \\ 14.26 \end{vmatrix} = p^{II}_{245}$$

Queste due rette sono due diagonali del quadrilatero formato dai lati 13, 14, 26, 25, di cui la terza diagonale è il lato 12, onde le rette p^{I}_{123} e p^{II}_{245} tagliano il lato 12 in due punti $X_{23.1}$, $X'_{23.1}$ che sono conjugati armonici rispetto ai punti 12, ossia rispetto alla conica fondamentale. Le rette p^{I}_{123} e p^{II}_{245} passano rispettivamente per i punti G_{145} G_{236} (vedasi tabella dei punti G). Il lato 12 che abbiamo considerato è uno dei nove lati comuni agli esagoni di questi due punti G ovvero è uno dei lati comuni ai triangoli Δ di essi. I tre triangoli Δ del punto G_{236} sono, come abbiamo visto al num. 7, quelli delle tre rette di Pascal del punto G_{145} ossia 12.45.36; 14.35.62; 25.46.13; questi triangoli sono due a due prospettivi, i due ultimi hanno per retta di prospettiva la retta $p^{I}_{123} = 146253$, onde da ciò che precede si ha che il lato 12 del primo triangolo viene incontrato dalla retta di prospettiva degli altri due in un punto conjugato a quello ove il lato 12 incontra la retta di Pascal p^{II}_{245}, che passa pel vertice opposto ad esso nel primo triangolo, cioè pel punto 45.36 e pel punto di Steiner G_{236}. Ciò vale per qualunque lato dei tre triangoli Δ di un punto G. Se noi consideriamo invece il punto G_{145}, i triangoli Δ di esso sono dati dai triangoli Δ delle rette di Pascal che s'incontrano nel punto G_{236}, ossia sono i triangoli 12, 46, 35; 45, 13, 62; 36, 52, 14, la retta di prospettiva del 2° e del 3° di questi triangoli è la retta $p^{II}_{245} = 136254$, onde il lato 12 del primo triangolo viene incontrato da questa retta e dalla retta p^{I}_{123}, che congiunge il vertice opposto ad esso cioè il punto 46.35 col punto G_{145}, in due punti conjugati; ora questi non sono altro che i punti considerati X_{23}, X'_{23}. Un lato fondamentale qualunque p. es. 12 si ripete in tre triangoli Δ, giacchè il numero dei triangoli Δ è eguale a quello dei lati fondamentali, e poichè un triangolo Δ appartiene secondo il teorema precedente a quattro punti di Steiner, parrebbe che in un lato 12 ci dovessero essere dodici coppie di punti conjugati, ma non sono che sei, perchè i dodici punti di Steiner, gli esagoni dei quali contengono il lato 12, cioè i punti G_{456} G_{356} G_{346} G_{345}, G_{245} G_{145} G_{124} G_{125}, G_{123} G_{126} G_{236} G_{136} sono conjugati due a due, e per due punti conjugati G si ottiene nel lato 12 una sola coppia di punti conjugati come già si è visto. Dunque:

Teorema XVIII. I quindici triangoli Δ_{ik} tre a tre hanno i loro vertici situati rispettivamente nelle terne di rette di Pascal che s'incontrano nei 20 punti di Steiner. I tre triangoli Δ_{ik} che hanno i loro vertici situati ordinatamente sulle tre rette p di un punto di Steiner siano chiamati triangoli Δ di esso. Il lato di un triangolo Δ di un punto di Steiner G è incontrato dalla retta di prospettiva dei suoi due altri triangoli Δ e dalla retta, che congiunge quel punto G col vertice opposto al lato nel primo triangolo, in due punti conjugati rispetto alla conica fondamentale. In ogni lato si ottengono sei coppie di tali punti conjugati.

I tre triangoli Δ del punto di Steiner G_{236} sono, come abbiam visto, i tre triangoli seguenti in linea orizzontale:

12.45.36
46.13.52 (*)
35.62.14

i triangoli delle tre linee verticali sono quelli del punto conjugato G_{145}. Le rette di Pascal di quest' ultimo punto sono le rette $p^{V}_{134} = 136452$, $p^{IV}_{135} = 126354$, $p^{I}_{123} = 146253$, le quali sono rispettivamente le rette di prospettiva del primo col secondo, del primo col terzo e del terzo col primo dei tre triangoli in linea orizzontale. La retta di prospettiva p^{V}_{134} del 1° e 2° triangolo per il teorema precedente incontra i lati del terzo in punti, che chiamo $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$ ai quali sono conjugati i punti d'incontro delle rette p^{II}_{245}, p^{III}_{135}, p^{VI}_{123}, concorrenti nel punto G_{236}, rispettivamente con gli stessi lati. Infatti queste tre rette passano per G_{236} e passano ordinatamente per i tre vertici del terzo triangolo opposti ai lati 35, 62, 14.

Questi tre punti conjugati rispettivamente ad $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$ li chiamo $X'_{12.1}$, $X'_{12.2}$, $X'_{12.3}$, in modo che $X_{12.1}$, $X'_{12.1}$ sono due punti conjugati nel lato 35. Analogamente la retta p^{IV}_{135} incontra i lati del secondo triangolo 46.13.52 nei punti $X_{13.1}$, $X_{13.2}$, $X_{13.3}$ che hanno per punti conjugati i punti d'incontro $X'_{13.1}$, $X'_{13.2}$, $X'_{13.3}$ delle rette p^{II}_{245}, p^{III}_{135}, p^{VI}_{123} con gli stessi lati. Finalmente la retta p^{I}_{123} interseca i lati del primo triangolo cioè 12.45.36 nei punti $X_{23.1}$, $X_{23.2}$, $X_{23.3}$ che hanno per punti conjugati i punti $X'_{23.1}$, $X'_{23.2}$, $X'_{23.3}$ dati rispettivamente dalle rette p^{II}_{245}, p^{III}_{135}, p^{VI}_{123} cogli stessi lati. Abbiamo adunque i due gruppi seguenti di punti conjugati:

$$\begin{array}{llll} X_{12.1} & X_{12.2} & X_{12.3} & \qquad X'_{12.1}\ X'_{12.2}\ X'_{12.3} \\ X_{13.1} & X_{13.2} & X_{13.3} & \qquad X'_{13.1}\ X'_{13.2}\ X'_{13.3} \\ X_{23.1} & X_{23.2} & X_{23.3} & \qquad X'_{23.1}\ X'_{23.2}\ X'_{23.3} \end{array}$$

I punti X e X' situati in linea orizzontale giaciono rispettivamente nei tre lati di uno dei tre triangoli orizzontali della tabella (*) precedente, mentre i punti X e X' in linea verticale sono collocati nei tre lati di un triangolo verticale della stessa tabella p. es. i punti $X_{12.1}$ $X_{12.2}$ $X_{12.3}$, $X'_{12.1}$ $X'_{12.2}$ $X'_{12.3}$ sono situati nei tre lati del triangolo 35.62.14 e i punti $X_{12.1}$ $X_{13.1}$ $X_{23.1}$, $X'_{12.1}$ $X'_{13.1}$ $X'_{23.1}$ sono situati rispettivamente nei tre lati del triangolo 35.46.12. I punti di una linea orizzontale del primo gruppo sono situati in una retta di Pascal, come anche i punti di una linea verticale del secondo p. es. $X_{12.1}$ $X_{12.2}$ $X_{12.3}$ sono posti nella retta p^{V}_{134}, i punti $X'_{12.1}$ $X'_{13.1}$ $X'_{23.1}$ sono posti nella retta p^{II}_{245}, onde a tre punti in linea retta del primo gruppo come p. es. $X_{12.1}$ $X_{12.2}$ $X_{12.3}$ sono conjugati i vertici di un triangolo del secondo cioè $X'_{12.1}$ $X'_{12.2}$ $X'_{12.3}$, che sono situati rispettivamente nelle tre rette di Pascal, che passano per il punto di Steiner conjugato a quello collocato nella retta $X_{12.1}$ $X_{12.2}$ $X_{12.3}$, che è la retta p^{V}_{134}.

Consideriamo ora i triangoli : 12.63 , 3 , 14.35 ; 12.45 , 46.13 , 4
i cui vertici sono situati nelle rette 12,13,14 la retta di prospettiva è data dai punti d'incontro dei lati corrispondenti, cioè

$$\begin{array}{llll} 12.63 - 3 & , 12.45 - 46.13 = p^{VI}_{123}, & = X'_{23.3} \\ 12.63 - 14.35 = p^{III}_{135} & , 12.45 - 4 & = X'_{23.2} \\ 3 - 14.35 & , 46.13 - 4 & = 46.35 \end{array}$$

Dunque i dieciotto lati dei sei triangoli passano rispettivamente ciascuno per uno dei punti P, vertici dei sei triangoli Δ della tabella precedente (*). Il lato $X'_{23.3}\ X'_{23.2}$ contiene il punto 46.35, questi punti X' sono posti nei lati 45 e 36 del primo triangolo della tabella (*), onde passa il lato $X'_{23.3}\ X'_{23.2}$ per il punto d'incontro dei due lati degli altri due triangoli della medesima, che giaciono nella linea verticale a cui non appartengono i lati 45 e 36, dunque, come si vede dalla tabella (*), per il punto 46.35.

Siano date le tre rette:

$X'_{23.1}\ X'_{23.2}$ nella quale si trova il punto 14.52

$X'_{13.1}\ X'_{13.2}$ » 14.36

$$p^{V}_{134} = \begin{vmatrix} 12.46 \\ 13.45 \\ 25.63 \end{vmatrix}$$

Consideriamo i due triangoli: $X'_{23.1}\ X'_{13.1}\ 12.46$; $X'_{23.2}\ X'_{13.2}\ 13.45$ i cui vertici si trovano rispettivamente in quelle tre rette. Essi sono prospettivi perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè

$$X'_{23.1},\ X'_{13.1} = p^{II}_{245};\ X'_{23.2}\ X'_{13.2} = p^{III}_{135}, = G_{236}$$
$$X'_{23.1},\ 12.46 = 12\ ;\ X'_{23.2}\ 13.45 = 45, = 12.45$$
$$X'_{13.1},\ 12.46 = 46\ ;\ X'_{13.2}\ 13.45 = 13, = 13.46$$

sono punti della retta $X'_{23.3}\ X'_{13.3} = p^{VI}_{123}$, dunque le rette $X'_{13.1}\ X'_{13.2}$, $X'_{23.2}\ X'_{23.1}$ e p^{V}_{134} s'incontrano in un punto. Si dimostra analogamente che sulla retta p^{V}_{134} s'incontrano le rette delle coppie $X'_{13.1}\ X'_{13.3}$, $X'_{23.1}\ X'_{23.3}$ e $X'_{13.2}\ X'_{13.3}$, $X'_{23.2}\ X'_{23.3}$. Onde si conclude che i triangoli $X'_{13.1}\ X'_{13.2}\ X'_{13.3}$, $X'_{23.1}\ X'_{23.2}\ X'_{23.3}$ sono prospettivi per la retta p^{V}_{134}, che è retta di prospettiva del 1° e 2° triangolo della tabella (*) in linea orizzontale, la cui combinazione 1° e 2° risulta dagli indici comuni 12 dei tre punti $X'_{12.1}$, $X'_{12.2}$, $X'_{12.3}$ della prima linea orizzontale dei punti X' del secondo gruppo. Questa retta p^{V}_{134} passa pel punto G conjugato di quello posto nelle rette p in cui si trovano i vertici dei due triangoli X', dei quali essa è retta di prospettiva. Ciò vale anche per i triangoli dei punti X in linea verticale del primo gruppo, dunque:

Teorema XIX. Sopra i novè lati di sei triangoli Δ di due punti di Steiner conjugati sono situati rispettivamente dieciotto punti, due a due conjugati rispetto alla conica fondamentale secondo il teorema XVIII; essi formano due gruppi di tre triangoli; i vertici di quelli di un gruppo sono collocati tre a tre nelle tre rette di Pascal che s'incontrano in uno dei punti di Steiner. Ai tre vertici di un triangolo del primo gruppo sono conjugati i tre punti situati in una retta di Pascal del secondo, nella quale cioè sono situati tre vertici dei tre triangoli del secondo gruppo, questa retta corrisponde in tal modo a quel triangolo. Ciascuno dei dieciotto lati dei sei triangoli dei due gruppi passa per uno dei dieciotto vertici dei sei triangoli Δ. Due triangoli qualunque di un gruppo sono prospettivi per la retta di Pascal del secondo, che corrisponde nel modo suddetto al terzo dei triangoli dello stesso gruppo.

9. Sia ora la retta

$$p^{V}_{345} = \left| \begin{array}{l} 12.45 \\ 23.56 \\ 34.61 \end{array} \right|$$

e consideriamo le due prime linee orizzontali cioè $\begin{matrix} 12.45 \\ 23.56 \end{matrix}$, formiamo la retta 56.13—4 prendendo il lato 56 e tagliandolo con l'altro lato 13, formato dalle due cifre che non si ripetono nella prima linea verticale e congiungendo il punto d'incontro di 56 con 13 col punto 4 della seconda linea verticale, che non entra nella seconda linea orizzontale. Questa retta sia chiamata retta a della retta di Pascal p^{I}_{345}. Si vede facilmente che la retta di Pascal p^{I}_{345} possiede dodici di queste rette, perchè invece di prendere il lato 56 possiamo prendere i lati 23, 45 e 12; onde per le tre combinazioni delle tre linee orizzontali 12.45, 23.56, 34.61 della medesima due a due si ottengono dodici rette a. — Ora consideriamo le rette p^{I}_{345}, (56.13—4), (23.46—1), possiamo formare i seguenti triangoli 1,4,12.45; 23.46, 56.13, 23.56 che hanno i vertici rispettivamente su quelle tre rette, i punti d'incontro dei lati seguenti due a due

$$14\ ,\ 23.46 — 56.13 = 132564 = p^{V}_{234} \text{ cioè } 14.52$$
$$1 — 12.45\ ,\ 23.46 — 23.56 \quad » \quad 2$$
$$4 — 12.45\ ,\ 56.13 — 23.56 \quad » \quad 5$$

sono situati nel lato fondamentale 25, dunque i due triangoli sono prospettivi, onde la retta p^{I}_{345} e le sue due rette a, (56.13—4), (23.46—1) s'incontrano in un punto che chiamo O.

Teorema XX. Una retta di Pascal p. es. la retta $\left| \begin{array}{l} 12.45 \\ 23.56 \\ 34.61 \end{array} \right|$ data dall'esagono 123456 e le sue due rette a, (1—23.46), (4—56.13) s'incontrano in un punto O. In ogni retta di Pascal esistono sei di questi punti O. In tutto l'esagrammo essi sono 360.

Che relazioni hanno questi punti fra di loro?

Talvolta al disegnatore può servire uno di questi punti O per costruire la retta di Pascal quando son dati 5 punti di una conica p. es. 12346 ed è data la retta 56, ove si deve trovare il punto 5 da determinare, perchè allora essendo la retta di Pascal determinata da due punti P, può avvenir benissimo che uno di essi cada fuori del foglio del disegno.

Abbiamo inoltre le rette $12.45 — 56.13 = p^{II}_{145}$
$12.45 — 23.46 = p^{III}_{235}$
$56.13 — 23.46 = p^{V}_{234}$

il lato 14 adunque viene intersecato dalle coppie di rette p^{I}_{345}, p^{V}_{234}; p^{II}_{145}, (1—23.46); p^{III}_{235}, (4—56.13) in tre coppie di punti in involuzione. Osserviamo di più che il lato 14 è un lato del triangolo Δ della retta di Pascal p^{I}_{345}. Ora il lato 14 è uno dei tre lati del triangolo Δ delle dodici rette di Pascal, che contengono rispettivamente i dodici punti di Steiner, nei simboli dei quali, secondo il num. 3, non entrano i numeri 14 uniti. I punti 1 e 4 si ripetono però in due rette a di ognuna delle dodici rette di Pascal considerate, come è facile di scorgere dalla formazione delle rette a di una retta di Pascal, dunque:

Teorema XXI. Le sessanta rette di Pascal si lasciano aggruppare per un lato fondamentale in ventiquattro quadrilateri, i lati di ciascuno di essi incontrano il lato in quattro punti che con i due punti fondamentali di esso formano un'involuzione.

10. Ritorniamo ora alle figure π e studiamo meglio i rapporti che hanno fra di loro. Abbiamo visto che il triangolo Δ_{ik} della combinazione di due figure π è dato dal triangolo Δ delle quattro rette di Pascal, che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure, e che le due prime determinano. Prendiamo il triangolo Δ_{12} delle figure I e II cioè 12.34.56. I vertici di esso, come sappiamo, sono punti P che non appartengono nè alla prima nè alla seconda figura, come si è visto al num. 7. Pei punti P rimanenti del lato 12 cioè

12.36 12.46

passano le coppie di rette

$p^{I}_{145} = 124365$, $p^{II}_{345} = 125634$ $p^{I}_{134} = 134652$, $p^{II}_{134} = 123465$

12.35 12.45

passano le coppie di rette

$p^{I}_{135} = 143562$, $p^{II}_{135} = 124356$ $p^{I}_{345} = 123456$, $p^{II}_{145} = 134562$

pei punti P del lato 34 cioè

34.15 ; 36.52 ; 34.62 ; 34.61

passano le coppie di rette

$p^{I}_{145}\ p^{II}_{134}$; $p^{I}_{134}\ p^{II}_{345}$; $p^{I}_{135}\ p^{II}_{145}$; $p^{I}_{345}\ p^{II}_{135}$

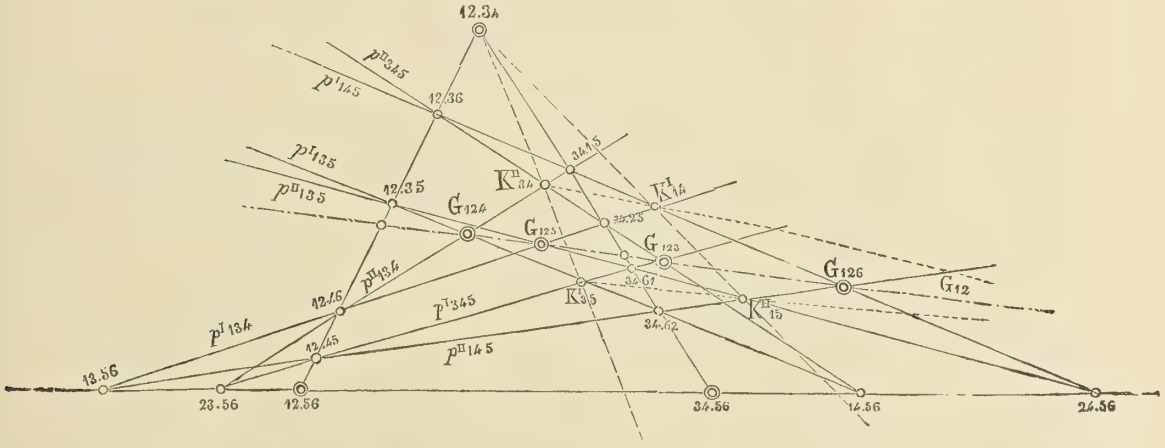
e finalmente pei punti P del lato 56 cioè

56.24 ; 56.13 ; 56.14 ; 56.23

passano le coppie di rette

$p^{I}_{145}\ p^{II}_{135}$; $p^{I}_{134}\ p^{II}_{145}$; $p^{I}_{135}\ p^{II}_{345}$; $p^{I}_{345}\ p^{II}_{134}$

Fig. 3.



Da questo si vede che ci sono quattro rette di Pascal della figura I che incontrano rispettivamente quattro rette di Pascal della II nei dodici punti P, situati quattro a quattro nei lati del triangolo 12 (vedasi fig. 3). Le rette di Pascal:

$p^{I}_{145}\ p^{I}_{134}\ p^{II}_{345}\ p^{II}_{134}$ e $p^{II}_{135}\ p^{II}_{145}\ p^{I}_{135}\ p^{I}_{345}$ sono lati dei due seguenti quadrangoli:

12.36, 12.46, 34.15, 34.52 e 12.35, 12.45, 34.62, 34.61

Questi due quadrangoli hanno un punto diagonale comune cioè il punto 12.34 come è facile di vedere, perchè gli altri due lati dei due quadrangoli sono 12, 34 ; gli altri due punti diagonali del primo quadrangolo sono:

$$p^{I}_{145}\ p^{I}_{134} = K^{I}_{14} \text{ e } p^{II}_{345}\ p^{II}_{134} = K^{II}_{34}$$

e quelli del secondo

$$p^{I}_{135}\ p^{I}_{345} = K^{I}_{35} \text{ e } p^{I}_{145}\ p^{II}_{135} = K^{II}_{15}$$

Questi due quadrangoli sono prospettivi come si vede, pel centro 12.34 e per la retta 56, perchè i lati corrispondenti di quei due quadrangoli cioè $p^{I}_{145}\ p^{II}_{135}$, $p^{I}_{134}\ p^{II}_{145}$ ecc. s'incontrano nei punti P del lato 56, e i vertici corrispondenti come 12.36 12.35, 12.46 12.45, etc. sono allineati col centro di prospettiva 12.34. Se sono prospettivi i due quadrangoli citati sono prospettivi anche i quadrangoli

$$p^{I}_{145}\ p^{I}_{134}\ p^{II}_{345}\ p^{II}_{134},\ p^{II}_{145}\ p^{II}_{135}\ p^{I}_{345}\ p^{I}_{135}$$

come si può vedere anche dalla fig. 3, e perciò i punti d' incontro dei lati corrispondenti cioè

$$p^{II}_{134}\ p^{I}_{135} = G_{124}\ p^{I}_{145}\ p^{II}_{145} = G_{126},\ p^{I}_{134}\ p^{II}_{135} = G_{125},\ p^{I}_{345}\ p^{II}_{345} = G_{123}$$

sono situati in una retta di Steiner-Plücker g_{12}, ciò che già noi sapevamo. Egli è pure evidente che gli altri quattro punti diagonali dei due primi quadrangoli sopra scritti, sono allineati due a due col centro di prospettiva 12.34, ossia le rette che congiungono i punti $K^{II}_{34}\,K^{I}_{35}$ e $K^{I}_{14}\ K^{II}_{15}$ passano pel punto 12.34, perchè le rette p. es. $p^{II}_{345}\ p^{II}_{134}$ del primo quadrangolo che s'incontrano nel punto K^{II}_{34} corrispondono rispettivamente alle rette di Pascal $p^{I}_{135}\ p^{I}_{345}$ del secondo, che s'incontrano nel punto K^{I}_{35}. Le due rette $K^{II}_{34}\ K^{I}_{35}$, $K^{II}_{15}\ K_{14}$ formano un gruppo armonico colla coppia dei lati 12, 34 perchè le rette 12, 34 sono due lati opposti dei due quadrangoli suddetti. Per il punto 12.56 passano invece le rette che congiungono i punti $K^{I}_{34}\ K^{II}_{35}$, $K^{II}_{14}\ K^{I}_{15}$ e pel punto 34.56 le rette $K^{I}_{13}\ K^{II}_{13}$, $K^{I}_{45}\ K^{II}_{45}$; per dimostrar ciò basta considerar i quadrangoli

$$p^{I}_{134}\ p^{I}_{345}\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{145},\ p^{II}_{345}\ p^{II}_{135}\ p^{I}_{145}\ p^{I}_{135}$$

che hanno per centro di prospettiva il punto 12.56 e per retta di prospettiva il lato 34 e i quadrangoli

$$p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{II}_{145}\ p^{II}_{345},\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{135}\ p^{I}_{345}\ p^{I}_{145}$$

che hanno per centro di prospettiva il punto 34.56 e per retta di prospettiva il lato 12. Come i quadrangoli della prima coppia, che hanno per centro di prospettiva il punto 12.34, si possono ordinare in modo ch'essi abbiano per retta di prospettiva anche la retta g_{12} delle due figure I e II, così anche i quadrangoli delle due ultime coppie hanno la stessa proprietà.

Le rette che congiungono rispettivamente due punti di Kirkman come p. es. $K^{I}_{14}\,K^{II}_{15}$, $K^{I}_{35}\,K^{II}_{34}$ ecc. che passano per un punto P furono già scoperte da Kirkman stesso (1). Io le chiamo rette v_{12}. Presto vedremo quale significato abbiano gli indici $_{12}$. In seguito al num. 15 vedremo anche come si trovano queste rette in un modo semplice. Si vede che le rette v_{12} sono 6 per la combinazione di due figure, e che perciò sono 90 in tutto l'esagrammo, così si vede anche che per un punto di Kirkman passano tre di queste rette v_{12}. Per ciò che si è detto abbiamo:

Teorema XXII. Prese due figure π ci sono due quadrilateri di rette

(1) Cayley, Vol. 41 di Crelle pag. 66.

di Pascal i quali appartengono rispettivamente ad esse, i cui vertici sono punti di Kirkman e i cui lati s'incontrano due a due ordinatamente nei punti P di ciascun lato del triangolo Δ_{ik} delle due figure e nei punti G di Steiner della retta g_{ik} delle medesime. I dodici vertici di questi quadrilateri sono allineati due a due in sei rette v_{12}, che passano rispettivamente due a due per i vertici del triangolo Δ_{ik}. In tutto l'esagrammo sono queste rette novanta. Per un punto di Kirkman ne passano tre.

Teorema XXIII. Le due rette v_{12} che passano per il vertice di un triangolo Δ_{ik} formano con i due lati di esso un gruppo armonico.

Se consideriamo i due triangoli

$$p^{II}_{245}\ p^{II}_{234}\ p^{II}_{235}\ ;\ p^{I}_{245}\ p^{I}_{235}\ p^{I}_{234} \quad \text{ossia}$$
$$K^{II}_{24}\ K^{II}_{25}\ K^{II}_{23}\ ;\ K^{I}_{25}\ K^{I}_{24}\ K^{I}_{23}$$

vediamo ch'essi sono prospettivi pel centro S_{12}, perchè le rette che congiungono i punti $K^{II}_{24}\,K^{I}_{25}$, $K^{II}_{25}\,K^{I}_{24}$, $K^{II}_{23}\,K^{I}_{23}$ sono le tre rette di Cayley-Salmon c_{125}, c_{124}, c_{126}. (S'intende che bisogna assicurarsi di questo osservando la tabella dei punti di Steiner, perchè sappiamo che quando tre rette di Pascal s'incontrano in un punto G i tre punti di Kirkman corrispondenti sono situati nella retta di Cayley-Salmon corrispondente al punto G di Steiner e viceversa). I punti d'incontro adunque dei lati corrispondenti di quei due triangoli cioè

$p^{II}_{245} = 136254$, $p^{I}_{245} = 154236, = 36.54$, $p^{II}_{234} = 152364$, $p^{I}_{235} = 145326, = 14.32$
$p^{II}_{235} = 163524$, $p^{I}_{234} = 132546, = 16.25$

sono situati in una retta, e questa retta non è altro che la retta p^{III}_{345}, che è una delle rette p determinate dalle due figure I e II. Ora consideriamo invece i due triangoli i cui vertici sono i punti di Kirkman corrispondenti alle rette di Pascal dei due triangoli testè considerate, essi sono

$$K^{II}_{13}\ K^{II}_{15}\ K^{II}_{14}\ ,\ K^{I}_{13}\ K^{I}_{14}\ K^{I}_{15} \quad \text{ossia}$$
$$p^{II}_{135}\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{145}\ ,\ p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{I}_{145}$$

queste rette sono lati dei due quadrilateri di rette di Pascal delle due figure I e II, i cui lati due a due s'incontrano nei lati del loro triangolo Δ_{12} ovvero nella retta di Steiner-Plücker di esse, ossia nella retta g_{12}. I triangoli sono prospettivi, infatti i punti d'incontro dei lati delle tre coppie $p^{II}_{135}\ p^{I}_{134}$, $p^{II}_{134}\ p^{I}_{135}$, $p^{II}_{145}\ p^{I}_{145}$ sono i tre punti G_{125}, G_{124}, G_{126}; come del resto era facile a prevedere dalla corrispondenza che passa tra i punti di Kirkman e le rette di Pascal. Dunque le rette che uniscono i vertici corrispondenti $K^{I}_{13}\ K^{II}_{13}$, $K^{II}_{15}\ K^{I}_{14}$, $K^{II}_{14}\ K^{I}_{15}$, che come abbiamo visto sono tre rette v_{12} che passano rispettivamente per i tre vertici del triangolo Δ_{12}, s'incontrano in un punto, che non è il punto K^{III}_{12} che corrisponde alla retta p^{III}_{345}, come dovrebbe essere se ci fosse una dualità completa fra i punti K e le rette p, ma bensì s'incontrano le tre rette v_{12} in un punto che chiamo $Z^{III}_{12,2}$ e che corrisponde in certa guisa alla retta p^{III}_{345}, che è retta di prospettiva dei due primi triangoli considerati. Se il punto $Z^{III}_{12,2}$ cadesse nel punto K^{III}_{12} allora la retta $v_{12} = K^{I}_{13}$, K^{II}_{13}, 34.56 dovrebbe cadere con la retta che unisce il punto K^{III}_{12} col punto 34.56 cioè con la retta p^{III}_{124}, ciò che è impossibile. Onde è dimostrato così che, non essendo completa la dualità fra i punti di Kirkman e le rette di Pascal, non esiste

nè la conica ideale di Hesse, rispetto alla quale i punti di Kirkman siano poli delle rette di Pascal, nè la correlazione di Schröter fra questi punti e queste rette (¹). Con ciò è dimostrato pure che le sei figure π formano 6 sistemi polari differenti.

Abbiamo detto che i lati dei due triangoli $p^{II}_{135}\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{145}$, $p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{I}_{145}$ appartengono ai lati dei due quadrilateri delle due figure π del teorema XXII ossia

$$p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{I}_{145}\ p^{I}_{345}\ ,\ p^{II}_{135}\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{145}\ p^{II}_{345}$$

i cui lati passano due a due per i quattro punti G della retta g_{12}; con questi quadrilateri adunque possiamo formare quattro coppie di triangoli, una delle quali è p. es. la coppia di triangoli sopra considerata cioè

$$p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{I}_{145}\ ,\ p^{II}_{135}\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{145}$$

e siccome abbiamo osservato che il centro di prospettiva di questi triangoli è il punto $Z^{III}_{12,_2}$ corrispondente alla retta p^{III}_{345} che è una delle quattro rette determinate dalla I e II figura, così vuol dire che i quattro centri di prospettiva delle quattro coppie corrispondono alle rette p^{III}_{345}, p^{IV}_{123}, p^{V}_{123}, p^{VI}_{124}; ossia sono i punti $Z^{III}_{12,_2}$, $Z^{IV}_{45,_2}$, $Z^{V}_{45,_2}$, $Z^{VI}_{35,_2}$. Al punto Z_2 e K che corrispondono nel modo indicato alla stessa retta di Pascal diamo gli stessi indici. Il $_2$ che è la terza cifra dell'indice di ogni punto Z indica che i punti Z appartengono ad un secondo sistema di cui ora studieremo le proprietà. Di più abbiamo sopra osservato che le rette che congiungono i vertici corrispondenti dei due triangoli $p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{I}_{145}$, $p^{II}_{135}\ p^{II}_{134}\ p^{II}_{145}$ sono tre delle sei rette v_{12} delle due figure I e II, dunque vuol dire che ciò varrà anche per le altre tre coppie di triangoli. Se per la combinazione delle due figure I e II si hanno quattro punti Z_2, in tutto l'esagrammo saranno questi punti 60 e saranno situati due a due nelle rette v_{12}. Dunque:

Teorema XXIV. Le sei rette v_{12} che passano per i vertici del triangolo Δ_{ik} di due figure π s'incontrano tre a tre in quattro punti « Z_2 » di un quadrangolo. I punti « Z_2 » sono sessanta in tutto l'esagrammo. Due a due sono situati nelle rette v_{12}.

Osserviamo che i quattro punti P d'incontro di un lato p. es. 12 del triangolo Δ_{12} con le quattro rette del quadrilatero $p^{I}_{134}\ p^{I}_{135}\ p^{II}_{145}\ p^{II}_{345}$ ovvero del quadrilatero $p^{II}_{134}\ p^{II}_{135}\ p^{I}_{345}\ p^{I}_{145}$ e i due vertici P del triangolo Δ_{12} formano un'involuzione ove al punto 12.34 corrisponde il punto 12.56, al punto 12.36 il punto 12.45 ecc. (vedi fig. 3) onde i quattro punti P situati in un lato del triangolo Δ_{ik} di due figure, esclusi però da questi i vertici di esso, e i due punti d'incontro con gli altri due lati o con uno dei due lati e con la retta di Steiner-Plücker g_{ik} formano tre coppie di punti in involuzione. Così pure i quattro punti di Steiner della retta g_{ik} con i tre punti d'incontro di essa con i tre lati del triangolo Δ_{ik} presi due a due, formano un' involuzione ; per dimostrar questo basta considerare p. es. il quadrangolo 12.36, 12.46, 34.15, 34.25 le cui coppie di lati opposti sono 12, 34; $p^{II}_{345}\ p^{II}_{134}$, $p^{I}_{145}\ p^{I}_{134}$, la prima coppia ci dà sulla retta g_{12} i punti d'incontro dei lati 12 e 34 del triangolo Δ_{12} e le altre due coppie ci danno i punti $G_{126}\ G_{125}$, $G_{124}\ G_{123}$. Analogamente si dimostra che i punti G della retta g_{12} accoppiati negli altri due modi possibili ci danno altre due involuzioni a cui appartengono

(¹) Hesse, Vol. 68 di Crelle pag. 193 e Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen,* Neue Aufl. pag. 217-218.

rispettivamente le coppie dei punti d'incontro della g_{12} con i lati 12,56 e 34,56, dunque:

Teorema XXV. I quattro punti di Steiner di una retta di Steiner Plücker e i punti d'incontro Y di essa con due dei lati del triangolo Δ_{ik} della combinazione di quelle due figure a cui appartiene quella retta g, formano tre coppie di punti di un'involuzione.

11. Noi abbiamo i triangoli:

$$K^{I}_{25}\,K^{I}_{23}\,K^{I}_{24}\ ,\ K^{II}_{24}\,K^{II}_{23}\,K^{II}_{25}\ ,\ K^{II}_{14}\,K^{II}_{13}\,K^{II}_{15}\ ,\ K^{I}_{15}\,K^{I}_{13}\,K^{I}_{14}$$

il primo è prospettivo col secondo pel centro S_{12}, infatti le rette che ne congiungono i vertici a due a due sono le tre rette c_{125}, c_{126}, c_{124}, come l'abbiam visto al num. 10, e per la retta p^{III}_{345}; il secondo è prospettivo col terzo pel centro K^{II}_{12} e la retta p^{II}_{345}, il terzo col quarto pel centro $Z^{III}_{12,_2}$ e per la retta g_{12} (anche questo l'abbiam visto al num. 10) e finalmente il quarto col primo pel centro K^{I}_{12} e per la retta p^{I}_{345} e come le quattro rette di prospettiva s'incontrano in un punto, cioè nel punto G_{123}; così i quattro centri di prospettiva sono situati pel teorema II in una retta, e siccome la retta $S_{12}\,K^{I}_{12}\,K^{II}_{12}$ è la retta c_{123} così vuol dire che il punto $Z^{III}_{12,_2}$ è situato nella retta di Cayley-Salmon c_{123}. Epperciò anche i punti $Z^{IV}_{45,_2}$, $Z^{V}_{45,_2}$, $Z^{VI}_{35,_2}$, che come abbiam visto corrispondono alle rette p^{IV}_{123}, p^{V}_{123}, p^{IV}_{124} determinate dalle due prime figure I e II, sono situati nelle rette di Cayley-Salmon comuni ad esse. Dunque si conclude:

Teorema XXVI. I tre punti Z_2 che corrispondono alle tre rette di Pascal che s'incontrano in un punto di Steiner, nel modo indicato dal teorema XXVIII, sono situati in una retta di Cayley-Salmon.

Osserviamo che i quattro punti $Z^{III}_{12,_2}$, $Z^{IV}_{45,_2}$, $Z^{V}_{45,_2}$, $Z^{VI}_{35,_2}$ formano un quadrangolo i cui sei lati sono precisamente le 6 rette v_{12}, che sono determinate dalla I e II figura (vedi num. 10), dunque il triangolo diagonale è il triangolo Δ_{12} delle due figure I e II, poichè sappiamo che queste sei rette v_{12} passano due a due per i vertici di esso. Ora se si congiunge il punto di Salmon S_{12} con i quattro punti Z_2 suddetti si ottengono le quattro rette di Cayley c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126} e queste accoppiate nei tre modi diversi mi danno tre involuzioni rispetto alle quali sono ordinatamente coppie di raggi corrispondenti le coppie di rette che uniscono il punto S_{12} con i vertici del triangolo diagonale Δ_{12}, dunque:

Teorema XXVII. Le quattro rette di Cayley-Salmon di due figure π e due delle rette che congiungono il punto di Salmon di esse con i tre vertici del loro triangolo Δ_{ik} formano tre coppie di raggi in involuzione.

Come ben si vede questo teorema è analogo al teorema XXV. Riepilogando quel che si è detto ai num.i 6 e 10 abbiamo:

Teorema XXVIII. Due figure π qualunque hanno i vertici di due quadrangoli di punti K, che rispettivamente appartengono ad esse, allineati due a due per mezzo di quattro rette di Cayley-Salmon col punto di Salmon delle due figure, e i triangoli da essi formati sono prospettivi per le quattro rette di Pascal che appartengono ordinatamente alle altre quattro figure π, determinate dalle

da dueime. I lati dei quadrilateri polari dei due quadrangoli, rispettivamente nelle due figure π, s'incontrano due a due nei punti di Steiner della retta di Steiner-Plücker di esse e i quattro centri Z_2 di prospettiva sono situati nelle rette di Cayley-Salmon di esse.

I punti Z_2 corrispondono così alle rette di Pascal. Il punto K e il punto Z_2 che corrispondono alla stessa retta di Pascal siano chiamati punti degli stessi indici.

Ora siccome due figure π prese insieme determinano una retta di Pascal di ciascuna delle rimanenti, così date 5 figure π esse determinano combinate due a due le 10 rette di Pascal della VI; è facile di vedere che quattro figure non determinano alcuna delle altre due, onde:

Teorema XXIX. Cinque figure π determinano la sesta.

12. Considerando la fig. 3 vediamo che la retta che unisce i due punti diagonali K^{I}_{14}, K^{II}_{34} del quadrangolo 12.36, 34.15, 12.46, 34.52 e la retta che unisce i due punti diagonali K^{II}_{15}, K^{I}_{35} del secondo quadrangolo 12.35, 12.45, 34.61, 34,62, prospettivo col primo pel centro 12.34 e per la retta 56, come anche per la retta g_{12} (vedi num. 10) passano pel punto d'incontro delle due rette g_{12} e 56. Si ottengono per le due figure I e II sei di queste rette, che chiamo m. La retta m che unisce i due punti diagonali K^{I}_{14}, K^{II}_{34} del quadrangolo 12.36, 34.15, 12.46, 34.52 che ha per terzo punto diagonale il punto 12.34 e la retta m che unisce i punti diagonali K^{II}_{35}, K^{I}_{15} del quadrangolo 12.35, 12.36, 14.56, 24.56 che ha per terzo punto diagonale il punto 12.56, incontrano la retta $v_{12} = K^{II}_{13}\, K^{I}_{13}$ che passa pel terzo vertice 34.56 del triangolo Δ_{12} in un punto T (1).

Se si considerano invece le due rette m degli altri due quadrangoli prospettivi ordinatamente con i due primi per i centri 12.34 e 12.56 cioè le due rette K^{II}_{15} K^{I}_{35} , K^{I}_{34} K^{II}_{14} (vedi fig. 3) si vede che esse s' incontrano in un altro punto T della retta $v_{12} = K^{II}_{13}\, K^{I}_{13}$. Onde si ottengono in ogni retta v_{12} due punti T e perciò in tutto l'esagrammo si hanno 90 rette m e 180 punti T, dunque:

Teorema XXX. I dodici vertici dei due quadrilateri di rette di Pascal di due figure π secondo il teorema XXII, che sono punti di Kirkman, sono situati due a due in sei rette m che s'incontrano due a due in 12 punti T, situati due a due nelle sei rette v_{12} delle due figure. In tutto l'esagrammo ci sono 90 rette m e 180 punti T. Le sei rette m passano due a due per i punti d'incontro della retta g_{ik} delle due figure π con i lati del loro triangolo Δ_{ik}.

Le tre coppie di rette $p^{IV}_{135} = 126354$, $p^{VI}_{145} = 142365$; $p^{IV}_{235} = 143526$, $p^{V}_{234} = 132564$; $p^{V}_{134} = 125463$, $p^{VI}_{345} = 152436$ passano rispettivamente per i tre vertici P del triangolo Δ_{23} cioè 36.14, 14.25, 25.36, le sei rette p di queste tre coppie s'incontrano nei punti K^{IV}_{35}, K^{V}_{34}, K^{VI}_{45}, ora le tre rette che congiungono le coppie di punti 36.14 K^{V}_{34}; 14.25 K^{VI}_{45}; 52.63 K^{IV}_{35} sono le rette p^{IV}_{345}, p^{V}_{345}, p^{VI}_{345}, che passano pel punto G_{456}, onde le sei rette p suddette sono tangenti ad una conica. Queste coniche sono 60 in tutto l'esagrammo.

(1) Basta considerare per la dimostrazione i due triangoli prospettivi $K^{I}_{13}\, K^{I}_{14}\, K^{I}_{15}$, $K^{II}_{13}\, K^{II}_{34}$ K^{II}_{35} che hanno i loro vertici situati due a due nelle due rette m e nella retta v_{12} considerate.

13. Le tre rette v_{12} che passano per un punto Z_2 si possono trovare col metodo dato al num. 10, cioè se noi vogliamo avere le tre rette v_{12} che a mo' d'esempio contengono il punto $Z^{III}_{12,2}$, noi consideriamo la retta p^{III}_{345} a questo corrispondente, e dagli indici romani delle altre due rette di Pascal che passano con essa per lo stesso punto di Steiner G_{123}, vediamo da quale combinazione delle 6 figure π venga la retta p^{III}_{345} determinata, e siccome gli indici romani di queste due altre rette di Pascal sono I e II così cerchiamo nelle figure I e II le tre coppie di rette $p^{II}_{245} = 136254$, $p^{I}_{245} = 154236$; $p^{II}_{234} = 152364$, $p^{I}_{235} = 145326$; $p^{II}_{235} = 163524$, $p^{I}_{234} = 132546$, ove le rette di una coppia s'incontrano in uno dei punti P della retta $p^{III}_{345} = 163254$, allora si ha che le coppie di punti K corrispondenti a queste rette sono situati nelle tre rette v_{12} che passano pel punto $Z^{III}_{12,2}$. Alle rette di Pascal p. es. p^{IV}_{123}, p^{IV}_{124}, p^{IV}_{125} che s'incontrano nel punto K^{IV}_{12}, corrispondono i punti $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{IV}_{35,2}$, $Z_{34,2}$, per questi punti passano rispettivamente le rette v_{12} seguenti

$K^{I}_{45}\ K^{II}_{45}$, $K^{I}_{34}\ K^{II}_{35}$ per $Z^{IV}_{45,2}$
$K^{II}_{45}\ K^{III}_{35}$, $K^{II}_{35}\ K^{III}_{34}$ « $Z^{IV}_{35,2}$
$K^{III}_{35}\ K^{I}_{45}$, $K^{III}_{34}\ K^{I}_{34}$ « $Z^{IV}_{34,2}$

Queste rette trovansi col modo indicato di sopra e al num. 14 c'è una tabella per la formazione di queste rette v_{12} dove presa p. es. la retta p^{III}_{345} data mediante i suoi punti P 16.25, 63.54, 32.41, accanto di questi stanno le tre coppie di rette di Pascal $p^{I}_{234}\,p^{II}_{235}$, $p^{I}_{245}\,p^{II}_{245}$, $p^{I}_{235}\,p^{II}_{234}$, le coppie di punti di Kirkman corrispondenti sono situati nelle rette v_{12} che s'incontrano nel punto $Z^{III}_{12,2}$ corrispondente alla retta p^{III}_{345}. Ora i due triangoli $K^{I}_{45}\,K^{II}_{45}\,K^{III}_{35}$ e $K^{I}_{34}\,K^{II}_{35}\,K^{III}_{34}$ i cui vertici sono ordinatamente situati sulle sei rette v_{12} suddette sono prospettivi per il centro G_{123} perchè le tre rette $K^{I}_{45}K^{I}_{34} = p^{I}_{345}$, $K^{II}_{45}K^{II}_{35} = p^{II}_{345}$, $K^{III}_{35}K^{III}_{34} = p^{III}_{345}$ s'incontrano precisamente nel punto G_{123} onde:

Teorema XXXI. I tre punti Z_2 che corrispondono alle tre rette di Pascal che s'incontrano in un punto di Kirkman sono situati in una retta z_2, che corrisponde al punto di Kirkman.

Le rette z_2 sono 60 in tutto l'esagrammo e per ogni punto Z_2 ne passano tre. La retta z_2 e la retta p che corrispondono allo stesso punto di Kirkman siano chiamate rette degli stessi indici.

La legge con cui si trovano le rette v_{12} che s'incontrano in un punto Z_2 è identica a quella con cui si trovano anche le rette v_{12} che s'incontrano in un punto K. Infatti, se noi prendiamo la retta p^{III}_{345} allora si ottengono le tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto $Z^{III}_{12,2}$, date dai punti $K^{I}_{15}\,K^{II}_{14}$, $K^{I}_{13}\,K^{II}_{13}$, $K^{I}_{14}\,K^{II}_{15}$, che corrispondono alle coppie di rette $p^{I}_{234}\,p^{II}_{235}$, $p^{I}_{245}\,p^{II}_{245}$, $p^{I}_{235}\,p^{II}_{234}$; ma se noi vogliamo trovare le tre rette v_{12} che s'incontrano p. es. nel punto $Z^{I}_{15,2}$ che corrisponde alla retta p^{I}_{234}, dobbiamo vedere nella tabella al num. 14 quali sono le coppie di rette di Pascal che s'incontrano nei punti P della retta p^{I}_{234}, e troviamo che la retta p^{III}_{345} entra in una di queste coppie, cioè nella coppia $p^{III}_{345}\,p^{V}_{123}$, naturalmente, onde in una delle tre rette v_{12} che passano pel punto $Z^{I}_{15,2}$ si trovano i punti K^{III}_{12}, K^{V}_{45}. Dunque mentre in una retta v_{12} passante per il punto $Z^{III}_{12,2}$ si trova il punto K^{I}_{15}, in una retta v_{12} che passa invece pel punto K^{III}_{12} si trova il punto $Z^{I}_{15,2}$; analogamente si dimostrerebbe che nella stessa retta c'è anche il punto $Z^{II}_{14,2}$. Dunque per

trovare le tre rette v_{12} che s'incontrano in un punto di Kirkman p. es. K^{III}_{12}, si adopera lo stesso metodo che abbiamo usato pel punto $Z^{III}_{12,2}$ degli stessi indici, cioè si prende la retta corrispondente di Pascal p^{III}_{345} e i punti Z_2 che corrispondono alle coppie di rette di Pascal che s'incontrano nei punti P della retta p^{III}_{345} e che sono scritte nella tabella num. 14 sono i punti situati due a due nelle tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto K^{III}_{12}.

Consideriamo ora i triangoli $Z^{VI}_{35,2}\, Z^{IV}_{45,2}\, Z^{V}_{45,2}$; $Z^{VI}_{34,2}\, Z^{IV}_{34,2}\, Z^{V}_{35,2}$ che corrispondono ai triangoli $p^{VI}_{124}\, p^{IV}_{123}\, p^{V}_{123}$; $p^{VI}_{125}\, p^{IV}_{125}\, p^{V}_{124}$ i cui lati sono determinati rispettivamente dalla I e II, dalla II e III figura π, essi sono prospettivi per la retta p^{I}_{345}; infatti le rette $v_{12}\, Z^{VI}_{35,2}\, Z^{IV}_{45,2}$ e $Z^{VI}_{34,2}\, Z^{IV}_{34,2}$ s'incontrano nel punto K^{I}_{34}, così i lati delle altre due coppie $Z^{VI}_{35,2}\, Z^{V}_{45,2}$, $Z^{VI}_{34,2}\, Z^{V}_{35,2}$ e $Z^{IV}_{45,2}\, Z^{V}_{45,2}$, $Z^{IV}_{34,2}\, Z^{V}_{35,2}$ s'incontrano negli altri due punti K della stessa retta p^{I}_{345} (vedasi tabella n. 14). Ora i triangoli diagonali dei due quadrangoli $Z^{III}_{12,2}\, Z^{IV}_{45,2}\, Z^{V}_{45,2}\, Z^{VI}_{35,2}$; $Z^{II}_{12,2}\, Z^{IV}_{34,2}\, Z^{V}_{35,2}\, Z^{VI}_{34,2}$ sono ordinatamente i triangoli 12.34.56; 45.16.23, poichè abbiamo visto che il quadrangolo di punti Z_2 determinato dalla combinazione di due figure ha per triangolo diagonale il loro triangolo Δ_{ik}. Ora questi due triangoli Δ_{12}, Δ_{13} sono pure prospettivi per la retta $p^{I}_{345} = 123456$ e per il centro G_{456}, vuol dire adunque che i due quadrangoli suddetti sono prospettivi e che perciò le rette che congiungono le tre coppie di vertici corrispondenti $Z^{IV}_{45,2}\, Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{45,2}\, Z^{V}_{35,2}$, $Z^{VI}_{35,2}\, Z^{VI}_{34,2}$, ossia le tre rette $z^{IV}_{345,2}$, $z^{V}_{345,2}$, $z^{V}_{345,2}$ s'incontrano nel punto di Steiner G_{456}, dunque si ha:

Teorema XXXII. Le sessanta rette z_2 s'incontrano tre a tre nei venti punti di Steiner.

Ora siccome quei due quadrangoli sono prospettivi così le rette v_{12} seguenti $Z^{III}_{12,2}\, Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{II}_{12,2}\, Z^{IV}_{34,2}$; $Z^{III}_{12,2}\, Z^{V}_{45,2}$, $Z^{II}_{12,2}\, Z^{V}_{35,2}$; $Z^{III}_{12,2}\, Z^{VI}_{35,2}$, $Z^{II}_{12,2}\, Z^{VI}_{34,2}$ s'incontrano in tre punti E della retta di Pascal p^{I}_{345}. Essi sono in tutto l'esagrammo 180, ora questi tre punti E e i tre punti K sopra la retta p^{I}_{345} formano tre coppie di punti in involuzione, essendo essi l'intersezione dei 6 lati di uno dei quadrangoli considerati dunque:

Teorema XXXIII. Le novanta rette v_{12} s'incontrano due a due in 180 punti E posti tre a tre nelle 60 rette di Pascal. I tre punti E e i tre punti K di una retta di Pascal formano tre coppie di punti in involuzione.

Per ciò che si è detto per la formazione delle rette v_{12} che s'incontrano in un punto K od in un punto Z_2 si vede che mentre tre punti di Kirkman sono situati in una retta di Pascal, i punti Z_2 degli stessi indici sono situati in una retta z_2, mentre tre punti K giaciono in una retta di Cayley, i punti Z_2 degli stessi indici sono collocati nella stessa retta di Cayley, mentre tre rette di Pascal s'incontrano in un punto K, le tre rette z_2 degli stessi indici s'incontrano in un punto Z_2, e finalmente quando tre rette di Pascal s'incontrano in un punto di Steiner, le rette z_2 degli stessi indici s'incontrano nel medesimo punto, dunque:

Teorema XXXIV. I sessanta punti Z_2 e le sessanta rette z_2 formano a guisa dei punti K e rette p sei figure π' di dieci punti Z_2 posti tre a tre sopra le dieci rette z_2 corrispondenti. Ciascuna di esse dà luogo ad una conica rispetto alla quale i dieci punti Z_2 sono poli delle dieci rette z_2.

I punti di Steiner e di Salmon, le rette di Cayley-Salmon, di Steiner-Plücker e v_{12} sono comuni ai due sistemi $[Kp]$, $[Zz]_2$. Gli indici $_{12}$ delle rette v_{12} indicano che esse appartengono al 1° e 2° sistema $[Kp]$, $[Zz]_2$.

Per i tre punti $Z^{I}_{12,2}$ $Z^{II}_{12,2}$ $Z^{III}_{12,2}$ che giaciono nella retta di Cayley-Salmon c_{123}, passano rispettivamente le tre rette v_{12} $Z^{I}_{12,2}$ $Z^{V}_{34,2}$, $Z^{II}_{12,2}$ $Z^{V}_{35,2}$, $Z^{III}_{12,2}$ $Z^{V}_{45,2}$, esse formano un triangolo i cui vertici sono tre punti E situati ordinatamente nelle tre rette $p^{III}_{34_2}$, p^{II}_{345}, p^{I}_{345}. Infatti sopra abbiamo visto che le rette $Z^{II}_{12,2}$ $Z^{V}_{35,2}$ e $Z^{III}_{12,2}$ $Z^{V}_{45,2}$ s'incontrano in un punto E della retta p^{I}_{345}, considerando i due quadrangoli di punti Z_2 determinati dalla combinazione delle due figure I II e I III; dunque considerando invece quelli determinati dalla combinazione delle figure I II, II III, ovvero I III, II III si dimostra che le tre rette v_{12} suddette formano un triangolo i cui vertici sono punti E, che appartengono rispettivamente alle tre rette p^{III}_{345}, p^{II}_{345}, p^{I}_{345} che s'incontrano nel punto G_{123}. Onde queste tre rette formano con le tre rette v_{12} un quadrangolo, ove al lato p^{I}_{345} corrisponde come lato opposto la retta v_{12} cha passa pel punto $Z^{I}_{12,2}$ della retta c_{456}, dunque:

Teorema XXXV. Le tre rette di Pascal, che s'incontrano in un punto di Steiner incontrano la retta di Cayley-Salmon a questo corrispondente, in tre punti che con i tre punti Z_2 di essa e che corrispondono a quelle tre rette, formano tre coppie di punti in involuzione.

Se consideriamo il quadrangolo $Z^{III}_{12,2}$ $Z^{IV}_{45,2}$ $Z^{V}_{45,2}$ $Z^{VI}_{35,2}$ determinato dalle due figure I e II, che ha per triangolo diagonale il triangolo Δ_{12} di esse ossia 12.34, 12.56, 34.56, e noi congiungiamo un punto di Steiner conjugato ad uno di quelli comuni alle due figure I e II p.es. G_{456} con le coppie di vertici $Z^{IV}_{45,2}$ $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{VI}_{35,2}$ $Z^{V}_{45,2}$ e con due punti diagonali p. es. con i punti 34.12 e 34 56 si ottengono tre coppie di rette in involuzione, queste tre coppie di rette sono p^{IV}_{345} p^{VI}_{345}, $z^{IV}_{345,2}$ $z^{VI}_{345,2}$, c_{123} z^{V}_{345}, dunque:

Teorema XXXVI. Le due rette di Pascal e le due rette z_2 degli stessi indici, l'altra retta z_2 e la retta di Cayley-Salmon che s'incontrano in un punto di Steiner formano tre coppie di raggi in involuzione.

14. *Tabella per la formazione delle rette v e dei punti* V (1)

Figure π

I	II	III	IV	V	VI
p^{I}_{345} 12.45 p^{II}_{145} p^{III}_{235} 23.56 p_{134} p_{245} 34.61 p_{135} p_{234}	p^{II}_{345} 12.36 p^{I}_{145} p^{III}_{135} 43.52 p_{134} p_{134} 56.14 p_{135} p_{145}	p^{III}_{345} 16.25 p^{I}_{234} p^{II}_{235} 63.54 p_{245} p_{245} 32.41 p_{235} p_{234}	p^{IV}_{345} 12.43 p^{V}_{145} p^{VI}_{235} 25.36 p_{134} p_{245} 54.61 p_{135} p_{234}	p^{V}_{345} 14.63 p^{IV}_{134} p^{VI}_{145} 45.32 p_{134} p_{124} 56.21 p_{145} p_{135}	p^{VI}_{345} 16.23 p^{V}_{235} p^{IV}_{234} 65.34 p_{245} p_{245} 52.41 p_{234} p_{235}
p_{245} 16.24 p^{III}_{245} p^{VI}_{245} 63.45 p_{345} p_{124} 32.51 p_{234} p_{145}	p_{245} 13.25 p^{III}_{145} p^{VI}_{234} 36.54 p_{345} p_{124} 62.41 p_{134} p_{134}	p_{245} 16.42 p^{I}_{245} p^{IV}_{245} 65.23 p_{345} p^{IV}_{124} 54.31 p_{234} p_{145}	p_{245} 13.25 p^{III}_{145} p^{VI}_{145} 34.56 p_{124} p_{345} 42.61 p_{245} p_{245}	p_{245} 15.23 p^{III}_{234} p^{VI}_{145} 56.34 p_{124} p_{345} 62.11 p_{134} p_{134}	p_{245} 16.42 p^{I}_{245} p^{IV}_{245} 63.25 p_{124} p_{345} 34.51 p_{145} p_{234}
p_{235} 14.32 p^{III}_{345} p^{IV}_{123} 45.26 p_{234} p_{135} 53.61 p_{235} p_{235}	p_{235} 14.53 p^{III}_{135} p^{V}_{235} 42.36 p_{145} p_{135} 25.61 p_{345} p_{123}	p_{235} 12.54 p^{I}_{345} p^{VI}_{123} 23.46 p_{234} p_{135} 35.61 p_{235} p_{235}	p_{235} 14.52 p^{I}_{123} p^{VI}_{345} 43.26 p_{135} p_{234} 35.61 p_{235} p_{235}	p_{235} 14.35 p^{II}_{235} p^{VI}_{135} 42.56 p_{135} p_{145} 23.61 p_{123} p_{345}	p_{235} 16.35 p^{III}_{235} p^{IV}_{235} 64.52 p_{135} p_{234} 43.12 p_{123} p_{345}
p_{234} 13.54 p^{III}_{245} p^{V}_{134} 32.46 p_{239} p_{234} 25.61 p_{345} p_{123}	p_{234} 14.32 p^{III}_{345} p^{IV}_{123} 46.25 p_{135} p_{234} 63.51 p_{134} p_{134}	p_{234} 16.34 p^{I}_{345} p^{V}_{125} 62.45 p_{235} p_{145} 23.51 p_{245} p_{245}	p_{234} 16.32 p^{II}_{123} p^{VI}_{345} 64.25 p_{234} p_{245} 43.51 p_{134} p_{245}	p_{234} 13.56 p^{I}_{134} p^{VI}_{134} 23.64 p_{234} p_{135} 25.41 p_{123} p_{345}	p_{234} 13.52 p^{II}_{245} p^{IV}_{245} 34.62 p_{145} p_{235} 45.61 p_{125} p_{345}
p_{145} 12.36 p^{II}_{345} p^{VI}_{125} 24.65 p_{135} p_{145} 43.51 p_{134} p_{245}	p_{145} 13.56 p^{I}_{134} p^{VI}_{134} 34.62 p_{135} p_{234} 45.21 p_{345} p_{123}	p_{145} 13.52 p^{II}_{245} p^{IV}_{245} 36.24 p_{235} p_{145} 65.41 p_{345} p_{125}	p_{145} 13.54 p^{III}_{245} p^{V}_{134} 36.42 p_{145} p_{135} 65.21 p_{125} p_{345}	p_{145} 12.34 p^{III}_{123} p^{IV}_{345} 26.45 p_{234} p_{135} 63.51 p_{134} p_{134}	p_{145} 14.36 p^{I}_{125} p^{V}_{345} 42.65 p_{145} p_{235} 23.51 p_{245} p_{245}
p_{135} 14.56 p^{II}_{345} p^{IV}_{125} 43.62 p_{145} p_{235} 35.21 p_{135} p_{135}	p_{135} 12.35 p^{I}_{135} p^{V}_{135} 24.56 p_{145} p_{235} 43.61 p_{345} p_{125}	p_{135} 14.53 p^{II}_{235} p^{VI}_{135} 46.52 p_{234} p_{235} 63.21 p_{345} p_{125}	p_{135} 12.35 p^{I}_{135} p^{V}_{135} 26.54 p_{235} p_{145} 63.41 p_{125} p_{345}	p_{135} 16.54 p^{II}_{125} p^{IV}_{345} 63.42 p_{235} p_{145} 35.21 p_{135} p_{135}	p_{135} 14.53 p^{III}_{135} p^{V}_{235} 46.32 p_{235} p_{234} 12.56 p_{125} p_{345}
p_{134} 13.65 p^{II}_{145} p^{V}_{234} 34.52 p_{345} p_{124} 46.21 p_{134} p_{134}	p_{134} 12.46 p^{I}_{134} p^{IV}_{134} 23.56 p_{345} p_{124} 34.51 p_{145} p_{234}	p_{134} 15.63 p^{II}_{234} p^{V}_{145} 52.34 p_{345} p_{124} 26.41 p_{245} p_{245}	p_{134} 12.64 p^{II}_{134} p^{V}_{134} 23.45 p_{124} p_{345} 36.51 p_{234} p_{145}	p_{134} 13.45 p^{I}_{234} p^{IV}_{145} 36.52 p_{124} p_{345} 64.21 p_{134} p_{134}	p_{134} 13.65 p^{II}_{145} p^{V}_{234} 32.54 p_{124} p_{345} 26.41 p_{245} p_{245}
p_{125} 15.62 p^{IV}_{123} p^{VI}_{124} 53.24 p_{125} p_{125} 36.41 p_{135} p_{145}	p_{125} 16.45 p^{V}_{125} p^{VI}_{234} 62.53 p_{125} p_{123} 24.31 p_{123} p_{124}	p_{125} 12.65 p^{IV}_{145} p^{VI}_{135} 24.53 p_{125} p_{125} 46.31 p_{124} p_{123}	p_{125} 13.62 p^{I}_{123} p^{III}_{124} 35.24 p_{125} p_{125} 56.41 p_{135} p_{245}	p_{125} 15.42 p^{II}_{123} p^{III}_{124} 53.26 p_{125} p_{123} 34.61 p_{135} p_{234}	p_{125} 15.64 p^{I}_{124} p^{III}_{123} 53.42 p_{125} p_{125} 36.21 p_{145} p_{135}
p_{124} 15.46 p^{V}_{124} p^{VI}_{125} 52.63 p_{134} p_{245} 24.31 p_{123} p_{124}	p_{124} 15.62 p^{IV}_{123} p^{VI}_{124} 54.23 p_{134} p_{134} 46.31 p_{124} p_{123}	p_{124} 15.24 p^{IV}_{124} p^{V}_{125} 56.53 p_{245} p_{245} 62.31 p_{125} p_{124}	p_{124} 15.42 p^{II}_{123} p^{III}_{124} 56.23 p_{134} p_{145} 64.31 p_{124} p_{125}	p_{124} 15.64 p^{I}_{124} p^{III}_{123} 52.43 p_{134} p_{134} 26.31 p_{123} p_{124}	p_{124} 15.26 p^{I}_{125} p^{II}_{124} 54.63 p_{245} p_{245} 42.31 p_{124} p_{125}
p_{123} 14.25 p^{IV}_{235} p^{V}_{234} 46.53 p_{123} p_{123} 62.31 p_{125} p_{124}	p_{123} 15.24 p^{IV}_{124} p^{V}_{125} 53.46 p_{123} p_{123} 32.61 p_{234} p_{235}	p_{123} 12.43 p^{V}_{145} p^{VI}_{235} 26.35 p_{125} p_{123} 64.51 p_{124} p_{125}	p_{123} 15.36 p^{I}_{125} p^{II}_{124} 14.32 p_{235} p_{234} 53.46 p_{123} p_{123}	p_{123} 16.25 p^{I}_{234} p^{II}_{235} 64.53 p_{123} p_{123} 42.31 p_{124} p_{125}	p_{123} 12.45 p^{II}_{145} p^{III}_{235} 26.53 p_{125} p_{123} 64.31 p_{124} p_{125}

(1) Vedremo tosto che cosa sono i punti V.

Vediamo da questa tabella, come già abbiamo osservato al num. 13 che nello stesso modo che si trovano le tre rette v_{12} che s'incontrano in un punto Z_2, si trovano anche le tre rette v_{12} che s'incontrano in un punto K. Mentre p. es. pel punto $Z^{III}_{12,2}$ passano le rette v_{12} cioè $K^{I}_{15}\,K^{II}_{14}$, $K^{I}_{14}\,K^{II}_{15}$, $K^{I}_{13}\,K^{II}_{13}$, pel punto K^{III}_{12} invece passano le tre rette $Z^{I}_{15,2}\,Z^{II}_{14,2}$, $Z^{I}_{14}\,Z^{II}_{15}$, $Z^{I}_{13}\,Z^{II}_{13}$, che sono rette v_{12}. Dunque mentre i triangoli $K^{II}_{13}\,K^{II}_{15}\,K^{II}_{14}$, $K^{I}_{13}\,K^{I}_{14}\,K^{I}_{15}$ sono prospettivi pel centro $Z^{III}_{12,2}$ e per la retta g_{12} (vedi num. 10), i triangoli $Z^{II}_{13,2}\,Z^{II}_{15,2}\,Z^{II}_{14,2}$, $Z^{I}_{13,2}\,Z^{II}_{4,2}\,Z^{I}_{15,2}$ sono invece prospettivi per la retta g_{12} e per il centro K^{III}_{12}, come è facile di vedere, dunque mentre due figure π del sistema $[Kp]$ determinano quattro punti Z appartenenti rispettivamente a quattro delle figure π' così due figure π' prese insieme determinano quattro punti K, che appartengono rispettivamente a quattro delle figure π perchè due figure π' determinano 6 rette v_{12} che s'incontrano tre a tre nei quattro punti K suddetti, dunque prese cinque figure π esse determinano completamente una figura π' e viceversa:

Teorema XXXVII. Cinque figure π (π') determinano la sesta π' (π).

Se noi consideriamo la retta $v_{12} = K^{I}_{15}\,K^{II}_{14}\,Z^{III}_{12,2}\,Z^{V}_{45,2}$, vediamo che essa corrisponde in certa guisa (come già il lettore se ne sarà accorto) al punto d'intersezione $P_{16.25}$ delle due rette $p^{V}_{123}, p^{III}_{345}$, che corrispondono ai punti $Z^{V}_{45,2}$, $Z^{III}_{12,2}$ di essa, ovvero al punto d'incontro delle due rette $z^{I}_{234,2}$, $z^{II}_{235,2}$ che chiamo $V_{16.25,23}$ (1), onde noi rappresenteremo quella retta v_{12} con gli indici dello stesso punto P o V cioè col simbolo $v_{16.25,12}$. Ora invece la retta $v_{12} = K^{III}_{12}\,K^{V}_{45}\,Z^{I}_{15,2}\,Z^{II}_{14,2}$ corrisponde al punto d'incontro delle due rette $z^{III}_{345,2}\,z^{V}_{123,2}$ che chiamo $V'_{16.25,23}$ per la qual cosa rappresento la retta $v_{12} = K^{III}_{12}\,K^{V}_{45}\,Z^{I}_{15,2}\,Z^{II}_{14,2}$ con lo stesso simbolo cioè con $v'_{16.25,12}$ Due tali rette v_{12}, come p. es. le due rette v_{12} considerate siano chiamate rette degli stessi indici nelle quali adunque gli indici dei punti K e Z_2 dell'una sono eguali agli indici dei punti Z_2 e K dell'altra. Nel caso che le adoperiamo tutte e due le distingueremo con un apice. Finora noi abbiamo usati i punti P d'incontro dei 15 lati fondamentali senza metterci accanto la lettera P, ora lo facciamo per distinguerli dai punti V.

Se consideriamo le due rette $K^{I}_{15}\,K^{II}_{14}\,Z^{III}_{12,2}\,Z^{V}_{45,2} = v_{16.25,12}$ e $K^{I}_{34}\,K^{II}_{35}\,Z^{VI}_{35,2}\,Z^{IV}_{45,2} = v'_{15.62,12}$ si vede ch'esse s'incontrano nel punto $P_{12.56}$ come l'abbiamo dimostrato (num. 10 fig. 3). Se noi rappresentiamo adunque con i numeri 1 2 5 6 i vertici di un quadrangolo, mentre il punto $P_{12.56}$ è un punto diagonale di esso, gli altri due cioè 15.62, 16.25 ci danno gli indici delle due rette v_{12} che passano per il punto $P_{12.56}$.

Potremo anche conoscere, data una retta v_{12} p. es. la $K^{I}_{34}\,K^{II}_{35} = v_{15.62,12}$, il punto P che è collocato in essa. Infatti, per ciò che si disse poco fa, essa potrà passare o pel punto $P_{12.56}$ ovvero pel punto $P_{16.25}$, ma siccome gli indici romani dei suoi due punti di Kirkman sono I e II, così vuol dire che il punto P in essa contenuto è un vertice del triangolo Δ_{12} delle due figure I e II cioè dev'essere il punto $P_{12.56}$. L'altra retta di eguali indici passerà pel punto $P_{16.25}$

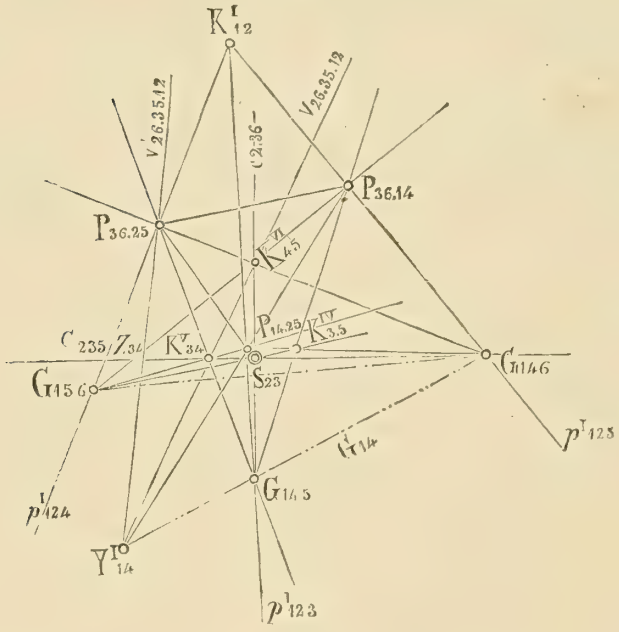
(1) Vedremo meglio in seguito che cosa siano i punti V_{23} e perciò comprenderemo meglio questa corrispondenza.

15. Ritorniamo alla fig. 2 che trasporto nella fig. 2ª. Nelle tre rette p^{I}_{124}, p^{I}_{123}, p^{I}_{125} che s'incontrano nel punto K^{I}_{12} sono situati i vertici dei triangoli $P_{36.25}$ $P_{14.25}$ $P_{36.14}$ (vedi num. 6) e G_{156} G_{145} G_{146} due a due, ora questi due triangoli sono prospettivi pel centro K^{I}_{12}, se noi adunque congiungiamo i vertici di essi a guisa del teorema IV abbiamo:

$$G_{146} - P_{36.25} = p^{VI}_{245} \; ; \; G_{146} - P_{14.25} = p^{IV}_{235}$$
$$G_{145} - P_{36.25} = p^{V}_{134} \; ; \; G_{145} - P_{36.14} = p^{IV}_{135}$$
$$G_{156} - P_{14.25} = p^{V}_{234} \; ; \; G_{156} - P_{36.14} = p^{VI}_{145}$$

Il terzo triangolo prospettivo ai due dati secondo il teorema IV è dunque il triangolo K^{IV}_{35} K^{VI}_{45} K^{V}_{34}, onde la retta $v_{26.35.12} = K^{VI}_{45}$ K^{V}_{34} $Z^{III}_{45.2}$ $Z^{II}_{34.2}$, il lato

Fig. 2 a



fondamentale 14 che unisce i due punti $P_{36.14}$, $P_{34.25}$ e la retta di Steiner-Plücker g_{14} s'incontrano in un punto che chiamo Y'_{14}. A questo punto degli indici 14 del lato fondamentale, che è il terzo lato del triangolo Δ_{14} di cui due lati sono 26, 35, che formano gli indici della retta v_{12} sopra considerata. Il triangolo $Z^{VI}_{45.2}$ $Z^{V}_{34.2}$ $Z^{IV}_{35.2}$ è prospettivo col triangolo G_{145} G_{146} G_{156} pel centro S_{23}, perchè le rette che congiungono rispettivamente le coppie di punti $Z^{VI}_{45.2}$ G_{145}, $Z^{V}_{34.2}$ G_{146}, $Z^{IV}_{35.2}$ G_{156} sono le rette di Cayley-Salmon c_{236}, c_{235}, c_{234}: infatti noi sappiamo che mentre la retta di Cayley-Salmon p.es. c_{236} passa pel punto K^{VI}_{45} essa passa anche per il punto Z_2 degli stessi indici secondo il teorema XXVI. Il triangolo $Z^{VI}_{45.2}$ $Z^{V}_{34.2}$ $Z^{IV}_{35.2}$ è anche prospettivo col triangolo $P_{14.25}$ $P_{36.14}$ $P_{36.25}$ pel centro $Z^{I}_{12.2}$, perchè le rette che congiungono i punti $Z^{VI}_{45.2}$ $P_{14.25}$, $Z^{V}_{34.2}$ $P_{36.14}$, $Z^{IV}_{35.2}$ $P_{36.25}$ sono le tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto $Z^{I}_{12.2}$ (vedasi tabella num. 14), e siccome infine il triangolo $P_{14.25}$ $P_{36.14}$ $P_{36.25}$ è prospettivo col triangolo dei punti G_{145}, G_{146}, G_{156}, pel centro K^{I}_{12} (vedi fig. 2ª) e i tre centri di prospettiva S_{23}, $Z^{I}_{12.2}$, $K^{I}_{12.2}$ sono situati nella retta c_{123}, così quei tre triangoli hanno due a due la stessa retta di prospettiva, perchè i vertici di essi si corrispondono in modo ciclico, perciò la retta $Z^{VI}_{45.2}$ $Z^{V}_{34.2}$ K^{III}_{45} $K^{II}_{34} = v'_{26.35.12}$ passa pure pel punto Y'_{14}. Data una retta v_{12} p. es. la retta $v_{26.35.12} = K^{VI}_{45}$ K^{V}_{34}, per trovare in quale retta di Steiner-Plücker essa s'incontra con la retta di eguali indici v'_{12}, basta considerare i punti di Steiner delle rette di Pascal, che passano rispettivamente per ciascun dei punti K^{VI}_{45}, K^{V}_{34} della retta v_{12} allora vediamo che due rette di Pascal dell'uno, cioè p^{VI}_{345}, p^{VI}_{145}, incontrano

ordinatamente due rette di Pascal dell'altro cioè p^{V}_{345}, p^{V}_{234} nei punti G_{456}, G_{156}, mentre nelle altre due rette p^{VI}_{245}, p^{V}_{134} che passano rispettivamente per quei punti K sono situati i punti G_{146}, G_{145}, onde la retta che congiunge questi due punti ossia la retta g_{14} è la retta di Steiner-Plücker richiesta (vedi fig. 2ª). Ovvero più semplicemente, essendo data la retta $v_{26.35.12}$ suddetta si sceglie il lato 14, che con i lati fondamentali indicati dagli indici 26.35 forma il triangolo $\Delta_{14} = 14.26.35$, ora questo triangolo è il triangolo Δ delle due figure I IV, dunque la retta di Steiner-Plücker che è a queste comune, cioè la retta g_{14} è la retta richiesta. Da qui si vede anche che una retta g incontra i lati del triangolo Δ_{ik} della combinazione delle due figure π, a cui essa è comune, in tre punti Y. Così data una retta di Steiner-Plücker p. es. la retta g_{14} potremo trovare quali siano i tre punti Y situati in essa e da quali rette v_{12} sono dati. Infatti si può considerare il triangolo $\Delta_{14} = 14.26.35$ e i punti Y della retta g_{14} sono precisamente i punti d'incontro di essa con i lati di questo triangolo. Si possono trovare anche le rette v_{12} che s'incontrano in essi. Infatti, consideriamo il punto Y'_{14} d'incontro della retta g_{14} col lato 14, le retto v_{12} che passano per esso sono le due rette $v_{26.35.12}$ e $v'_{26.35.12}$; dati gli indici di esse, che come si vede sono dati dai due lati 26, 35 del triangolo Δ_{14}, è facile di trovarne i punti K situati su di esse per le cose dette al num. 14 e per la tabella di detto numero. Ovvero possiamo trovare i punti Y della retta g_{14} nel seguente modo, che useremo anche in seguito. Prendiamo i punti G_{146}, G_{145} di essa, guardiamo nella tabella dei punti di Steiner e vediamo che le rette della stessa figura π che passano per essi sono le rette p^{I}_{123}, p^{I}_{125} ovvero p^{IV}_{135}, p^{VI}_{235}; se scegliamo la prima coppia, siccome essa ci dà il punto K^{I}_{12} pel quale passa anche la retta p^{I}_{124}, il triangolo Δ_{ik} che ha i suoi vertici nelle tre rette p^{I}_{123}, p^{I}_{125} p^{I}_{124} è il triangolo $P_{14.25}$ $P_{36.14}$ $P_{36.25}$, dunque il lato 14 risguardato come retta di congiunzione dei punti $P_{14.25}$ e $P_{36.14}$ incontra la retta g_{14} nel punto Y'_{14} pel quale passa la retta $v_{26.35.12} = K^{VI}_{45}$ K^{V}_{34}, che contiene il punto $P_{32.56}$ e che si trova nel modo indicato già al principio di questo numero. Se si considera invece la seconda coppia di rette, cioè p^{IV}_{135} p^{IV}_{235}, è facile assicurarsi che si ottiene lo stesso lato 14 risguardato pure come retta di congiunzione degli stessi due punti $P_{14.25}$, $P_{36.14}$. Se si prendono invece i punti G_{134}, G_{124} della retta g_{14} si ottiene nel modo suddetto lo stesso lato 14, risguardato però come retta di congiunzione dei due punti $P_{14.56}$ e $P_{14.32}$ e la retta di eguali indici $v'_{26.35.12} = Z^{VI}_{45}$ Z^{V}_{34}, che contiene il punti $P_{36.25}$. Come si è visto, si sono separati i quattro punti di Steiner della retta g_{14} in due coppie cioè G_{145} G_{146} , G_{134} G_{124} ed abbiamo ottenuto il punto Y'_{14}. Ora siccome i quattro punti G della retta g_{14} possono esser aggruppati in due coppie in tre maniere diverse, così otterremo per questi tre aggruppamenti i tre punti Y della retta g_{14}. Abbiamo visto anche che il lato 14 risguardato come retta di congiunzione dei punti $P_{14.25}$ $P_{36.14}$ e $P_{14.56}$ $P_{14.32}$ passa pel punto Y'_{14}, questi punti P sono però dati facilmente anche dal triangolo Δ_{14} cioè 14.26.35 come è facile di scorgere. Ci rimane però da considerare il lato 14 come retta di congiunzione dei punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$. Anche qui facilmente si potrebbe trovare il triangolo Δ_{ik}, tale che questi punti si deducessero da esso nello stesso modo che i punti $P_{14.25}$, $P_{36.14}$ si deducono dal triangolo $\Delta_{14} = 14.26.35$; e la retta di Steiner-Plücker, appartenente alla combinazione delle due figure π, che hanno per triangolo Δ il triangolo Δ_{ik} trovato, taglierebbe il lato 14 considerato

come retta che unisce il punto $P_{14.35}$ $P_{14.26}$, in un punto Y. Ora il triangolo Δ_{ik} cercato può essere o il triangolo $\Delta_{23} = 14.25.36$, ovvero il triangolo $\Delta_{56} = 14.23.56$. Dunque gli altri due punti del lato 14 sono dati su di esso dalle rette g_{23} e g_{56}. Ovvero per trovare i punti Y del lato 14, quando esso si risguarda come retta che unisce i punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$, basta trovare due rette della stessa figura π, che passino per essi.

Nel punto $P_{14.35}$ s'incontrano le rette p^{II}_{235}, p^{III}_{135}, p^{V}_{235}, p^{VI}_{135}
» $P_{14.26}$ » p^{II}_{245}, p^{III}_{134}, p^{VI}_{134}, p^{V}_{245}

(vedi tabella delle 6 figure π).

Dunque abbiamo le rette p^{II}_{235}, p^{II}_{245} ovvero p^{III}_{134}, p^{III}_{135} che passano rispettivamente per essi e che appartengono alle figure π II e III. Nelle due prime rette giaciono i punti G_{235}, G_{236}, come anche nelle seconde (vedi sempre tabella dei punti di Steiner). Le prime s'incontrano nel punto K^{II}_{25}, pel quale passa anche la retta p^{II}_{125} che contiene il punto G_{256}, onde la retta g_{23} taglierà il lato 14 in un altro punto Y_{14}, che indico con Y''_{14}. Il triangolo Δ_{ik} che ha i suoi vertici nelle tre rette p^{II}_{235}, p^{II}_{245}, p^{II}_{125} è il triangolo Δ_{23} 14.25.36. Si vede pure coi metodi già indicati che la retta $v_{25.36.12} = K^{V}_{25}\ K^{VI}_{13}$, che contiene il punto $P_{23.56}$ passa per questo punto Y''_{14}, quando si consideri la retta g_{23} data dai punti G_{235}, G_{236}. Se noi consideriamo invece gli altri due punti G_{234}, G_{123} di essa, si ottengono e la retta v_{12} di eguali indici cioè $v'_{25.36.12} = Z^{VI}_{25.2}\ Z^{IV}_{13.2}$, che passa pel punto $P_{35.16}$, ed il lato 14 dato però dai punti $P_{14.23}$, $P_{14.56}$, che s' incontrano nello stesso punto Y''_{14}. Finalmente le rette $v_{23.56.12} = K^{I}_{12}\ K^{IV}_{35}$, sulla quale è situato $P_{26.35}$ e $v'_{23.56.12} = Z^{I}_{12}\ Z^{IV}_{35}$ nella quale è collocato il punto $P_{26.35}$ s'incontrano col lato 14, dato rispettivamente dalle coppie di punti $P_{14.25}$, $P_{14.36}$ e $P_{14.26}$, $P_{14.35}$ nel punto Y'''_{14} della retta g_{56}. Da ciò che precede si conclude che le sei rette v_{12} che passano due a due per i vertici del triangolo diagonale del quadrangolo fondamentale 2356 cioè le rette

$v_{36.25.12} = K^{V}_{25}\ K^{VI}_{13}$; $v_{35.26.12} = K^{VI}_{45}\ K^{V}_{34}$ che s'incontrano in $P_{23.56}$
$v_{23.56.12} = K^{I}_{12}\ K^{IV}_{35}$; $v'_{36.25.12} = Z^{V}_{25.2}\ Z^{VI}_{13.2}$ » $P_{26.35}$
$v'_{23.56.12} = Z^{I}_{12.2}\ Z^{IV}_{35.2}$; $v'_{26.35.12} = Z^{VI}_{15.2}\ Z^{V}_{34.2}$ » $P_{36.25}$

s'incontrano due a due nel lato rimanente 14 fondamentale. Abbiamo detto che i punti d'incontro di una retta g coi lati del triangolo Δ_{ik} delle due figure, alle quali essa appartiene, sono punti Y, come abbiamo visto (fig. 3); per questi punti passano due a due le sei rette m determinate dalle due figure (vedi num. 12 teorema XXX). Osserviamo nella fig. 3 che i punti d' incontro delle due rette v_{12} cioè $K^{I}_{14}\ K^{II}_{15}$, $K^{II}_{34}\ K^{I}_{35}$ tagliano per la ragione suesposta il lato 56 in due punti Y_{56} che formano un gruppo armonico con la coppia di punti $P_{12.56}$, $P_{34.56}$ (vedi teorema XXIII), dunque in un lato p. es. 56 le coppie di punti $P_{12.56}$, $P_{34.56}$; $P_{13.56}$ $P_{24.56}$; $P_{14.56}$, $P_{32.56}$ formano rispettivamente tre gruppi armonici con le coppie formate dai tre punti Y_{56} del lato 56, ossia dei punti d'incontro di esso con le tre rette g di quelle combinazioni di due figure il cui triangolo Δ_{ik} ha per lato il lato fondamentale 56.

Teorema XXXVIII. Le sei rette v_{12} che passano per i tre vertici del triangolo diagonale di un quadrangolo, formato da quattro punti fondamentali p. es. 1236, s'incontrano due a due in tre punti « Y_{45} » del lato fondamentale rimanente 45. Questi punti Y

sono situati rispettivamente nelle tre rette di Steiner-Plücker che sono date da quelle combinazioni di due figure π, il cui triangolo Δ_{ik} contiene il lato 45. I punti Y sono quarantacinque in tutto l'esagrammo, essi sono situati tre a tre nelle 15 rette di Steiner-Plücker e nei 15 lati fondamentali. Per essi passano due a due le novanta rette m. I sei punti P di un lato fondamentale formano tre coppie di punti conjugati armonici rispetto alle tre coppie di punti Y del lato (Vedi teorema XXV).

Osserviamo che la retta $v'_{26.35,12} = Z^{VI}_{45,2}\ Z^{V}_{34,2}$ contiene il punto $P_{36.25}$ della retta p^{I}_{124} (fig. 2ª) quindi le due coppie di rette $v'_{26.35,12}$, $Y'_{14}\ S_{23}$ e $v_{26.35,12}\ g_{14}$ formano due coppie di raggi di un gruppo armonico intorno al punto Y'_{14}. Infatti, i punti $P_{36.25}$, S_{23}, Y'_{14} sono i vertici del triangolo diagonale del quadrangolo $K^{VI}_{45}\ K^{V}_{34}\ G_{145}\ G_{146}$. Ora il lato $G_{146}\ S_{23}$ è la retta di Cayley-Salmon c_{235}; questa taglia il fascio armonico considerato nelle due coppie di punti conjugati $Z^{V}_{34,2}\ S_{23}$; $K^{V}_{34}\ G_{146}$, dunque:

Teorema XXXIX. In una retta di Cayley-Salmon un punto di Salmon e il punto Z_2, che è vertice del quadrangolo di punti Z_2 determinato dalla combinazione delle due figure π a cui appartiene il punto di Salmon secondo il teorema XXVIII, il punto di Kirkman degli stessi indici ed il punto di Steiner della retta di Cayley-Salmon, formano due coppie di punti conjugati armonici.

Se si unisce (fig. 2ª) il punto Y'_{14} con i punti K^{I}_{12}, K^{IV}_{35}, che formano con i due punti K^{VI}_{45}, K^{V}_{34} il quadrangolo, i cui vertici sono situati rispettivamente sulle rette di Cayley-Salmon che passano pel punto S_{23} comune alle due figure II e III, si ottengono due rette m che formano con la retta (1) g_{14} e il lato 14 un gruppo armonico, dunque:

Teorema XL. Le due rette m intorno ad un punto Y il lato fondamentale e la retta g formano un gruppo armonico.

16. Supponiamo che le rette z_2 in guisa delle due rette di Pascal s'incontrino quattro a quattro in quarantacinque punti V, i cui indici siano rispettivamente identici a quelli dei punti P, cioè siccome per il punto $P_{36.14}$ passano le rette p^{I}_{125}, p^{V}_{245}, p^{VI}_{145}, p^{IV}_{135}, così pel punto $V_{36.14}$ s'incontreranno secondo la nostra ipotesi le rette $z^{I}_{125,2}$, $z^{V}_{245,2}$, $z^{VI}_{145\ 2}$, $z^{IV}_{135,2}$. Consideriamo la figura 2ª rispetto al punto $Z^{I}_{12,2}$ invece del punto K^{I}_{12}, vale a dire consideriamo la fig. 2ª formata dalle tre rette $z^{I}_{123,2}$, $z^{I}_{124,2}$, $z^{I}_{125,2}$, allora si dimostra che le rette che congiungono le coppie di punti $V_{36.14}\ V_{25.14}\ V_{14.56}$, $V_{14.32}$ s'incontrano con la retta $v_{12} = Z^{VI}_{45,2}\ Z^{VI}_{34,2}$ e quella di eguali indici nel punto Y'_{14} della retta g_{14}. Infatti la dimostrazione è analoga a quella data al num. 16, fig. 2ª. Ora per la stessa ragione si dimostra che le

(1) Per vedere meglio come queste siano due rette m consideriamo la fig. 3 e consideriamo la retta g_{12} data dai punti G_{123}, G_{124}. Le due rette p della II figura π che passano per essi sono p''_{134}, p''_{345} che s'incontrano nel punto K''_{34}. In queste sono collocati i punti $P_{23.56}$, $P_{14.56}$ dunque otteniamo il punto Y_{56} sopra g_{12}. È facile ora di vedere che i vertici del triangolo diagonale del quadrangolo $P_{23.56}\ P_{14.56}\ G_{123}\ G_{124}$ sono i punti Y_{56}, K''_{34}, K'_{35}, ove i due lati $Y_{56}\ K''_{34}$, $Y_{56}\ K'_{35}$ sono precisamente due rette m.

rette $V_{14.35} - V_{14.26}$, $V_{14.32} - V_{14.56}$ s'incontrano con la retta $v_{12} = Z^{V}_{25.2}\ Z^{VI}_{13.2}$ nel punto Y''_4, come l'abbiamo dimostrato per il lato fondamentale 14, considerato come retta di congiunzione dei punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$, e $P_{14.32}$, $P_{14.56}$, dunque ciò vuol dire che la retta $V_{14.32} - V_{14.56}$ dovendo passare per Y'_{14} e Y''_{14}, per i quali passa anche il lato fondamentale 14, cade nel lato fondamentale 14, cioè i sei punti V, i cui indici hanno in comune le cifre unite 14 devono cadere per la nostra ipotesi nel lato 14, questo deve allora avvenire per tutti gli altri punti V, cioè essi cadranno sei a sei nei quindici lati fondamentali, cioè il secondo sistema $[Zz]_2$ coinciderà col primo, ciò che è impossibile, dunque vediamo che le rette z_2 non si possono incontrare quattro a quattro in 45 punti come le rette di Pascal degli stessi indici. Abbiamo dimostrato che a quattro rette di Pascal che s'incontrano in un punto P non corrispondono quattro punti Kirkman situati in linea retta, abbiamo dimostrato ciò considerando i due triangoli:

$$K^{II}_{13}\ K^{II}_{15}\ K^{II}_{14},\quad K^{I}_{13}\ K^{I}_{14}\ K^{I}_{15}$$

prospettivi pel centro $Z^{III}_{12.2}$ (vedi num. 10). Se fossero stati prospettivi pel punto $K^{III}_{12.2}$ allora i punti Z_2 sarebbero caduti rispettivamente nei punti K e le rette v_{12} si sarebbero ridotte a quarantacinque in tutto l'esagrammo, corrispondendo così ai punti P. Ora adunque consideriamo i due triangoli formati dalle rette z_2 corrispondenti a quei punti di Kirkman cioè

$$z^{II}_{245.2}\ z^{II}_{234.2}\ z^{II}_{235.2};\quad z^{I}_{245.2}\ z^{I}_{235.2}\ z^{I}_{234.2}$$

questi due triangoli sono prospettivi per il centro S_{12}, perchè le rette che congiungono i punti $Z^{II}_{24.2}\ Z^{I}_{25.2}$, $Z^{II}_{25.2}\ Z^{I}_{24.2}$, $Z^{II}_{23.2}\ Z^{I}_{23.2}$ sono le rette c_{125}, c_{124}, c_{126}, onde essi sono prospettivi per una retta che corrisponde al punto $Z^{III}_{12.2}$ ma che non è però la retta $z^{III}_{345.2}$, perchè allora le rette z_2 dovrebbero incontrarsi nel modo suddetto in quarantacinque punti V quattro a quattro, ciò che si è dimostrato impossibile. Questa retta di prospettiva sia chiamata $z^{III}_{345.3}$, che corrisponde in certo modo al punto $Z^{III}_{12.2}$ (1). È evidente adunque che queste rette z_3 sono 60 e che s'incontrano due a due in 90 punti che chiamo V_{23} pei quali passano due a due le rette z_2. Questi 90 punti V_{23} corrispondono alle 90 rette v_{12}, mentre p. es. in una retta v_{12} sono situati due punti K e due punti Z_2, nel punto V_{23} corrispondente s'incontrano le due rette z_2 che corrispondono ai due punti di Kirkman e le due rette z_3 che corrispondono nel modo suddetto ai due punti Z_2 di essa retta v_{12}. È evidente che come si ottengono i punti Z_2 dai punti K e viceversa dalla tabella per la formazione delle rette v_{12}, così si ottengono dalla stessa tabella le rette z_3 dalle rette z_2 e viceversa. Data p. es. la retta $z^{III}_{345.3}$ e si vuol vedere da quali rette z_2 siano dati i tre punti V_{23} che sono situati in essa, basta considerar la tabella num. 14 e considerare la retta p^{III}_{345} come retta $z^{III}_{345.3}$, le rette z_2 che s'incontrano due a due nei 3 punti V_{23} richiesti sono $z^{I}_{234.2}\ z^{II}_{235.2}$, $z^{I}_{245.2}\ z^{II}_{245.2}$, $z^{I}_{235.2}\ z^{II}_{234.2}$. Le stesse osservazioni che abbiamo fatto per passare dai punti K ai punti Z_2 e viceversa (vedi num. 13) si possono fare ancora per passare dalle rette z_2 alle rette z_3 e viceversa. È evidente

(1) Bisogna cercare di distinguer bene le corrispondenze che passano fra questi punti K e Z_2 con le rette p, z_2 e z_3, perchè io me ne servo solamente per mostrare come si formino gli altri sistemi $[Zz]_3$, $[Zz]_4$ ecc.

poi che queste rette z_3 non possono cadere con le rette p, perchè le rette z_2 dovrebbero cadere pure con le rette p; dunque:

Teorema XLI. Le due rette z_2 che corrispondono a due punti K situati in una retta v_{12} s'incontrano in un punto « V_{23} » pel quale passano due rette z_3 d'un terzo sistema $[Zz]_3$, che corrispondono ai punti Z_2 situati nella retta v_{12}. I punti V_{23} sono 90 in tutto l'esagrammo. Le rette p, z_2, z_3 che corrispondono ad uno stesso punto Z_2 nel modo indicato dai teoremi XXVIII e XXXIV si chiamino rette degli stessi indici. I 90 punti V_{23} si separano in quarantacinque coppie corrispondenti in certo modo ai quarantacinque punti P. Mentre cioè un punto V_{23} è l'intersezione di due rette z_2 o z_3, il punto corrispondente P è dato dalle rette p degli stessi indici. I punti V_{23} di una coppia e il punto P corrispondente siano chiamati punti di eguali indici. Le 90 rette v_{12} corrispondono nel modo suddetto ai punti V_{23}, si separano adunque in quarantacinque coppie di rette v_{12}. Le due rette v_{12} di una coppia siano chiamate rette di eguali indici.

17. Consideriamo i punti $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{IV}_{35,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$, faccio corrispondere ad essi le rette

$$z^{IV}_{123,3},\ z^{IV}_{124,3},\ z^{IV}_{125,3},$$

la prima vien data dai seguenti punti V_{23} (vedi tabella num. 14)

$$z^{I}_{123,2}\ z^{II}_{123,2},\ z^{I}_{125,2}\ z^{II}_{124,2},\ z^{I}_{234,2}\ z^{II}_{235,2}$$

la seconda dai punti $z^{II}_{123,2}\ z^{III}_{124,2}$, $z^{II}_{124,2}\ z^{III}_{125,2}$, $z^{I}_{134,2}\ z^{III}_{134,2}$

la terza » $z^{III}_{124,2}\ z^{I}_{123,2}$, $z^{III}_{125,2}\ z^{I}_{125,2}$, $z^{II}_{135,2}\ z^{III}_{234,2}$

Ora possiamo formare i due triangoli $z^{I}_{123,2}\ z^{II}_{123,2}\ z^{III}_{124,2}$ e $z^{I}_{125,2}\ z^{II}_{124,2}\ z^{III}_{125,2}$ che sono prospettivi per la rettta c_{123} perchè i punti $z^{I}_{123,2}\ z^{I}_{125,2} = Z^{I}_{12,2}$, $z^{II}_{123,2}\ z^{II}_{124,2} = Z^{II}_{12,2}$, $z^{III}_{124,2}\ z^{III}_{125,2} = Z^{III}_{12,2}$ sono situati nella retta di Cayley-Salmon c_{123}; e siccome quei due triangoli hanno i loro vertici due a due situati nelle tre rette $z^{IV}_{123,3}$, $z^{IV}_{124,3}$, $z^{IV}_{125,3}$ così vuol dire che queste tre rette s'incontrano in un punto che io chiamerò $Z^{IV}_{12,3}$ (1).

Teorema XLII. Le tre rette z_3 che corrispondono a tre punti Z_2 situati in una retta z_2, nel modo indicato dal teorema XLI, s'incontrano in un punto Z_3 che corrisponde così a quella retta z_2. I punti K, Z_2, Z_3 che corrispondono ad una retta z_2 nel modo indicato dai teoremi XXXI, XXXIV si chiamino punti degli stessi indici.

Abbiamo dimostrato a num. 11 che essendo i triangoli

$$K^{I}_{25}\,K^{I}_{23}\,K^{I}_{24},\ K^{II}_{24}\,K^{II}_{23}\,K^{II}_{25},\ K^{II}_{14}\,K^{II}_{13}\,K^{II}_{15},\ K^{I}_{15}\,K^{I}_{13}\,K^{I}_{14}$$

nella condizione del teorema II, il punto $Z^{III}_{12,2}$ esiste nella retta di Cayley-Salmon c_{123}; qui invece considerando i triangoli

$$z^{I}_{134,2}\ z^{I}_{145,2}\ z^{I}_{135,2};\ z^{II}_{135,2}\ z^{II}_{145,2}\ z^{II}_{134,2};\ z^{II}_{235,2}\ z^{II}_{245,2}\ z^{II}_{234,2};\ z^{I}_{234,2}\ z^{I}_{245,2}\ z^{I}_{235,2}$$

(1) Questa dimostrazione è duale a quella data per dimostrare che i punti Z_2 sono situati tre a tre in 60 rette z_2 (vedi num. 13).

vediamo ch' essi soddisfano alla condizione del teorema II, perchè il primo è prospettivo col secondo pel centro K^{III}_{12} e per la retta g_{12}, infatti le tre rette $Z^{I}_{14,2}\,Z^{II}_{15,2}$, $Z^{I}_{13,2}\,Z^{II}_{13,2}$, $Z^{I}_{15,2}\,Z^{II}_{14,2}$ sono le tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto K^{III}_{12} (vedi tabella num. 14), e i punti d'incontro dei lati corrispondenti sono i punti G_{125}, G_{126}, G_{124}; il secondo è prospettivo col terzo pel centro $Z^{II}_{12,2}$ e per la retta $z^{II}_{345,2}$, il terzo è prospettivo col quarto pel centro S_{12} e per la retta $z^{III}_{345,3}$ (vedi num. 16) e il quarto col primo pel centro $Z^{I}_{12,2}$ e per la retta $z^{I}_{345,2}$, e siccome i quattro centri di prospettiva cioè K^{III}_{12}, $Z^{II}_{12,2}$, S_{12}, $Z^{I}_{12,2}$ sono situati nella retta di Cayley-Salmon c_{123}, così pel teorema II le rette di prospettiva g_{12}, $z^{II}_{345,2}$, $z^{III}_{345,3}$, $z^{I}_{345,2}$ s'incontrano in un punto, cioè nel punto G_{123}, dunque la retta $z^{III}_{345,3}$ passa pel punto G_{123}. Si vede che questa dimostrazione passo per passo è duale a quella data al num. 11 per mostrare che i punti Z_4 sono situati nelle rette di Cayley-Salmon, dunque si conclude:

Teorema XLIII. Le tre rette z_3 che corrispondono a tre punti Z_2 situati in una retta di Cayley-Salmon s'incontrano nel punto di Steiner ad essa corrispondente.

Si può anche dimostrare questo teorema considerando le tre rette $z^{III}_{345,3}$, $z^{I}_{345,2}$, $z^{II}_{345,2}$ che s'incontrano nel punto G_{123}.

18. Consideriamo ora la fig. 2ª rispetto al punto $Z^{I}_{12,3}$ invece del punto K^{I}_{12}, ossia consideriamo le tre rette $z^{I}_{123,3}$, $z^{I}_{124,3}$, $z^{I}_{125,3}$ che s'incontrano nel punto $Z^{I}_{12,3}$. Nei punti $V_{25.14,23}$, $V_{36.25,23}$, $V_{36.14,23}$ situati rispettivamente in quelle tre rette s'incontrano ordinatamente le terne di rette $z^{VI}_{345,3}\,z^{V}_{234,2}\,z^{IV}_{235,2}$; $z^{IV}_{345,3}\,z^{VI}_{245,2}\,z^{V}_{134,2}$; $z^{V}_{345,3}\,z^{VI}_{145,2}\,z^{IV}_{135,2}$ come si può vedere dalla tabella num. 14 per la formazione dei punti V, queste nove ultime rette con le tre prime hanno la proprietà analoga a quella espressa nel teorema XVII per le rette p, cioè esse s'incontrano rispettivamente nei punti $Z^{I}_{12,3}$, $Z^{VI}_{45,2}$, $Z^{V}_{34,2}$, $Z^{IV}_{35,2}$ e nei punti G_{146}, G_{145}, G_{156}, G_{456}; la proprietà duale vale anche per le rette v_{12}, vale a dire preso il triangolo $v_{25.14,12}$ $v_{36.25,12}$ $v_{36\,14,12}$ i 6 punti K e i 6 punti Z_2 che sono situati rispettivamente in queste tre rette hanno la proprietà duale delle 6 rette z_2 e 6 rette z_3 suddette.

Nella stessa maniera che noi abbiamo dimostrato che la retta $v_{26.35,12} = K^{V}_{34}\,K^{VI}_{45}$ passa pel punto d'incontro Y'_{14} della retta g_{14} con la retta che congiunge i punti $P_{25.14}$ e $P_{36.14}$ ossia col lato fondamentale 14 (vedi num. 15 fig. 2ª) così qui, considerando i triangoli $Z^{V}_{34,2}\,V_{25.14,23}\,G_{145}$, $Z^{VI}_{45,2}\,V_{36.14,23}\,G_{146}$ prospettivi per la retta $z^{I}_{124,3}$, si dimostra che le rette

$$Z^{VI}_{45,2}\,Z^{V}_{34,2} = v'_{26.35,12},\quad V_{36.14,23} - V_{25.14,23} = n_{14,23}\,(^1)\ \text{e}\ g_{14}$$

s'incontrano in un punto, cioè nel punto Y'_{14}.

Siano dati i due triangoli

$$z^{IV}_{135,2}\,z^{V}_{345,3}\,z^{V}_{134,3};\quad z^{IV}_{235,2}\,z^{VI}_{345\ 3}\,z^{VI}_{245,3}$$

i punti d'incontro dei lati

$$z^{IV}_{135,2}\,z^{IV}_{235,2} = Z^{IV}_{35,2},\quad z^{V}_{345,3}\,z^{VI}_{345,3} = G_{456},\quad z^{V}_{134,3}\,z^{VI}_{245,3} = V_{36.25,23}$$

sono situati nella retta $z^{IV}_{345,2}$, onde le congiungenti dei vertici corrispondenti dei due triangoli ossia le rette

$$V_{36.14,23} - V_{14.25,23} = n_{14,23},\quad Z^{V}_{34,3}\,Z^{VI}_{45,3} = v_{26.35,34},\quad g_{14}$$

(1) Nominiamo la retta che congiunge i due punti $V_{36\cdot14,23}$ e $V_{25\cdot14,23}$ col simbolo $n_{14,23}$, gli indici $_{23}$ indicano che i punti V appartengono al 2° e 3° sistema $[Z_3]$.

s'incontrano in un punto cioè nel punto Y'_{14} (vedi tabella num. 14). Qui entrano delle rette v_{34}, queste rette hanno la stessa proprietà delle rette v_{12}, vedremo ch'esse congiungono due a due i punti Z_3 e i punti Z_4 d'un altro sistema $[Zz]_1$, l'indice 26.35 della retta v_{34} sopra considerata è lo stesso della retta v_{12}, che congiunge i due punti K^{V}_{34}, K^{VI}_{45} degli stessi indici dei punti Z_3 collocati su di essa. Se invece di considerare la fig. 2ª rispetto al punto K^{I}_{12}, la consideriamo rispetto al punto $Z^{I}_{12,3}$. cioè consideriamo le tre rette $z^{I}_{123,2}$, $z^{I}_{124,2}$, $z^{I}_{125,2}$ che s'incontrano in esso, si dimostra analogamente che la retta $V'_{36.14,23} - V'_{25.14,23} = n'_{14,23}$ passa pel punto Y'_{14}, ovvero basterà anche prendere i triangoli:

$$z^{IV}_{135,3}\, z^{V}_{345,2}\, z^{V}_{134,2}\; ;\quad z^{IV}_{235,3}\, z^{VI}_{345,2}\, z^{VI}_{245,2}$$

che sono prospettivi perchè i punti d'incontro dei lati

$$z^{IV}_{135,3}\, z^{IV}_{235,3} = Z^{IV}_{35,3}\,,\quad z^{V}_{345,2}\, z^{VI}_{345,2} = G_{456}\,,\quad z^{V}_{134,2}\, z^{VI}_{245,2} = V_{36.25,23}$$

sono situati nella retta $z^{IV}_{345,3}$, da cui deduciamo che le rette

$$V'_{36.14,23} - V'_{14.25,23} = n'_{14,23}\,,\quad Z^{V}_{34,2}\, Z^{VI}_{45,2} = v'_{26.35,12}\; g_{14}$$

s'incontrano nel punto Y'_{14}. Abbiamo dimostrato al num. 15 che la retta $v'_{26.35,12} = K^{III}_{45}\, K^{II}_{34}$ passa pel punto d'incontro Y'_{14} della retta g_{14} con la retta che unisce i due punti $P_{14.56}$, $P_{14.32}$ cioè col lato fondamentale 14, ora qui analogamente si dimostra che le rette $Z^{III}_{45,3}\, Z^{II}_{34,3} = v'_{26.35,34}$, $V_{14.56,23} - V_{14.32,23} = n^{*}_{14,23}$ e $V'_{14.56,23} - V'_{14.32,23} = n^{*'}_{14,23}$ s'incontrano nel punto Y'_{14}. Infatti si considerino i punti G_{134}, G_{124} della retta g_{14}, per essi passano rispettivamente le due rette $z^{I}_{235,3}\, z^{I}_{135,3}$, se si considerano queste due rette allora si dimostra che le rette $V_{14.56,23} - V_{14.32,23}$, $Z^{III}_{45,2}\, Z^{II}_{34,2} = v_{26.35,12}$ passano per lo stesso punto Y'_{14}, ed allora seguendo le dimostrazioni date di sopra si dimostra che le rette $Z^{III}_{45,3}\, Z^{II}_{34,3} = v'_{26.35,34}$ e $V'_{14.56,23} - V'_{14.32,23}$ s'incontrano nel punto Y'_{14}. Nello stesso modo si dimostra che le rette

$$Z^{V}_{25,3}\, Z^{VI}_{13,3} = v_{36.52,34}\,,\quad V_{14.35,23} - V_{14.26,23}\,,\quad V'_{14.35,23} - V'_{14.26,23}$$

passano pel punto Y''_{14} cioè pel punto d'incontro della retta $K^{V}_{25}\, K^{VI}_{13} = v_{36.52,12}$ con la retta g_{23} e con la retta che unisce i punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$ ossia col lato fondamentale 14. Le rette $V'_{14.23,23} - V_{14.56,23}$, $V'_{14.56,23} - V_{14.23,23}$ passano pure per Y''_{14}: onde si vede che in questo caso i punti $V_{14.23,23} - V_{14.56,23}$ non cadono nel lato fondamentale 14, mentre ciò avverrebbe quando il punto $V'_{14\,23,23}$ cadesse col punto $V_{14.23,23}$ ciò che abbiamo dimostrato al num. 16 esser impossibile. Ora deduciamo le proprietà analoghe per la figura corrispondente alla fig. 2ª presa rispetto al punto $Z^{I}_{12,3}$ ove al punto $Z^{I}_{12,3}$ corrisponda la retta p^{I}_{345}, invece delle rette v_{12} entrino i punti V_{23} corrispondenti invece dei punti Z_2 entrino le rette z_2 corrispondenti. Dunque ora metto in corrispondenza i punti Z_3 e le rette p, i punti K e le rette z_3, le rette v_{12} e i punti V_{23}, i punti Z_2 e le rette z_2. Sia adunque data la retta p^{I}_{345} mediante i suoi punti $K^{I}_{34}, K^{I}_{35}, K^{I}_{45}$. Abbiamo sopra dimostrato che le rette

$$Z^{V}_{34,2}\; Z^{VI}_{45,2} = v'_{26.35,12}\,,\quad V_{36.14,23} - V_{25.14,23} = n_{14.23}\,,\; g_{14}$$

s'incontrano in un punto Y'_{14} considerando i triangoli prospettivi

$$Z^{V}_{34,2}\; V_{25.14,23}\; G_{145}\;\; ;\;\; Z_{45,2}\; V_{36.14,23}\; G_{146}$$

per la retta $z^{I}_{124,3}$, così qui nella figura corrispondente ora stabilita si hanno i triangoli

$$z^{V}_{125,2}\,,\; v_{25.14,23} = K^{I}_{45}\; K^{VI}_{12}\; Z^{IV}_{14,2}\; Z^{V}_{15,2}\,,\; c_{145}\,;$$
$$z^{VI}_{123,2}\,,\; v_{36\,14,12} = K^{I}_{34}\; K^{V}_{12}\; Z^{VI}_{23,2}\; z^{IV}_{24,2}\,,\; c_{146}$$

che sono prospettivi pel centro K^{I}_{35}, che corrisponde alla retta $z^{I}_{124,3}$ onde i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè

$$V'_{35.62,23} = z^{V}_{125,2}\ z^{VI}_{123,2}\ ,\ v_{25.14,12} - v_{36.14,12} = N_{14,12}\ (^1)\ ,\ S_{14}$$

sono situati in una retta che chiamo y'_{14}, che corrisponde al punto Y'_{14}, i cui indici 14 formano con quelli del punto $V'_{35.62,23}$ cioè 35, 62, che giace in essa, i tre lati del triangolo Δ_{14}.

Sopra abbiamo dimostrato che pel punto Y'_{14} passa anche la retta $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{V}_{34,3} = v_{53.62,34}$ considerando i due triangoli

$$z^{IV}_{135,2}\ z^{V}_{345,3}\ z^{V}_{134,3}\ ;\ z^{IV}_{235,2}\ z^{VI}_{345,3}\ z^{VI}_{245,3}$$

qui invece considerando i triangoli

$$Z^{IV}_{24,2}\ K^{V}_{12}\ K^{V}_{25}\ ;\ Z^{IV}_{14,2}\ K^{VI}_{12}\ K^{VI}_{13}$$

si vede ch'essi sono prospettivi pel centro $Z^{IV}_{12,2}$ perchè le rette $Z^{IV}_{24,2}\ Z^{IV}_{14,2} = z^{IV}_{124,3}$, $K^{V}_{12}\ K^{VI}_{12} = c_{456}$, $v_{36.25,12} = K^{V}_{25}\ K^{VI}_{13}\ Z^{I}_{35,2}\ Z^{IV}_{12,2}$ s'incontrano nel punto $Z^{IV}_{12,2}$ perciò i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia i punti

$$v_{36.14,12} - v_{14.25,12} = N_{14,12}\ ,\ c_{145}\ c_{146} = S_{14}\ ,\ p^{V}_{125}\ p^{VI}_{123} = P_{35.62}$$

sono situati in una retta cioè nella retta y'_{14}.

Se invece consideriamo i triangoli

$$K^{IV}_{24}\ Z^{V}_{12,2}\ Z^{V}_{25,2}\ ;\ K^{IV}_{14}\ Z^{VI}_{12,2}\ Z^{VI}_{13,2}$$

si vede che sono pure prospettivi pel centro K^{IV}_{12} perchè le rette $K^{IV}_{24}\ K^{IV}_{14} = p^{IV}_{124}$ $Z^{V}_{12,2}\ Z^{VI}_{12,2} = c_{456}$, $v'_{36.25,12} = Z^{V}_{25,2}\ Z^{VI}_{13,2}\ K^{I}_{35}$, K^{IV}_{12} s'incontrano nel punto K^{IV}_{12}, dunque i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia i punti:

$$v'_{36.14,12} - v'_{14.25,12} = N'_{14,12}\ ,\ c_{145}\ c_{146} = S_{14}\ \text{ e }\ z^{V}_{125,2}\ z^{VI}_{123,2} = V'_{35.62,23}$$

sono situati nella retta y'_{14}. Come su si è dimostrato che le rette $V_{14.36,23} - V_{14.32,23}$, $Z^{III}_{45,2}\ Z^{II}_{34,2} = v_{35.26,12}$ s'incontrano nel punto Y'_{14} così qui si dimostra con le considerazioni duali che il punto $V_{35.26,12} = z^{III}_{123,2}\ z^{II}_{125,2}$ è situato nella retta y'_{14}. Dunque una retta y contiene un punto P e i punti V_{23} di eguali indici ed un punto di Salmon. Esse sono quarantacinque dunque:

Teorema XLIV. I punti P e V_{23} di eguali indici sono situati in una retta y che passa per un punto di Salmon. Le rette y sono quarantacinque in tutto l'esagrammo. Ai due punti V_{23} situati in una retta y corrispondono le due rette v_{12} che s'incontrano in un punto Y, onde corrispondono le 45 rette y ai quarantacinque punti Y.

Nelle tre z_2 che passano pel punto $Z^{I}_{12,2}$ sono situati i tre punti $V'_{53.24,23} = z^{I}_{125,2}$ $z^{III}_{125,2}$, $V'_{62.31,23} = z^{I}_{123,4}\ z^{III}_{124,2}$, $V'_{15.64,23} = z^{I}_{124,2}\ z^{III}_{123,2}$, essi formano un triangolo i cui tre lati sono $z^{IV}_{125,3}$, $z^{V}_{124,3}$, $z^{VI}_{125,3}$ (vedi tabella num. 14), consideriamo anche il triangolo $P_{53.24}\ P_{62.31}\ P_{15.64}$ i cui vertici sono congiunti dalle rette p^{IV}_{125}, p^{V}_{124}, p^{VI}_{125}, questi due triangoli sono prospettivi per la retta g_{13} perchè i lati $z^{IV}_{125,3}$ p^{IV}_{125}, $z^{V}_{124,3}$ p^{V}_{124}, z^{VI}_{125} p^{VI}_{125} s'incontrano rispettivamente nei punti G_{134}, G_{135},

(1) Nomino il punto d'incontro delle rette $v_{36.14,12}$ e $v_{14.25,12}$ col simbolo $N_{14,12}$ le cifre 12 indicano che questi punti appartengono al 1° e 2° sistema.

G_{136}, le rette che congiungono i vertici corrispondenti sono le tre rette y'_{16}, y'_{45}, y'_{23} (1) che s'incontrano in un punto che chiamo ξ'_{123}. Il primo e il secondo triangolo sono prospettivi col triangolo G_{134} G_{135} G_{136} per la stessa retta g_{13} e i due centri di prospettiva sono evidentemente i punti $Z^{I}_{12,2}$, K^{I}_{12}, ma siccome i tre triangoli a due a due hanno la stessa retta di prospettiva, così i tre centri ξ'_{123}, $Z^{I}_{12,2}$, K^{I}_{12} sono situati in una retta cioè nella retta di Cayley-Salmon c_{123}. Ecco perchè abbiamo dati gli indici 123 al punto ξ'. Ora nelle tre rette z_2 che s'incontrano nel punto $Z^{I}_{12,2}$ havvi un altro triangolo di punti V_{23}, cioè $V'_{15.62,23} = z^{I}_{125,2}\ z^{II}_{124,2}$, $V'_{46.53,23} = z^{I}_{123}\ z^{II}_{123}$ e $V'_{13.24,23} = z^{I}_{124,2}\ z^{II}_{125,2}$ che è prospettivo col triangolo $P_{15.62}$ $P_{46.53}$ $P_{13.24}$ per un altro centro ξ''_{123} situato pure nella retta g_{23}. Parrebbe che essendo tre i punti Z_2 nella retta c_{123} dovessero esser 6 i punti ξ situati in essa, ma invece non sono che tre, perchè come si vede per i vertici dei due triangoli di punti V_{23} considerati passano rispettivamente le rette z_2 che s'incontrano nei punti $Z^{III}_{12,2}$ e $Z^{II}_{12,2}$. Ora se noi consideriamo invece le tre rette z_3 che s'incontrano nel punto $Z^{I}_{12,3}$ vediamo che in queste tre rette sono situati ordinatamente i punti $V_{53.24,23}$, $V_{62.31,23}$, $V_{15.64,23}$, che formano un triangolo prospettivo col triangolo $P_{53.24}$ $P_{62.31}$ $P_{15.64}$ e col triangolo G_{134} G_{135} G_{136} per la medesima ragione sopra esposta pel triangolo $V'_{53.24,23}$ $V'_{62.31,23}$ $V_{15.64,23}$ e siccome i punti $P_{53.24}$, $V'_{53.24,23}$, $V_{24.53,23}$ ecc. sono situati nella retta y'_{16} ecc. così ne viene di conseguenza che il punto $Z^{I}_{12,3}$ è situato nella retta ξ'_{123} K^{I}_{12} cioè nella retta di Cayley-Salmon c_{123}, dunque:

Teorema XLV. I sessanta punti Z_3 sono situati tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon.

Teorema XLVI. Le 45 rette y s'incontrano tre a tre in sessanta punti ξ che giaciono tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon.

Abbiamo dimostrato che i triangoli

$$V'_{53.24,23}\ V'_{62.31,23}\ V'_{15.64,23}\ ;\ V_{53.24,23}\ V_{62.31,23}\ V_{15.64,23}$$

sono prospettivi per il punto ξ'_{123} situato nella retta c_{123}, ora si dimostra che i triangoli

$$v_{53.24,12}\ v_{62.31,12}\ v_{15.64,12}\ ;\ v'_{53.24,12}\ v'_{62.31,12}\ v'_{15.64,12}$$

sono prospettivi per una retta σ'_{123} che passa pel punto di Steiner G_{123}. Infatti si ha:

$$v'_{53.24,12} = Z^{I}_{34,2}\ Z^{III}_{34,2}\ ,\ v'_{62.31} = Z^{I}_{45,2}\ Z^{III}_{35,2}\ ,\ v'_{15.64,23} = Z^{I}_{35,2}\ Z^{III}_{45,2}$$

e

$$v_{53.24,12} = K^{I}_{34}\ K^{III}_{34}\ ,\ v_{62,31} = K^{I}_{45}\ K^{III}_{35}\ ,\ v_{15.64,23} = K^{II}_{35}\ K^{III}_{45}$$

il primo triangolo ha i vertici K^{IV}_{34}, K^{V}_{35}, K^{VI}_{34}, ed il secondo i vertici $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{35,2}$, $Z^{VI}_{34,2}$ (vedi tabella num. 14), essi sono adunque prospettivi perchè le rette K^{IV}_{34} $Z^{IV}_{34,2} = c_{134}$, K^{V}_{35} $Z^{V}_{35} = c_{135}$, K^{VI}_{34} $Z^{VI}_{34,2} = c_{136}$ s'incontrano nel punto S_{13}, dunque i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè i punti Y'_{16}, Y'_{45}, Y'_{23} sono situati in una retta σ'_{123}. Il I e II triangolo sono prospettivi col triangolo c_{134} c_{135} c_{136} per il medesimo centro S_{13}, onde si conclude che le tre rette di prospettiva cioè $z^{I}_{345,2}$, p^{I}_{345} e σ'_{123} si devono incontrare in un punto cioè nel punto G_{123} dunque:

Teorema XLVII. I 45 punti Y sono posti tre a tre in sessanta rette σ che passano tre a tre per i venti punti di Steiner mentre tre rette y

(1) Gli accenti delle rette y sono affatto arbitrarî, perchè i punti Y situati in un lato fondamentale per es. 14 li abbiamo denominati Y'_{14}, Y''_{14}, Y'''_{14}, e le rette y corrispondenti si denominino con gli stessi indici.

s'incontrano in un punto ξ, i tre punti corrispondenti Y sono situati in una retta σ.

Ne possiamo anche concludere:

Teorema XLVIII. I sessanta punti Z_3 e le sessanta rette z_3 formano in guisa dei punti K e rette p, dei punti Z_2 e rette z_2 sei figure π'', che appartengono a sei sistemi polari.

I punti di Steiner e di Salmon, le rette di Cayley-Salmon, di Steiner-Plücker sono comuni ai tre sistemi $[Kp]$ $[Zz]_2$ $[Zz]_3$.

19. Andando innanzi bisogna vedere se abbiamo altri sistemi $[Zz]$ vale a dire se il sistema $[Zz]$ si chiude in se stesso, o se dà luogo ad un quarto sistema, come il primo ha dato luogo al secondo, e il secondo al terzo.

Per passare dal primo al secondo abbiamo considerato i triangoli

$$K^{II}_{13}\ K^{II}_{15}\ K^{II}_{14}\ ;\ K^{I}_{13}\ K^{I}_{14}\ K^{I}_{15}$$

ed abbiamo visto ch'essi non sono prospettivi pel punto K^{III}_{12}, ma bensì pel centro $Z^{III}_{12,2}$ che abbiamo fatto corrispondere alla retta p^{III}_{345} (vedi num. 10). Per passare invece dal secondo al terzo abbiamo considerato i triangoli

$$z^{II}_{245,2}\ z^{II}_{234,2}\ z^{II}_{235,2}\ ;\ z^{I}_{245,2}\ z^{I}_{235,2}\ z^{I}_{234,2}$$ (vedi num. 16)

prospettivi, non per la retta $z^{III}_{345,2}$, ma bensì per la retta $z^{III}_{345,3}$, che abbiamo fatta corrispondere al punto $Z^{III}_{12,3}$; però la vera corrispondenza polare ha luogo solamente fra i punti Z e rette z delle 6 figure π di un medesimo sistema, noi abbiamo stabilito delle corrispondenze momentanee fra i punti e rette dei tre sistemi fin qui trovati appunto per ricavare la legge di formazione dei diversi sistemi. Ora adunque per vedere se il sistema $[Zz]_3$ dà luogo ad un quarto sistema bisogna considerare i triangoli

$$Z^{II}_{13,3}\ Z^{II}_{15,3}\ Z^{II}_{14,3}\ ;\ Z^{I}_{13,3}\ Z^{I}_{14,3}\ Z^{I}_{15,3}$$

e vedere se sono prospettivi o per il punto $Z^{III}_{12,3}$ ovvero per un altro punto. Qui la dimostrazione non è così facile come per i due primi casi ed ecco perchè abbiamo stabilita una certa corrispondenza tra i punti K e le rette z_3 tra le rette p e i punti Z_3, tra le rette z_2 e i punti Z_2, tra le rette v_{12} e i punti V_{23}, tra i punti Y e le rette y (vedi alla metà del num. 18.) Nella retta y_{14} giace il punto $P_{35.62}$ ed i punti $V_{35.62_{23}}$ e $V'_{35.62_{23}}$ dunque si crederebbe che i punti Z_3 corrispondendo alle rette p dovessero esser situati quattro a quattro in quarantacinque rette corrispondenti ai punti P, ossia che i triangoli suddetti fossero prospettivi pel centro $Z^{III}_{12,3}$. Le figure corrispondenti così stabilite non differiscono che in questo, che nella retta y_{14} esiste veramente il punto $P_{35.62}$, mentre noi non siamo certi che le rette $Z^{V}_{34,3}$ $Z^{VI}_{45,3} = v_{26.35,34}$ e $Z^{III}_{45,3}$ $Z^{II}_{34,3} = v'_{26.35,34}$ cadano insieme ed è mediante il punto $P_{35.62}$ che noi dimostreremo che ciò non può aver luogo.

Se ciò avesse luogo allora i 60 punti Z_3 sarebbero posti quattro a quattro in quarantacinque rette, e perciò i due triangoli suddetti di punti Z_3 sarebbero prospettivi per il punto $Z^{III}_{12,3}$. Mi pare anche che senza la considerazione dei punti P, o ciò che è lo stesso dei 6 punti fondamentali della conica, non si possa fare questa dimostrazione, almeno con gli elementi che abbiamo sin qui trovato. Perchè se si potesse fare la dimostrazione che le rette v_{34} suddette non cadono insieme senza i punti P, allora per la corrispondenza stabilita si potrebbe dimostrare che le rette di Pascal p^{V}_{125}

p^{VI}_{123} e p^{III}_{123} p^{II}_{125} non s'incontrano in un punto, o se si dimostrasse che le rette suddette v_{34} cadono insieme allora si potrebbe dimostrare anche che i punti $V_{26.35,23}$, $V'_{26.35,23}$ cadono insieme, ciò che in tutti e due i casi è impossibile.

Per adoperare la fig. 2ª invece di considerare il punto $P_{35.62}$ situato nella retta y'_{14} (vedi n. 18), considero il punto $P_{36.14}$. È facile di vedere che questo punto è situato nella retta y'_{25} che passa pel punto di Salmon S_{23}. Infatti consideriamo i due triangoli

$$G_{156}\ Z^{VI}_{45,2}\ K^{VI}_{45}\ ;\ G_{145}\ Z^{IV}_{35,2}\ K^{IV}_{35}$$

i cui lati sono rispettivamente

$$z^{VI}_{145,2},\ p_{145},\ c_{236},\ z^{IV}_{135,2},\ p_{135},\ c_{234}$$

che s'incontrano nei tre punti $V_{36.14,23}$, $P_{36.14}$ ed S_{23}; ma questi due triangoli sono prospettivi perchè le rette

$$G_{156}\ G_{145} = g_{15},\ v_{46.31,12} = Z^{VI}_{45,2}\ Z^{IV}_{35,2},\ v'_{46.31,12} = K^{VI}_{45}\ K^{IV}_{35,2}$$

s'incontrano in un punto Y della retta g_{15}, come è facile di vedere dagli indici delle rette v_{12} per le regole date al num. 10; dunque i punti $V_{36.14,23}$, $P_{36.14}$, S_{23} sono situati nella retta y'_{25}.

Ora abbiamo:

$$V_{36.14,23} = z^{V}_{345,3}\ z^{I}_{125,3}\ z^{IV}_{135,2}\ z^{VI}_{145,2},\ V'_{36.14,23} = z^{V}_{345,2}\ z^{I}_{125,2}\ z^{IV}_{135,3}\ z^{VI}_{145,3}$$

$$P_{36.14} = p^{V}_{345}\ p^{I}_{125}\ p^{IV}_{135}\ p^{VI}_{145},\ S_{23} = c_{123}\ c_{234}\ c_{235}\ c_{236}$$

Prendiamo le coppie di rette $z^{V}_{345,3}\ z^{VI}_{145,2} = V_{36.14,23}$

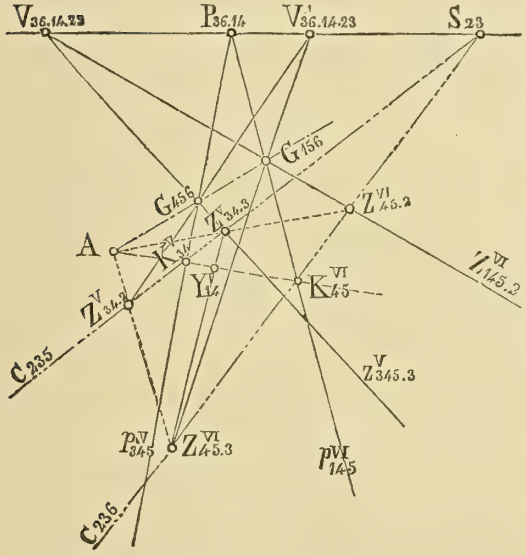
$$p^{V}_{345}\ p^{VI}_{145} = P_{36.14}$$

$$c_{235}\ c_{236} = S_{23}$$

Otteniamo così i due triangoli prospettivi cioè

$$G_{456}\ K^{V}_{34}\ Z^{V}_{34,3}\ ;\ G_{156}\ K^{VI}_{45}\ Z^{VI}_{45,2}$$

Fig. 4.



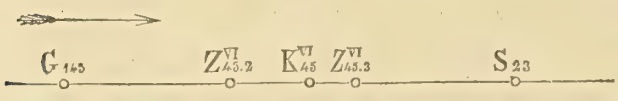
dati da quelle tre coppie di rette (fig. 4) quindi le rette g_{56}, $Z^{V}_{34,3}$ $Z^{VI}_{45,2}$, K^{V}_{34} $K^{VI}_{45} = v_{26.35,12}$ s'incontrano in un punto A. Osserviamo che la retta g_{56} congiunge nella fig. 2ª i due punti di Steiner G_{156}, G_{456}, che non sono contenuti nella retta g_{14} ove è situato il punto Y'_{14} della retta $v_{26.35,12}$. Nella retta y'_{25} deve trovarsi anche il punto $V'_{36.14,23}$ e si deve avere la condizione che le rette $Z^{V}_{34,3}$ $Z^{VI}_{45,2} = v_{26.35,34}$, $Z^{V}_{34,2}$ $Z^{VI}_{45,3} = v'_{26.35,12}$ debbono incontrarsi in un punto della retta $K^{V}_{34} K^{VI}_{45} = v_{26.35,12}$ ossia nel punto Y_{14} (1). Per la qual cosa i punti $Z^{V}_{34,3}$, $Z^{VI}_{45,2}$, $Z^{V}_{34,2}$, $Z^{VI}_{45,3}$ devono formare un quadrangolo di cui due diagonali sono

(1) Anche qui si vede che se la retta $z^{V}_{345,2}$ passasse pel punto $V_{36.14\ 23}$ invece di passare pel punto $V'_{36.14,23}$ ciò che vorrebbe dire che i punti $V_{36.14,23}$, $V'_{36.14,23}$ cadono insieme, allora il punto Y'_{14} cadrebbe nel punto A, ossia nel punto d'incontro delle tre rette g_{14}, g_{56}, g_{23} pel quale dovrebbe passare anche il lato 14, ciò che è impossibile.

la retta $v_{26.35,12}$ e la retta che congiunge il punto Y'_{14} col punto S_{23} vuol dire cioè che le coppie di punti $K^{VI}_{45}\ S_{23}$ e $Z^{VI}_{45,2}\ Z^{VI}_{45,3}$ devono formare un gruppo armonico (vedi fig. 4), perchè $Z^{VI}_{45,2}$, $Z^{VI}_{45,3}$ sono due vertici di un lato del quadrangolo, e K^{VI}_{45} ed S_{23} sono i punti d'incontro di esso con le rette diagonali suddette.

Dunque projettando i punti $Z^{VI}_{45,2}$ $Z^{VI}_{45,3}$, K^{VI}_{45} S_{23} p. es. dal punto G_{126}, nella retta y'_{25} si ha che le coppie di punti $P_{36.14}\ S_{23}$, $V_{36.14,23}\ V'_{36.14,23}$ formano un gruppo armonico. Ora se la retta $v_{26.35,34} = Z^{V}_{34,3}\ Z^{VI}_{45,3}$ cadesse nella retta di eguali indici $v'_{26.35,34}$, allora le coppie di rette $v_{26.35,34}\ g_{14}$ e $v_{26.35,12}\ v'_{26.35,12}$, che s'incontrano nel punto Y'_{14}, dovrebbero formare un gruppo armonico. E questo si vede chiaramente perchè con analoga dimostrazione a quella data per dimostrare che i punti $P_{36.14}\ S_{23}$, $V_{36.14,23}\ V'_{36.14,23}$ formano due coppie conjugate di un gruppo armonico si dimostra che le coppie di punti $P_{26.35}\ S_{14}$, $V_{26.35,23}\ V'_{26.35,23}$ formano pure un gruppo armonico, e perciò si dimostrerebbe che se le rette $v_{26.35,34}$, $v'_{26.35,34}$ cadessero insieme, per la corrispondenza stabilita fra i punti K e le rette z_3, fra le rette p e i punti Z_3 ecc., che anche le coppie di rette $v_{26.35,34}\ g_{14}$ e $v_{26.35,12}\ v'_{26.35,12}$ formerebbero un gruppo armonico, vale a dire (tagliando queste rette con la retta c_{236}) che le coppie di punti $Z^{VI}_{45,3}\ G_{145}$, $Z^{VI}_{45,2}\ K^{VI}_{45}$ dovrebbero formare un gruppo armonico, perchè essi sono rispettivamente i punti d'incontro della retta c_{236} con le rette suddette. Ora secondo il teorema XXXIX il punto $Z^{VI}_{45,12}$ è il conjugato armonico del punto S_{23} rispetto ai punti K^{VI}_{45}, G_{145}. Stabiliamo un certo senso nella retta y'_{25} p. es. quello indicato dalla freccia (fig. 5). Se il punto K^{VI}_{45} è dentro del segmento $Z^{VI}_{45,2}\ S_{23}$ (ciò che si può sempre immaginare) nel senso preso allora il punto G_{145} dovrà cader fuori di questo segmento. Ora per la proprietà riscontrata poco fa nella fig. 4 il punto $Z^{VI}_{45,3}$ è conjugato armonico del punto $Z^{VI}_{45,2}$ rispetto ai due punti K^{VI}_{45}, S_{23}, dunque questo punto $Z^{VI}_{45,3}$ è collocato fra i punti K^{VI}_{45}, S_{23}, ma se le rette $v_{26.35,34}$, $v'_{26.35,34}$ cadessero insieme allora, come abbiamo dimostrato, il punto $Z^{VI}_{45,3}$ sarebbe conjugato armonico del punto G_{145} rispetto ai punti $K^{VI}_{45}, Z^{VI}_{45,2}$, dunque dovrebbe cadere entro il segmento $Z^{VI}_{45,2}\ K^{VI}_{45}$, mentre noi sappiamo che esiste entro il segmento $K^{VI}_{45}\ S_{23}$ cioè fuori di quello $Z^{VI}_{45,2}\ K^{VI}_{45}$; dunque il punto $Z^{VI}_{45,3}$ non può essere il conjugato armonico del punto G_{145} rispetto ai punti $K^{VI}_{45}, Z^{VI}_{45,2}$ e perciò le rette $v_{26.35,34}, v'_{26.35,34}$ non possono cadere insieme, onde i triangoli

Fig. 5.



$$Z^{II}_{13,3}\ Z^{II}_{15,3}\ Z^{II}_{14,3};\ Z^{I}_{13,3}\ Z^{I}_{14,3}\ Z^{I}_{15,3}$$

non sono prospettivi pel punto $Z^{III}_{12,3}$ come centro, ma bensì per un altro punto che chiamo $Z^{III}_{12,4}$. I punti Z_4 come ben si può prevedere sono 60 in tutto l'esagrammo sono posti tre a tre in 60 rette z_4 passanti tre a tre pei venti punti di Steiner, e che giaciono tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon. Per dimostrare 1° ch'essi sono situati tre a tre in 60 rette basta adoperare una dimostrazione analoga a quella che abbiamo data per i punti Z_3 al num. 13, solamente che invece delle rette v_{12} considereremo le rette v_{34} che sono formate con la medesima legge data dalla tabella num. 14; 2° che i punti Z_4 sono situati tre a tre nelle 20 rette di Cayley basta

adoperare la dimostrazione analoga data pei punti Z_2 al num. 11 dove invece dei punti K entrano i punti Z_3; 3° che le rette z_4 s'incontrano tre a tre nei venti punti di Steiner basta adoperare la dimostrazione duale a quella data alla fine del num. 18 per dimostrare che i punti Z_3 sono situati nelle venti rette di Cayley-Salmon, dove invece dei punti V_{23} entrano le rette v_{34} e invece dei punti P le rette v_{12}, ed invece dei punti G le rette c, e finalmente invece dei punti ξ le rette σ.

20. Ottenuto così il quarto sistema $[Zz]_4$, dobbiamo esaminare se i triangoli

$$z^{II}_{245,4}\ z^{II}_{234,4}\ z^{II}_{235,4};\ z^{I}_{245,4}\ z^{I}_{235,4}\ z^{I}_{234,4}$$

sono prospettivi per la retta $z^{III}_{345,4}$ ovvero per un' altra retta, e qui possiamo ripetere le stesse osservazioni fatte al num. 19. La dimostrazione è analoga a quella data per le rette z_2, num. 16, dove in luogo dei punti V_{23} entrano ora i punti V_{45}; onde i due triangoli suddetti sono prospettivi per un'altra retta $z^{III}_{345,5}$. Chiameremo V_{45} i 90 punti nei quali s' incontrano due a due le sessanta rette z_4 con le sessanta rette z_5, a guisa delle rette z_2 e z_3, e chiameremo v_{34} le 90 rette nelle quali sono situati due a due i punti Z_3 e i punti Z_4, nello stesso modo che i punti K e Z_2 sono situati nelle rette v_{12}. Le rette v_{34} passano rispettivamente due a due per i quarantacinque punti Y e i punti V_{45} sono situati due a due nelle 45 rette y. I punti V_{45} godono delle stesse proprietà enunciate pei punti V_{23}, cioè le coppie di punti $P_{36.14}$ S_{23}, $V_{36.14,45}$ $V'_{36.14,45}$ formano un gruppo armonico ossia le coppie di punti $V_{36.14,23}$ $V'_{36.14,23}$, $V_{36.14,45}$ $V'_{36.14,45}$, formano un'involuzione i cui punti doppi sono i punti $P_{36.14}$ ed S_{23}, ossia le coppie di punti $Z^{VI}_{45,2}$ $Z^{VI}_{45,3}$, $Z^{VI}_{45,4}$ $Z^{VI}_{45,5}$ nella retta di Cayley-Salmon c_{236} (vedi fig. 4) formano un' involuzione i cui punti doppi sono K^{VI}_{45}, S_{23}; dunque se il punto $Z^{VI}_{45,5}$ è situato fra i punti K^{VI}_{45}, $Z^{VI}_{45,2}$ (vedi fig. 5), allora il punto $Z^{VI}_{45,4}$ sarà compreso entro il segmento K^{VI}_{45} $Z^{VI}_{45,3}$ e perciò fuori del segmento G_{145} $Z^{VI}_{45,3}$, poichè le coppie $Z^{VI}_{45,2}$ $Z^{VI}_{45,3}$, $Z^{VI}_{45,4}$ $Z^{VI}_{45,5}$ non possono separarsi. Se le rette $Z^{VI}_{45,5}$ $Z^{V}_{34,5}$, $Z^{III}_{45,5}$ $Z^{II}_{34,5}$ cadessero in una sola retta $v_{26.35,56}$ allora questa retta a guisa del punto $P_{26.35}$ dovrebbe essere il quarto raggio armonico della retta g_{14} rispetto alle rette $v_{26.35,12}$, $v'_{26.35,12}$ ed alle rette $v_{26.35,34}$, $v'_{26.35,34}$ intorno al punto Y'_{14} (1). Tagliando questo fascio con la retta c_{236} si avrebbero le coppie di punti $Z^{VI}_{45,2}$ K^{VI}_{45}, $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{VI}_{45,4}$ in un' involuzione avente per punti doppi i punti $Z^{VI}_{45,5}$, G_{145}, i quali dovrebbero separare necessariamente le coppie suddette; ma mentre i punti $Z^{VI}_{45,5}$, G_{145} possono separare la coppia $Z^{VI}_{45,2}$ K'^{VI}_{45}, come abbiamo già supposto, non separano però la coppia $Z^{VI}_{45,4}$ $Z^{VI}_{45,3}$ come abbiamo visto di sopra, onde non può essere che la retta $v_{26.35,56}$ cada con la retta $v'_{26.35,56}$; vuol dire adunque che i triangoli

$$Z^{II}_{12,5}\ Z^{II}_{15,5}\ Z^{II}_{14,5};\ Z^{I}_{13,5}\ Z^{I}_{14,5}\ Z^{I}_{15,5}$$

(1) Per dimostrare che le rette $Z^{VI}_{45,5}$ $Z^{V}_{34,5}$, $Z^{II}_{45,5}$ $Z^{II}_{34,5}$ passano pel punto Y'_{14} basta fare le stesse considerazioni che abbiamo fatte al num. 18 per dimostrare che le rette $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{V}_{34,3}$; $Z^{III}_{45,3}$ $Z^{II}_{34,3}$ passano per lo stesso punto Y'_{14}. Per dimostrare che se le due rette suddette cadessero insieme esse formerebbero con la retta g_{14} una coppia di raggi conjugati armonici rispetto alle rette $v_{26.35,12}$ $v'_{26.35,12}$ basta far corrispondere i punti Z_5 ai punti K e i punti Z_4 alle rette z_2 e i punti Z_3 alle rette z_3 (vedi fig. 4).

non sono prospettivi pel centro $Z^{III}_{12,5}$ ma bensì per un altro punto $Z^{III}_{12,6}$; onde si ottiene un altro sistema $[Zz]_6$, da questo mediante i punti V_{67} si passa ad un altro sistema $[Zz]_7$ e da questo mediante le rette v_{78} ad un ottavo, e così via (1). Abbiamo visto al num. 14 che due figure del sistema $[Kp]$ determinano mediante l'operazione delle rette v_{12} 4 punti Z_2 che appartengono rispettivamente a quattro figure π' del sistema $[Zz]_2$ e viceversa due figure π' del sistema $[Zz]_2$ determinano 4 punti K che appartengono rispettivamente a quattro figure π del sistema $[Kp]$, onde cinque figure π (π') determinano secondo il teorema XXXVII una figura π' (π). Analogamente si dimostra che due figure del sistema $[Zz]_2$ determinano mediante l'operazione dei punti V_{23} quattro rette z_3, che appartengono rispettivamente a quattro figure π'' del sistema $[Zz]_3$ e viceversa, e così due figure del sistema $[Zz]_3$ mediante l'operazione delle rette v_{34} determinano quattro punti Z_4, che appartengono rispettivamente a quattro figure del sistema $[Zz]_4$, e viceversa, e così via. Dunque:

Teorema XLIX. L'esagrammo si compone di un numero infinito di sistemi $[Zz]$. Le figure dei punti di Steiner e di Salmon sono comuni a tutti i sistemi $[Kp]$ $[Zr]_2$ $[Zr]_3$ ecc. Ciascun sistema è composto di sei figure π, I II III IV V VI che appartengono a sei sistemi polari, cinque di esse determinano una figura π del precedente e una del seguente sistema, ad eccezione del primo sistema cioè $[Kp]$, di cui cinque figure π determinano la sesta dello stesso sistema secondo il teorema XXIX, e una del sistema $[Zz]_2$ secondo il teorema XXXVII.

Osserviamo che il teorema XXVII vale per qualunque sistema, onde avremo:

Teorema L. Due figure π p. es. I e II di un sistema qualunque $[Zz]_{2m}$ ovvero $[Zz]_{2m+1}$ hanno i vertici di due quadrangoli di punti Z_{2m}, oppure Z_{2m+1} che rispettivamente ad esse appartengono, allineati due a due mediante le quattro rette di Cayley-Salmon di quelle due figure, che s'incontrano in un punto di Salmon e i triangoli formati da quei vertici sono prospettivi per le quattro rette z_{2m+1} ovvero z_{2m-1} che appartengono ordinatamente alle altre quattro figure π III IV, V VI del sistema $[Zz]_{2m+1}$ ovvero $[Zz]_{2m-1}$ determinate dalle due prime. I lati dei quadrilateri polari dei due quadrangoli suddetti rispetto alle due figure I e II, che sono rette z_{2m}, ovvero Z_{2m+1} s'incontrano due a due nella retta di Steiner-Plücker di esse, e i quatttro centri Z_{2m-1} ovvero Z_{2m+1} di prospettiva sono situati nelle rette di Cayley-Salmon suddette.

Teorema LI. Le coppie de' punti $Z_2 Z_3$, $Z_4 Z_5$, $Z_6 Z_7$ ecc. degli stessi indici in una retta di Cayley-Salmon formano un'involuzione i cui punti doppî sono il punto K degli stessi indici dei punti Z e il punto di Salmon, ove il punto Z_2 è vertice del quadrangolo dei punti Z_2 determinato dalle due figure π del sistema $[Kp]$ a cui appartiene il punto di Salmon, nel modo indicato dal teorema XXVIII (Vedi NB).

(1) È evidente che niuno dei sistemi seguenti cade con uno dei precedenti, per dimostrarlo basta considerare la legge di formazione di essi (vedi tabella num. 14).

NB. Il punto Z_2 si può far corrispondere ad una retta p secondo il modo indicato dal teorema XXVIII, ad esso corrisponde nel sistema $[Zz]_2$ una retta z_2, a questa retta si può far corrispondere un punto Z_3 secondo il teorema XLII, a questo corrisponde una retta z_3 nel sistema $[Zz]_3$, a questa si può far corrispondere un punto Z_4 nella stessa maniera che a z_2 si fa corrispondere un punto Z_3 e così via. Il punto K e il punto Z_2 che corrispondono alla retta p, i punti Z_3, Z_4 ecc. in tal modo considerati siano chiamati punti degli stessi indici, come anche le rette p, z_2 z_3 z_4 ecc. sopra considerate siano chiamate rette degli stessi indici.

Se si projettano dal punto G_{145} le coppie di punti K^{V}_{34} S_{23}, $Z^{V}_{34,2}$ $Z^{V}_{34,3}$, $Z^{V}_{34,4}$ $Z^{V}_{34,5}$ ecc. della retta di Cayley-Salmon c_{235}, ovvero le coppie di punti K^{I}_{12} S_{23}, $Z^{I}_{12,2}$ $Z^{I}_{12,3}$, $Z^{I}_{12,4}$ $Z^{I}_{12,5}$ ecc. della retta c_{123} finalmente le coppie di punti K^{IV}_{35} S_{23}, $Z^{IV}_{35,2}$ $Z^{IV}_{35,3}$ ecc. della retta c_{234} si ottiene il teorema seguente:

Teorema LII. Le coppie di rette z_2 z_3, z_4 z_5, z_6 z_7 ecc. degli stessi indici intorno ad un punto di Steiner formano un'involuzione i cui raggi doppî sono la retta di Pascal degli stessi indici e la retta di Cayley-Salmon.

Ovvero se si projettano dal punto G_{145} le coppie di punti K^{V}_{34} G_{146}, $Z^{V}_{34,2}$ S_{23} della retta c_{235} che come sappiamo formano un gruppo armonico secondo il teorema XXXIX, si ha:

Teorema LIII. Una retta di Pascal e una retta determinata di Steiner-Plücker che s'incontrano in un punto G formano un gruppo armonico con la retta z_2 degli stessi indici della retta di Pascal e la retta di Cayley-Salmon intorno al punto G. Abbiamo pure:

Teorema LIV. Tutte le rette v_{12}, v_{34}, v_{56} ecc. degli stessi indici dei sistemi dell'esagrammo s'incontrano in un punto Y pel quale passa una retta di Steiner-Plücker (Vedi NB).

Teorema LV. Tutti i punti V_{23}, V_{45}, V_{67} ecc. dei sistemi $[Zz]$ e il punto P degli stessi indici sono situati in una retta y che contiene un punto di Salmon (Vedi *NB*).

NB dei teoremi LIV, LV. Siano date quattro rette di Pascal che s'incontrano in un punto P, a queste quattro rette corrispondono quattro punti di Kirkman situati due a due in due rette v_{12}, che corrispondono al punto P e che si chiamano rette di eguali indici. Esse contengono due a due i punti Z_2 secondo il teorema XXIV. Alle coppie di punti Z_2 situate in due rette v_{12} di eguali indici corrispondono due coppie di rette z_2, che danno luogo a due punti V_{23}, che corrispondono alla lor volta alle rette v_{12} suddette e che si chiamano punti di eguali indici. Per essi passano due a due quattro rette z_3, a queste quattro rette z_3, corrispondono quattro punti Z_4 situati due a due in due rette v_{34} che corrispondono così ai punti V_{23} e che si chiamano di eguali indici, e così via. I punti P, V_{23}, ecc. così ottenuti si chiamano punti degli stessi indici, come anche le rette v_{12}, v_{34} ecc. testè considerate si chiamano rette degli stessi indici.

Se si considera la fig. 4 si nota, che intorno al punto Y'_{14} situato nella retta K^{V}_{34} $K^{VI}_{45} = v_{26.35,12}$ la coppia di rette $Z^{VI}_{45,2}$ $Z^{V}_{34,2}$ $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{V}_{34,3}$ cioè la coppia di rette $v_{26.35,12}$ e $v_{26.35,34}$ è divisa armonicamente dalla retta K^{V}_{34} K^{VI}_{45} e dalla retta che unisce il punto Y_{14} con S_{23}. Dunque:

Teorema LVI. Una retta v_{12} con la retta che unisce il suo punto Y_{14} col punto di Salmon, situato nella retta y corrispondente al punto Y secondo il teorema XLIV, forma una coppia che separa armonicamente tutte le coppie di rette $v'_{12}\ v_{34}$, $v'_{34}\ v_{56}$, $v'_{56}\ v_{78}$ ecc. tali che rispettivamente nella prima e seconda, terza e quarta, quinta e sesta ecc. delle rette v siano contenuti rispettivamente i punti Z del II° e III°, IV° e V, VI° e VII° sistema $[Zz]$ degli stessi indici dei due punti K della retta v_{12}.

Dalla fig. 4 risulta pure:

Teorema LVII. Le coppie di punti $V_{23}\ V'_{23}$, $V_{45}\ V'_{45}$ ecc. di una retta y formano un'involuzione che ha per punti doppî il punto P e il punto di Salmon.

Abbiamo visto al num. 18 che le rette $V_{25.14,23} - V_{36.14,23} = n_{14,23}$, $V'_{25.14,23} - V'_{36.14,23} = n'_{14,23}$, $V_{14.56,23} - V_{14.32,23} = n^{\star}_{14,23}$, $V'_{14.56,23} - V'_{14.32,23} = n'^{\star}_{14,23}$ s'incontrano nel punto Y'_{14} e che i punti $v_{25.14,12} - v_{36.14,12} = N_{14,12}$; $v'_{25.14,12} - v'_{36.14,12} = N'_{14,12}$ e $v'_{56.14,12} - v'_{14.32,12} = N'^{\star}_{14,12}$ $v_{14.56,12} - v_{14.32,12} = N^{\star}_{14,12}$ sono situati nella retta y'_{14}. Dunque abbiamo quattro sole rette n_{23} che s'incontrano nel punto y'_{14}, egli risulta dal num. 15 che non passano per alcun altro punto Y, analogamente dicasi per i punti N_{12} dunque si ha:

Teorema LVIII. I 90 punti V_{23}, V_{45} ecc. sono situati due a due rispettivamente in 180 rette n_{23}, n_{45} ecc. passanti quattro a quattro per i 45 punti Y. Per un punto V_{23}, V_{45} ecc. passano quattro rette n_{23}, n_{45} ecc.

Teorema LIX. Le 90 rette v_{12}, v_{34} ecc. s'incontrano due a due rispettivamente in 180 punti N_{12}, N_{34} ecc. che quattro a quattro sono situati nelle 45 rette y. In una retta v_{12}, v_{34} ecc. sono situati quattro punti N_{12}, N_{34} ecc.

È facile il dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema LX. Una coppia di rette di Pascal intorno ad un punto G forma con una delle tre rette di Steiner-Plücker e una retta σ intorno ad esso un gruppo armonico.

Teorema LXI. Una coppia di punti di Kirkman in una retta di Cayley-Salmon forma con un punto di Salmon e un punto ξ di essa un gruppo armonico.

Per i vertici di un triangolo di punti V_{23} ovvero V_{45} ecc. che hanno gli stessi indici dei vertici P di un triangolo Δ_{ik}, passano 12 rette z, sei di queste sono rette z_2, le sei altre sono rette z_3, ovvero sei sono rette z_4 e le altre sei sono rette z_5, secondo che si considerano i punti V_{23}, o V_{45} ecc. Queste 6 rette z_2 e 6 rette z_3 s'incontrano in un punto Z_2 e in tre punti Z_3 o viceversa in un punto Z_3 e in tre punti Z_2, secondo i punti V_{23} che si prendono per comporre il triangolo suddetto, perchè ad ogni punto P corrispondono due punti V_{23} secondo il teorema XLI. Ciò risulta dall'osservazione fatta al principio del numero 18. Questo vale anche per le rette z_3 e z_4 ecc. che s'incontrano quattro a quattro nei vertici del triangolo di punti V_{45} ecc. poichè l'osservazione fatta al num. 18 si può ripetere anche per le

rette z_3 e z_4 ecc. Quelle dodici rette z s'incontrano anche in quattro punti di Steiner conjugati di quelli che appartengono alle due figure π, che hanno per triangolo Δ_{ik}, il triangolo Δ_{ik} suddetto, perchè gli indici delle dodici rette z che passano per i vertici del triangolo V_{33} o V_{44} ecc. sono gli stessi di quelli delle rette di Pascal che passano per i vertici del triangolo Δ_{ik}, Questo si può ripetere correlativamente per le rette v_{12} o v_{34} ecc. dunque:

Teorema LXII. Le sei rette z_2 e le sei rette z_3 che passano due a due per i vertici di un triangolo di punti V_{23}, ovvero le sei rette z_4 e le sei rette z_5 che passano due a due per i tre vertici di un triangolo di punti V_{45}, e così via, che hanno gli stessi indici dei tre vertici P di un triangolo Δ_{ik}, s'incontrano rispettivamente in un punto Z_2 e in tre punti Z_3 o viceversa in un punto Z_3 e in tre punti Z_2, ovvero le sei rette z_4 e le sei rette z_5 s'incontrano in un punto Z_4 e in tre punti Z_5 o viceversa in un punto Z_5 e in tre punti Z_4 e così via. Le dodici rette nel primo caso come nei seguenti s'incontrano tre a tre nei quattro punti di Steiner conjugati di quelli delle due figure π del sistema $[Kp]$ che hanno in comune il triangolo Δ_{ik} di punti P suddetto.

Teorema LXIII. I sei punti K e i sei punti Z_2 situati in tre rette v_{12}, ovvero i sei punti Z_3 e i sei punti Z_4 situati in tre rette v_{34} e così via, le quali hanno gli stessi indici dei tre punti P di un triangolo Δ_{ik}, sono collocati rispettivamente in una retta p e in tre rette z_2, oppure in una retta z_2 e in tre rette p; ovvero i sei punti Z_3 e i sei punti Z_4 sono situati in una retta z_3 e in tre rette z_4 oppure in una retta z_4 e in tre rette z_3 ecc. I dodici punti tanto nel primo caso come nei seguenti, sono situati tre a tre in quattro rette di Cayley-Salmon, che contengono rispettivamente i quattro punti di Steiner comuni alle due figure π del sistema $[Kp]$ che hanno per triangolo Δ il triangolo Δ_{ik} suddetto.

Teorema LXIV. Ogni sistema $[Zz]_m$ dà luogo a sei coniche π differenti da quelle di qualunque altro sistema.

Sopra alcuni punti di Statica grafica. Memoria dell'ing. C. SAVIOTTI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 4 marzo 1877.

Parte I.

Applicazioni di Calcolo grafico.

Questa breve pubblicazione consiste in una raccolta di problemi ordinati non secondo la difficoltà, chè difficoltà non includono, ma possibilmente secondo la graduale connessione degli argomenti trattati, che si riassumono nella misura, trasformazione e divisione delle superficie.

Ho cercato di presentare il maggior numero possibile di casi; però, a parte ulteriori combinazioni o speciali applicazioni di essi, non sarà difficile, a chi voglia meditare alquanto sui soggetti trattati, di risolvere altri problemi.

Sarà di non lieve sussidio la conoscenza della Geometria projettiva, intorno alla quale possono servire di testo gli *Elementi di Geometria projettiva* del prof. Cremona.

Possano intanto quei problemi che espongo, servire come incitamento all'applicazione del metodo grafico nei casi in cui la speditezza ed il grado di approssimazione lo rendono preferibile, e come esercizio nelle scuole dove si studia il Calcolo grafico, avendo a guida gli *Elementi di Calcolo Grafico* dello stesso prof. Cremona, da cui riporto anche per ragion d'ordine parecchie costruzioni.

Qualche altra costruzione non mia fu riportata per lo stesso motivo.

Misura delle superficie.

1. Uno degli argomenti più utili del Calcolo grafico nelle applicazioni è la ricerca dell'area delle superficie piane. Si può fare tale ricerca col trasformarle oppure col suddividerle in altre semplici. Quasi sempre interessa d'ottenere un rettangolo od un triangolo equivalente alla superficie proposta ed avente una base o doppia base data. A ciò si giunge col ridurre a tal base o doppia base la superficie semplice o quelle semplici, in cui è stata trasformata o suddivisa la proposta.

2. La riduzione delle superficie ad una base comune è poi necessaria ogniqualvolta sulle medesime si vogliono compiere operazioni di Calcolo grafico. Col Calcolo grafico si opera sui segmenti o tratti, i quali possono rappresentare, proporzionalmente, aree, volumi, forze, prodotti d'un numero qualsiasi di fattori; ecc. Ed appunto riducendo le superficie ad una base comune, si opera poi sulle altezze risultanti, che ne esprimono proporzionalmente l'area, salvo a restituire nel risultato

finale la base di riduzione. Sotto questo punto di vista, la riduzione delle superficie ad una base data costituisce un'operazione preparatoria del Calcolo grafico.

Riduzione delle superficie semplici ad una base data.

3. *Parallelogrammo.* — Si porti la base data b (Tav. I, Fig. 1) sopra un lato qualunque a partire da un vertice, per es. in $A\,E$; si tiri $D\,F$ parallela ad $E\,B$; e la perpendicolare $G\,F = h$ calata da F sopra $A\,D$ sarà l'altezza del parallelogrammo ridotto alla base b.

Dall'equivalenza dei due triangoli $A\,F\,E$ ed $A\,D\,B$ risulta infatti:

$$A\,D\,.\,B\,H = b\,.\,h\,.$$

Si assume l'altezza h come misura della superficie « relativa alla base b ».

Per $b = 1$ è h la misura effettiva della superficie letta sulla scala delle lunghezze.

4. *Triangolo.* — *a)* Si porti la doppia base $2b$ (Fig. 2) sopra un lato qualunque a partire da un vertice, per es. in $A\,D$; si tiri $B\,E$ parallela a $D\,C$; e la perpendicolare $E\,F = h$ calata da E su $A\,B$ sarà la misura del triangolo.

b) Si centri in un vertice (Fig. 3) per es. in B e si descriva un arco di circonferenza con raggio $2b$; per un altro vertice per es. A si tiri una tangente all'arco, e pel terzo vertice C la $C\,D$ parallela al lato opposto $A\,B$; sarà $A\,D = h$ la misura del triangolo.

Infatti il triangolo $A\,D\,B$ è equivalente al dato. Questa soluzione è applicabile quando si ha $2b$ minore del maggior lato del triangolo.

c) Se ciò non si verifica, si potrà far centro in un vertice B (Fig. 4) e con raggio $2b$ intersecare la retta $C\,D$ condotta per un altro vertice C parallelamente al suo lato opposto $A\,B$; la perpendicolare $A\,E = h$ calata dal terzo vertice A sul raggio $B\,D$ sarà la misura del triangolo.

5. *Quadrilatero.* — *a)* Un quadrilatero $A\,B\,C\,D$ (Fig. 5) può essere trasformato in un triangolo $A\,B\,E$, tirando per un vertice C la parallela alla diagonale $B\,D$; a questo triangolo si può quindi applicare una delle precedenti costruzioni. Ma può essere ridotto anche direttamente.

b) Diviso con una diagonale $A\,C$ (Fig. 6, 7) in due triangoli, si applica per tutti e due la costruzione del n. 4, *b*) che vale per uno; cioè: fatto centro in un vertice A e descritto un arco di circonferenza con raggio $2b$, si tiri a questo arco una tangente dal vertice opposto C; le rette $D\,D'$ e $B\,B'$ condotte parallelamente alla diagonale $A\,C$ vi determinano sopra:

$$B'\,C + C\,D' = B'\,D' = h$$

misura del quadrilatero.

Infatti, esso risulta equivalente al triangolo $A\,B'\,D'$. Non è più applicabile questa soluzione se è $2b$ maggiore della maggior diagonale del quadrilatero.

c) In tal caso, fatto centro in un vertice B (Fig. 8) con raggio $2b$, si interseca la $D\,M$ parallela ad $A\,C$ in un punto M; la perpendicolare $A\,E = h$ calata da A su $C\,D'$ parallela a $B\,M$ sarà la misura del quadrilatero.

Infatti, ancora risulta un triangolo $A\,B'\,D'$ equivalente al quadrilatero proposto.

d) Si può ancora far centro in A e con raggio $2b$ segare la $D\,M$ parallela

ad $A\,C$ (nella figura il punto d'intersezione coincide per caso con D' incontro della $C\,B'$ parallela a $B\,M$ con la $D\,M$); tirata la $C\,D'$, indi la $B\,B'$ parallela ad $A\,C$, si cala da B' su $A\,D'$ la perpendicolare $B'\,F$, che sarà la misura del quadrilatero.

6. *Applicazione.* — Le costruzioni *b)* e *c)* dei n.^{i} 4 e 5 sono convenienti pei casi, in cui si hanno più triangoli o quadrilateri con un vertice in comune.

Così la Fig. 9 mostra l'applicazione alla determinazione dell'area d'una sezione di ferro d'angolo, considerata come differenza fra un rettangolo $O\,A\,B\,C$, il triangolo $O\,G\,F$ e il quadrilatero $O\,F\,E\,D$; se ne ha l'area in

$$b\,(h_1 - h_2 - h_3).$$

Osservazione. — In generale, quando si debba trovare l'area d'una superficie a contorno poligonale, torna più semplice, scomporla in quadrilateri con un vertice in comune e scegliere questo vertice fra quelli del contorno, anzichè scomporla in triangoli; tanto più che le misure di questi, quando occorrano, restano separatamente determinate colle costruzioni stesse relative ai quadrilateri. Così nella Fig. 9 in h_3 si ha la misura del quadrilatero $O\,F\,E\,D$, che è la somma di $F'\,E$, misura del triangolo $O\,F\,E$ e di $E\,D'$ misura del triangolo $O\,E\,D$.

7. *Trasformazione delle superficie a contorno poligonale.* — Già le precedenti costruzioni sono sufficenti per trovare l'area d'una superficie a contorno poligonale qualsiasi, riducendo, cioè, ad una base comune con tante operazioni separate, le figure semplici in cui essa viene decomposta.

Si può anche non decomporre, ma trasformare direttamente la superficie data in una semplice, quadrilatero o triangolo, da ridursi poi, ove occorra, ad una base data; e ciò nei modi seguenti:

a) Numerato il contorno 0 1 2 3 4 ..... (Fig. 10) si projetti il vertice 1 in 2′ sul lato 2 3 parallelamente alla diagonale 0 2; indi 2′ in 3′ sul lato successivo 3 4 e parallelamente alla diagonale 0 3 e così via; la superficie 0 1 2 3 4 ..... resta così trasformata successivamente nelle 0 2′ 3 4 .....; 0 3′ 4 ..... La costruzione non cade punto in difetto se risultano coincidenti dei vertici o dei lati del contorno.

Se ne può approfittare per trasformare consecutivamente anche più superficie disgiunte. La Fig. 11 mostra la trasformazione delle due superficie di senso contrario: 0 1 7 8 9 e 2 3 4. Congiunti due vertici delle due figure si sono considerate insieme come una sola avente due lati 12 e 56 coincidenti. La superficie unica 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 venne così trasformata nel triangolo 0 8′ 9.

b) Si può anche eseguire la trasformazione di una superficie, facendo passare per un vertice una retta ad arbitrio r (Fig. 12), e projettando i vertici 1, 2, 3, ... in 1′, 2′, 3′, ... su di essa parallelamente alle diagonali 0 2, 1′ 3, 2′ 4, ...; il poligono resta trasformato successivamente in 0 1′ 2 3 4....., 0 2′ 3 4....., 0 3′ 4..... Facendo coincidere la retta arbitraria r con un lato del contorno si risparmia una operazione.

La Fig. 13 mostra l'applicazione di quest'ultimo metodo alla ricerca dell'area d'una sezione di ferro così detto a Z. Numerato il contorno 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ed assunto per retta fissa r l'ultimo lato 0 11, è stata trasformata successivamente la figura fino al triangolo 9′ 10 11.

È da raccomandarsi questo metodo per determinare l'area delle sezioni trasversali di travature composte, o parti di macchine, di cui si debba trovare il peso col calcolo.

8. *Trasformazione delle superficie, nel cui contorno entrano degli archi di circonferenza.* — Allorquando a far parte del contorno di una superficie entrano delle curve, si sostituiscono queste con delle spezzate per modo che il contorno riesca poligonale; la nuova superficie si trasforma allora in una semplice riducibile poi ad una base data.

a) Se la curva è un arco di circonferenza, torna conveniente la costruzione indicata nella Fig. 14, dove ..... $A\,B\,C\,D$..... è una parte del contorno di una superficie. Al settore circolare $O\,B\,C$ è stato sostituito il triangolo $O\,B\,B'$, di cui il lato $B\,B'$ è uguale allo sviluppo dell'arco $B\,C$, ottenuto, come mostra la figura, portando una conveniente apertura di compasso sull'arco a partire da C e ripetendola sulla tangente in B a partire dal punto di divisione più vicino (11) a B (1). Così il contorno trasformato in uno poligonale è ..... $A\,B\,B'\,O\,C\,D$.....

b) Può interessare la trasformazione di un triangolo mistilineo $A\,B\,C$ (Fig. 15) formato da un arco di circonferenza $A\,C$ e dalle tangenti ne' suoi termini in un triangolo rettilineo $F\,B\,G$ avente il lato $F\,G$ parallelo alla corda $A\,C$.

Si consideri il triangolo mistilineo dato come differenza fra il quadrilatero $A\,B\,C\,O$ ed il settore $O\,A\,C$ o il triangolo $O\,A\,C'$ a questo equivalente. Si trasformino queste due superficie componenti, la prima nel triangolo $A\,B\,C_2$ e la seconda nel triangolo $A\,B\,C_3$; portata la differenza $C_2\,C_3$ in $B\,D_0$ perpendicolarmente a $B\,C$ e projettata in $B\,D$ parallelamente a $B\,C$, sarà il triangolo $D\,B\,C$ equivalente alla superficie data. Allora descritto il semicircolo $A\,E\,B$ e per D elevata la perpendicolare $D\,E$ a $B\,A$, si farà $B\,F = B\,E$, e condotta per F la $F\,G$ parallela ad $A\,C$, sarà $B\,F\,G$ il triangolo richiesto (n. 20, *e*).

c) Nella Fig. 16 si ha un biangolo circolare. Venne considerato come somma del settore 2 0 3 trasformato nel triangolo 2 0 1, più il settore 4 0 3 trasformato nel triangolo 4 0 5, meno il quadrilatero 0 2 3 4, cioè uguale a:

$$0\,1\,2 + 0\,4\,5 - 0\,2\,3\,4 = 0\,1\,2\,3\,4\,5.$$

Quest'ultima figura intrecciata è stata trasformata poscia nel triangolo $3'\,4\,5$.

Trasformata una figura circolare in un'altra poligonale, non torna sempre conveniente procedere alla trasformazione di questa in un triangolo da ridursi poi ad una data base. Qualche volta risulta dalla somma di superficie componenti già tutte o quasi tutte ridotte ad una base comune:

d) La Fig. 17 ne porge un esempio. È un quadrilatero mistilineo formato da due archi concentrici e due lati paralleli al raggio medio: quest'ultima condizione non è necessaria per la costruzione. Trasformati i settori 0 1 5 e 0 2 4 nei triangoli 0 5 6 e 0 4 3, si potrebbe considerare la figura come equivalente al poligono intrecciato 0 1 2 0 3 4 5 6. Però, se come mostra la figura, si riduce il triangolo 0 5 6 alla doppia base $0\,5' = 0\,4$, il poligono intrecciato può essere letto come somma dei triangoli componenti; cioè: $0\,1\,2 + 0\,3\,4 + 0\,4\,5 - 0\,5'\,6'$ aventi tutti per una dimensione il raggio r dell'arco maggiore, onde se ne ha l'area in:

$$\frac{r}{2}\left\{ h_1 + h_2 + h_3 - h_4 \right\}$$

(1) Altri metodi grafici sono noti per ottenere lo sviluppo d'un arco di circonferenza. Questo è incontestabilmente il più semplice e dà un'approssimazione ben sufficiente, salvo nel caso di archi di piccolissimo raggio e sottendenti un angolo grande. Ma allora (vedi la stessa Fig. 14) se $P\,Q$ è l'arco dato, basterà sviluppare in $B\,B'$ un altro arco $B\,C$ concentrico e di maggiore raggio e di pari misura angolare, tirare $O\,B'$ e per P la tangente $P\,R$ parallela a $B\,B'$, che sarà lo sviluppo richiesto.

e) Un esempio analogo si ha nella Fig. 18 (Tav. II) che è pure un quadrilatero mistilineo, ma i due lati opposti $A\,D$ e $C\,B$ sono formati da archi di una stessa circonferenza. Si è trasformato il settore $O\,A\,C\,B$ nel triangolo $O\,A'\,B'$; e anche l'altro $O\,D\,C$ nel triangolo $O\,D'\,C$; così l'area risulta uguale a:

$$O\,B'\,A' - O\,B\,A - O\,C\,D' + O\,C\,D$$

cioè:

$$\frac{r}{2}\left\{ h_1 - h_2 - h_3 + h_4 \right\} (^1)$$

In alcuni casi, sia per la complicazione del contorno, sia per non poter compiere le successive trasformazioni entro i limiti della tavola ed evitare le intersezioni di rette sotto angoli troppo acuti, torna più conveniente non seguire un'unica numerazione, ma giungere al risultato mediante trasformazioni parziali.

f) Nella Fig. 19 si ha un triangolo circolare 2 5 8, che venne considerato come somma del triangolo rettilineo 2 5 8 e di tre segmenti circolari ovvero dei tre quadrilateri intrecciati 1 0 8 2, 4 3 2 5, 7 6 5 8. Si potrebbero ridurre questi ad una doppia base uguale ad un lato del triangolo, indi far la somma di tutte le altezze. La figura mostra la trasformazione diretta, non sempre facile per la ragione or detta, in un triangolo 0 7′ 8, avendo considerato il triangolo ed i tre quadrilateri come formanti un'unica figura, il cui contorno è:

0 1 2 3 4 5 6 7 8.

g) Come ultimo esempio di figure a contorno circolare si è trasformata la sezione di una volta ad arco policentrico rampante (Fig. 20). $A\,B$, $B\,C$, $C\,O$ sono i tre archi componenti; 5, 4, 1 i rispettivi centri.

Si è sviluppato l'arco $A\,B$ sulla sua tangente in A; gli altri due archi $B\,C$ e $C\,O$ sulla tangente comune in C; e così al contorno mistilineo dato venne sostituito quello poligonale 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, che alla sua volta fu trasformato nel quadrilatero 0 7′ 8 9 riducibile a quella base che si vuole.

9. *Trasformazione delle superficie a contorno parabolico.* — Sia (Fig. 21) una superficie nel cui contorno entrano degli archi parabolici. Si applica la proprietà, che un segmento parabolico è i $^2/_3$ di un triangolo di egual base e doppia altezza, oppure di un parallelogrammo di ugual base ed uguale altezza. Così nella figura si è sostituito al segmento parabolico $A\,B$ il triangolo $A\,B'\,B$ di ugual base $A\,B$ e di altezza uguale ai $^1/_3$ di quella del segmento; ed al segmento $D\,C$ il parallelogrammo $C\,C'\,D'\,D$ di ugual base $C\,D$ e d'altezza uguale ai $^2/_3$ di quella del segmento. La superficie data risulta perciò equivalente alla poligonale $A\,B'\,C\,C'\,D'\,E$, e questa alla trasformata triangolare $A\,B'\,H$.

10. *Trasformazione delle figure ellittiche.* — Allorquando l'arco è breve potrà essere considerato come parabolico con sufficiente approssimazione. In caso diverso

(1) Si potrebbero considerare i due triangoli $O\,C\,D'$ e $O\,C\,D$ come formanti il quadrilatero intrecciato $O\,D'\,C\,D$ la cui misura si ha in $D'\,D'' = h_3 - h_4$ e che si ottiene projettando D in D'' parallelamente ad $O\,C$.

si può procedere rigorosamente trovando un segmento circolare equivalente all'ellittico. Perciò si costruisca un circolo affine equivalente all'ellisse, di cui il segmento dato $B\,C\,D$ (Fig. 22) fa parte; il suo raggio sarà $= \sqrt{\overline{OM}.\overline{CN}}$. Stabilita la corrispondenza fra le due figure per modo che ai due semidiametri conjugati $O\,M$ parallela a $B\,D$ e $O\,C$ corrispondano due raggi perpendicolari $O_1\,M_1$ e $O_1\,C_1$ si applica la proprietà dei sistemi affini, che le punteggiate corrispondenti sono simili per determinare P_1 omologo di P colla relazione $O_1\,P_1 = O\,P\,\frac{O_1\,C_1}{O\,C}$; inoltre a rette parallele corrispondendo rette parallele sarà $B_1\,D_1$ parallela a $O_1\,M_1$ la corrispondente di $B\,D$; il segmento $B_1\,C_1\,D_1$ sarà equivalente al dato $B\,C\,D$. Trasformato $B_1\,C_1\,D_1$ nel quadrilatero intrecciato $B_1\,D_1\,B_2\,O_1$, e ridotto questo ad una doppia base $= B\,D$, si porti l'altezza h risultante in $D\,Q$ perpendicolarmente a $B\,D$; si projetti inoltre Q in D' sopra $E\,D$ parallelamente a $B\,D$ e sarà il triangolo $B\,D'\,D$ equivalente al segmento ellittico proposto.

11. *Trasformazione di superficie a contorno curvilineo irregolare.* — La trasformazione di queste superficie è soltanto approssimata. La facilità ed il rigore, con cui un contorno parabolico può essere sostituito da uno poligonale, suggeriscono il mezzo migliore per trasformare un contorno curvilineo irregolare. Si suddivide questo in tanti archi sufficientemente piccoli da poter essere riguardati come parabolici senza errore sensibile. Nella sostituzione di tali archi si avrà riguardo di ottenere un poligono del minor numero possibile di vertici, perchè più spedita ne sia poi la trasformazione in un triangolo. La stessa Fig. 21 può servire d'esempio; in essa al segmento $A\,B$ si è sostituito il triangolo $A\,B'\,B$ col vertice B' su $B\,C$, sicchè sparisce il vertice B.

Il criterio per riconoscere se un arco può essere riguardato con sufficiente approssimazione come parabolico è fornito dalle tangenti, che si possono tracciare nei termini dell'arco e che colla corda di contatto formano un triangolo, la cui altezza deve essere divisa per metà dalla tangente all'arco parallela alla corda.

Molto semplicemente si può compiere la trasformazione di una superficie a contorno irregolare direttamente in un triangolo di altezza data $2b$ (Fig. 23) sostituendo un contorno inscritto poligonale al dato. Si porta perpendicolarmente ad un lato per es. ad $A\,B$ la doppia base di riduzione in $A\,O$; si trasforma una porzione di superficie $A\,O\,C$ inferiore nel triangolo $A\,O\,D$ come mostra la figura, applicando la costruzione del n. 7, *a)*; indi l'altra parte $B\,O\,C$ nel triangolo $B\,O\,E$; e così si ottiene $D\,E$ come misura della superficie.

Questa costruzione meno approssimata della precedente può essere applicata quando il contorno dato presenti delle inflessioni, per cui risulta press' a poco equivalente la somma dei piccoli segmenti che si trascurano a quella dei segmenti aggiunti. Però in generale è da preferirsi un contorno circoscritto ad uno iscritto, perchè confondendosi ogni archetto prossimamente con uno parabolico, per questo sta la proprietà che il poligono delle tangenti (Fig. 24) $A\,C\,E\,G$ .. supera l'area vera di $^1/_3$ della somma dei triangoli $B\,C\,D$, $D\,E\,F$, ecc....., mentre il poligono delle corde $B\,D\,F\,H$..... differisce in meno dall'area vera di $^2/_3$ della stessa somma di triangoli.

Nei varî casi pratici giova poi associare il metodo delle corde con quello delle

tangenti e con quello degli archi parabolici per la trasformazione d'una medesima superficie a contorno curvilineo. E così nella parte di contorno dove la curvatura è grande conviene applicare gli archi parabolici ed alternare poi le tangenti colle corde quando specialmente il contorno non è soltanto rientrante, giacchè si introducono e si tralasciano delle piccole superficie in modo da ottenere la quasi esatta compensazione. E ciò sarebbe convenuto per la Fig. 23; avendo applicato il metodo delle corde, ciò bastava per una metà; per l'altra metà vi conveniva meglio il poligono delle tangenti.

12. Due metodi si sono applicati finora alla ricerca dell'area delle superficie; quello di decomposizione e quello di trasformazione. Un altro mezzo è quello del poligono di riduzione, o d'integrazione, o di moltiplicazione, che voglia dirsi. È ancora un metodo per decomposizione, ma che fornisce direttamente la somma delle parti componenti; sicchè il poligono sarebbe da denominarsi anche sommatorio.

Nella Fig. 25 si ha una sezione di ferro detta a V; se ne è considerata la metà di destra; vi si sono sostituiti due piccoli settori con due triangoli; decomposta in quattro parti, si è portata di queste una dimensione (conviene la minore) sopra una retta x successivamente; l'altra, raddoppiata, sopra una perpendicolare y alla x in 01, 02, 03, 04; per tutti i punti 0, 1, 2 .... della y si è guidato un fascio di ordinate parallele ad x, e su di esse si sono fatti cadere i vertici di un poligono (di riduzione), i cui lati sono paralleli al fascio dei raggi projettanti la punteggiata x da un polo P, che ne dista di b; i segmenti h_1, h_2;..... ottenuti sull'ordinata d'origine $o\,y'$ sono le misure dei doppi delle parti componenti; il segmento intercetto fra i lati esteriori ne è la somma Σh; e $b.\Sigma h$ l'area della sezione intera. Ciò risulta dalla semplice considerazione dei triangoli simili aventi le loro basi sulla x e sulla $o\,y'$.

Allorquando la punteggiata x risulta troppo lunga (oltre i limiti del foglio) si potrà ridurre in un rapporto qualsiasi pur di ridurre nello stesso rapporto anche la base b. Oppure si potrà rovesciare una parte della punteggiata x all'indietro su se stessa, pur di portare le corrispondenti seconde dimensioni, non secondo oy ma in senso opposto. Se qualcuna delle striscie componenti ha un senso opposto a quello delle altre, se ne dovrà portare una delle dimensioni (quella sulla x o quella sulla $o\,y$) in senso opposto a quello nel quale si portano le dimensioni analoghe delle altre striscie.

Se la superficie è a contorno irregolare la riduzione è soltanto approssimata. Per ottenere la maggior approssimazione possibile se ne faccia la divisione in istriscie (Fig. 26) di altezza così piccola da potersi ritenere gli archi intercetti del contorno come parabolici; si limiterà ogni striscia con una parallela $A'\,B'$ alla corda $A\,B$ e distante da questa dei $\frac{2}{3}$ dell'altezza del segmento.

Se gli archi $A\,B$ sono piccolissimi potranno essere sostituiti colle tangenti ad essi parallele alle rispettive corde, s'intende con minore approssimazione. La sostituzione della corda all'arco dà un'approssimazione ancor minore (1).

(1) Parmentier ha trattato analiticamente il problema della quadratura approssimata proponendo una formola semplice e che dà un'approssimazione maggiore di quella di Simpson e di Poncelet. Vedi Nouvelles annales de mathématiques 1855, pag. 370.

13. *Riduzione di figure simili.* — Se le striscie o superficie semplici, che si vogliono ridurre ad una base comune sono simili (triangoli, parallelogrammi) o più generalmente di indice uguale, intendendo per indice il rapporto fra l'altezza e la base di ogni striscia, in luogo di ricorrere al poligono di riduzione, si potrà procedere anche così: Abbiasi una serie di triangoli aventi uno stesso indice; s'immaginino ridotti tutti simili e meglio anche rettangoli; se ne porti la base sulla $O\beta$ (Fig. 27) sempre a partire da O e l'altezza sulla $O\alpha$ sempre a partire da O. Così i triangoli dati, resi simili e rettangoli, risultano sovrapposti in OAB, OA_1B_1, OA_2B_2; ecc. Sia $OB_1 = 2b$ (oppure $= b$ se si tratta di rettangoli); si projetti la punteggiata AA_1A_2 ..... ecc. da B_1, e pei punti B, B_1, B_2, ... ecc. si guidino le parallele a quei raggi projettanti; si ottengono i punti A', A_1, A'_2, ... ecc. ed OA', OA_1, OA'_2 ..... ecc. saranno le misure dei triangoli dati. Tutte le basi e quella di riduzione sono sulla $O\beta$, le altezze e quelle ridotte sono sulla $O\alpha$. Giova notare che le basi e le altezze ridotte corrispondenti sono le coordinate di una curva OFC_1H..... che, quando sia tracciata e la carta sia millimetrata, permette di rilevare l'altezza ridotta di un triangolo qualunque, il cui indice sia $= \frac{OA}{OB}$, quando soltanto se ne sia portata la base sulla $O\beta$. La curva OFC_1H ..... è una parabola. Infatti sta l'equivalenza dei triangoli:

OBA	OBC	OBD	OB_1F
OB_1A_1	OB_1C_1	OB_1C_1	OB_1C_1
OB_2A_2	OB_2C_2	OB_2D_2	OB_1H
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

D'altra parte sono successivamente prospettivi i fasci:

$$O(D, C_1, D_2, \ldots\ldots), \overset{\infty}{O_1}(A, A_1, A_2, \ldots\ldots),$$
$$\overset{\infty}{O_2}(B, B_1, B_2, \ldots\ldots), \quad \overset{\infty}{O_3}(F, C_1, H, \ldots\ldots),$$

sicchè, il primo e l'ultimo, essendo projettivi, generano una conica OFC_1H ..... $\overset{\infty}{O_3}$ ....., che è una parabola, perchè la congiungente $O\,\overset{\infty}{O_3}$ i centri dei due fasci, come raggio di $\overset{\infty}{O_3}$ corrisponde ad $O\beta$ (tangente alla conica in O) e come raggio di O corrisponde alla retta all'∞ del piano (tangente alla conica in $\overset{\infty}{O_3}$); $O\,\overset{\infty}{O_3}$ è l'asse della parabola, $O\beta$ la tangente nel vertice O. A questa parabola si appone un indice, che è quello dei triangoli corrispondenti. Per altre serie di triangoli di indice diverso si costruiscono altrettante parabole, mantenendosi costante la base di riduzione b.

Per l'applicazione di questo metodo di riduzione giova costruire un fascio o più fasci (tavole) di parabole conassiche, i cui indici siano espressi in frazioni centesimali.

Si prestano le tavole di parabole pel calcolo delle sezioni trasversali di strade e specialmente ferrate, canali, argini ecc., presentandosi la superficie del suolo per lunghi tratti sensibilmente cilindrica ed a generatrici perpendicolari all'asse stradale; per il che molte sezioni, come ne mostra una la Fig. 28, non differiscono tra di loro, che per avere il lato PN, intersezione colla superficie del terreno, più o meno elevata, ma sempre parallela ad una direzione costante.

Si consideri tutto il triangolo $P\,H\,N$; si assuma per base per es. il lato $P\,N$; l'indice ne sarà $= \frac{H\,R}{P\,N}$. Inserito un segmento $T\,V = 100$ nell'angolo $T\,H\,V$ parallelamente alla base $P\,N$, si ha in $H\,S$ l'indice centesimale del triangolo. Trovata nella tavola delle parabole quella che ha lo stesso indice, basta portare le basi $P\,N$ di tutti i triangoli simili sulla $O\beta$, e nelle ordinate corrispondenti della parabola si hanno le misure dei triangoli stessi. Ridotto il triangolo costante $H\,L\,M$ alla base b, se ne detrae la misura da quella dei triangoli precedenti e nelle differenze si hanno le misure dei quadrilateri $P\,L\,M\,N$.

Quando il numero delle sezioni che si riducono ad una base comune con una stessa parabola è limitato tornerà più spedita l'applicazione delle regole del n. 5.

Allorquando è limitato il numero delle sezioni per le quali non vale una stessa parabola che serve per molte altre sezioni si potranno trasformare quelle in modo che vi sia applicabile la medesima parabola. Così abbiansi tante sezioni il cui lato, intersezione colla superficie del suolo, sia orizzontale; una sezione $P\,L\,M\,N$ (Fig. 28) può essere trasformata facilmente in una simile: Projettato P orizzontalmente in P_1, descritta una semicirconferenza di diametro $H\,N$, si elevi la perpendicolare $P_1\,P_2$ ad $H\,N$, indi si tracci l'arco $P_2\,P_3$ di centro H; l'orizzontale $P_3\,P_4$ sostituirà la base obliqua $P\,N$ della sezione (1). Del triangolo $P_3\,H\,P_4$ simmetrico rispetto ad $H\,Q$ basta considerare una sola metà $Q\,H\,P_3$; assunta per es. $H\,Q$ per base, se la parabola della Fig. 29 ha lo stesso indice (2), fatto $O\,B = H\,Q$, sarà $O\,A' = B\,F$ la misura del triangolo $P_4\,H\,P_3$; e se h_0 è la misura del triangolo $H\,L\,M$, sarà $A_2'\,A' = F_0\,F$ la misura della sezione proposta. E per tutte le figure simili alla $P_4\,H\,P_3$ detratto il triangolo $L\,H\,M$ le misure si conteranno a partire dall'ascissa $A'_2\,F_0$ e non dalla $O\,B$.

La Fig. 30 (Tav. III) mostra una sezione di strada in isterro coi fossi laterali. La parte $H\,0\,1\,2\,3\,4\,5$ viene trasformata una volta tanto nel triangolo $H\,L\,M$. La figura mostra le successive trasformazioni in $H\,0\,3'\,4\,5$, $H\,0\,3'\,4'$, $H\,0\,J$. Alla $0\,J$ si sostituisce l'orizzontale $L\,M$ come per la Fig. 28 alla $P\,N$ si è sostituita la $P_4\,P_3$. Il triangolo $H\,L\,M$ si riduce poi alla base b e se ne porta la misura h'_0 in $O\,A'_3$ (Fig. 29), (Tav. II); allora se si fa subire al profilo $P\,Q\,R$ una trasformazione per cui riesca sostituito da una retta orizzontale come nel caso precedente, la misura della sezione si conterà a partire dall'ascissa $A'_3\,H$, come per tutte le sezioni di sterro.

In luogo di una o più tavole di parabole potrebbe servire anche una sola parabola; però allora a tutte le serie di triangoli d'indice diverso corrispondono altrettante basi b pure diverse.

La determinazione di questa base b per ogni serie è del resto molto semplice: Abbiasi una serie di triangoli simili ad $H\,Q\,P_3$ (Fig. 28) (Tav. II) e sia $O\,H\,F$ (Fig. 29)

(1) La ragione di questa costruzione viene indicata più avanti al n. 20, *e)*.

(2) Data la base di riduzione b, dato l'indice di una serie di triangoli si determina tosto la parabola corrispondente: Tracciati due assi perpendicolari $O\alpha$, $O\beta$ (Fig. 27) segnati: $O\,B_1 = 2\,b$ e $O\,B$, $O\,A$ uguali rispettivamente alla base e all'altezza di un triangolo della serie, si tracci $A'\,B$ parallela a $A\,B_1$; l'orizzontale per A' e la verticale per B danno F punto della parabola. Allora essendo noto un punto il vertice O e la tangente in esso si costruiscono con metodi diversi quanti altri punti si vogliono della parabola.

una parabola qualsiasi che si vuol utilizzare per la riduzione di tali triangoli; portata la base $H\,Q$ in $O\,B$ e l'altezza $Q\,P_3$ in $O\,A$, si projetti B sulla parabola in F, indi F in A'; tirata $A\,B_1$ parallela a $A'\,B$ sarà $O\,B_1 = b$ la base di riduzione per tutto il triangolo $H\,P_3\,P_4$ doppio del considerato e per i suoi simili.

14. *Riduzione dei circoli.* — I circoli si trasformano in triangoli simili e basta eseguire l'operazione per uno. Per avere lo sviluppo della semicirconferenza con molta approssimazione si può applicare una nota costruzione (Fig. 31) (Tav. III). Si traccino due diametri perpendicolari $A\,B$, $C\,H$; si segni la corda $C\,D$ uguale al raggio r del circolo, si tiri $O\,D$ sino all'incontro E colla tangente in B, si porti tre volte il raggio r da E in F; sarà $A\,F$ lo sviluppo della semicirconferenza. Infatti:

$$\overline{A\,F}^2 = \overline{A\,B}^2 + \overline{B\,F}^2 = 4\,.\,r^2 + (3\,.\,r - EB)^2$$

e dove:

$$EB = \frac{D\,K\,.\,O\,B}{O_1^1 K} = \frac{\frac{1}{2}\,r\,.\,r}{\sqrt{\frac{1}{4}\,r^2}} = \frac{r}{\sqrt{3}}\,.$$

Eseguite le operazioni risulta:

$$A\,F = 3,14\ 15\ 33.\ r = \pi.r$$

con un errore nel valore di π a meno di 6 centomillesimi.

Fatto ora $B\,G = A\,F$, risulta il triangolo $A\,B\,G$ equivalente al circolo. Assunto per base il diametro $A\,B$ si ha l'indice del triangolo in:

$$\frac{B\,G}{B\,A} = \frac{\pi\,.\,r}{2\,r} = \frac{\pi}{2} = \frac{157}{100}\,,$$

che sarà l'indice di tutti i circoli.

Costruita la parabola corrispondente per una base data, basta per tutti i circoli portare il diametro loro sulla $O\beta$ (Fig. 27); le ordinate relative della parabola saranno le misure di essi circoli.

Trasformazione di una superficie semplice in altre a contorno arbitrario sotto condizioni date.

Nelle seguenti costruzioni si fa subire alle superficie la trasformazione inversa di quella finora trattata della riduzione.

15. Trasformare un triangolo $A\,B\,C$ (Fig. 32) in un quadrilatero, del quale sono dati due lati $A\,B$ e $B\,D$ ed il terzo $A\,C$ indefinito. Basta tirare $B\,E$ parallela a $C\,D$ e sarà $A\,B\,D\,E$ il quadrilatero richiesto.

16. Trasformare un triangolo in un quadrilatero, del quale sono dati tre vertici A, B, C ed il quarto abbia da essere equidistante per es. dal primo A e dal terzo C (Fig. 33). Basta trasformare il triangolo dato in un altro di base $A\,C$; sulla perpendicolare $D\,D'$ alla stessa $A\,C$ condotta pel suo punto di mezzo portare l'altezza ridotta del triangolo in $B_1\,D$ oppure in $B_1\,D'$, essendo $B\,B'$ parallela ad $A\,C$. Sarà $A\,B\,C\,D$, oppure $A\,B\,C\,D'$ il quadrilatero richiesto.

17. Trasformare un triangolo $M\,D\,N$ (Fig. 34) in un quadrilatero, del quale $M\,D$ sia un lato, $M\,O$ e $D\,O$ due altri indefiniti e il quarto lato opposto ad $M\,D$ passi per un punto

dato O_1 oppure riesca parallelo ad una direzione data d. Si facciano tre tentativi del quarto lato: tali siano $A A_0$, $B B_0$, $C C_0$; si costruisca il fascio $N(A_1, B_1, C_1, ...) = D(A_0, B_0, C_0, ...)$; le due serie A, B, C ..... e A_1, B_1, C_1, ... sono manifestamente projettive. Affinchè un tentativo soddisfi, per es. $A A_0$, è necessario che coincidano A ed A_1; basterà dunque cercare i punti uniti, come mostra la figura; di essi, F risolve il problema.

Però giova notare, che, nel caso in cui il punto O_1 sia all' infinito sulla direzione d, le due serie projettive $A, B, C, ...$; $A_1, B_1, C_1, ...$ or considerate sono in involuzione. Difatti, se $A A_0$ si sposta a distanza infinita, il raggio $D A_0$ riesce parallelo ad $M N$, ed il raggio parallelo a questo condotto per N è $N O$, e così O corrisponde al punto all'infinito della punteggiata $O D$; fatta passare la $A A_0$ per O il raggio per D parallelo ad $N O$ determina ancora il punto all'infinito di $M N$, epperò anche di $O D$, e così fra O e il punto all'infinito di $O D$ esiste la doppia corrispondenza; dunque basteranno due soli tentativi ed un punto doppio risolve il problema. Anzi, essendo O il centro dell'involuzione, ogni qualvolta esso cada non molto lontano si potrà applicare una costruzione ancor più semplice, l'equazione dell'involuzione, cioè: tirata $N D_1$ parallela alla direzione d, saranno D e D_1 due punti conjugati, onde:

$$\overline{OF}^2 = OD \,.\, OD_1 :$$

e si determina F con una semplice media geometrica come mostra la figura.

Se O si allontana fino all' infinito, basta pel punto di mezzo di $N D$ tirare la parallela alla direzione data d e si ha completato il quadrilatero $D M F_0 F$, che risulta un trapezio.

I due fasci $N(A_1, B_1, C_1; ....)$ e $O_1^{\infty}(A, B, C, ...)$ projettivi generano un' iperbole, che tocca in N il lato $N D$ del triangolo. Quando $F F_0$ ossia la direzione data d sia parallela ad $M D$, allora $D N$ si mantiene tangente alla conica in N, $D M$ diventa un assintoto e $M N$ parallelo all'alto.

18. Chiudere una spezzata $A B C D E F$ ..... (Fig. 35) con una retta passante per l'origine A e per modo che la superficie racchiusa riesca equivalente ad un triangolo dato. Basta applicare la costruzione inversa di quella (n. 7) che valse a trasformare un poligono in un triangolo: Si ridurrà il dato triangolo ad avere per base il primo lato $A B$ della spezzata, indi se ne projetterà il vertice opposto sul secondo lato $B C$ della spezzata in M parallelamente al primo lato $A B$; poscia questo vertice M sul terzo lato $C D$ parallelamente alla diagonale $A C$, e questo nuovo vertice N sul quarto lato $D E$ parallelamente alla diagonale $A D$; e così continuando si projetterà il vertice ottenuto P sul quinto lato $E F$ parallelamente alla diagonale successiva $A E$, finchè il nuovo vertice F non cada più sul prolungamento dei lati della spezzata. Sarà allora $A B C D E F$ la superficie poligonale equivalente al triangolo dato.

Può avvenire, che un lato, per es. $C D$ (Fig. 36) della spezzata passi per l'origine A; in tal caso, essendo il triangolo $A B M$ equivalente al dato, projettato M su $B C$ in N parallelamente ad $A B$, la projezione di N su $C D$ e da farsi parellalamente alla diagonale $A C$ cade all' infinito di $C D$. Si trasformi allora il triangolo $A C N$ nell'altro $A D H$ come mostra la figura; dopo di che si procede come prima; cioè: projettato H in K su $D E$ parallelamente alla diagonale $A D$, indi K in F su $E F$

parallelamente alla diagonale $A\,E$, il triangolo proposto resta successivamente trasformato nei poligoni $A\,B\,C\,D\,H$, $A\,B\,C\,D\,K$ e $A\,B\,C\,D\,E\,F$.

Se in luogo di una spezzata si ha una curva si potrà sostituire questa con un poligono inscritto o meglio circoscritto.

19. Chiudere una spezzata $A\,B\,C$ ..... $H\,K$ (Fig. 37) a termini fissi A e K con un'altra spezzata minima (bilatera) e per modo che la superficie racchiusa risulti equivalente ad un triangolo dato.

Si è trasformato il triangolo dato successivamente nei poligoni $A\,B\,P$, $A\,B\,C\,Q$, $A\,B\,C\,D\,R$, $A\,B\,C\,D\,E\,S$ e $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G$, applicando la precedente costruzione. Si è poscia trasformata la rimanente parte di poligono $A\,G\,H\,K$ in un triangolo di base $A\,K$. Projettatone il vertice L paralellamente al lato opposto $A\,K$ sopra la perpendicolare $N\,M$ elevata nel punto di mezzo alla stessa $A\,K$, si è ottenuto in M il vertice della spezzata minima di chiusa richiesta $A\,M\,K$.

Divisione delle superficie.

La divisione delle superficie trova un'utile applicazione nella divisione delle proprietà.

20. *Divisione d'un triangolo.* — *a)* Debbasi dividere un triangolo $A\,B\,C$ (Fig. 38), (Tav. III) in due parti aventi tra loro un rapporto dato mediante una retta, che parta da un punto P del suo contorno. Diviso un lato $A\,B$ in due parti $A\,D$ e $D\,B$ aventi fra loro il rapporto dato, lo stesso rapporto avranno fra di loro i due triangoli $A\,C\,D$ e $B\,C\,D$. Tirata $C\,E$ parallela a $D\,P$ e congiunto E con P, il triangolo $B\,P\,E$ riesce equivalente all'altro $B\,C\,D$, onde $P\,E$ è la dividente richiesta.

b) Se la dividente deve essere parallela ad un lato per es. ad $A\,B$ (Fig. 39), si divida uno degli altri due lati per es. $B\,C$ in due parti $C\,D$ e $D\,B$ aventi fra loro il rapporto dato. Descritta una semicirconferenza di diametro $B\,C$ ed a questo elevata la perpendicolare $D\,E$, si faccia $C\,B_1 = C\,E$ e sarà $B_1\,A_1$ parallela a $B\,A$ la dividente richiesta. Infatti si ha:

$$\frac{A_1\,C\,B_1}{A\,C\,B} = \frac{\overline{C\,B_1}^2}{\overline{C\,B}^2} = K$$

e si ricava:

$$C\,B_1 = \sqrt{C\,B\ (K.\,C\,B)}$$

quale appunto si è costruito.

c) Per dividere un triangolo in n parti per es. equivalenti con rette parallele ad un lato $A\,B$ (Fig. 40) basta dividerne un altro per es. $B\,C$ in n parti uguali e per ogni punto di divisione ripetere la costruzione precedente come mostra la figura.

d) Per dividere un triangolo $A\,B\,C$ (Fig. 41) in due parti di rapporto dato con una retta passante per un punto qualunque P del piano, si divida un lato $A\,B$, sul quale presumibilmente si appoggerà la dividente, in due parti $A\,D$, $D\,B$ aventi fra loro il rapporto dato. Il triangolo $D\,C\,B$ sarà equivalente ad una delle parti.

Ora si applichi il metodo di falsa posizione geometrica, cioè: si faccia un tentativo, tirando una dividente $N\,N_0$ per P; perchè soddisfi, tirata $C\,N_1$ parallela a $D\,N_0$ debbono coincidere N_1 e N. Frattanto N ed N_1 sono punti corrispondenti di due

serie projettive sovrapposte e dove B corrisponde al punto all'∞ (B_1) della retta come appartenente alla seconda serie. Trovati i punti uniti, F ed F_1, uno di essi, F, risolve il problema; $F F_0$ è la dividente richiesta.

Le due rette $P F$ e $P F_1$ sono le tangenti all'iperbole determinata dai due assintoti $B C$ e $B A$ e dalla tangente $C D$. Se entrambe le soluzioni $P F$ e $P F_1$ soddisfano alle condizioni del problema, nel caso in cui si tratti di divisione di terreni, gioverà scegliere quella, che comprende coi lati del contorno, a cui si appoggia, gli angoli meno acuti.

e) Se il punto P si allontana sino all'infinito in una direzione d (Fig. 42) (Tav. IV) le due serie projettive precedenti sono in involuzione. Infatti B considerato come appartenente successivamente alle due serie, ha sempre per corrispondente il punto all'infinito della retta $B A$, onde è anche il centro dell'involuzione; e dall'equazione di essa:

$$\overline{BF}^2 = \overline{BN} \cdot \overline{BN_1}$$

si ha mezzo per determinare F, epperò la dividente $F F_0$.

Il conjugato del punto D è D_1 che si ottiene projettando C sulla punteggiata $B A$ parallelamente alla direzione d; così la coppia (D, D_1) è quella che si ottiene più speditamente delle altre e conviene valersene per determinare F nel modo indicato dalla figura.

f) Per dividere un triangolo in n parti proporzionali a segmenti dati con rette parallele ad una direzione arbitraria d (Vedi Fig. 42bis Tav. VI dove d è perpendicolare al lato $A C$) si divida il lato $A C$ in n parti proporzionali ai segmenti dati (nella figura, si è diviso in cinque parti uguali) e si projettino i punti di divisione 1 2 3 4 dal vertice B; risulta diviso il triangolo in parti proporzionali ai segmenti dati. Per sostituire alle dividenti $B1$, $B2$, ... delle rette parallele a d si applichi la costruzione precedente, cioè: si tiri $B D$ parallela a d, si descrivano due semicircoli di diametro $A D$ e $D C$, si projettino i punti 1, 2, 3, ... in $1'$, $2'$, $3'$, ... normalmente ad $A C$; si facciano: $A M_1 = A 1'$; $A M_2 = A 2'$; ..... e le $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ ..... condotte per M_1, M_2, ... parallelamente a d saranno le richieste dividenti.

g) Se si projetta il punto 1 sul lato $B C$ parallelamente ad $A B$ in $1''$; indi, descritto un semicircolo di diametro $C B$ si eleva la perpendicolare $1''1'''$ a $B C$ e si fa $C H = C 1'''$, la $H H'$ parallela a $B A$ sostituisce la dividente $1 B$ (Vedi la costruzione relativa alla Fig. 34). Così ripetendo l'operazione per le altre parti si ottiene la divisione di un triangolo in parti proporzionali a segmenti dati con rette parallele ad un suo lato; e ciò mediante una costruzione, che, risalendo ad una ragione diversa, si identifica con quella della Fig. 40.

h) Per dividere un triangolo $A B C$ (Fig. 43) (Tav. IV) in tre parti proporzionali a tre segmenti m, n, p con rette partenti dai tre vertici e riunentisi in un sol punto interno O, basta far sì che questo punto O disti da $B C$ di $A D \frac{m}{m+n+p}$ e da $A C$ di $B E \frac{n}{m+n+p}$.

Quando le dividenti coincidono colle mediane le tre parti sono equivalenti.

Congiungendo i punti di mezzo dei tre lati di un triangolo, risulta diviso il triangolo stesso in quattro triangoli equivalenti.

Se per l'incontro delle mediane si tirano le parallele ai tre lati di un triangolo, esso risulta diviso in tre trapezi equivalenti.

21. *Divisione dei quadrilateri.* — *a)* Si divide un parallelogrammo in due parti equivalenti con una retta passante per un punto dato o parallela ad una direzione data, congiungendo il punto dato con quello d'incontro delle diagonali, o per questo, tirando la parallela alla direzione stabilita.

b) Per dividere un trapezio $A\,B\,C\,D$ (Fig. 44) in due parti di rapporto dato mediante una retta passante per un punto qualunque P o parallela ad una direzione arbitraria d e sotto condizione che la dividente si appoggi sui due lati paralleli del trapezio, si tracci una retta $E\,F$, che divida il trapezio in due parti aventi il rapporto stabilito e per questo basta che essa passi pel punto di concorso di $D\,A$ e di $C\,B$ e divida il lato $C\,D$ nello stesso rapporto. Risolve allora il problema la dividente $G\,P$, che passa pel punto di mezzo O della $E\,F$ e pel punto dato P, ovvero la $H\,K$ che passa pel punto O ed è parallelo alla direzione d. Se le due parti devono essere equivalenti la retta $E\,F$ diventa la mediana del trapezio ed il problema ammette una soluzione unica.

c) Divisione di un trapezio in due parti aventi fra loro un rapporto dato mediante una retta che abbia la direzione de' suoi lati paralleli.

Sia $A\,B\,C\,D$ il trapezio dato (Fig. 45); lo si trasformi nel parallelogrammo $B_0\,D$ e questo nell'altro $A\,B\,B_1\,D_1$. Di quest'ultimo si divida il lato $A\,D_1$ in due parti $A\,H$, $H\,D_1$ aventi fra loro il rapporto dato; allora il parallelogrammo $B\,H$ risulta equivalente ad una delle parti, in cui si vuol dividere il trapezio dato. Si tracci ora una retta qualunque $M\,M_0$ parallela ad $A\,B$ qual tentativo per dividere il trapezio; perchè soddisfi bisogna che il triangolo $B\,K\,M$ sia equivalente al parallelogrammo $K\,H$, ossia al triangolo $K\,M_0\,M_0'$, essendo O il punto di mezzo di $H\,H_1$. Allora si ha un quadrilatero intrecciato $B\,M\,M_0\,M_0'$, che deve essere di area nulla; cioè tirata $M_0'\,M'$ parallela a $B\,M_0$, devono coincidere i due punti M e M'. Fatti due altri tentativi restano individuate sulla $B\,C$ due punteggiate projettive. Inoltre, se si fa coincidere un tentativo con $B\,A$ e si trova di B il punto corrispondente B', si riconosce fra essi facilmente la doppia corrispondenza. Le due serie essendo adunque in involuzione basteranno due soli tentativi per avere un punto doppio F, che risolva il problema come mostra la figura. E se il centro dell'involuzione V cade entro i limiti del foglio potrà bastare un tentativo solo. I due fasci, quello dei raggi $M\,M_0$ e quello dei raggi $M_0'\,M'$ generano un'iperbole che passa per $F, H_1, \ldots\ldots$; ed ha per assintoti $A\,B$ e la simmetrica di $B\,B_1$ rispetto a $V\,D$.

Si può procedere anche nel modo seguente: Si descriva un semicircolo di diametro $V\,D$; si faccia $V\,A_0 = V\,A$ e si cali su $V\,D$ la perpendicolare $A_0\,L$; si divida $L\,D$ come si vuol dividere il trapezio per es. per metà in Q; si elevi da Q la perpendicolare $Q\,Q_0$ a $V\,D$ e sarà $V\,Q_0 = V\,F_0$. Infatti sta:

$$\frac{VF_0F - VAB}{VDC - VAB} = \frac{\overline{VF_0}^2 - \overline{VA}^2}{\overline{VD} - \overline{VA}^2} = \frac{VQ \,.\, VD - VL \,.\, VD}{VD \,.\, VD - VL \,.\, VD} = \frac{VL + LQ - VL}{VL + LD - VL} = \frac{LQ}{LD} = \frac{LQ}{2.LQ} = \frac{1}{2}.$$

Se il vertice V cade fuori del foglio si opera sul lato $C\,D$. Descritto il semicircolo $C\,F_0'\,D$ si projetti B in B_2 parallelamente ad $A\,D$ e si descriva l'arco $B_2\,L_0'$

di centro D; tirata la perpendicolare $L_0' L'$ su $C D$ si divida $L' C$ come si vuol diviso il trapezio, nel caso presente per metà in Q'; elevata la perpendicolare $Q' F'_0$ a $C D$ sarà: $D F_0' = DF' = F_0 F$.

d) Divisione di un quadrilatero in due parti di rapporto dato mediante una retta parallela ad un suo lato.

Si trasformi da prima il quadrilatero dato $A B C D$ (Fig. 46) in un trapezio $A B C D_1$, il che equivale a sostituire al lato $A D$ del triangolo $A D O$ un altro parallelo a $B C$; e basta tirare $A E$ parallela a $B C$, indi fare $O D_1 = \sqrt{OE \cdot OD}$; si applica allora una delle costruzioni precedenti relative al trapezio e si trova la dividente $F_0 F$. Più semplicemente: si tiri la diagonale AC e per D la parallela, che incontrerà $O A$ in L; diviso $L B$ in due parti aventi il rapporto dato, pel punto di divisione Q si tiri $Q C$ e sarà il triangolo $Q C B$ equivalente ad una delle parti. Si sostituisce allora la $Q C$ colla $F F_0$ parallela a $C B$ mediante la costruzione indicata nella stessa figura (n. 20, *e*).

Si applica facilmente questa costruzione al caso, in cui la $F F_0$ debba avere una direzione arbitraria. Che se la dividente $F F_0$ deve passare per un punto del contorno del quadrilatero si applicherà, dopo trovata la $Q C$, la costruzione del n. 20, *a)*.

e) Se la dividente deve passare per un punto dato P (Fig. 47), si potrà sostituire al lato $A B$, l'altro $A' B'$ parallelo a $C D$, poscia dividere il trapezio $A' B' C D$ nelle due parti aventi il rapporto dato mediante la $F F_0$ parallela a $C D$; infine sostituire a questa dividente la $E E_0$ passante pel punto dato P. Più semplicemente: si trasformi il quadrilatero in un triangolo $D C G$, si divida $D G$ in $G H$ e $H D$ aventi il rapporto dato e si sostituisca alla dividente $H C$ nel triangolo $D C K$ la $E E_0$ passante per P (n. 20, *d*).

f) Per dividere un quadrilatero $A B C D$ (Fig. 48) in n parti proporzionali a segmenti dati con rette che si appoggiano a due lati opposti $A B$ e $C D$, s'incominci a tirare $C C'$ parallela ad $A B$ ed a dividere il trapezio $A B C C'$ in n parti proporzionali ai segmenti dati; per il che basta dividere il lato $A B$ in quelle n parti e projettare da V i punti di divisione $M, N, \ldots\ldots$; projettati poscia i punti $M', N', \ldots\ldots$ da D, le parti $D A M M'$, $D M' M N N'$, $\ldots\ldots$ saranno equivalenti alle volute; onde non rimane che da projettare i vertici $M', N', \ldots\ldots$ su $C D$ in $M'', N'' \ldots\ldots$ parallelamente a DM, DN, $\ldots\ldots$ e le $M M''$, $N N''$, $\ldots\ldots$ saranno le dividenti richieste.

Se una dividente per es. la $N N''$ deve avere una direzione data, per es. perpendicolare al lato $A B$, si projetti N in P perpendicolarmente ad $A B$, si elevi in P la perpendicolare a $C D$ e descritto il semicircolo di diametro $O N''$ si faccia $O R = O Q$ e sarà $R S$ perpendicolare ad $A B$ la richiesta dividente.

g) Se le dividenti debbono essere parallele ad una direzione comune d si può direttamente procedere così: trasformato il quadrilatero in un triangolo $A D E$, si divide la base $A E$ di questo come si vuol dividere il quadrilatero e si applica in seguito la costruzione del n. 20, *f)*.

22. *Divisione delle superficie a contorno poligonale.* — *a)* Debbasi dividere una superficie 0 1 2 3 $\ldots\ldots$ 10 11 (Fig. 49) in n parti aventi fra di loro rapporti dati, mediante rette uscenti da un punto O qualunque del suo contorno. Basta trasformare il poligono in un triangolo $O A F$ che abbia per un vertice il punto O e per lato

opposto un lato qualsiasi del contorno per es. il lato 3 4. (n. 7, *a*) Divisa la base *A B* in *n* parti aventi fra loro i rapporti dati, gli stessi rapporti avranno i triangoli *O A B*, *O B C*, ... *O E F*; e applicata la costruzione del n. 18, cioè ricondotti i punti *B*, *C*, ... sul contorno in B_3, C_3, ... mediante successive projezioni fatte parallelamente alle diagonali 0 4, 0 5, ... le rette OB_3 OC_3, ... saranno le dividenti richieste.

Se una superficie *A B C* (Fig. 54) (Tav. V) deve essere divisa in due parti equivalenti con una retta passante pel vertice *A* si divida la superficie in istriscie parallele al lato *B C* su cui andrà a terminare la dividente; la spezzata *A D E F G*, i cui vertici sono i punti di mezzo delle corde dividenti le striscie, separa la superficie in due parti equivalenti. Per sostituirle una retta si tiri *D* E_1 parallela ad *A E* e sarà *A* E_1, la dividente delle prime due striscie. Fatto $F F_1 = E E_1$ e tirata $E_1 F_2$ parallela ad $A F_1$ sarà $A F_2$ la dividente delle prime tre striscie. Finalmente fatto $G G_1 = F F_2$ e tirata $F_2 G_2$ parallela ad $A G_1$, risulta $A G_2$ la richiesta dividente rettilinea di tutta la superficie.

b) Se il punto *O* da cui devono partire le dividenti è interno alla superficie data (Fig. 50) (Tav. IV) basta assumere per prima dividente una retta *O A*, che da *O* va ad un punto qualunque *A* del contorno, punto questo che può essere anche dato; sostituire al triangolo *O A* 5 l'equivalente *O* 5′ 5 e così *O* riesce sul contorno *O A* 1 2 ..... 45′ del poligono, che si divide come si è fatto precedentemente.

c) Si divide una superficie *A C E* (Fig. 52) (Tav. V) in due parti di rapporto dato mediante una retta passante per un punto qualunque *O* del piano nel modo seguente. Si presume che la dividente si appoggerà ai lati *A G* e *P M*. Perciò si trasformerà il poligono in un triangolo *A P M* avente per un vertice uno dei termini (*A*) del lato *A G* e per lato opposto *P M*. Si divida *P M* in *M F* e *F P* aventi fra loro il rapporto dato e si sostituisca alla dividente *A F* nel triangolo *A P H* un'altra $G G_0$ passante per *O* (n. 20, *d*).

d) Si può dividere una superficie 1 2 3 4 5 *C* 7 (Fig. 51) in tre parti proporzionali a segmenti dati per modo che le dividenti passino per punti dati *A*, *B*, *C* del contorno e si riuniscano in un punto unico *O* interno nel modo seguente: Si trasformi il poligono in un triangolo, che abbia per vertice uno dei punti per es. *A*, da cui deve partire una dividente e per lato opposto uno di quelli, su cui cade un altro (*B*) di tali punti, per es. il lato 3 4. Si divida la base 3′ 4′ in tre parti uguali 3′ *D*, *D E*, *E* 4′. Il triangolo *A* 3′ *D* è equivalente ad una delle parti; e frattanto il punto *O* si dovrà trovare sulla retta *d* condotta per *D* parallelamente alla *A B*. Si trasformi il secondo triangolo *A D E* equivalente alla seconda parte, in un altro di base *A C* e se ne porti l'altezza ottenuta in *F G* perpendicolarmente alla stessa *A C*; la retta *r* condotta per *G* parallelamente alla *A C* darà in incontro colla *d* il richiesto punto *O* di concorso delle tre dividenti.

e) Per dividere una superficie (Fig. 52) in più parti aventi tra di loro un rapporto dato, mediante rette passanti per punti dati *A*, *B* ..... del contorno si può procedere così: Trasformata la superficie in un triangolo avente per un vertice uno dei punti dati per es. *A* e per lato opposto un lato qualunque del contorno, *M N*, si divida la stessa *M N* come si vuol dividere la superficie per es. in 3 parti uguali così *A M P* è equivalente alla prima parte e basta condurre il punto *P* sul contorno in *C* (n. 22, *a*) per avere in *A C* la prima dividente. In modo analogo si proceda per

ognuna delle altre dividenti. Però si potrebbe applicare con profitto la costruzione del n. 18 per la seconda parte; cioè determinare il termine, *D*, della spezzata *B A C D*..... di origine *B* per modo che la superficie *B D C A* sia equivalente al triangolo *A P Q*. Così dicasi per tutte le parti successive.

f) Se la superficie presenta la configurazione della Fig. 53 e le dividenti devono partire da punti del lato *A B* per appoggiarsi cogli altri termini al lato *G F*, converrà rettificare le due parti *A L K H G* e *B C D E F* nel contorno, indi applicare la costruzione del n. 21, *f)*.

g) Per dividere una superficie a contorno poligonale (Fig. 54) mediante rette parallele ad una direzione comune, in parti proporzionali a segmenti dati, si divida la superficie in tante striscie parallele alla direzione data. Si applichi poscia la costruzione del poligono di riduzione (n. 12) per determinare la successione dei segmenti, misure delle striscie e se ne divida il segmento totale ottenuto *O P* in parti proporzionali ai segmenti dati. Cada in *M* il primo punto di divisione; lo si projetti dal punto *S* d'incontro dei due lati del poligono, che intercettano il segmento (quarto) nel quale cade *M* e pel polo *Q* si tiri il raggio *Q M'* parallelo ad *M S*. La parallela alla direzione data condotta per *M'* sarà la prima dividente; essa separa la striscia quarta in due parti aventi tra di loro il rapporto stesso delle parti in cui il segmento, misura della quarta striscia, è diviso dal punto *M*. Ciò quando la striscia sia un parallelogrammo o per lo meno sia di sì piccola altezza da potersi riguardare come tale; in caso diverso, cioè per un trapezio si applicherà la costruzione del n. 21, *c)*. In modo affatto analogo si proceda pel tracciamento delle successive dividenti.

h) Se le striscie sono tutte di uguale altezza, ciò che converrà fare ogni qual volta sia possibile, il segmento *O P* viene ottenuto senza il poligono di riduzione, ma semplicemente portando successivamente dei segmenti proporzionali alle basi delle striscie, od alla semisomma delle due basi per ognuna se le striscie sono trapezie.

Così si è fatto per la Fig. 55. Essa rappresenta la sezione di un fiume e si sono richieste le linee di livello corrispondenti alle portate $^2/_3 = (c + b)$ e $^1/_3 = (c)$ della totale $(a + b + c)$ massima. Con una quarta proporzionale si è segnato nel segmento 2 della *r r* il punto M_0 corrispondente di *M* nel segmento 2 della *O P*; così l'orizzontale per M_0 segna il pelo d'acqua corrispondente alla portata $^2/_3$ della totale; analogamente per l'altra. Così si può segnare la linea di livello della portata media fra una massima e una minima e in generale di portate qualisivogliono, ben s'intende a velocità costante; come pure nota la sezione d'acqua in un canale, fogna, ... a contorno qualsivoglia se ne determina facilmente la linea di livello.

Tutte le precedenti costruzioni si estendono al caso delle superficie terminate da un contorno curvilineo qualsiasi come quello della Fig. 55, sostituendo, per approssimazione, un poligono inscritto o circoscritto al contorno curvilineo.

23. *Divisione delle superficie mediante spezzate bilatere.* — *a)* Allorquando si vuol dividere una superficie in *n* parti proporzionali a segmenti dati mediante rette, che si riuniscano in un sol punto interno, non è possibile fissare sul contorno più di tre punti, per cui abbiano a passare altrettante dividenti. Quando siano fissati tutti i punti di partenza delle dividenti sul contorno, il problema ammette infinite soluzioni colle dividenti bilatere; e può essere condizionato in diversi modi.

Dividere una superficie (Fig. 56) in n parti proporzionali a segmenti dati con ispezzate minime che partono da n punti del contorno e si riuniscano in un punto interno dato O; una delle dividenti per es. la OA debba essere rettilinea. Si potrà trasformare la superficie in un triangolo, poscia un terzo di questo in un poligono di cui sono dati i termini O e C e s'abbia a chiudere con una spezzata minima (n. 19). Si ripeterà la costruzione per tutte le altre dividenti.

b) Per dividere una superficie (Fig. 57) in parti proporzionali a segmenti dati con ispezzate bilatere che abbiano il vertice sopra una retta fissa r e i termini in punti dati A, B; C, D del contorno, s'incominci a trasformare il poligono in un triangolo avente un vertice in uno dei punti dati per es. A e per lato opposto quello che contiene il punto corrispondente B; un termine di tal lato essendo M e MN la prima delle n parti in cui si è diviso, si projetti N in P parallelamente ad AB e sarà APB la prima dividente. Analogamente si costruiscono le successive.

c) Se una dividente bilatera (Fig. 58) deve avere un lato passante per un punto O del contorno, il suo vertice sopra una retta r data e il secondo lato passante per un punto qualunque P o parallelo ad una direzione data, si troverà come precedentemente un triangolo OMN equivalente ad una delle parti in cui si vuol dividere la superficie; e per sostituire alla dividente ON la OUV si applichi il metodo di falsa posizione, cioè: si tiri OA_0 indi A_0AP; perchè OA_0A sia la dividente voluta bisogna che l'area del quadrilatero intrecciato NAA_0O sia uguale a zero, cioè siano parallele le due diagonali OA e NA_0; sicchè, tirando OA_1 parallela a NA_0, A e A_1 debbono coincidere. Fatti due altri tentativi OB_0B; OC_0C, in modo da individuare la corrispondenza projettiva delle due serie $ABC\ldots$; $A_1B_1C_1\ldots$ se ne trovano i punti uniti, di cui uno V risolve il problema.

d) Se il primo lato OQ della spezzata dividente è fisso di posizione (Fig. 59) e l'altro lato deve avere una direzione data, si applicherà la costruzione del n. 17; cioè tirata OP e NN_1 parallele alla direzione data, segnare $QV = \sqrt{\overline{QN}\cdot\overline{QP}}$; risulta per dividente la OUV.

e) Se è dato l'angolo dei due lati della spezzata dividente ed il vertice suo deve cadere sopra una retta data r (Fig. 60) (Tav. VI) conviene procedere per tentativi. Segnata la spezzata OA_0A si tiri OA_1 parallela a NA_0; A e A_1 dovrebbero coincidere; ossia il punto A_2 dovrebbe cadere sulla MN; fatti altri tentativi e trovati altri punti $B_2\ldots$, il punto V dove la curva $\ldots A_2B_2\ldots$ che li unisce incontra la MN risolve il problema.

Le rette AA_0, BB_0, ... inviluppano una parabola di cui O è il foco e r una tangente, che è tale nel vertice quando è retto l'angolo della spezzata.

Rovesciando la spezzata, in modo analogo si ottiene una seconda dividente V_1U_1O.

f) Lo stesso procedimento si potrà applicare nel caso in cui, senza comprendere un angolo dato, i due lati della spezzata debbano essere uguali; oppure di lunghezze prestabilite, nel qual caso il vertice della spezzata cadrà sulla circonferenza che ha per centro O e per raggio la lunghezza del primo lato.

24. *Divisione con ispezzate trilatere.* — *a)* Siano dati i termini O e V della spezzata (Fig. 61) che deve sostituire la dividente ON, ed il suo lato intermedio debba essere parallelo ad OV ed avere i termini su due rette parallele m e n. Fatto

un tentativo $O\,A\,B\,V$, si trasformi il trapezio $O\,V\,B\,A$ nel triangolo $O\,V\,C$ tirando $B\,C$ parallela a $V\,A$. Se il punto C cadesse sulla r condotta per N parallelamente ad $O\,V$ il problema sarebbe risolto. Facendo altri tentativi, ossia spostando la AB parallelamente a se stessa, il punto C genera la retta p parallela ad m e n, perchè è luogo dei punti d'intersezione delle coppie di raggi corrispondenti dei due fasci prospettivi: $O\,(C\ldots)$ e $W\,(C\ldots.)$. Infatti i raggi $W(B\ldots.)$ non sono che i raggi $V(A_1\ldots)$ spostati parallelamente a se stessi di $AB{=}VW$; epperò concorrono in W. Inoltre WO è raggio unito; al raggio per O parallelo ad n corrisponde per W il raggio pure parallelo ad n. Il punto d'incontro C_r della p con la r fornisce la soluzione; $O\,S\,T\,V$ è la dividente richiesta.

b) Il primo lato passante per O (Fig. 62) debba arrestarsi sopra una retta m, il secondo debba passare per un punto O_1 e arrestarsi sopra una seconda retta n e il terzo passare per un punto O_2. Fatto un tentativo $O\,S_1\,T_1\,V_1$ e condotta T_1S_0 parallela a V_1S_1 indi tirata la $V_1\,S_0$, la $O\,A_1$ parallela a $N\,S_0$ dovrebbe incontrare la $S_0\,V_1$ in V_1. Si facciano altri tentativi per ottenere dei punti $A_2\ldots.$ analoghi ad A_1; la curva che li unisce incontra $N\,M$ in V termine della spezzata $V\,T\,S\,O$ che risolve il problema.

25. *Dividente poligonale.* — Alla dividente $O\,N\,P$ si debba sostituire una spezzata moltilatera (Fig. 63) della quale il primo lato passi per O e si arresti sopra una linea s, il secondo sopra una linea t e passi per un punto O_1, il terzo sopra una linea u e passi per un punto O_2; ecc..... l'ultimo per un punto V della $M\,N$. Si faccia un tentativo $O\,S_1\,T_1\,U_1\,V$; per riconoscere se soddisfa si trasformi il poligono $O\,V\,U_1\,T_1\,S_1$ nel triangolo $O\,V\,R_1$; allora la r condotta per N parallelamente ad $O\,V$ deve passare per R_1; non riuscendo con altri tentativi si trovano punti analoghi ad R_1; la curva che li unisce incontrerà la r nel punto R, che dà la soluzione del problema.

26. *Dividenti curvilinee.* — *a)* Debbasi alla dividente ON sostituire un arco parabolico di saetta data (Fig. 64). Si tracci la $O\,V$ distante di $^4/_3$ della saetta dal punto N; sarà V il termine dell'arco, che si potrà costruire in diversi modi.

b) Alla dividente $O\,N$ (Fig. 65) debbasi sostituire un arco circolare coi termini in O e V.

Si faccia un tentativo (n. 8, *b*) cioè: si descriva un arco $O\,S_1\,V$, si tirino le tangenti in O e in V, indi si trasformino il quadrilatero $O\,C_1\,V\,Q_1$ e il triangolo $C_1\,V\,P_1$ equivalente al settore $O\,S_1\,VC_1$ nei due triangoli $V\,Q_1\,H_1$ e $V\,Q_1\,K_1$ di base comune $V\,Q_1 = O\,Q_1$. La differenza delle loro misure è $\overline{K_1\,H_1}$, che portata normalmente a $O\,Q_1$, indi projettata parallelamente alla stessa $O\,Q_1$ sopra $V\,Q_1$ dà il punto U_1, il quale dovrebbe cadere sulla r condotta per N parallelamente a $O\,V$; essendo il triangolo $O\,U_1\,V$ equivalente al segmento circolare $O\,S_1\,V$. Si trovino collo stesso procedimento altri punti $U_2\ldots.$ analoghi ad U_1; la curva che li congiunge incontrerà la r in un punto U che dà la soluzione del problema, giacchè basta tirare $V\,C$ perpendicolare a $V\,U$, e C è il centro dell'arco $O\,S\,V$ che sostituisce la $O\,N$.

Il segmento $V\,S_1O$ è equivalente al quadrilatero intrecciato $V\,C_1P_1O$; tirata $C_1D\,U_1$ parallela a $O\,P_1$ (n. 7, *a*) il segmento è anche equivalente al triangolo $P_1\,O\,D$; ed anche al triangolo $P_1\,OU_1$. Segue che per trovare i punti $U_1, U_2\ldots.$ basta tirare $C_1\,U_1$ parallela a $O\,P_1$; C_2U_2 parallela a $O\,P_2$;.... Si potrà applicare questa costruzione più semplice anche alla Fig. 15, Tav. III, non che alle Fig.^{e} 16 e 19.

27. *Divisione delle superficie in parti annulari a contorni omotetici.* — Se la superficie data è un circolo ed il suo centro è anche quello di omotetia si fa la divisione in più parti annulari di rapporti dati mediante circonferenze concentriche, applicando la stessa costruzione del n. 20, *c)* ove s' intenda (Fig. 40) che C sia il centro del circolo dato; $B\,C$ il suo raggio; $B\,D_1$, $D_1\,D_2$, ... le parti di $B\,C$ proporzionali alle superficie annulari componenti; risultano $C\,B_1$, $C\,B_2$, ... i raggi delle circonferenze dividenti.

Se il centro di omotetia non coincide col centro del circolo dato, ma però è interno al circolo medesimo, si trovano facilmente i centri di tutte le circonferenze dividenti, sopra la retta che congiunge il centro del circolo dato con quello di omotetia.

Se il contorno della superficie data non è circolare, ma qualsivoglia si applichi la costruzione dello stesso n. 20, *c)* per individuare sopra un raggio qualunque, che parte dal centro di omotetia e si arresta al contorno della superficie data i punti appartenenti alle varie linee omotetiche dividenti. Esse risultano così individuate e si costruiscono colla regola nota delle figure omotetiche.

Parte II.

Teoria meccanica delle figure reciproche della Statica Grafica.

Quantunque le figure reciproche siano state trattate da quasi tutti coloro che scrissero di Statica grafica, e di esse si siano date diverse teorie, fra cui la elegantissima del prof. Cremona (1) e una più recente (1875) svolta colla sola geometria piana dal prof. G. B. Favero (2), pure esse furono fin qui studiate come problema di geometria e per semplice interpretazione portate nel campo della meccanica.

Io arrivo ad ottenere le figure reciproche in modo semplice, diretto e generale ad un tempo (giacchè in una sola coppia di figure si vengono a trovare sovrapposte le due coppie possibili), partendo dalla riduzione di un sistema di coppie in un piano e con considerazioni esclusivamente meccaniche: salvo a non dare ai segmenti l'interpretazione di forze, nel qual caso le figure reciproche resterebbero nel campo del Calcolo grafico.

1. Sia dato un sistema di $2\,n$ segmenti in un piano. Si formi un poligono ad esso equipollente cioè un circuito, i cui lati siano ordinatamente uguali in grandezza, senso e direzione ai segmenti dati, e lo si projetti da un polo B; indi si costruisca un poligono di connessione delle linee dei segmenti dati, cioè coi lati ordinatamente paralleli ai raggi del fascio di centro B e coi vertici cadenti pure ordinatamente sulle linee dei segmenti dati.

La identica operazione venga eseguita nella ipotesi che i $2\,n$ segmenti siano a due a due di uguale lunghezza, di senso contrario e paralleli (Fig. 1) (Tav. VII).

(1) *Le figure reciproche nella Statica grafica.* Milano, 1872.
(2) Atti della R. Accademia dei Lincei. 1874-75.

Il poligono di tali segmenti si riduce ad un fascio di n raggi avente il centro nell'origine O del primo; ciò perchè le coppie di segmenti uguali e contrarî si ritengono formati dal primo col secondo; dal terzo col quarto; ecc. I raggi projettanti siffatto poligono da un polo B vanno alternativamente dal centro O comune a tutti i lati e ai termini dei medesimi. Il poligono che ne connette le linee ha i suoi lati d'ordine dispari paralleli fra di loro. Se si attraversa questo fascio di lati paralleli con una retta normale ad essi, vi si ottengono sopra le misure delle coppie di segmenti ridotte alla base $BO = b$ e inoltre successivamente. Il poligono connettente è adunque di riduzione e sommatorio ad un tempo. La somma è $01 + 12 + 23 + 34 = 04$.

Si può enunciare il problema in questo modo: Trovare la somma di una serie di rettangoli, due lati opposti dei quali si trovano sopra rette date, riducendoli contemporaneamente ad una base comune.

Od anche: Trasformare una serie di rettangoli comunque posti nel piano in altrettanti equivalenti che si susseguono e a base comune parallela ad una direzione arbitraria, che può essere anche data, nel qual caso OB sarà condotta parallelamente a tal direzione.

2. Le coppie dei segmenti dati siano parallele. In tal caso il poligono dei segmenti riesce disteso sopra una retta (Fig. 2).

3. Se le coppie di segmenti paralleli si susseguono senza intervalli (Fig. 3) si trova la somma delle loro altezze ridotte ad una base comune con un poligono nel quale possono essere tralasciati i lati paralleli ad OB. Questa costruzione può essere applicata in sostituzione di quella del n. 12 (Parte I) per la ricerca delle aree delle superficie piane. La Fig. 4 ne mostra un' applicazione. Divisa la superficie in istriscie parallele ad una direzione arbitraria, si portino, sempre a partire da una stessa origine O sopra una retta parallela alla direzione delle striscie, le basi delle striscie stesse (media delle due basi per le striscie trapezie). Da un polo B distante di b (base di riduzione) da O si projettino i termini dei segmenti-basi sovrapposti, $O1$, $O2$, $O3$....; si connettano quindi le corde dividenti la superficie in istriscie con un poligono, i cui lati siano paralleli ai raggi del fascio B; si ottengono, sulla base della prima, seconda, terza... striscia a partire dal primo lato MN, le misure della prima, della prima più la seconda,.... striscia; e nel segmento intercetto sull'ultima base la misura della superficie intera. Il problema della riduzione dei rettangoli ad una base data è di un uso così frequente nel Calcolo grafico e nella Statica grafica, epperò di tale importanza, da rendere apprezzabile ogni costruzione, la quale porti qualche semplificazione, anche lieve se vuolsi, a tale riduzione.

4. Se uno dei segmenti delle n coppie si trova per tutte sopra una medesima retta, il poligono di connessione viene ad avere alternativamente i suoi vertici su quella retta unica e sulle rimanenti n rette distinte (Fig. 5). Su quella retta medesima si ottengono successivamente le altezze ridotte dei rettangoli dati.

5. Nella Statica grafica si interpretano le proprietà precedenti come segue: Quelle dei n.i 1,2,3: Date n coppie (di forze) in un piano e comunque poste, comporle riducendole contemporaneamente (compresa la risultante) ad una forza-base data.

Quella del n. 4 si interpreta così: Trovare il momento risultante di n forze

parallele rispetto ad un asse dato, riducendo i momenti componenti e il risultante contemporaneamente ad una forza-base data.

6. Si può estendere la costruzione del n. 1 al caso in cui la forza-base di riduzione delle coppie non sia costante. Formato il poligono delle forze (Fig. 6) si portino sopra $O\,B$ tutte le basi di riduzione $b_1 = O\,B_1$; $b_2 = O\,B_2$;.... Così nei raggi che projettano il primo segmento da B_1, il secondo da B_2;.... si hanno le direzioni dei lati obliqui d'un poligono di connessione delle forze, che sopra una trasversale perpendicolare ai lati paralleli come per la Fig. 1, fornisce le misure $o1 = a_1$, $12 = a_2$, $23 = a_3$,.... delle coppie date.

Nel Calcolo grafico si interpreta il problema così: Ridurre una serie di rettangoli a basi diverse date (1).

7. Se le coppie da ottenersi equivalenti alle date debbono avere direzioni diverse stabilite, si segnino nel poligono delle forze le basi $O\,B_1 = b_1$; $O\,B_2 = b_2$;.... parallele a tali direzioni (Fig. 7). Allora non può più servire l'ultimo lato del poligono connettente la prima coppia qual primo lato del poligono che deve connettere la seconda; l'ultimo lato di questo secondo poligono di connessione, per primo lato di quello che deve connettere la terza coppia, e così via. Si debbono costruire adunque tanti poligoni di connessione quante sono le coppie date; i lati esteriori di essi sono le linee d'azione delle forze (di grandezza b_1, b_2,..) componenti le coppie ridotte; a_1, a_2,.... ne sono i bracci.

8. I poli siano ora gli stessi termini dei segmenti formanti il poligono delle forze (Fig. 8.) cioè: l'ultimo segmento per es. sia la forza-base di riduzione per la prima coppia; il primo segmento per la seconda coppia; ecc. I raggi projettanti $B_1\,B_2$, $B_2\,B_3$,.... formano un poligono chiuso. Dal termine B_1 dell'ultimo segmento si projetti adunque il primo; dal termine B_2 di questo si projetti il secondo e così via, in fine dal termine del penultimo si projetti l'ultimo. Per ottenere le coppie trasformate in questo caso si approfitti delle linee d'azione delle forze date, cioè: per costruire il poligono funicolare relativo alla prima coppia si assuma per primo lato la linea d'azione della forza 3; per M si tiri la parallela al secondo raggio $B_1\,B_2$ fino all'incontro colla linea d'azione della forza — 1 in M'; da questo punto si conduca la parallela $M'\,M''$ alla linea della forza 3. Si ottiene la misura a_1 della prima coppia. Analogamente si procede per tutte le altre. Così la coppia equivalente alla prima risulta parallela all'ultima, quella equivalente all'ultima, parallela alla penultima;.... finalmente quella equivalente alla seconda, parallela alla prima. Il poligono funicolare $M''\,M'\,M\,P$ connettente la prima coppia ha per lati le linee d'azione delle quattro forze, in cui venne decomposta la prima coppia. Componenti della forza 1 sono r_1 e (3); componenti della — 1 sono $-r_1$ e (— 3). Segue che in ogni segmento concorrente in O sono sovrapposti quattro segmenti uguali ed opposti a due a due. Un paio di ugual senso per es. [3, (3)] ha una sol linea d'azione la 3; l'altro paio [—3, (—3)] ha le linee d'azione distinte $M'\,M''$ e —3. Ogni raggio per es. $B_1\,B_2$ è la sovrapposizione di due uguali ed opposti r_1 e $-r_1$ e sono equipollenti di due forze agenti secondo una medesima retta $M\,M'$.

(1) Cremona, Elementi di Calcolo grafico. N. 60.

9. Si supponga ora che i bracci delle coppie date vadano diminuendo, restando immobili le linee d'azione delle forze 1, 2, 3,.... Anche i bracci delle coppie equivalenti diminuiranno nello stesso rapporto, avvicinandosi la $M''M'$ alla MP; la $N'N''$ alla MN;... così i punti M', P', N' si avvicinano ai punti M, P, N, percorrendo le MM', PP', NN',... Quando le $-1, -2, -3,....$ coincidono colle $1, 2, 3,....$ anche le $M'M''$, $P'P''$.... coincidono colle 3, 2,..... Mentre nel campo dei segmenti delle forze non si verifica variazione di sorta, nel campo delle linee d'azione (Fig. 9) rimangono tante rette 1, 2, 3, ... formanti un poligono chiuso, quante sono le coppie date (1) e altrettante rette indefinite passanti pei vertici di tal poligono. Ogni lato del poligono risulta linea d'azione di quattro forze uguali, ma opposte a due a due; onde in equilibrio. Le rette passanti pe' suoi vertici sono linee d'azione di altrettante paia di forze uguali ed opposte, formanti un sistema pure equilibrato. Le forze agenti secondo queste ultime rette s'intenderanno applicate ai vertici, per cui passano le rette stesse. Le linee secondo le quali agiscono quattro forze, s'intenderanno limitate ai vertici del poligono da esse formato. Al primo vertice M del primo lato si riterranno applicate le forze 1 e -1; al secondo termine N le altre due (1) e (-1); al primo termine N del secondo lato si riterranno applicate le forze 2 e -2; al secondo termine P le (2) e (-2); e così di seguito. Dal poligono relativo alle forze applicate al vertice M si rileva che le r_1, (4),—1 sono in equilibrio; e parimenti in equilibrio le $-r_1$, (—4) e 1. Lo stesso si rileva per tutti gli altri vertici. Risulta che la Fig. 9, è la sovrapposizione di due sistemi di forze uguali ed opposti ciascuno in equilibrio da per sè.

10. Separati i due sistemi di forze in equilibrio si ottengono due paia di figure Fig. 10 e Fig. 11 (Tav. VIII), ciascun paio composto di una figura delle linee d'azione e di una figura dei segmenti corrispondenti. L'un paio differisce dall'altro soltanto pel senso delle forze. Tanto nelle figure 10 come nelle figure 11 giova fissare che sono in equilibrio: 1.° Tutte le forze applicate ad uno stesso vertice del poligono delle linee d'azione; 2.° tutte le forze numerate; 3.° tutte le forze r fra di loro. Nella figura dei segmenti: 1.° I segmenti delle forze applicate ai vertici del poligono delle linee d'azione formano tanti poligoni chiusi (triangoli); 2.° i segmenti numerati risultano sovrapposti a due a due e formano un fascio projettante i vertici del poligono chiuso formato dai segmenti delle forze r.

11. Si considerino due coppie consecutive nell'ordine assunto; per es. (1,—1); (3,—3) (Fig. 8) cioè la prima e l'ultima. In luogo di seguire l'ordine $1, -1, 3, -3$ nella formazione del poligono delle forze come si è fatto precedentemente in modo da ottenere la coppia (MP, $M''M'$) equivalente alla $(1, -1)$ di braccio ridotto a_1, si tenga l'ordine $1 - 1 - 3\ 3$. Si ottiene allora una coppia ($M'_1 M''_1$, PM) equivalente ancora alla $(1, -1)$ collo stesso braccio a_1. Riducendo poi i bracci delle coppie a zero pel vertice M passa non più la MM', ma la MM_1'. Segue che la figura dei segmenti per un dato poligono delle linee d'azione delle forze numerate, non è unica.

12. Siano date ancora n coppie in un piano $(1, -1)$, $(2, -2)$;.. (Fig. 12) (Tav. VIII) da ridursi come al n. 8. Le linee d'azione delle forze 1, 2, 3..... non formino un poligono semplice come in quel caso, ma alcune di esse risultino diagonali

(1) Si sono supposte quattro in luogo di tre come sono date nella Fig. 8.

di un poligono formato dalle altre. Nel formare il poligono delle forze in luogo di porre la condizione che tutti i segmenti 1, 2, 3, .,.... debbano avere un termine O in comune (n. 1) si fissi ora quest'altra: I segmenti di tutte le forze 1, 2, 3, 4 concorrenti in uno stesso punto A dovranno formare un poligono, nel quale i lati si succedano coll'ordine stesso, con cui ciclicamente si susseguono le loro linee d'azione, rimanendo estremi i lati 1 e 4 che corrispondono alle linee d'azione facenti parte del contorno del poligono di esse linee d'azione. Ogni segmento deve entrare in due poligoni con sensi di generazione opposti. Perciò i segmenti estremi avranno sempre un termine libero. Segue da ciò che si può formare il poligono delle forze 1 2 3 4 in un modo qualunque, cioè: ponendo l'origine del segmento 2 in uno dei due termini del segmento 1 e dirigendolo in un senso oppure nel senso opposto, poi facendo seguire il segmento 3 nel senso che si vuole e infine il segmento 4 pure nel senso che si vuole. Il segmento 5 dovrà passare pel punto (3 4) e diretto in quel senso che si vuole. Del poligono 5 3 6 sono già segnati due lati e 6 avrà un termine nel vertice (2 3). Del poligono 6 2 7 non rimane che a tirare 7 per vertice (1 2). Nessun segmento resta ripetuto in posizione distinta e rimane soddisfatta la condizione fondamentale che ordinatamente il termine B_1 di 2 è polo di (1—1), riuscendo 2 primo raggio projettante; il termine B_2 di 3 è polo di (2—2), riuscendo lo stesso 3 primo raggio projettante; ..... L'ordine fissato per la costruzione del poligono delle forze conduce però a ripetere in posizione distinta i segmenti corrispondenti alle forze, le cui linee d'azione s'incrocicchiano come si scorge nelle Fig.^{e} 12^{bis} e 12^{ter}. L'ordine di successione dei vertici, che è unico pel caso della Fig. 12, e 12^{bis} cioè $A\,B\,C\,D\,E$ e $A\,B\,C\,D$ deve essere stabilito quando un qualche vertice riesce interno, come nel caso della Fig. 12^{ter}.

Il modo con cui si è formato il poligono delle forze conduce a ripetere i segmenti diagonali 3 e 2 (Fig. 12), (2 e 4 nelle Fig.^{e} 12 ^{is} e 12^{ter}) nelle projezioni successive. Ciò implica l'introduzione di due coppie una $(2,-2)$ sovrapposta alla $(2,-2)$ e l'altra $(3,-3)$ sovrapposta alla $(3,-3)$. Quando si siano eseguite le projezioni dei segmenti, in tutti i segmenti stessi ne vengono ad essere sovrapposti quattro; due quali segmenti proprî di ogni coppia (che si projettano) e due quali raggi projettanti; salvo pei segmenti diagonali 2 e 3 i quali saranno la sovrapposizione di otto per ciascuno; quattro essendo proprî delle due coppie e quattro provenendo dall'impiegare quattro volte il segmento come raggio projettante. Si eseguisca ora la projezione di $1-1$ da B_1 e si costruisca il relativo poligono funicolare $D\,A\,A'\,A''$; il lato intermedio $A\,A' \equiv (r_1 - r_1)$ passa per A; parimenti per A passano i lati intermedi $(r_2 - r_2)$, $(r_3 - r_3)$ dei poligoni funicolari connettenti la coppia $(2,-2)$ e la $(3,-3)$. La Fig. 12 mostra chiaramente il seguito delle operazioni.

Ridotti a zero i bracci delle coppie date, per modo che le $-1, -2, -3, \ldots$ vengano a sovrapporsi alle $1, 2, 3, \ldots$ rimaste fisse, secondo ognuna di queste linee agiscono quattro forze, salvo per le diagonali, secondo le quali agiscono otto forze, uguali ed opposte a due a due.

Importa ora eliminare due paia di forze uguali ed opposte agenti secondo le diagonali, perchè non fanno parte del dato sistema di forze. Importa inoltre ridurre le forze r per modo che ad ogni vertice del poligono delle linee d'azione se ne abbia

applicata una sola. Queste due operazioni si fanno contemporaneamente, essendo legate l'una all'altra. Eliminando [(2), (−2)] e [(3), (−3)] resta soppressa la loro risultante $(r_2 - r_2)$; ma allora al vertice A restano applicate soltanto le forze $(r_1\text{-}r_1)$ e $(r_3\text{-}r_3)$ la cui risultante è $(\rho_1\text{-}\rho_1)$. Sopprimendo ancora [((3)), ((−3))] il segmento $(r_5\text{-}r_5)$ risultante di $B_1 B_2$ e $B_2 B_4$ resta ridotto a $B_2 B_4$ che composto con $(r_6\text{-}r_6)$ dà per segmento risultante $(\rho_3\text{-}\rho_3)$. Infine sopprimendo [((2)), ((−2))] il segmento $(r_7\text{-}r_7)$ resta ridotto a $B_1 B_6$ che si compone con $(r_8 - r_8)$ in $(\rho_4\text{-}\rho_4)$. Per tal modo secondo i lati del contorno e le diagonali del poligono delle linee d'azione agiscono ora soltanto quattro forze uguali ed opposte a due a due. Ad ogni vertice del poligono medesimo si trovano applicate due forze ρ uguali ed opposte; i segmenti ρ (Fig. 13) formano un poligono chiuso; ad ogni vertice nella figura delle linee d'azione corrisponde un poligono chiuso in quella dei segmenti. S'intendano applicate le forze ρ ai vertici del poligono delle linee d'azione delle forze numerate. Delle due paia di forze agenti secondo la linea $A\ E$ si intenda applicato il paio $(1 - 1)$ al vertice A; l'altro [(1) (−1)] al vertice E; delle due agenti secondo $A\ D$ l'uno $(2 - 2)$ al vertice D, l'altro [(2) (−2)] al vertice A; e così di seguito come mostra chiaramente la Fig. 13. La forza ρ_1 è in equilibrio colle $-1\,(2) - 3\,(4)$; la $-\rho_1$ colle $1\,(-2)\,3\,(-4)$; e così via.

Separati i due complessi di forze sovrapposte ognuno in equilibrio di per sè, e differenti soltanto pel senso delle forze, si ottengono due paia di figure (Fig. 14 e 15) ognuno composto di una figura delle linee d'azione e di una dei segmenti corrispondenti.

13. Si dica completo il poligono delle linee d'azione delle forze numerate quando esistono tutte le diagonali; cioè quando consta di n vertici congiunti fra loro successivamente in un ordine dato e da tutte le diagonali. La figura dei segmenti consta allora di due poligoni chiusi; quello delle ρ ossia delle r (Fig. 16) e quello dei segmenti diagonali; poi dai segmenti corrispondenti ai lati del poligono delle linee d'azione, i quali collegano gli stessi due poligoni chiusi. Quando i segmenti diagonali vadano impicciolendo fino a ridursi nulli i segmenti di collegamento diventano concorrenti in un punto O e si ritorna al caso del poligono semplice formato dalle linee d'azione delle forze numerate, il quale non è altro che un poligono funicolare connettente le forze r in equilibrio. Se sono nulli i segmenti di collegamento, il poligono dei segmenti diagonali diventa inscritto o circoscritto a quello delle forze r.

14. La corrispondenza di reciprocità che lega la figura delle linee d'azione con quella dei segmenti, consistente in ciò, che a tutti i lati nell'una concorrenti in un punto, corrisponde nell'altra un poligono chiuso di altrettanti lati paralleli ai primi, dà alle stesse due figure la denominazione di figure reciproche. Se è data la figura delle linee d'azione, nota la grandezza di una sol forza, si può costruire la figura reciproca.

15. I lati e le diagonali del poligono formato dalle linee d'azione delle forze numerate, siano gli assi di altrettante sbarre od aste prismatiche o cilindriche articolate a cerniera nei vertici del poligono; e per asse di una sbarra si intenda il luogo dei baricentri delle sue sezioni trasversali. Le due forze uguali ed opposte agenti secondo l'asse medesimo, sono allora le risultanti delle reazioni molecolari equilibranti le azioni delle forze r. Si dicano interne tali forze a differenza delle r che si denomineranno esterne. Il poligono delle linee d'azione delle forze interne

si chiamerà schema di travatura o senz'altro per brevità, travatura; i suoi vertici: nodi. La figura dei segmenti si potrà denominare diagramma delle forze. Una travatura si dirà semplice, composta o completa secondochè è costituita da un poligono semplice, oppure con delle diagonali od in fine con tutte le diagonali. Le sbarre, lati della travatura, si potranno chiamare membri.

Quando le freccie delle forze interne poste su di un membro sono rivolte all'interno, il membro stesso è soggetto a tensione epperò si denominerà tirante; quando le freccie sono rivolte all'esterno, il membro è soggetto a compressione e si denominerà puntone. I puntoni nelle Fig.^{e} 10 e 14 sono tiranti nelle Fig.^{e} 11 e 15 e reciprocamente.

Parte III.

Le travature soggette a sforzi longitudinali.

Quantunque fra le travature soggette a sforzi longitudinali si possano anche comprendere quelle, i cui membri risultano assoggettati a flessione, pure qui si sono considerate soltanto quelle, i cui membri resistono a forze esterne aventi per linee d'azione gli assi dei membri stessi, luoghi dei baricentri delle loro sezioni trasversali.

Si sono risoluti per esse i due problemi generali: di trovare le forze esterne date le interne; e la grandezza e il senso delle interne date le loro linee d'azione non che le forze esterne in equilibrio.

Si sono ommessi i casi ordinarî delle travature chiuse già trattate da molti. Si sono considerati invece i casi più singolari, partendo dalle travature aperte.

Si è esposta una nuova e semplicissima teoria delle funicolari coniche, ricorrendo alle forme geometriche projettive di prima specie, mentre il prof. Culmann, che pure ha esposto una teoria delle stesse figure (1), ha ricorso alle forme geometriche projettive reciproche nel piano.

Rilevando che talune travature chiuse possono essere sviluppate e che da queste sviluppate si riconosce tosto quale è il contorno della travatura e quali i bracci diagonali, si desume l'ordine da seguirsi nella costruzione dei rispettivi diagrammi, perchè non si abbiano inutili ripetizioni di segmenti.

Con un mezzo semplicissimo (il taglio di qualche membro) e col quale si passa da una travatura chiusa ad una aperta, si trae una guida per la costruzione di *un* diagramma relativo ad una travatura complicata quanto si vuole.

1. Dato un poligono funicolare od articolato $ABCD$.... (Fig. 1) (Tav. IX) vincolato agli estremi A ed F, applicare a' suoi nodi delle forze (esterne) che senza deformarlo, ne sottopongano i lati a degli sforzi (interni) di tensione o pressione dati.

Per un polo O si conducano i raggi a', b', c', d',.... equipollenti agli sforzi dati

(1) *Die graphische Statik*, 2.ª ediz. Zürich, 1875.

interni, che devono sviluppare i lati del poligono. Si congiungano successivamente gli estremi di tali raggi e si avrà la spezzata $1'2'3'4'$ che insieme con $5'$ e $6'$ equipollenti alle forze da applicarsi ai nodi A ed E e che sono evidentemente uguali ed opposte alle forze interne dei lati a ed e, formano il poligono chiuso delle forze esterne. Basta ora, pei nodi del poligono funicolare condurre le parallele a' suoi lati, e si avranno le linee d'azione di esse forze esterne. Così restano pienamente trovate.

Infatti mentre i lati del poligono funicolare sviluppano gli sforzi interni voluti tutti i nodi sono in equilibrio e il poligono funicolare non si deforma. La travatura aperta della Fig. 1 è derivata da quella chiusa $BCDEG$, nella quale venne soppresso il nodo G, sostituendogliene due altri A e F posti sulle linee d'azione ancora delle forze interne a ed e e sostituendo in pari tempo alla forza esterna applicata in G ed equipollente ad MN le sue componenti 6 e 5 applicate ai nodi A ed F.

Può essere considerata anche come una porzione di travatura chiusa e resa in equilibrio coll'applicare a' suoi termini A ed F due forze uguali in grandezza alle forze interne dei membri AB ed EF, le quali forze tengono posto del legame molecolare che esisteva prima del taglio.

2. Se è dato il poligono funicolare (Fig. 1) e il senso degli sforzi interni sviluppati da' suoi lati e sono date le linee d'azione delle forze esterne applicate a' suoi nodi, si determinano proporzionalmente le intensità delle forze interne ed esterne, costruendo il fascio di raggi $a'b'c'\ldots$ indefiniti, indi il poligono delle forze $1'2'3'\ldots$ coi lati paralleli alle linee d'azione delle forze esterne ed assumendo per origine un punto qualunque M del primo raggio a'.

3. Le forze esterne siano concorrenti e i lati del poligono funicolare vadano aumentando indefinitamente diminuendo in lunghezza Al limite si avrà una curva funicolare; il numero delle forze esterne diventa infinitamente grande; esse risultano distribuite in modo continuo lungo tutti i punti della curva funicolare, avendo una somma finita. Ciò posto: Se la curva funicolare è una conica la linea delle forze esterne è pure una conica.

Infatti si considerino tutte le forze applicate ad un arco AC della conica funicolare (Fig. 5); F sia il punto di concorso delle medesime. Per proprietà della linea funicolare, prolungati i lati esteriori a quel gruppo di forze (tangenti alla conica in A e C) il loro punto d'incontro H appartiene alla linea d'azione della risultante di tal gruppo di forze; FH ne è la linea d'azione. Sia O il polo nel poligono delle forze. Dacchè il gruppo di forze che si considera è equivalente alle due sole aventi per linee d'azione AH e CH; se è data la grandezza OM di una di queste (tensione o pressione in un punto della curva funicolare) per es. della AH, si forma tosto il triangolo delle forze OMN corrispondente, tirando MN parallela ad FH e ON parallela a CH. Si tracci ora una terza tangente DE; T ne sia il punto di contatto colla conica funicolare; saranno DF e EF le linee d'azione delle risultanti delle forze applicate lungo AT e lungo TC. Si costruisca il triangolo OMP relativo alle tre forze concorrenti in D; la retta che congiunge N con P risulta parallela ad FE, giacchè per costruzione i due quadrangoli completi $OMPN$ e $FEHD$ hanno già cinque coppie di lati paralleli; onde il sesto PN dell'uno sarà parallelo al sesto EF dell'altro.

Così ad ogni triangolo FDE formato da una tangente e dai raggi che ne projettano da F i punti d'incontro con due tangenti fisse, corrispondono per M, N, O tre raggi concorrenti in un punto P; ciò che risulta del resto dalla reciprocità delle due figure. Ora le due punteggiate $ADGH.,..$ e $HEKC....$ sono projettive (¹); onde projettivi i due fasci che le projettano da F; epperò anche i due fasci di centri M ed N uguali a quelli di centro comune F. Il punto P genera adunque una conica passante per M ed N. Essa è individuata quando sia nota la tensione in un punto della funicolare.

Se la linea delle forze è una conica e le forze sono concorrenti, la funicolare sarà un'altra conica la quale risulta individuata quando sia noto il polo O, il punto di concorso F delle forze ed una sua tangente col senso della forza interna di cui è linea d'azione.

4. Qualunque sia la conica funicolare, se il punto F di concorso delle forze è interno, esterno, o sulla conica stessa, quella delle forze è un'ellisse, un'iperbole od una parabola.

Infatti se F è esterno per esso passano due tangenti che si sovrappongono ai raggi projettanti i loro termini da F; onde in quelle due direzioni i raggi per M, N ed O concorrono all'infinito, e danno le direzioni degli assintoti della iperbole delle forze.

Se il punto F cade sulla conica funicolare un sol triangolo si riduce ad un segmento; onde in una sola direzione si hanno per M, N ed O tre raggi paralleli; è la direzione dei diametri della parabola delle forze.

Se il punto P è interno alla conica funicolare nessun triangolo FDE si può ridurre ad un segmento; onde tutte le terne di raggi per M, N, O concorrono a distanza finita e la conica delle forze non può essere che un'ellisse od un cerchio.

Dividendo le forze in gruppi; e ad ognuno di essi sostituendo la risultante si ottiene un poligono funicolare circoscritto alla conica funicolare; il poligono delle forze riesce inscritto nella corrispondente conica delle forze.

Se la conica funicolare è una circonferenza e le forze concorrono nel suo centro, la conica delle forze è un'altra circonferenza (Fig. 2) nel cui centro è il polo O. Difatti rimanendo fissa la tangente in A e mobile quella in E, il triangolo delle forze OMP tiene fisso il lato OM, e movendosi P sulla conica rimane isoscele; cioè si mantiene $OM = OP$. La risultante MP delle forze applicate ad un arco AE va crescendo coll'arco; ed è massima (uguale al diametro MN della circonferenza delle forze) quando l'arco AE diventa una mezza circonferenza AB.

5. Se la conica funicolare è un'ellisse e le forze concorrono nel suo centro O (Fig. 3) la conica delle forze è una ellisse simile alla prima; sicchè se il rapporto di similitudine è l'unità, può essere presa la stessa conica funicolare come conica delle forze.

Infatti assunto per polo lo stesso centro O dell'ellisse funicolare, sia il segmento della tensione nel punto Q segnato in OB (semidiametro conjugato di OQ) parallelo alla tangente QR; parimenti la tensione in un altro punto qualunque P sia rappresentata nel raggio OA parallelo a PR (conjugato di OP); la corda AB come equipollente

(¹) Cremona, Geom. proj. pag. 73.

alla risultante delle forze applicate lungo l'arco PQ dovrà riuscire parallela alla OR, ciò che è difatti per proprietà dell'ellisse.

Se la conica funicolare è un'iperbole (Fig. 4) l'iperbole delle forze ha gli assintoti paralleli a quelli della funicolare. Difatti le forze concorrendo nel centro della funicolare che è esterno ad essa, la conica delle forze è un'iperbole (n. 4); i suoi assintoti, sono paralleli alle tangenti alla funicolare per O, tangenti che sono gli stessi assintoti della funicolare. Preso il polo delle forze in O, segnato il segmento OA (parallelo a PR) uguale al diametro conjugato di OP; indi OB (parallelo a QR) uguale al diametro conjugato di OQ, il segmento AB come equipollente alla risultante delle forze applicate all'arco PQ deve essere parallelo ad OR; ciò che è per proprietà che l'iperbole ha in comune coll'ellisse. L'iperbole delle forze è in questo caso la supplementare di quella funicolare.

6. Se le forze concorrono in un foco F della conica funicolare (per la parabola nel foco) la conica delle forze esterne è una circonferenza (Fig. 5).

Infatti se AH e CH sono due tangenti fisse; e DE una tangente mobile, OMP e ONP i triangoli relativi alle forze concorrenti in D e in E, il punto P genera la conica delle forze come punto di intersezione di due raggi corrispondenti dei due fasci projettivi di centri M ed N. Ma movendosi la tangente DE, l'angolo DFE per proprietà delle coniche si mantiene costante; dunque i fasci di centri M ed N sono direttamente uguali e il luogo del punto P è una circonferenza.

Se la funicolare è un'ellisse le tensioni ne' suoi punti variano tanto meno quanto meno schiacciata è la conica; e diventano uguali le tensioni quando il foco F coincide col centro cioè la ellisse diventa una circonferenza. Una corda qualunque della circonferenza delle forze passante pel polo O rappresenta la somma delle tensioni nei termini del diametro dell'ellisse, coniugato alla direzione della corda.

Se coll'occhio si accompagna un raggio vettore OM che ruota intorno ad O si rileva tosto la variazione delle forze interne di tensione o pressione che si sviluppano nei varî punti della funicolare. Nella Fig. 5 si è resa intuitiva la legge di distribuzione delle forze esterne applicate all'ellisse, dividendola in archi che misurati in direzione normale a quella delle forze, riescano uguali; i segmenti risultanti furono portati sui raggi focali medi all'esterno a partire dalla conica, quantunque sarebbe stato più rigoroso il portare tali segmenti metà all'esterno e metà all'interno a partire dalla curva.

La conica funicolare sia un'iperbole (Fig. 6) e le forze siano concorrenti in un suo foco F. Pel polo O si tirino le OM, ON parallele alle tangenti in un punto qualunque A e in un vertice C della iperbole. Fissata la tensione in A nel segmento OM, tirata MN parallela ad FH resta individuato il cerchio delle forze. I raggi tangenti ad esso pel polo O rappresentano le tensioni degli assintoti; quelli che terminano all'arco SNS', le tensioni nei punti della branca..... ACB....; quelli che terminano all'arco SRS', le tensioni nei punti della branca opposta..... $A'C'B'$.... La corda SS' è equipollente alla risultante di tutte le forze applicate ad ognuna delle due branche ed anche delle tensioni degli assintoti. Le forze esterne vanno scemando come le interne da C verso A e verso B.

7. La curva funicolare sia una parabola le forze applicate a' suoi punti concorrano nel foco F (Fig. 7). Una circonferenza qualunque può essere assunta come curva delle forze. Mentre per l'ellisse funicolare il polo O riesce interno al cerchio e per l'iperbole esterno, in questo caso cade sulla circonferenza delle forze. Infatti assunto il segmento OM equipollente alla tensione in un punto A della parabola, si tiri OP parallela alla tangente EH condotta in un punto qualunque E della stessa parabola; sarà FH la linea d'azione della risultante delle forze esterne applicate ai punti dell'arco AE e MP il segmento equipollente a tale risultante. Ora si faccia muovere la tangente HE; il raggio focale HF ruota allora intorno ad F e per proprietà della parabola, l'angolo EHF si mantiene costante; C ed M sono dunque i centri di due fasci direttamente uguali, da cui si può far generare la circonferenza delle forze e che passa quindi pel polo O.

La tensione è nulla nel punto all'infinito della parabola e va crescendo fino al vertice dove è massima, cioè uguale al diametro ON della circonferenza delle forze. Le forze esterne parimenti vanno crescendo nello stesso modo.

8. La curva funicolare sia una mezza ellisse (mezza circonferenza) e le forze esterne siano parallele e dirette secondo il diametro conjugato a quello che termina la mezza ellisse. La linea delle forze esterne diventa una retta di direzione conjugata al diametro AB (Fig. 8). Diviso questo diametro, che termina l'arco in parti uguali e pei punti di divisione condotte le parallele alla retta delle forze, si è determinata la risultante delle forze esterne applicate ad ogni archetto intercetto fra le successive dividenti. Tali risultanti furono portate come ordinate a partire da un'ascissa MN sulle rispettive linee d'azione e si è ottenuta la curva che limita la superficie tratteggiata esprimente la distribuzione delle forze esterne, affinchè l'arco funicolare sia in equilibrio.

Minime in D le forze occorrono crescenti fino ad essere infinitamente grandi verso le estremità.

Per l'arco iperbolico si verifica una distribuzione nelle forze esterne inversa. Da un valor finito in D vanno scemando continuamente fino ai due punti all'infinito dell'arco dove sono nulle.

La parabola tiene il posto medio fra l'ellisse e l'iperbole. Per essa il carico riesce uniformemente ripartito. Infatti la risultante delle forze comprese in ogni striscia ha per linea d'azione il diametro medio dell'arco intercetto per proprietà nota della parabola. Ora ciò non si può verificare, che pel caso in cui il carico sia uniformemente ripartito. Se le funi di sospensione d'un ponte pensile debbono disporsi secondo un arco parabolico, il carico che sostengono dovrà essere costante per metro corrente.

9. La linea funicolare è l'inviluppo di tutte le linee d'azione delle forze interne; la linea delle forze il luogo di tutti i termini dei segmenti equipollenti alle forze esterne che equilibrano le interne. Il sistema delle linee d'azione delle forze esterne, che può avviluppare un sol punto, projetta i vertici della linea funicolare. Il poligono delle forze esterne è projettato dal fascio formato coi segmenti equipollenti alle forze interne.

Allorquando una travatura chiusa ha membri diagonali ed è chiuso il poligono

relativo alle forze interne di questi ultimi, può avvenire che si trovi in equilibrio, sviluppando date forze interne, senza che a' suoi nodi si trovino applicate delle forze esterne. Ciò si verifica ogniqualvolta i poligoni relativi ai varî nodi della travatura risultano chiusi, per il che occorre almeno un membro diagonale per ogni nodo.

Nel diagramma i segmenti relativi al contorno della travatura formano un fascio, che projetta quelli relativi ai membri diagonali; mentre i membri diagonali projettano i vertici del contorno della travatura e possono inviluppare un sol punto. Così si comportano rispetto al contorno di una travatura i membri diagonali quando la travatura è equilibrata senza il concorso di forze esterne, come le forze esterne, quando non esistano membri diagonali.

Se da una siffatta travatura si separa un nodo, tagliando a qualunque distanza da esso i membri che vi concorrono e, per l'equilibrio, ai termini liberi di questi si applicano delle forze esterne, che tengano luogo del legame molecolare rotto col taglio, si ottiene un diagramma (Fig. 9) formato da un sol poligono chiuso sovrapposizione di quello delle forze esterne $1'2'3'4'5'$ e di quello delle forze interne $a'b'c'd'e'$.

Se dal nodo C (Fig. 10) si spiccano inoltre delle forze esterne, si numerizzino successivamente nell'ordine ciclico tutte queste forze esterne; poscia e di seguito quelle agenti secondo le linee d'azione delle forze interne. Secondo un tal ordine si costruisca il diagramma il quale consterà ancora di un sol poligono. Il poligono delle forze interne è sovrapposto ad una parte di quello delle forze esterne. Essi sono formati dai lati: $1'2'3'4'5'6'7'8'9'$; e $a'b'c'd'e'$.

10. Da una travatura chiusa a membri diagonali con forze esterne si separi una parte con più nodi. Si ottiene una travatura aperta da' cui nodi si spiccano dei bracci (tiranti o puntoni) porzioni di membri diagonali (Fig. 11). Ai triangoli contigui nel diagramma relativo ad una travatura semplice (Fig. 1) si sostituiscono dei poligoni contigui, seguendo, s'intende, nella formazione di questi, l'ordine con cui si succedono ciclicamente i membri uscenti dai nodi corrispondenti e rimanendo estremi quei lati che corrispondono ai membri del contorno della travatura.

Si può dire allora che il polo O subisca degli spostamenti; così tra i lati a e c essendoci il braccio b nel diagramma, il polo O passa in O^1; e fra c ed e essendoci il braccio d, il polo O^1 si trasporta in O^{11}. Riunendo i termini liberi di a' e c'; c' ed e', si ottengono i segmenti equipollenti alle forze esterne da applicarsi ai nodi (a, c) e (c, e) per l'equilibrio.

Giova notare che nella costruzione del diagramma rimane arbitrario del primo segmento il termine da assumere per origine o polo O. È questa un'ambiguità, la quale non conduce ad altro, che ad ottenere il medesimo diagramma capovolto. Accanto al diagramma della Fig. 11, si è costruito un tal diagramma capovolto, assumendo per polo O il termine del segmento c' opposto di quello assunto nel primo.

La Fig. 12 (Tav. X) porge l'esempio di una travatura aperta a qualcuno de' cui nodi sono applicati più bracci. Al nodo (b, f) se ne trovano applicati tre. Il polo O che si mantiene comune ai primi due segmenti a', b' ed al segmento c' equipollente al primo c dei bracci, passa successivamente in O', O'', O'''; ossia fino al termine dell'ultimo dei segmenti equipollenti ai bracci; in O''' si arresta e da esso escono i segmenti successivi f', g'.

Si può anche formare il poligono (aperto) coi segmenti corrispondenti ai bracci. e da' suoi termini condurre i segmenti (raggi) corrispondenti al contorno della travatura. Chiudendo i poligoni relativi ai varî nodi si trovano le forze esterne, che tengono in equilibrio la travatura.

Dai vertici intermedi O' O'' del poligono formato coi segmenti corrispondenti ai bracci non escono altri segmenti (raggi); nello stesso modo che se ad un nodo d'un poligono funicolare semplice si vogliono intendere applicate più forze esterne in luogo di una sola, rimanendo fisso il polo O non arrivano i raggi ai vertici intermedi della parte di poligono (delle forze esterne) che si riferisce alle forze esterne applicate a quel nodo. Si può intendere ancora che a tutti i vertici del poligono delle forze esterne arrivino i raggi, quando alla porzione di esso che corrisponde alle forze esterne applicate a quel nodo venga sostituito il segmento risultante.

11. Nulla impedisce che ai bracci che si spiccano dai nodi di una travatura semplice-aperta, si possano riunire a cerniera altri bracci e diramare così dalla travatura data altre travature, a' cui nodi si dovranno applicare delle forze esterne per l'equilibrio come per la prima.

La Fig. 13 ne dà un esempio: dal nodo (b, e) del poligono $a\ b\ e\ g$ si spicca la diramazione $c\ h\ k\ l$ e anche un'altra $d\ m$, collegata nel nodo (m, n) con un'altra $f\ n$ che si articola al primo poligono nel nodo (e, g). Come al n. 1, s'intende dato il sistema delle forze interne. Si sono formati i poligoni aperti: $a'; a'\,b'; b'\,c'\,d'\,e'; e'\,f'\,g'; g'; f'\,m'\,n'; n'; m'\,d'; c'\,h'; h'\,k'; k'\,l'; l'$, relativi a tutti i nodi della travatura; si sono chiusi tutti questi poligoni e si è ottenuto il poligono chiuso delle forze esterne $1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'\,7'\,8'\,9'\,10'\,11'\,12'$, di cui si sono tracciate poi le linee d'azione. Il polo O passa in O' dove rimane fisso per la diramazione semplice $c\,h\,k\,l$, indi passa in O'' e in O''' e anche in O^{IV}.

12. Chiudendo opportunamente le diramazioni si ottengono delle travature composte dette reticolari che possono essere complete od incomplete.

La Fig. 14 mostra un esempio di simili travature; essa non è però completamente chiusa. Anche qui, sempre ponendo attenzione al senso e all'ordine ciclico con cui si succedono le forze interne applicate ai varî nodi, si è formata la successione dei poligoni aperti $a'; a'\,b'\,c'; b'\,d'\,k'; c'\,d'\,e'\,f'; k'\,e'\,g'\,h'; f'\,g'\,l'\,m'; h'\,l'\,n'; m'\,n'\,p'; p'$; poligoni che vennero chiusi con quello delle forze esterne $1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'\,7'\,8'\,9'$.

13. Come si scorge dai precedenti esempî nella costruzione del diagramma si può incominciare dal poligono relativo a quel nodo che si vuole. Per le travature chiuse complete o no si può anche costruire da prima il poligono delle forze interne diagonali e poi da' suoi vertici guidare i segmenti (raggi) relativi ai lati del contorno della travatura.

Sia una travatura composta formata da un poligono $a\,b\,d\,f\,h\,l\,n\,p$, dai cui nodi intermedi si staccano dei bracci, che si riuniscono in un nodo unico (Fig. 15). Si è ritenuta vincolata ai due nodi A e B. La costruzione del diagramma è stata iniziata col segmento a' ed il polo O è passato successivamente in $O'\,O''\,O'''\,O^{IV}\,O^{V}$.

Fatte le congiunzioni e ottenuto il poligono chiuso delle forze esterne rimane completato il diagramma. Se l'ultima posizione del polo O^{V} riuscisse coincidente colla prima O, il nodo a cui è applicata la forza 9 sarebbe in equilibrio senza il concorso

di alcuna forza esterna. Se inoltre p ed a fossero uno in prolungamento dell'altro e $p' = a'$ come nel caso della figura, il poligono delle forze esterne si ridurrebbe a $1'2'3'4'5'6'7'$. Al fascio $c e g k m$ corrisponderebbe il poligono $c' e' g' k' m'$ chiuso, come al poligono $a b c m n$ corrisponderebbe un fascio $a' b' c' m' n'$ di centro O. Si possono sostituire quante si vogliono delle forze esterne trovate con vincoli analoghi ad A e B; per es. appoggiare la travatura su due sostegni coi nodi (a, b) e (p, n), purchè tali sostegni sviluppino due reazioni uguali alle forze 1 e 7.

Così passo passo si è arrivati alle travature composte, partendo dal poligono funicolare semplice; e date le forze interne dei loro membri, si trova uno ed un sol sistema di forze esterne equilibranti e ciò mediante un diagramma che è una estensione di quello relativo al poligono funicolare semplice.

14. Le travature finora considerate, per quanto siano complicate, non presentano il caso de' membri che si attraversano. Si presentano delle travature, nelle quali una tale condizione non è soddisfatta. Per es. nella Fig. 16 s'incrocicchiano i membri b e d; p ed m nei punti A e B. Applicando il metodo finora seguito per la costruzione del diagramma risulta che anche i punti A e B si comportano come nodi, dacchè vi corrispondono i parallelogrammi $b' d'$ e $p' m'$.

Queste travature a membri incrocicchiati portano maggiore complicazione nel diagramma, il cui pregio essenziale è di evitare la ripetizione dei segmenti, quale si richiederebbe, se si costruissero i poligoni relativi ai varî nodi indipendentemente l'uno dall'altro. Non pertanto si mantiene ancora preferibile in generale la costruzione del diagramma invece dei poligoni separati.

15. Si riscontrano peraltro delle travature a membri incrocicchiati, per le quali il diagramma può essere costruito senza repetizione di segmenti. Un esempio semplice si ha nella Fig. 17. Formati i poligoni aperti successivi $a' b'; a' c' e'; e' b' d'; d' c'$ (Fig. 17a), e tirate le rette di chiusa si ottiene un diagramma, nel quale compare il parallelogrammo $b'.c'$, che sarebbe relativo al punto A, e quantunque la ripetizione dei segmenti b' e c' possa essere giustificata coll'ipotesi, che il punto A sia un nodo, ciò che non altera la grandezza dei segmenti nel diagramma, pure se si osserva, che la travatura è parzialmente ribaltata su se stessa, provenendo dalla sviluppata $(a)(b)\, d\, c$, pur di tenere l'ordine ciclico ai varî nodi come risulta nella sviluppata, si evita la ripetizione dei segmenti. Così il lato e che sarebbe del contorno nella data travatura, diventa un braccio diagonale nella sviluppata; formando i successivi poligoni aperti $a' b'; b' e' d'; d' c'; c' e' a'$, (Fig. 17 b) indi tirate le rette di chiusa si ha completato il diagramma senza la ripetizione di alcun segmento.

Un esempio di travature ribaltate più complicate della precedente si ha nella Fig. 18. La sviluppata, che venne disegnata a tratti dà l'ordine ciclico con cui si devono succedere i varî lati concorrenti in uno stesso nodo, affinchè, tenendo lo stesso ordine di successione nei lati del poligono corrispondente, si eviti la ripetizione dei segmenti. Così il poligono relativo al nodo 11 non sarà costruito secondo l'ordine $d' b' e' x' y'$; ma bensì secondo l'ordine $b' d' e' y' x'$.

Visto una volta l'ordine che si deve seguire, per tutte le travature, che presentano la stessa struttura, sarà inutile disegnare la sviluppata; come ad esempio per

la Fig. 19 dove del resto la sviluppata si costruisce con ispeditezza e basta anche semplicemente ad occhio.

16. Se la travatura a membri incrocicchiati non può essere sviluppata per modo da evitare in questa ogni incrocicchio di membri, come si è potuto ottenere nella Fig. 18, bisogna ripetere dei segmenti nel diagramma. Così avviene per la Fig. 20 come si è già visto per la Fig. 16; essa è da considerarsi piuttosto come l'insieme di tre travature, che si sovrappongono per la parte $a\,c\,e\,g$. Ecco come si potrebbero trovare le forze esterne, che la rendono equilibrata. Si formino successivamente i poligoni relativi ai nodi $(p, a), (a, c), (c, e), (e, g), (g, l)$; cioè; $p'\,n'\,m'\,a'$; $a'\,b'\,c'$; $c'\,d'\,e'$; $e'\,f\,g'$; $g'\,h'\,k'\,l'$; così si trovano $8', 7', 6', 5', 4'$; il segmento che unisce i termini liberi di $8'$ e $4'$ è equipollente alla risultante delle forze da applicarsi ai nodi (p, h), (n, k), (m, l). Ora per trovare queste singole forze è d'uopo costruire i parallelogrammi relativi ai nodi ideali (b, m), (b, n), (d, m) ecc. e come vennero disegnati. Si possono evitare tante ripetizioni di segmenti formando a parte (a sinistra del diagramma) i poligoni relativi a questi ultimi nodi. Con ciò rimane naturalmente incompleto il diagramma.

17. I nodi interni nelle travature rendono più complicato il diagramma, epperò più lunga la sua costruzione. Ricorrendo ad un artificio, d'immaginare cioè tagliato un membro della travatura ed introdotte due forze esterne uguali ed opposte, si riesce a costruire agevolmente il diagramma ripetendo soltanto il segmento relativo al membro tagliato.

Ciò è quanto venne tacitamente ammesso nella Fig. 15, che può servire come esempio di una travatura a nodi interni non equilibrati senza forza esterna.

La Fig. 21 mostra il caso di una travatura con un nodo interno, ma nella quale non è necessario tagliare alcun membro; ciò perchè tale travatura è ribaltata parzialmente su se stessa. La sua sviluppata non ammette alcun nodo interno. Questa sviluppata serve poi per la costruzione del diagramma.

La Fig. 22 mostra il caso di una travatura, che è bensì da considerarsi come parzialmente ribaltata su se stessa, ma la sua sviluppata contiene internamente due nodi $(c, e), (e, g)$. Onde in luogo di costruire il diagramma ripetendo dei segmenti e lasciando la travatura ribaltata quale è data, si consideri un membro per es. h tagliato, e vincolata la travatura in A e B; allora i nodi, cui compaiono applicate le forze esterne 8 e 7 diventano esterni; nel diagramma risulta soltanto ripetuto e una volta sola il segmento equipollente alla forza interna del membro tagliato.

Per travature molto complicate si potranno immaginare tagliati più membri, onde costruirne il diagramma, ripetendo il minor numero possibile di segmenti.

18. Per quanto sia importante la soluzione generale del problema di trovare le forze esterne da applicare ai nodi di una travatura articolata, perchè questa sviluppi degli sforzi interni dati (e che si legano colle dimensioni de' suoi membri per l'identità: $R.A = Q$; dove R è lo sforzo interno per unità di area della sezione trasversale d'un membro, A l'area di detta sezione e Q la forza interna totale che sviluppa il membro che si considera); pure nella pratica per le costruzioni nuove si presenta il problema inverso; e come caso più semplice:

Dato un sistema di forze esterne in equilibrio, connetterle

con una travatura semplice, che serva loro da nesso rigido, determinando anche gli sforzi interni di essa.

È il problema stesso della composizione delle forze. Basta costruire il poligono delle forze esterne coll'ordine stesso, con cui si dovranno succedere i nodi percorrendo la travatura da costruirsi; dai vertici di questo poligono condurre tanti raggi che si riuniscano in uno stesso punto (polo) e connettere le linee d'azione delle forze date con un poligono funicolare relativo, che riuscirà chiuso. Si hanno infinite soluzioni. Non meno semplice risulta la soluzione se la travatura dev'essere aperta.

19. Dato il sistema delle forze esterne in equilibrio, e quello delle forze interne, epperò anche la travatura (complesso delle linee d'azione delle forze interne) rendere la travatura un nesso rigido delle forze esterne date.

Costruito il poligono delle forze esterne (chiuso) (Fig. 23) dai vertici (1′2′); (2′3′); (3′4′); (4′5′); si conducano i raggi a', b', c', d' equipollenti agli sforzi interni dei membri a, b, c, d della travatura. Se tali raggi non concorrono in un polo unico, vuol dire che alla travatura deve essere aggiunto qualche braccio con relativo vincolo. Congiunti i termini liberi dei raggi si ottiene il poligono $O O' O''$ di spostamento del polo; e condotte le parallele alle rette di chiusa e', f', g' pei nodi corrispondenti che non sono in equilibrio, si ottengono le posizioni dei bracci da aggiungersi e vincolarsi con forze esterne uguali alle loro interne. Essi rendono indeformabile la travatura.

Generalmente le travature si progettano per modo che non richieggano l'aggiunta di altri membri e la cui struttura sia tale (indeformabile) da impedire una subita deformazione dietro una variazione nel sistema delle forze esterne. Non è più possibile allora determinare le forze interne in tutti i loro elementi come al n. 18; perciò si fissa ad arbitrio uno di questi elementi per ogni forza interna e precisamente la linea d'azione.

Il problema qui sopra risoluto si presenta nella pratica quando il sistema delle forze esterne venga a subire qualche alterazione. Si aggiungono le armature di rinforzo o puntellature.

20. Dato il sistema delle forze esterne in equilibrio applicate ai nodi di una travatura reticolare, trovare la grandezza e il senso delle forze interne che sviluppano i varî membri di essa.

La travatura sia quella rappresentata nella Fig. 15. Per la costruzione del poligono delle forze, dovendo, come pel poligono funicolare semplice, passare successivamente a tutti i nodi della travatura, percorrendone il contorno, si trova qui ostacolo pel nodo 9, che riesce interno alla travatura: rimane indeterminato il posto del segmento 9′ rispetto agli altri nella costruzione del poligono delle forze. Però costruendo il triangolo relativo al nodo 1 oppure al nodo 7 si può trovare la forza interna di un lato a del contorno, a cui appartiene il nodo 9. Si immagini allora tagliato il membro a e vincolato in A e B; le due forze esterne 8 e 10, che tengono luogo dei vincoli hanno per segmenti $8' = 10' = a'$. Ciò posto si percorra la travatura aperta nell'ordine $b\ d\ f\ h\ l\ n\ p\ p\ n\ m\ c\ b\ a$ e si numerino in ordine i nodi che si vanno successivamente incontrando 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10. Tale è l'ordine delle forze esterne

per la costruzione del poligono di esse. Dai vertici $(1',2')$, $(2',3')$, $(3',4')$.... del poligono delle forze si guidino i raggi indefiniti paralleli ai lati intermedi b, d, f..... della travatura come nel caso del poligono funicolare semplice; si chiudano quindi successivamente i poligoni relativi a tutti i nodi mediante le parallele ai bracci che sono articolati ai nodi stessi e si sarà completato il diagramma.

Questo problema non è solubile colla statica dei corpi rigidi se non nei casi in cui la travatura sia foggiata per modo che non si presenti mai il caso o d'indeterminazione o d'impossibilità nella decomposizione di una forza in altre; cioè in più di due concorrenti sulla linea d'azione della forza data o in più di tre incontrantisi due a due e non sulla linea d'azione della forza data. I membri che sovrabbondano si intendono oziosi.

21. Se la travatura è a membri incrocicchiati e nel diagramma relativo si vuol evitare la ripetizione di segmenti, si seguirà nella formazione del poligono delle forze l'ordine, che si ottiene percorrendo la travatura sviluppata (Fig. 18). Quando la travatura sia a membri incrociati e non isviluppabile (Fig. 20), sottintesi i punti di incrocicchio come altrettanti nodi senza supporre tagliati diversi membri, si percorre la travatura esternamente per determinare l'ordine delle forze esterne. Ora la Fig. 20 presenta una singolare disposizione, per cui formato il poligono delle forze e condotti i raggi indefiniti a', c', e'..... pe' suoi vertici, non si scorge a prima giunta in qual modo si possano chiudere i poligoni relativi ai varî nodi, perchè in ognuno di essi concorrono almeno tre membri.

Se però si osserva, e ciò per tutti i casi analoghi, che ogniqualvolta si abbiano di quattro forze concorrenti in un nodo due non consecutive coincidenti in linea d'azione e una terza nota, risulta nota anche la quarta, perchè il poligono corrispondente è un trapezio (come caso particolare si può avere un parallelogrammo); perciò ogni segmento parallelo a b e intercetto fra le a' e c' indefinite che sono parallele, è equipollente alla forza interna del membro b; e così si determinano anche d' e f'. Allora pei termini di b' condotte le p' e h' indefinite e inserito nel loro angolo il segmento $1'$ equipollente alla prima forza 1 si trovano in lunghezza p' e h'. Analogamente si trovano n', k'; m', l'. Si può ora formare il poligono relativo al nodo 8 e determinare così la lunghezza di a'; tirato b' pel punto (a', m^1) si determina c'; tirato d' pel punto (b', c') si determina e'; e così di seguito. Con ciò anche senza completare il diagramma si riesce a determinare con molta speditezza le forze interne per tutti i membri della travatura. Se si modificano le forze esterne 1, oppure 2, o 3, variano le tensioni dei tiranti p e h; n, k; m, l. Se si modificano delle forze superiori: 7, 6, 5 variano gli sforzi interni nelle travature componenti 814; 824; 834. Ciò si scorge dal diagramma. Tale proprietà è in generale sfavorevole in pratica, perchè espone alcuni membri soltanto a risentire la variazione di qualcuna delle forze esterne.

22. I due problemi generali risolti si possono enunciare così:

Dato un sistema di $2n$ forze interne uguali ed opposte a due a due (tensioni o pressioni), epperò avente n linee d'azione ed una risultante nulla, e suddiviso in gruppi di forze concorrenti in tanti nodi (punti d'incontro delle linee d'azione), equilibrare questi nodi, ciascuno con una forza esterna. Più semplicemente: Data la travatura

e il poligono delle forze interne equilibrate, trovare quello delle forze esterne. L'insieme di queste forze esterne risulta in equilibrio, perciò che è nulla la risultante totale dei gruppi di forze interne da esse equilibrati; ossia formano un sistema equivalente ed opposto al dato. Per ogni linea d'azione o lato dello schema della travatura si elimina l'ambiguità se le due forze uguali e contrarie F e $-F$ secondo cui agiscono, debbano essere applicate ai due nodi del lato stesso nel modo indicato dalla Fig. 24, oppure dalla Fig. 25, col dichiarare per ciascun lato se sia un puntone (Fig. 24) oppure un tirante (Fig. 25); od anche che le forze interne che vi agiscono sono di tensione (puntone) o di compressione (tirante).

Dato il sistema delle forze esterne in eqilibrio e le n linee d'azione delle $2n$ forze interne, che debbono essere uguali e contrarie a due a due, trovare di queste la grandezza ed il senso. E più semplicemente: Data la travatura e il poligono delle forze esterne equilibrate, costruire quello delle forze interne.

Nel primo caso il problema è sempre solubile, giacchè è ridotto a trovare le risultanti di tanti gruppi di forze concorrenti. Il secondo è meno semplice, essendo come un problema di decomposizione; e il numero delle forze interne deve essere limitato dalla condizione, che in ogni nodo non se ne abbiano di incognite più di due.

Come problema di composizione il primo non esige la conoscenza di alcun elemento delle forze esterne. Il secondo, perchè di decomposizione, richiede che sia fissato qualcuno degli elementi delle forze interne. E val meglio fissarne le linee d'azione (travatura) anzichè altri elementi come sarebbero la grandezza e il senso. Ognun vede che nella pratica, quantunque si possa avere in questo caso un vantaggio per la scelta delle dimensioni quale si presenta più comoda ed economica, pure la forma della travatura non potrebbe in generale riuscire quale si desidera, dovendo essa soddisfare a condizioni quasi sempre rigorose di proporzione.

Fig. 1.

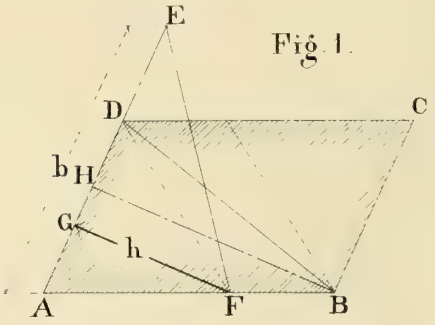


Fig. 2.

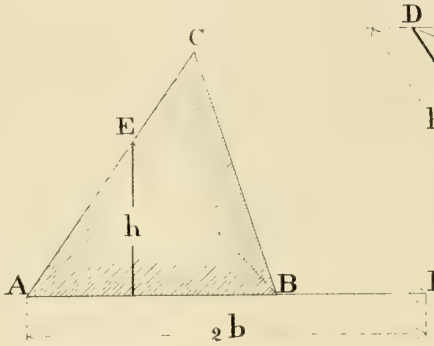


Fig. 3.

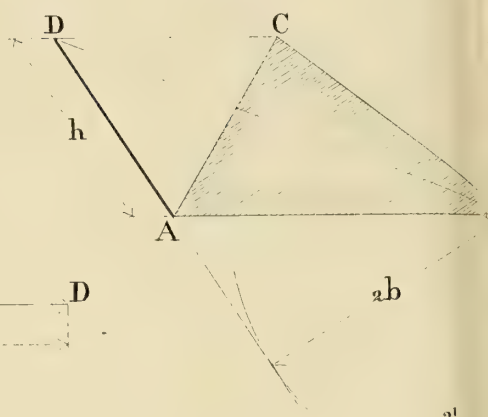


Fig. 15.

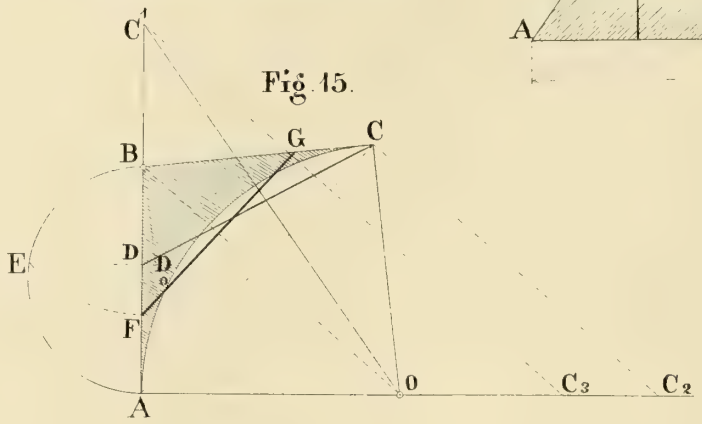


Fig. 10.

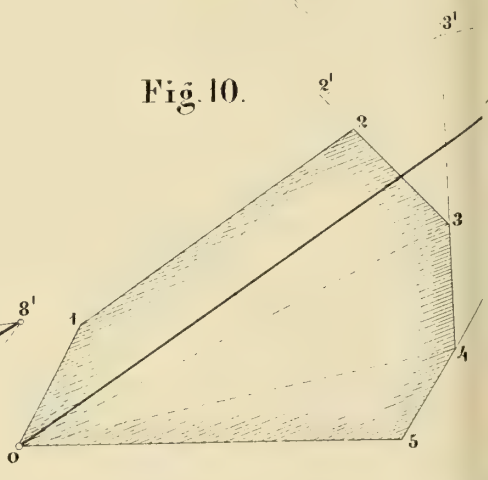


Fig. 11.

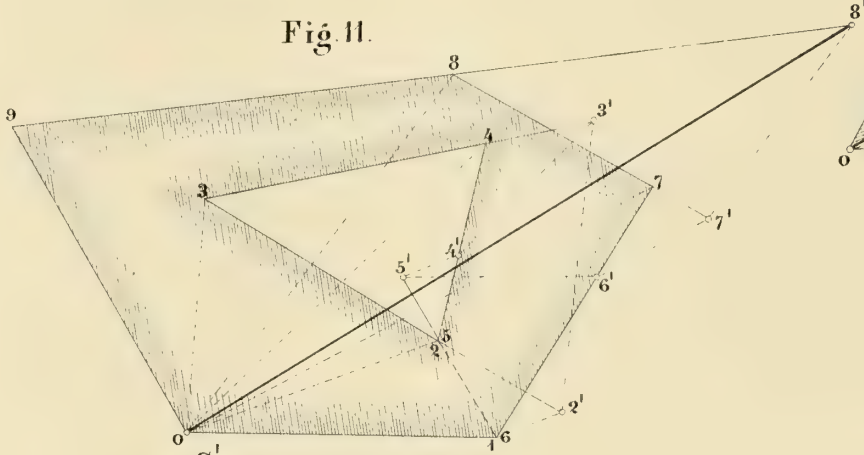
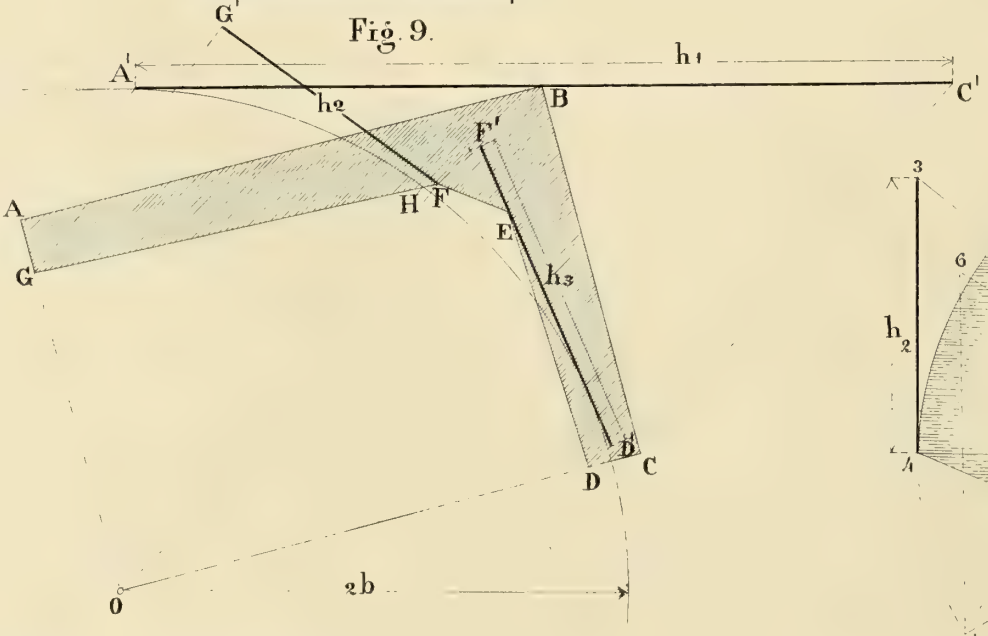


Fig. 8.

Fig. 9.



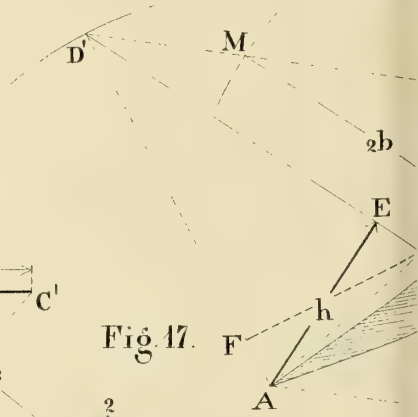


Fig. 17.

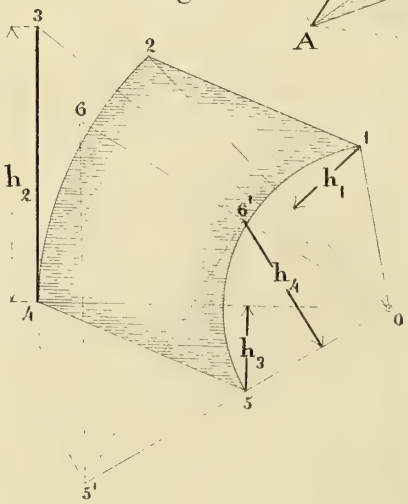


Fig. 4.

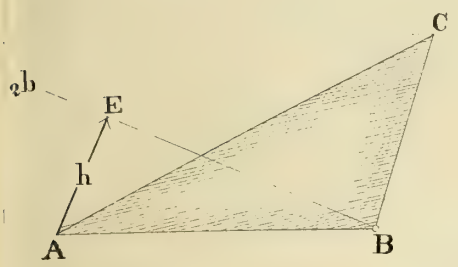


Fig. 5.

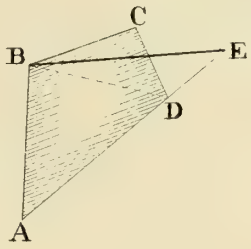


Fig. 6.

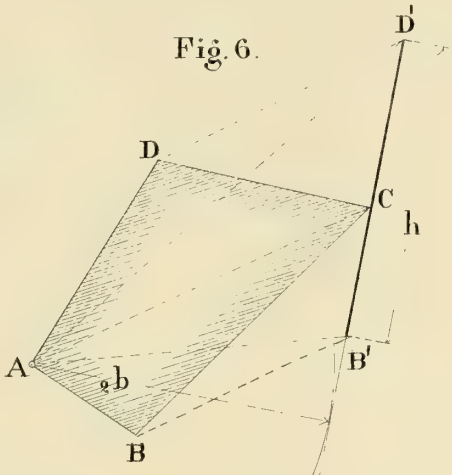


Fig. 12.

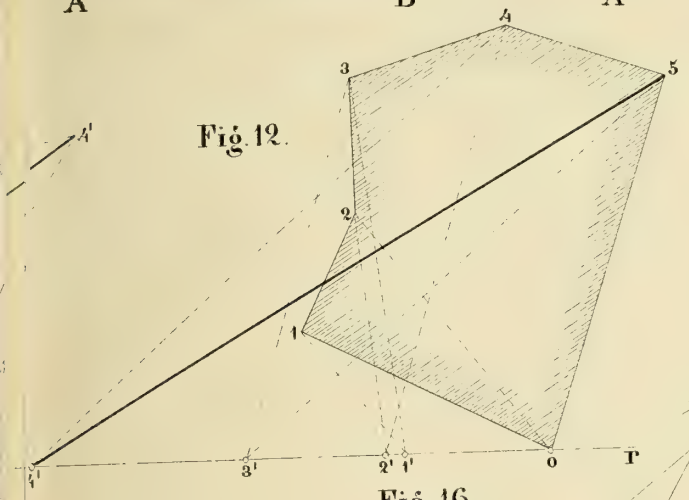


Fig. 7.

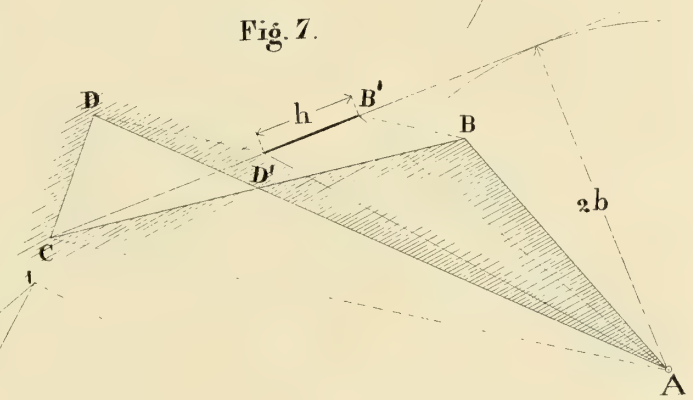


Fig. 16.

Fig. 13.

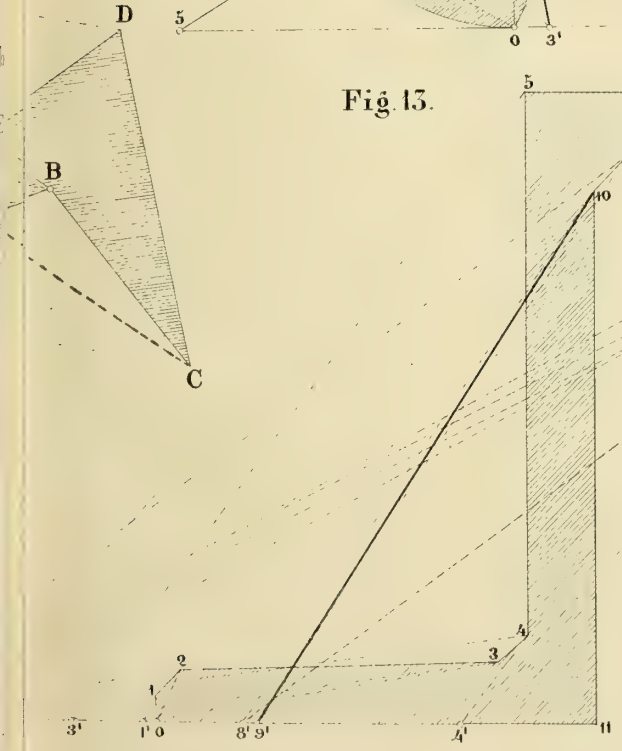


Fig. 14.

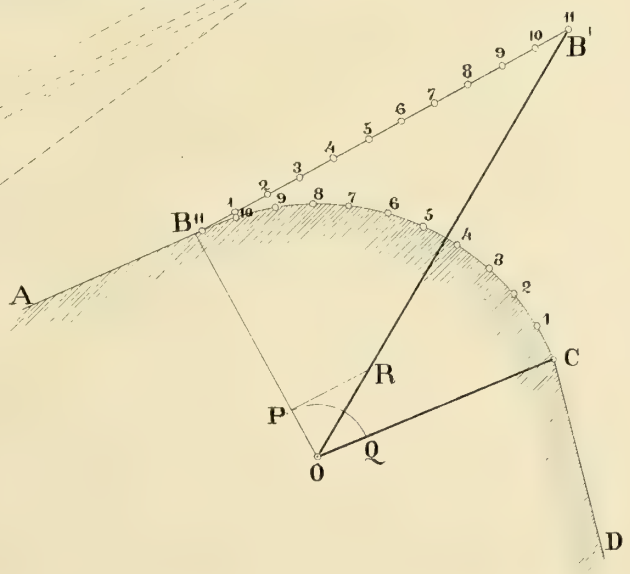


Fig. 1

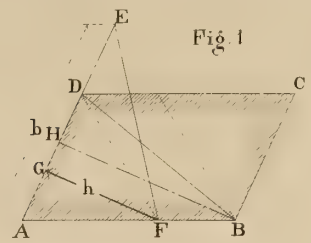


Fig. 2.

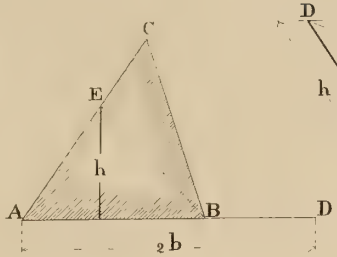


Fig. 3

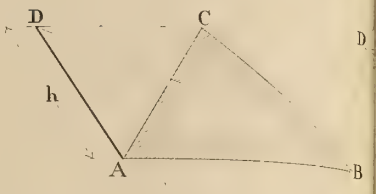


Fig. 4.

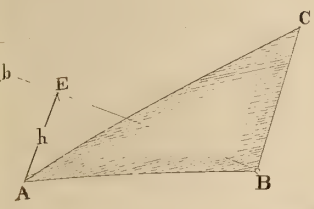


Fig. 5

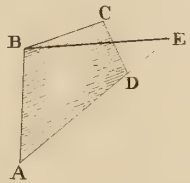


Fig. 6.

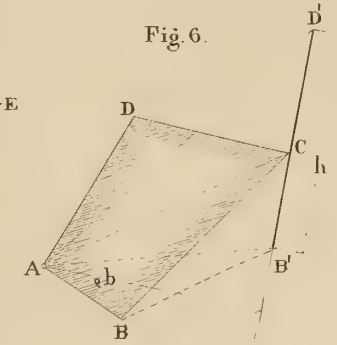


Fig. 15.

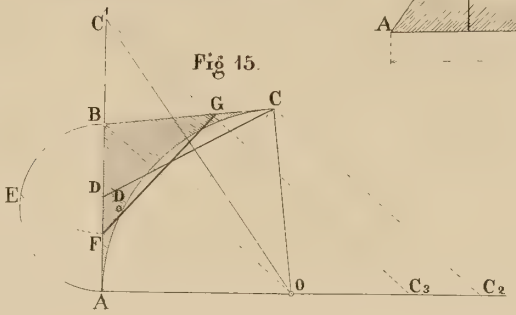


Fig. 10.

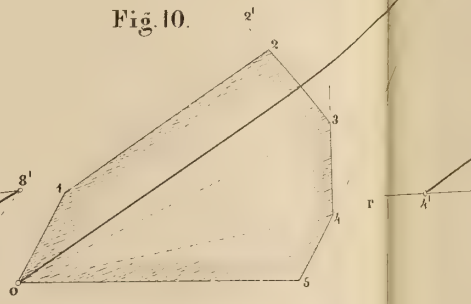


Fig. 12.

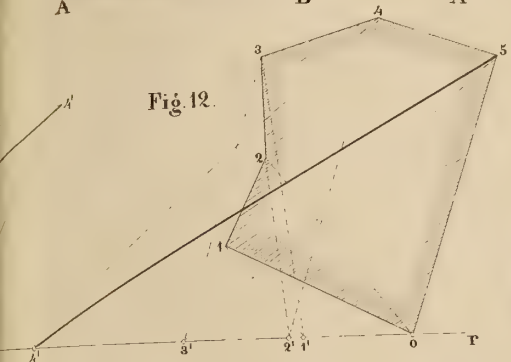


Fig. 7.

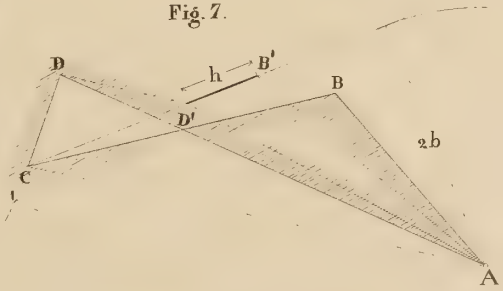


Fig. 11.

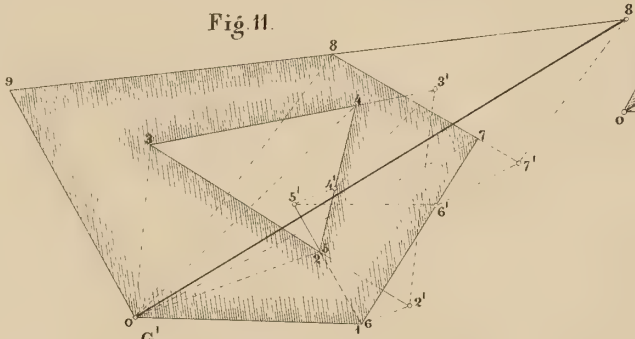


Fig. 16.

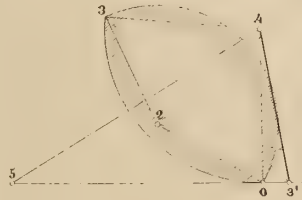


Fig. 8.

Fig. 9.

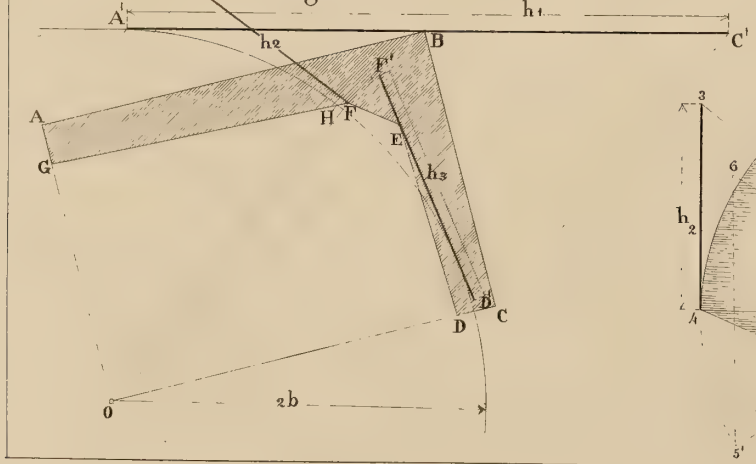
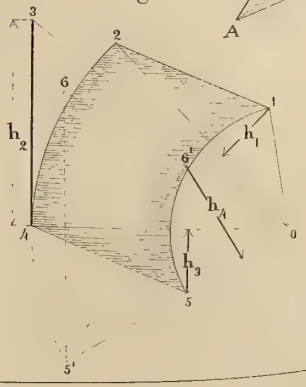


Fig. 17.



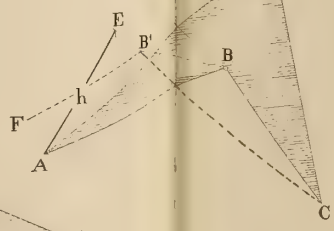


Fig. 13.

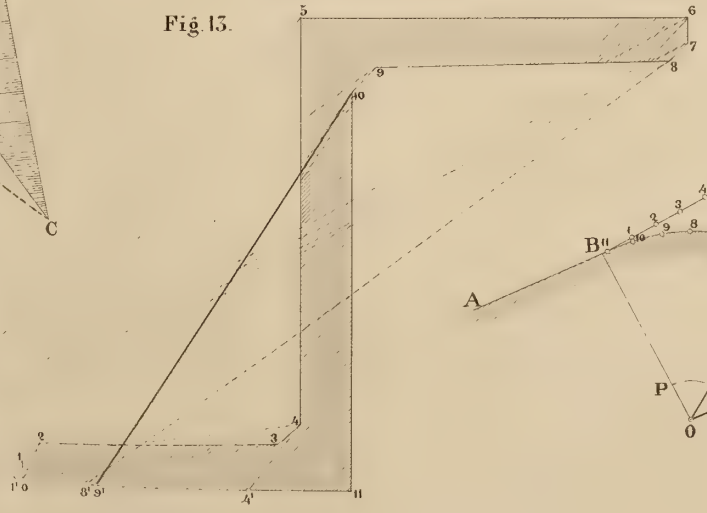
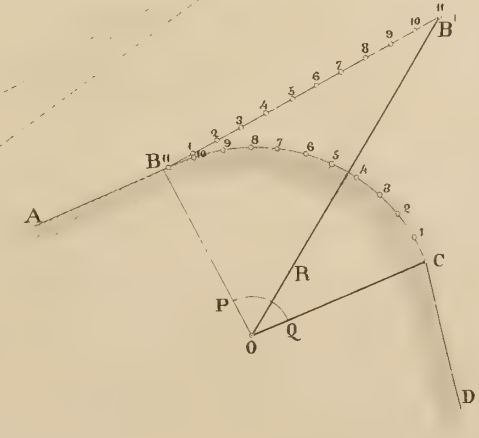


Fig. 14.



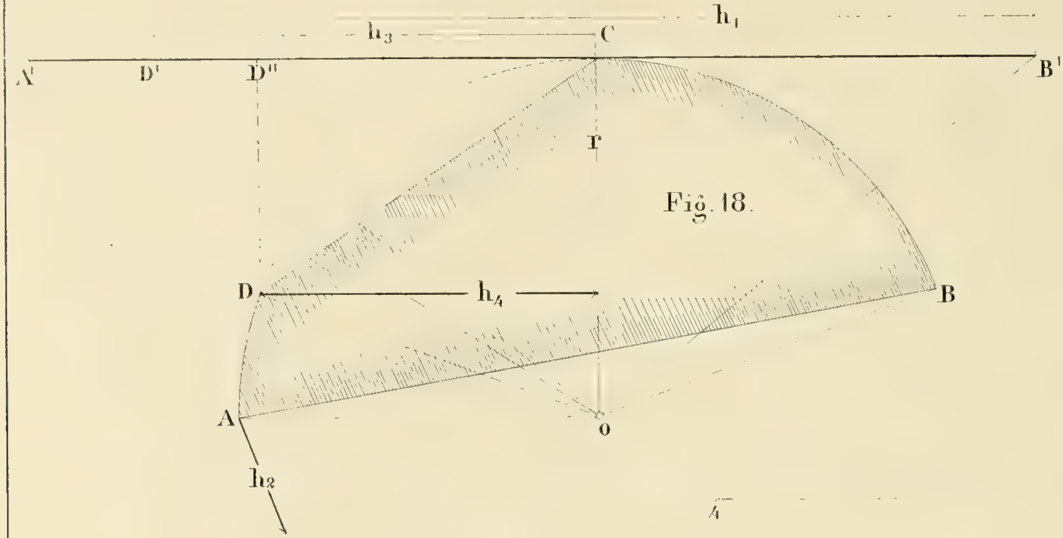


Fig. 18.

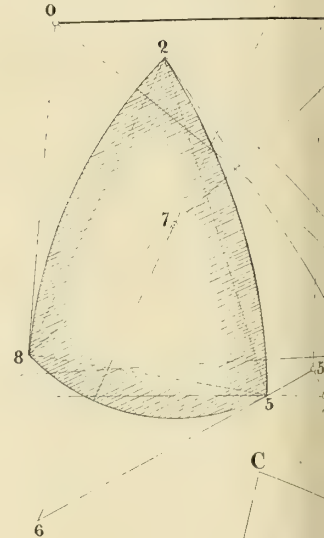
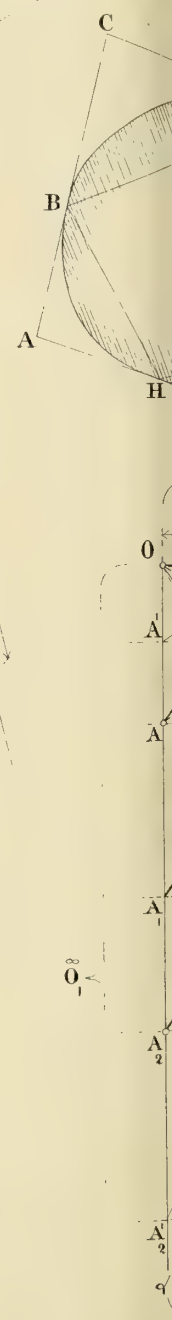


Fig. 19.



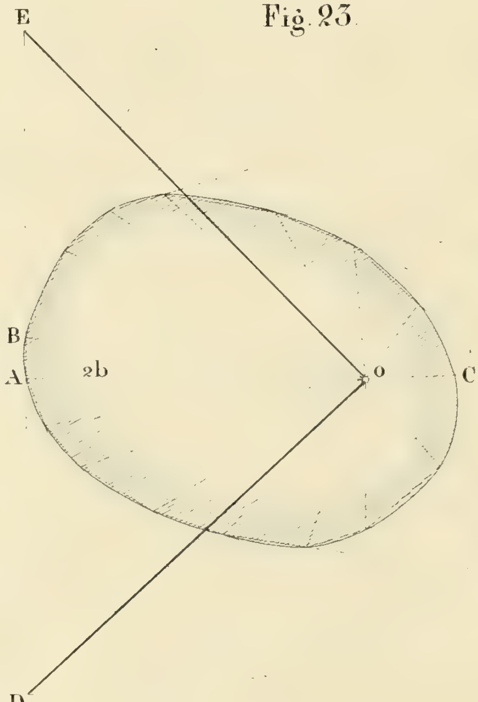


Fig. 23.

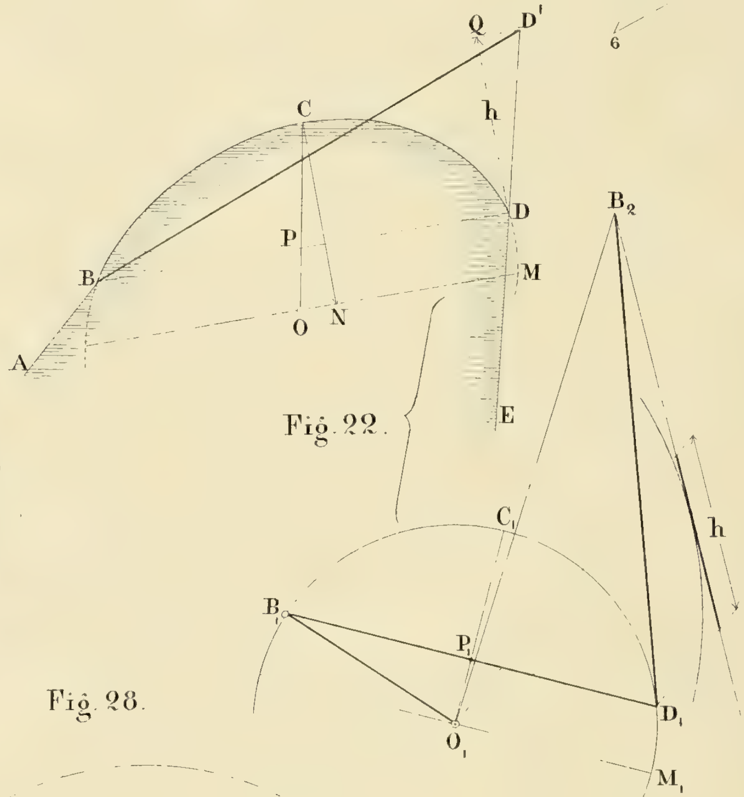


Fig. 22.

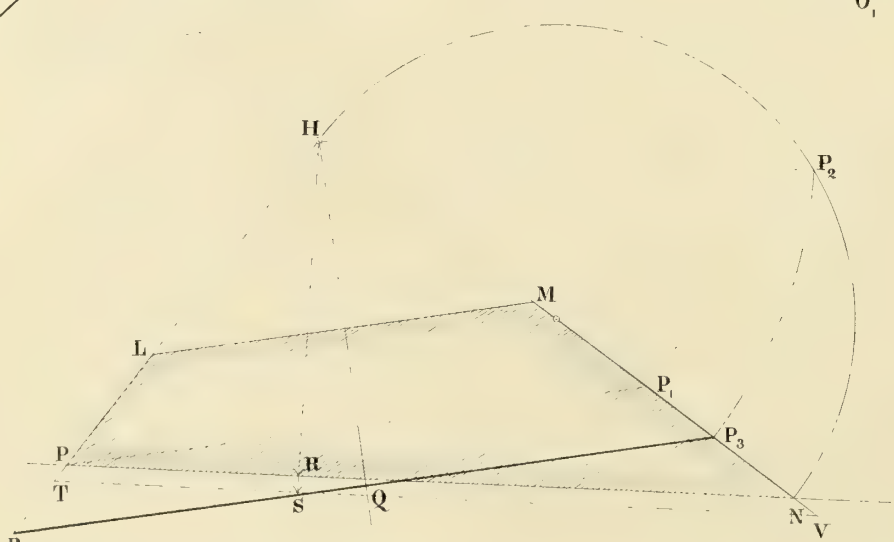


Fig. 28.

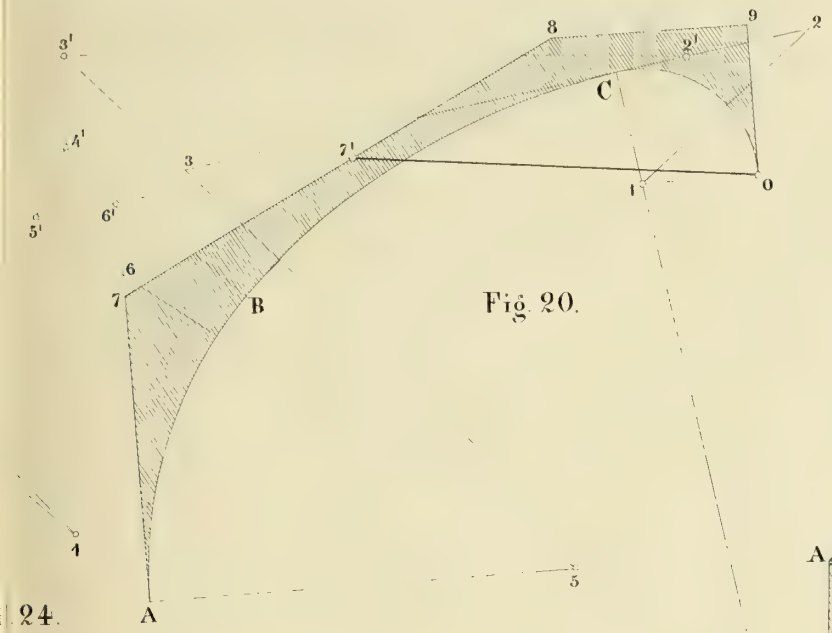
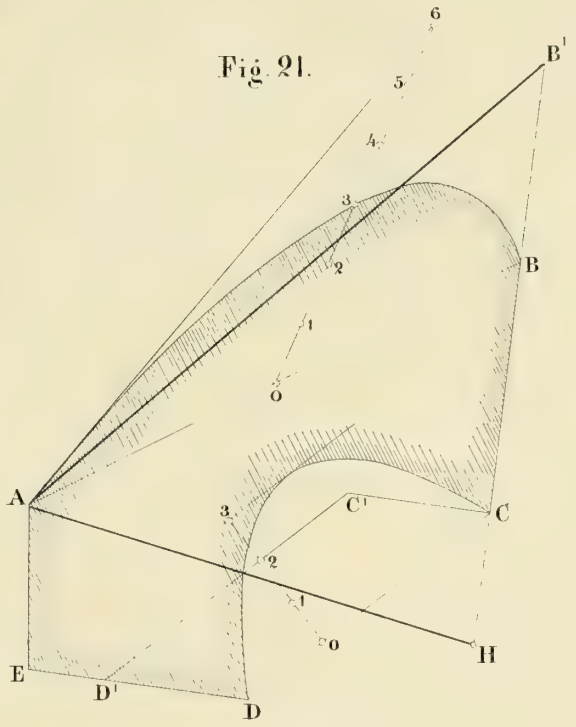


Fig. 20.

Fig. 21.



24.

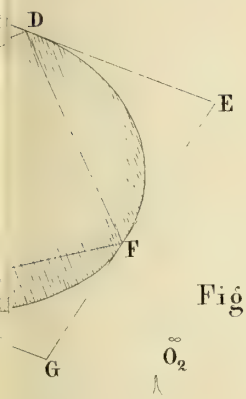


Fig. 27.

Fig. 29.

b

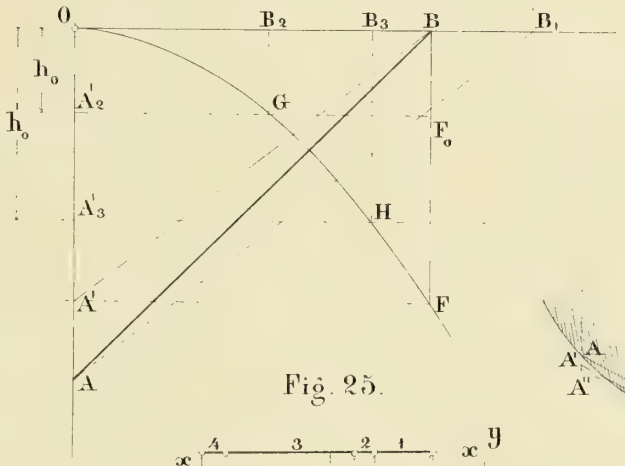
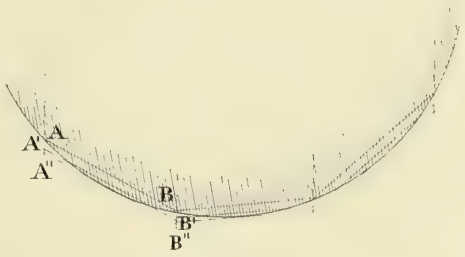
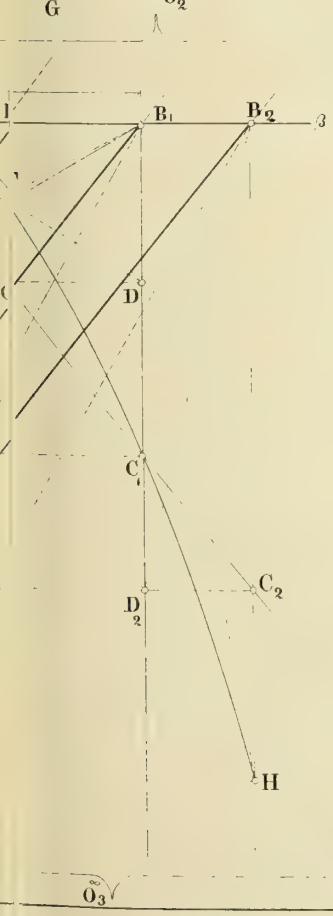


Fig. 25.

Fig. 26





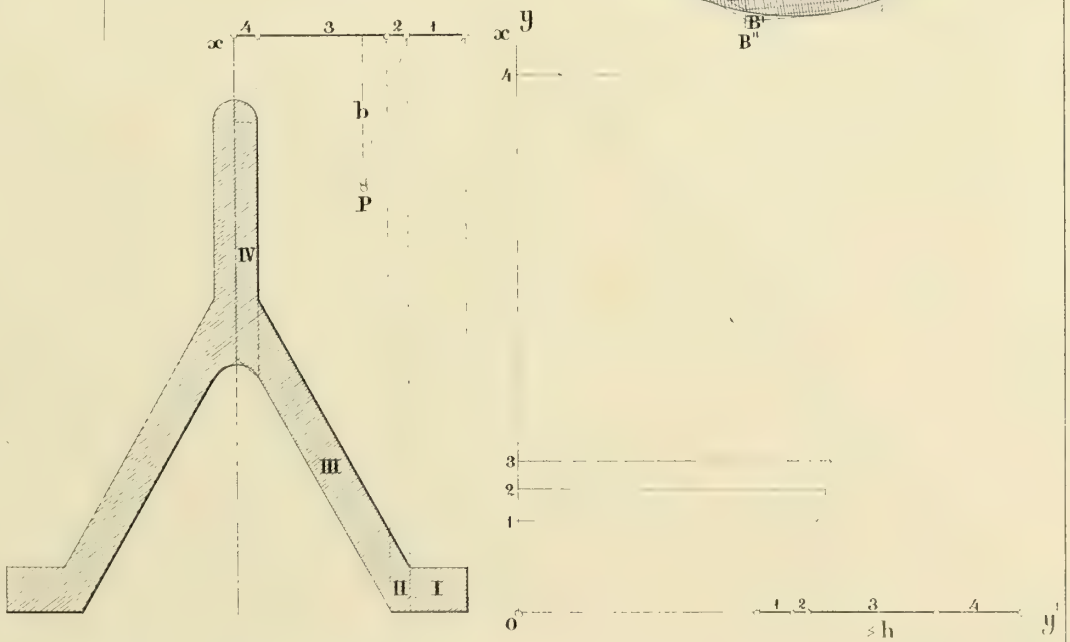


Fig. 18

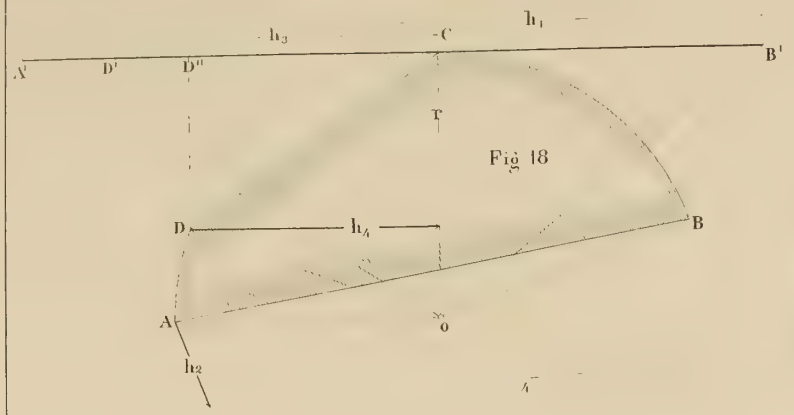


Fig. 19

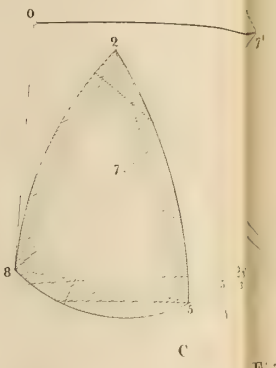


Fig. 20

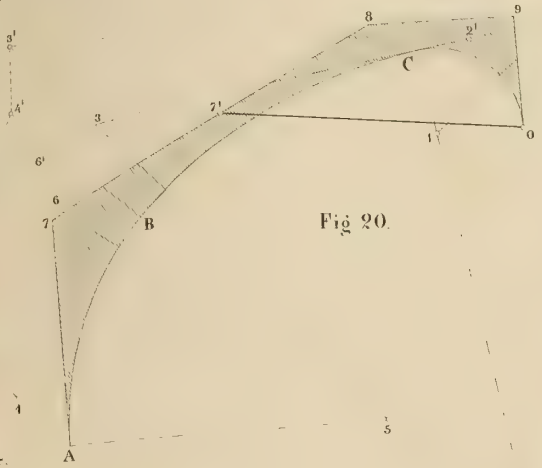


Fig. 21.

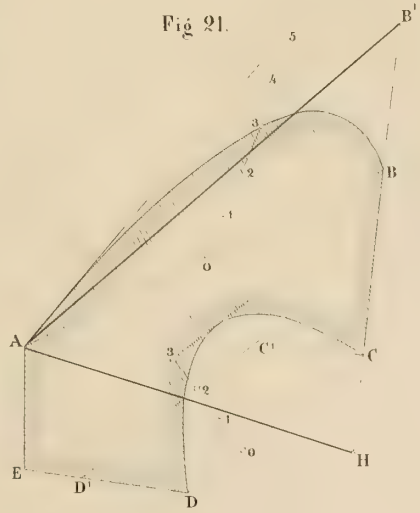


Fig. 22.

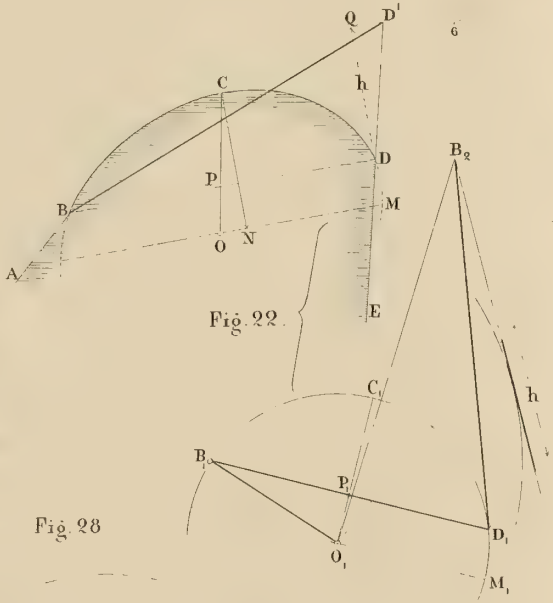


Fig. 23

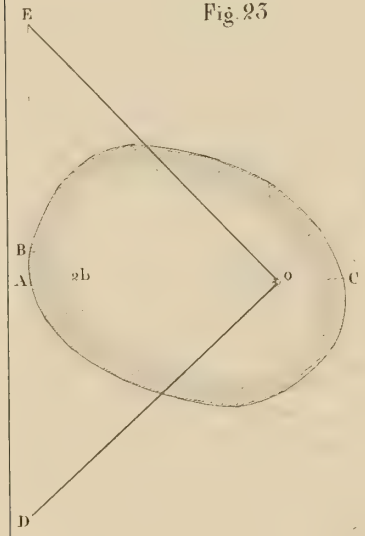


Fig. 24.

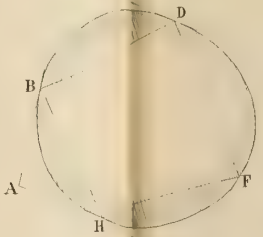


Fig. 25

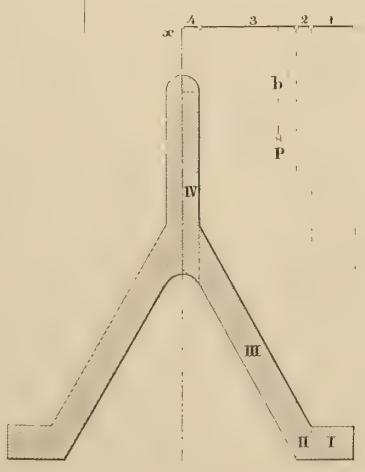


Fig. 26

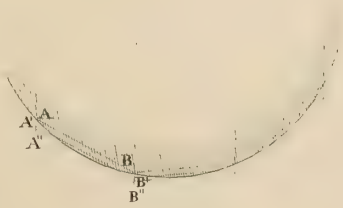


Fig. 27.

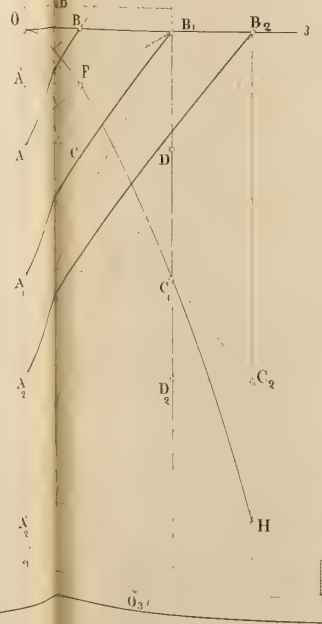


Fig. 28

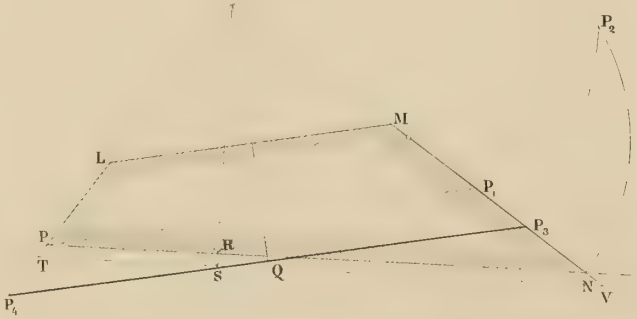
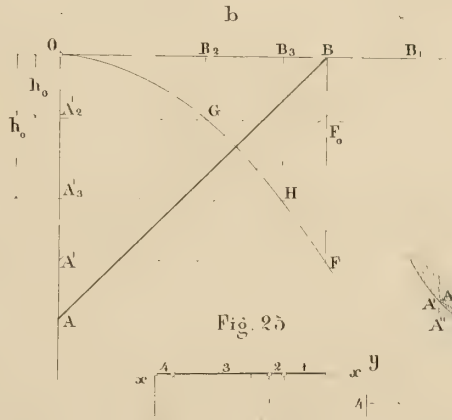


Fig. 29.



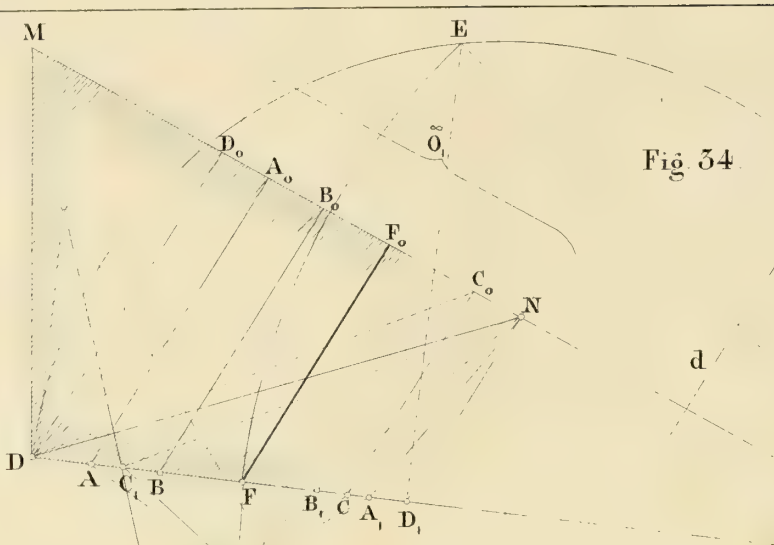


Fig. 34

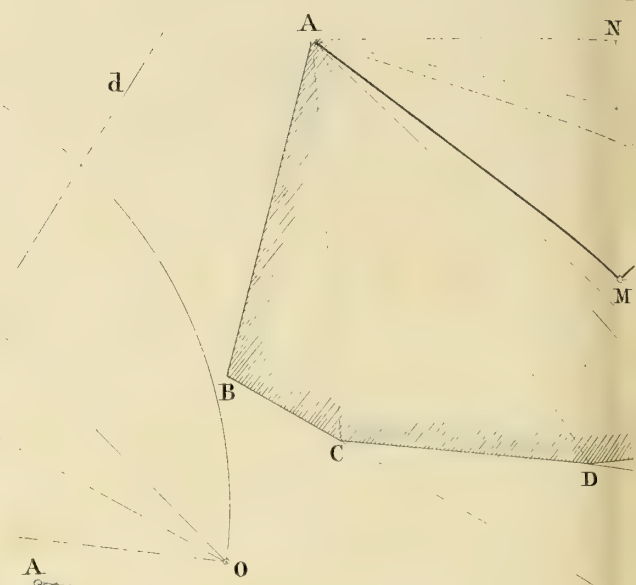


Fig. 35

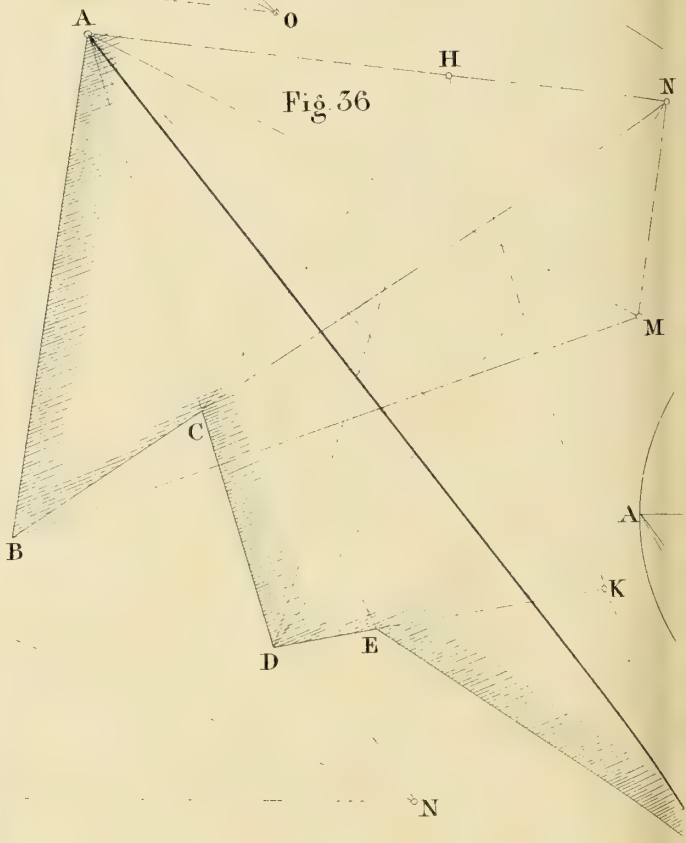


Fig. 36

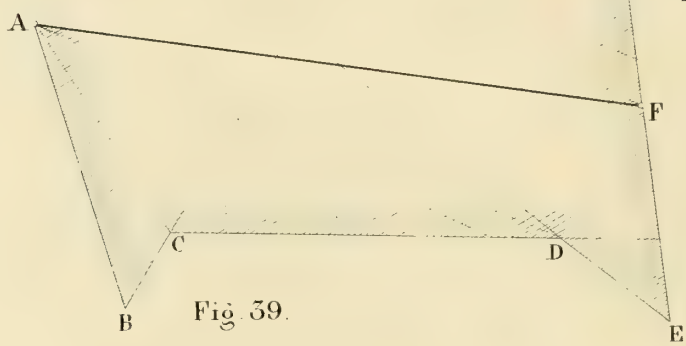
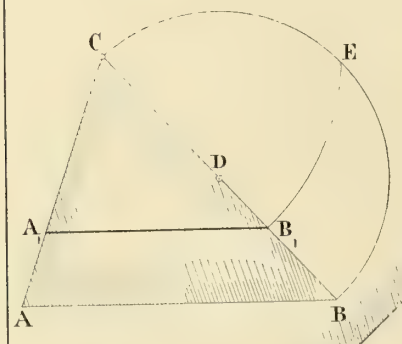


Fig. 39.



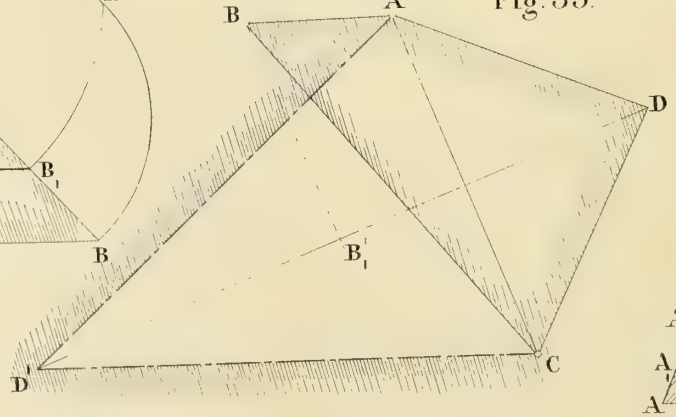
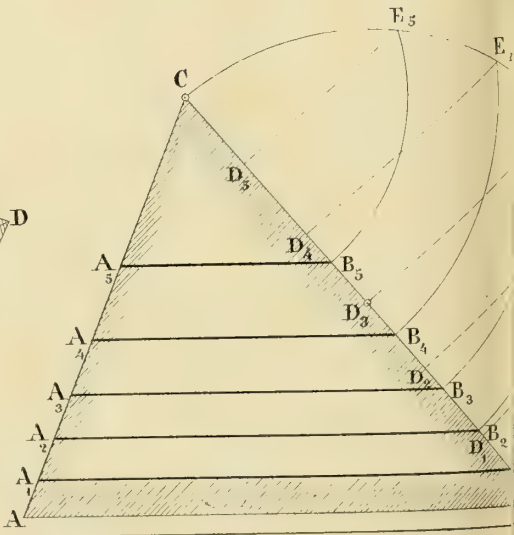


Fig. 33.



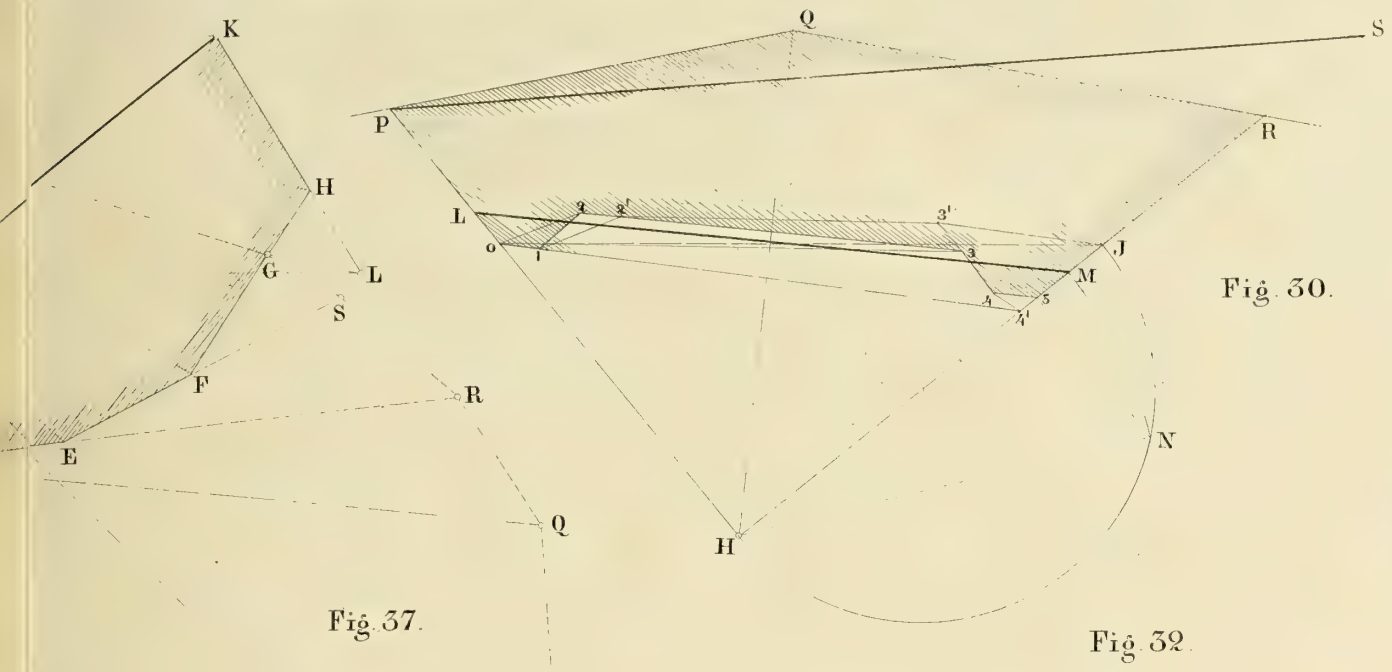


Fig. 30.

Fig. 37.

Fig. 39.

Fi. 31.

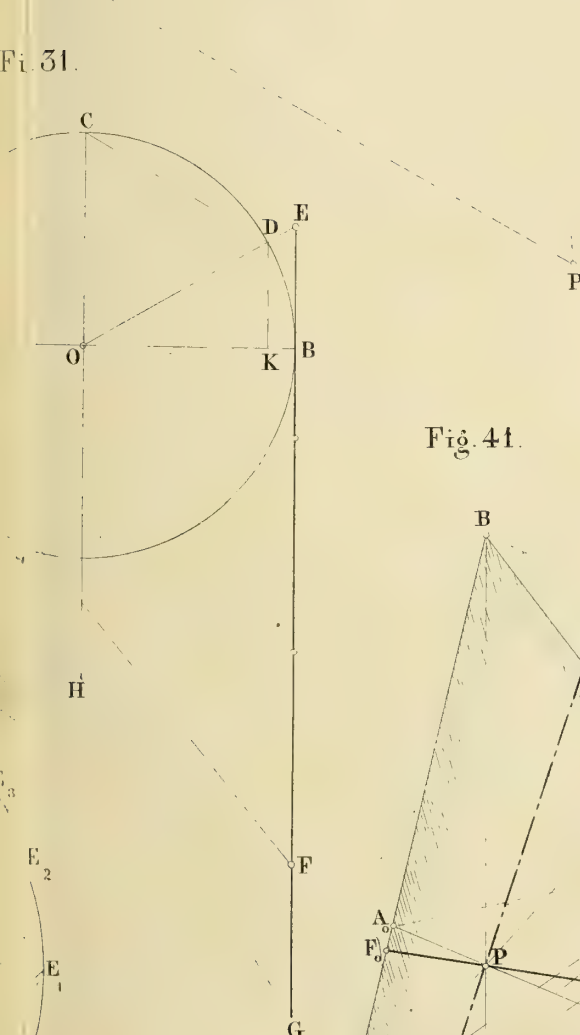


Fig. 41.

Fig. 40.

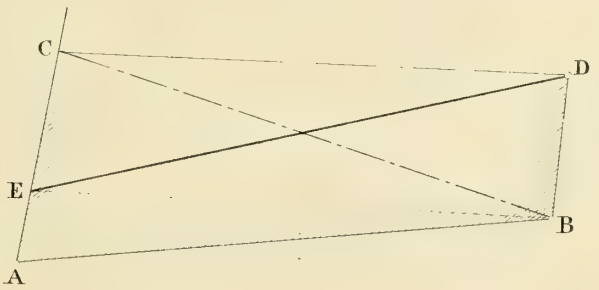
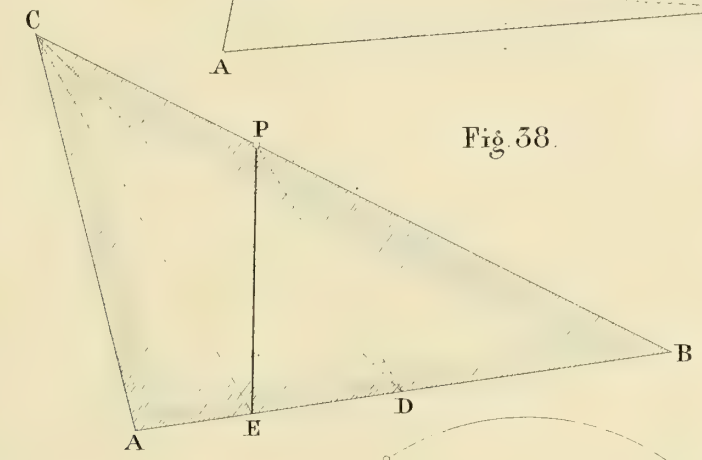


Fig. 38.



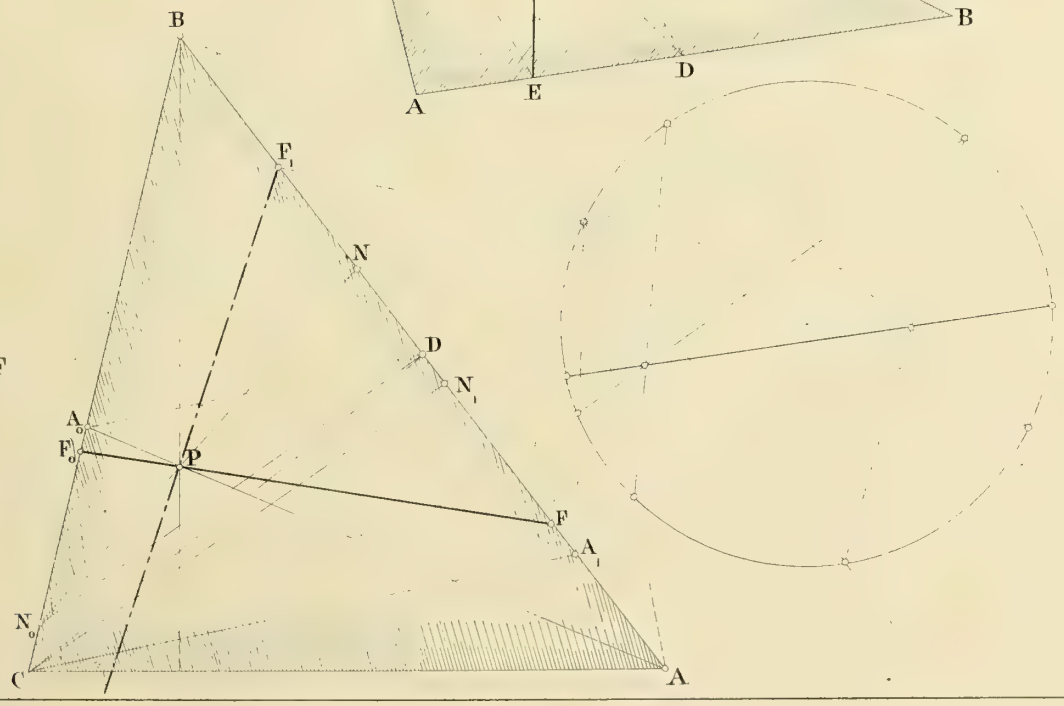
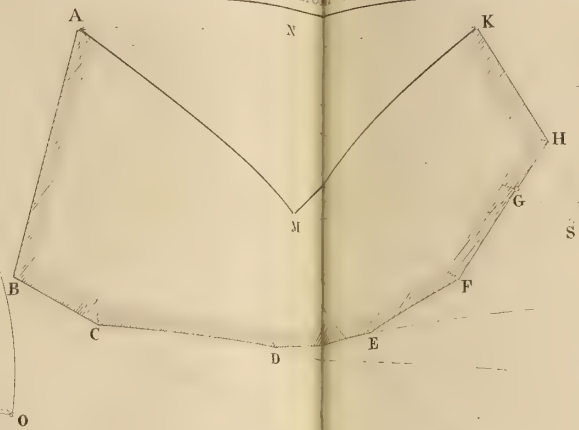


Fig. 34



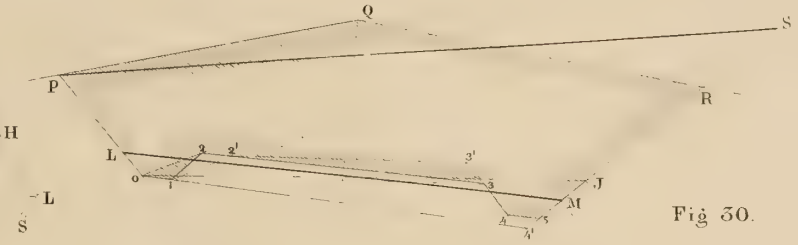


Fig. 30.

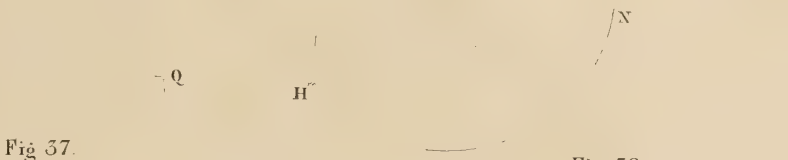


Fig. 37.

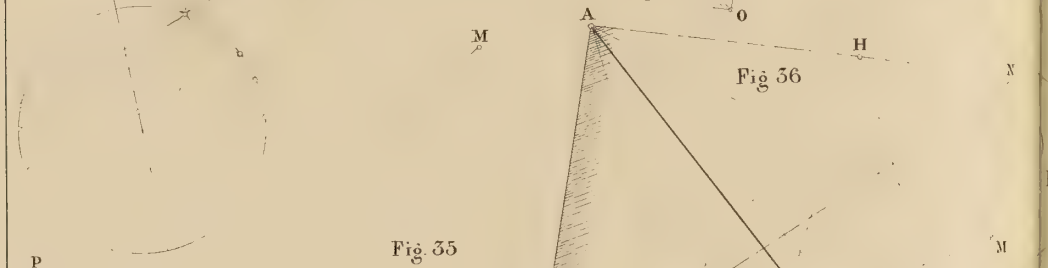


Fig. 35

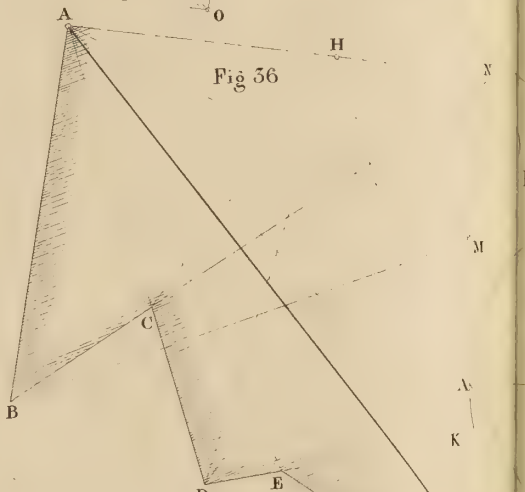


Fig. 36

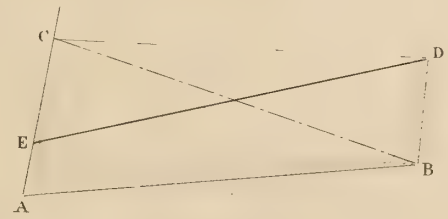


Fig. 32

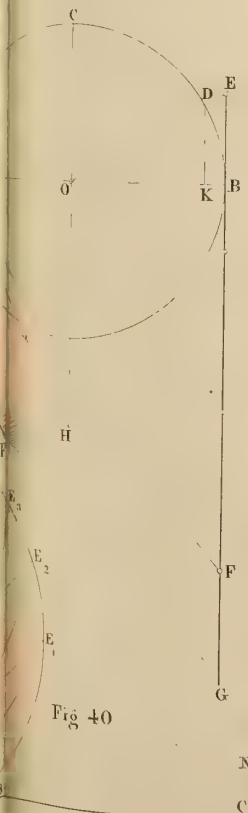


Fig. 31

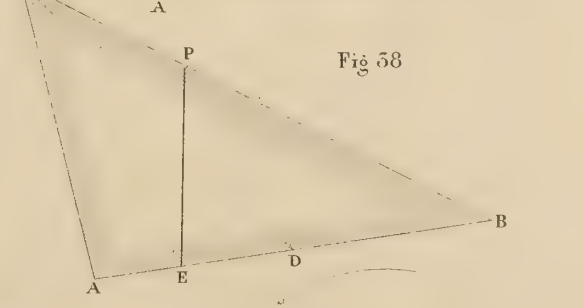


Fig. 38

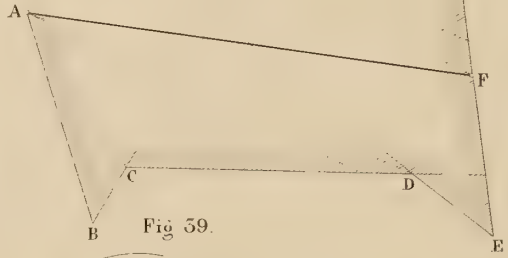


Fig. 39.

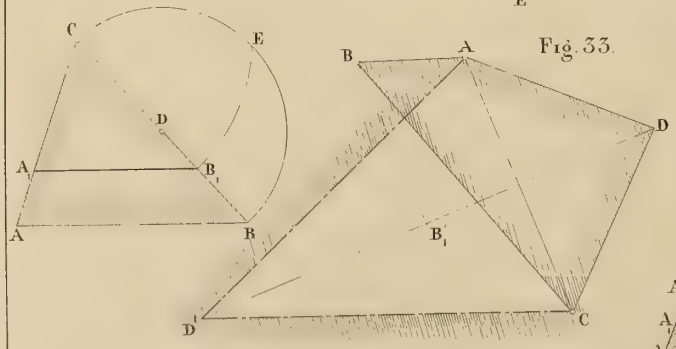


Fig. 33.

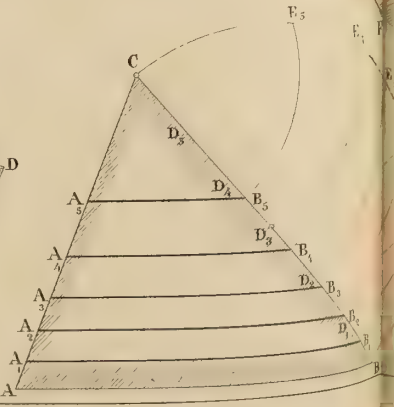


Fig. 40

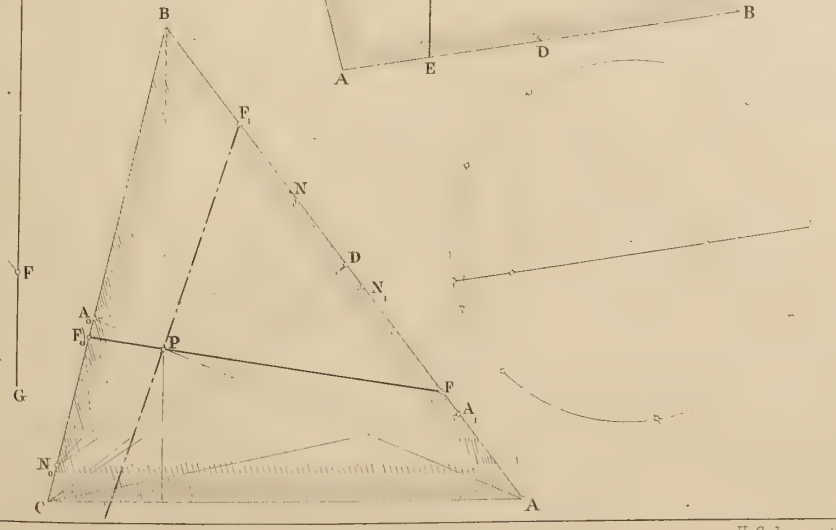


Fig. 41

Fig. 42.

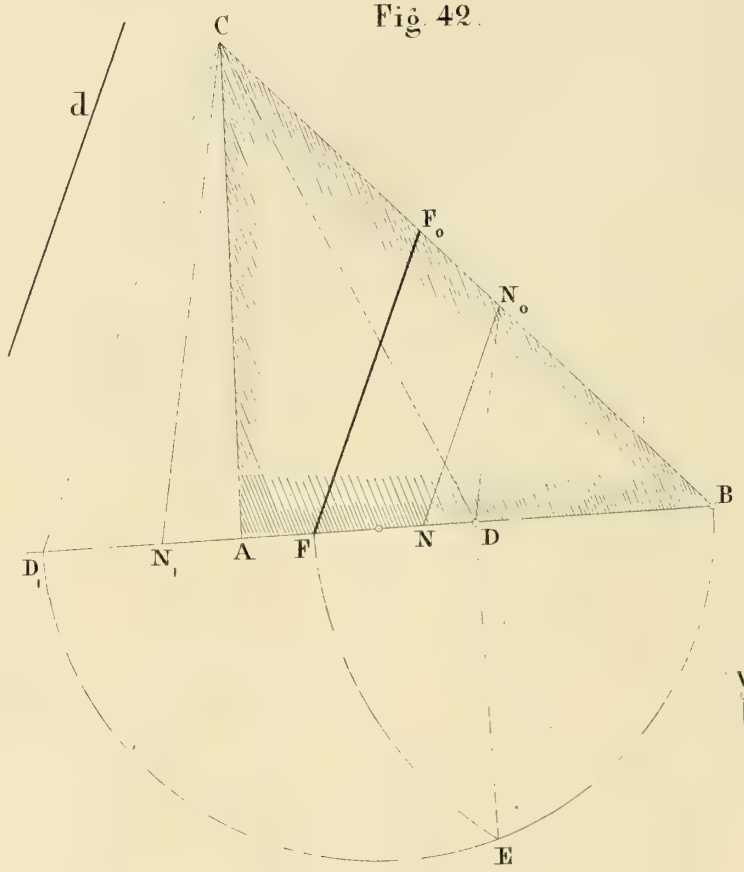
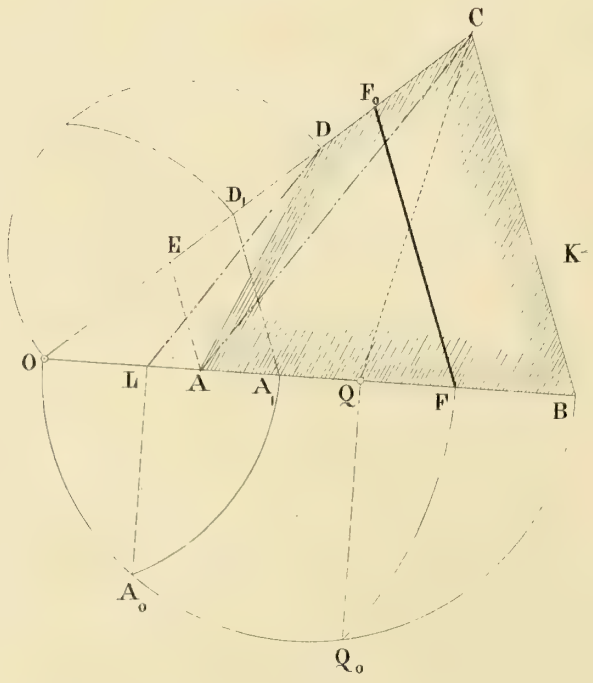


Fig. 46.



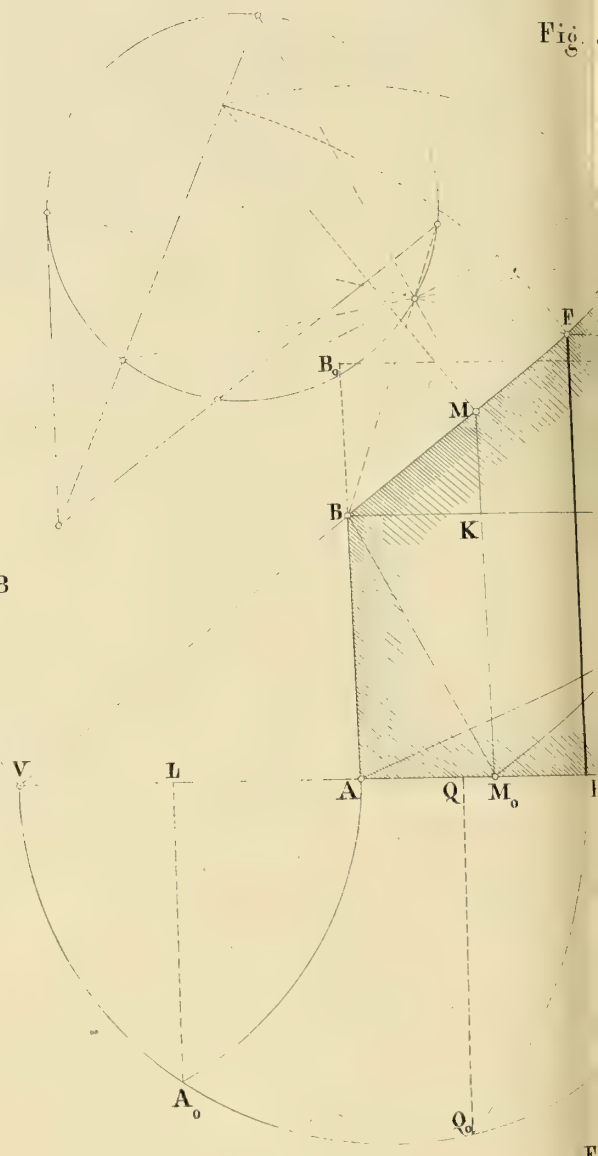


Fig. 47.

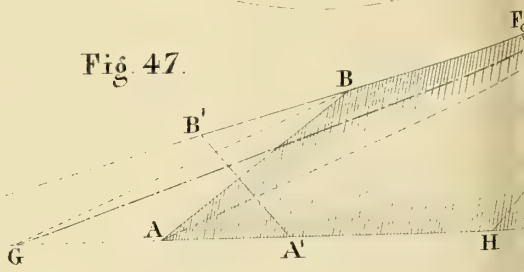
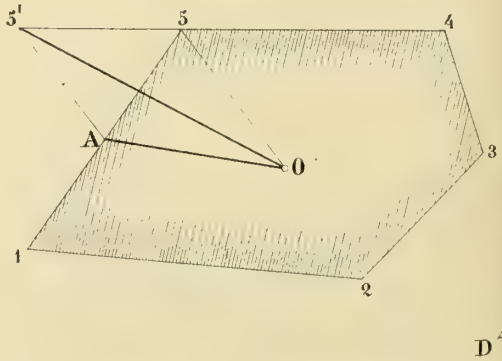


Fig. 50.



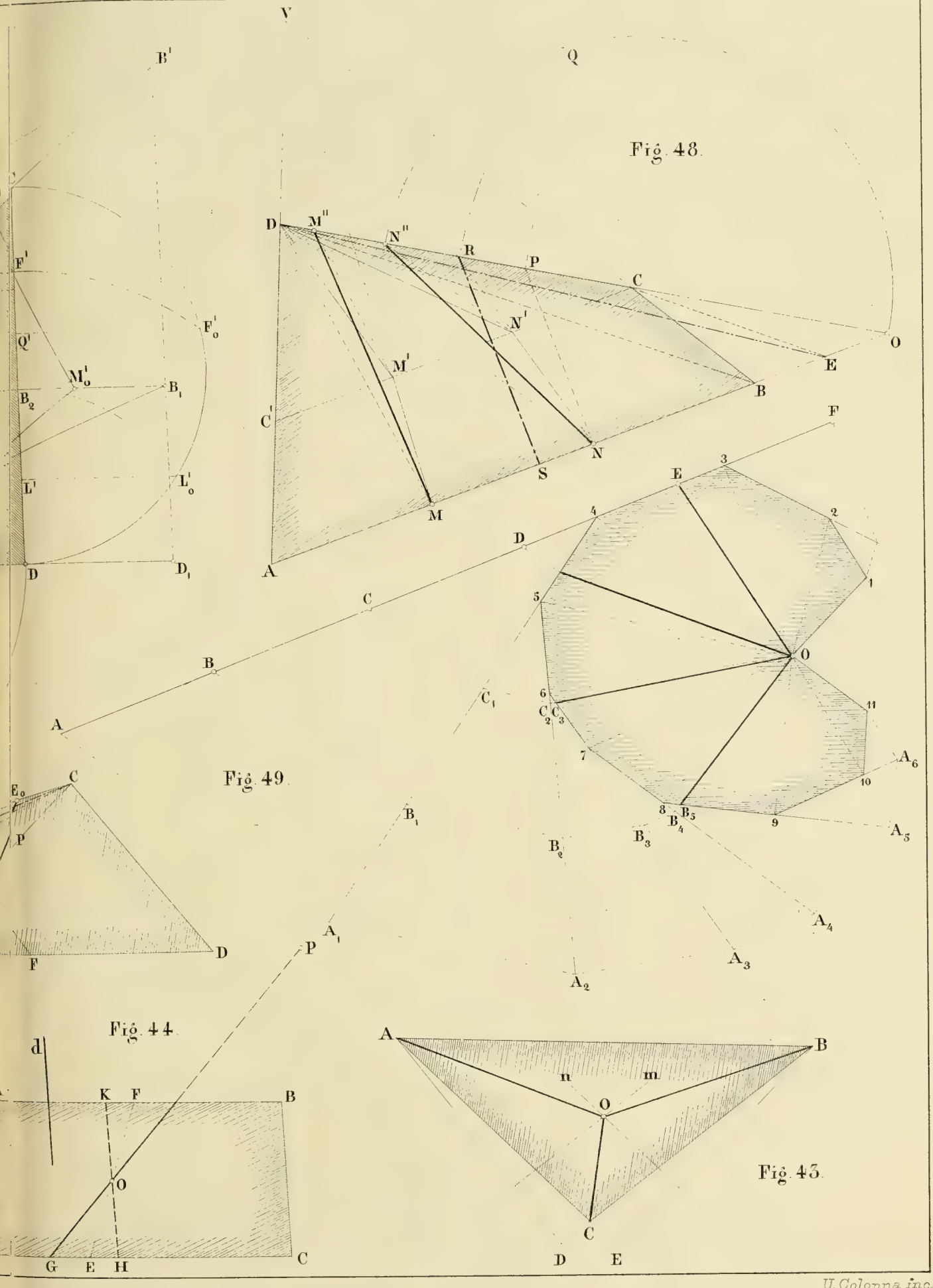

V
B'
Q
F'
F'o
Q'
M'o
B1
B2
L'
L'o
D
D1
C
Fig. 48.
D
M''
N''
R
P
C
N'
M'
C'
O
E
B
N
S
M
A
F
E
3
4
2
D
1
5
C
O
B
C1
6
C2
C3
11
7
A6
10
8
B5
B4
B3
9
A5
B1
B2
A4
A1
A3
A2
Fig. 49.
C
Eo
P
D
F
Fig. 44.
d
K
F
B
O
G
E
H
C
A
B
n
m
O
C
D
E
Fig. 43.

Fig. 42

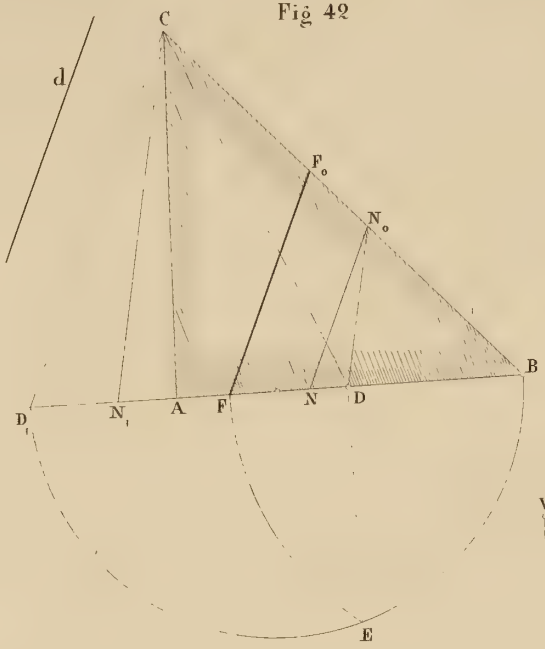


Fig. 43

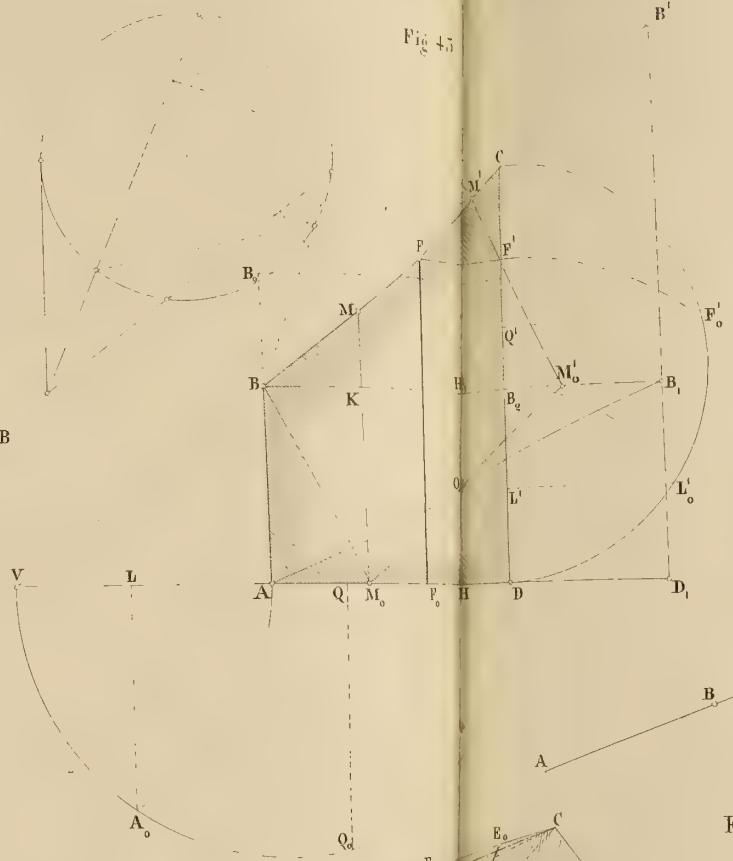


Fig. 48

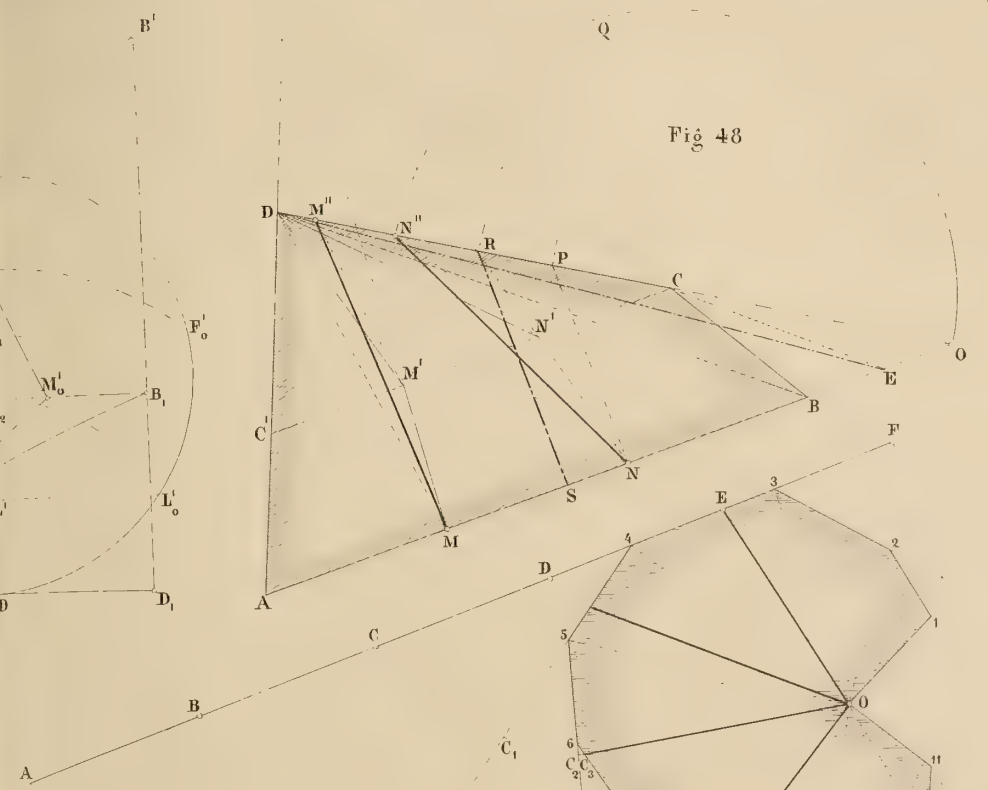


Fig. 46.

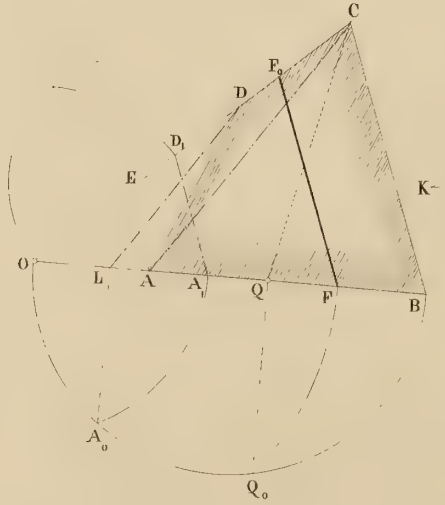


Fig. 47.

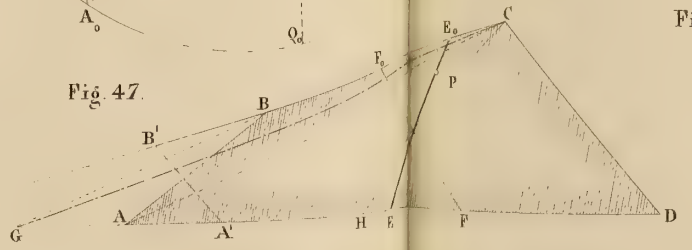


Fig. 49

Fig. 50

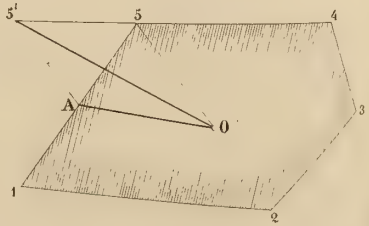


Fig. 44

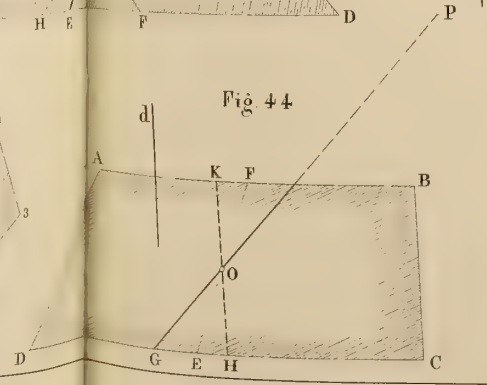


Fig. 45

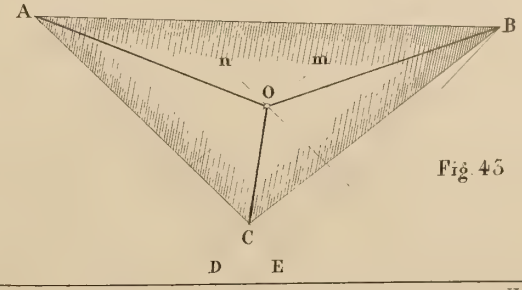


Fig. 59.

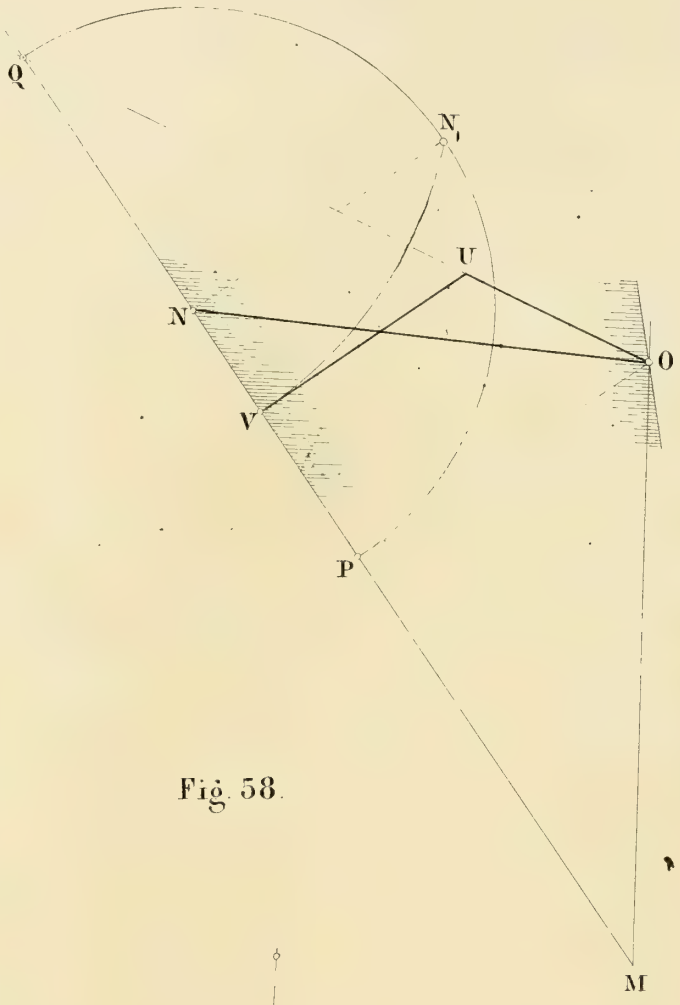


Fig. 58.

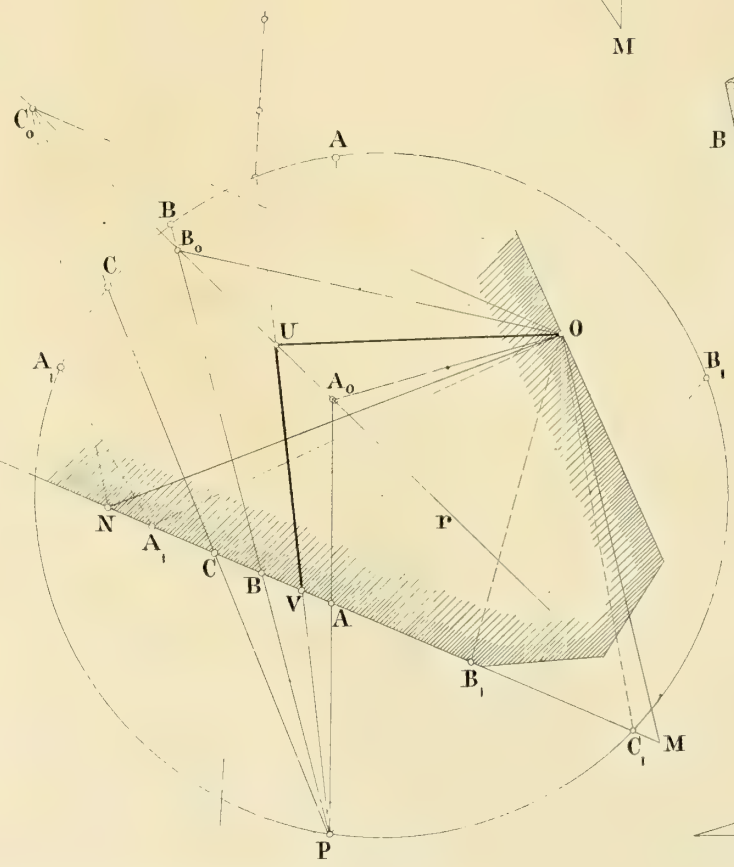


Fig. 51.

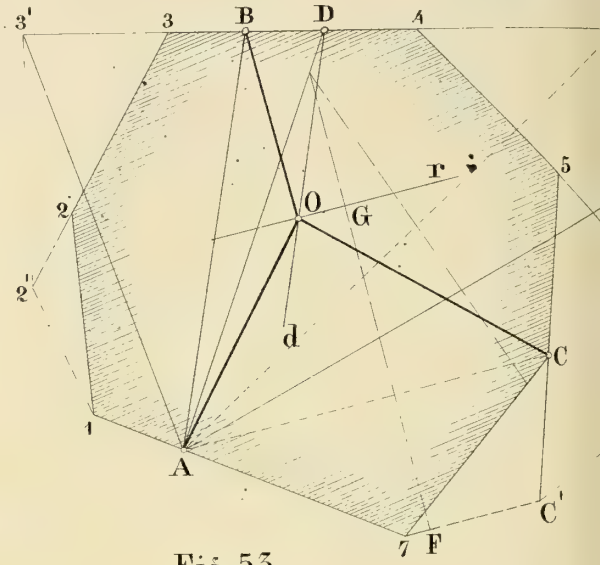
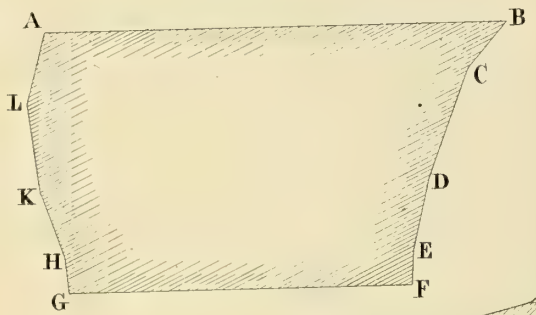


Fig. 53.



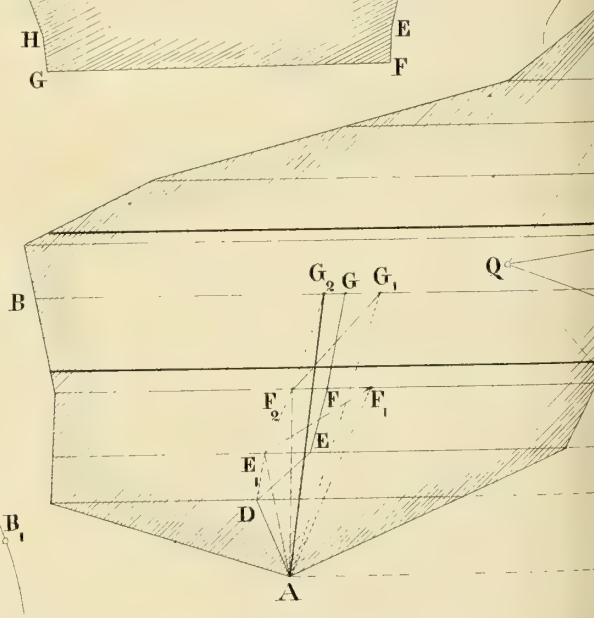
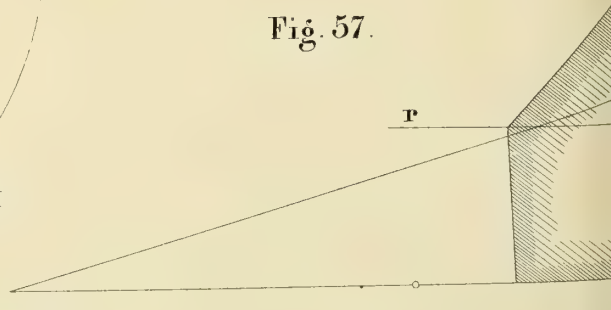


Fig. 57.



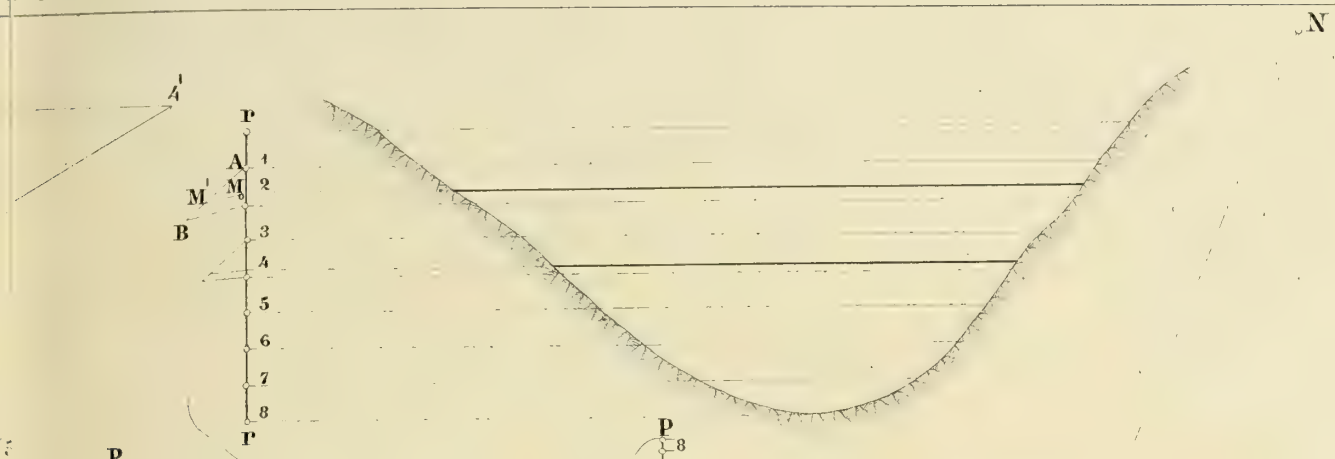


Fig. 55.

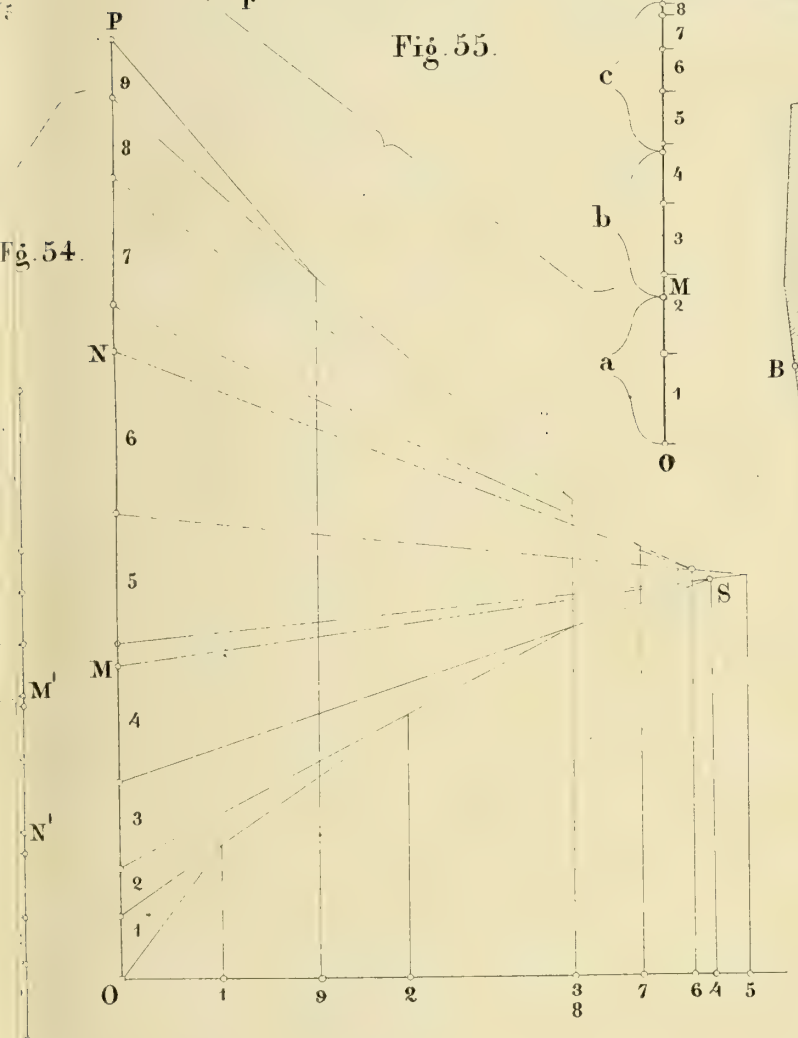


Fig. 54.

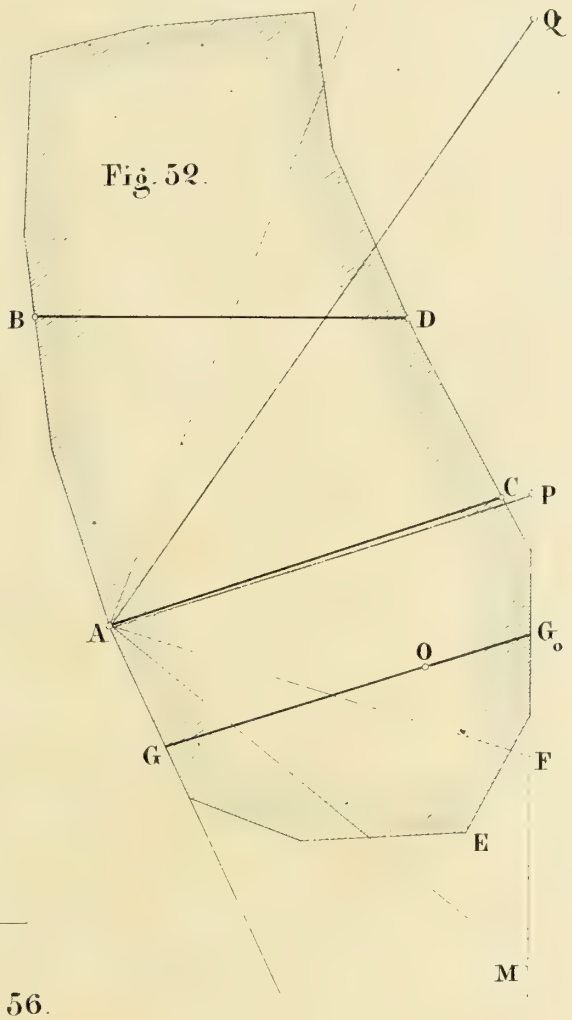
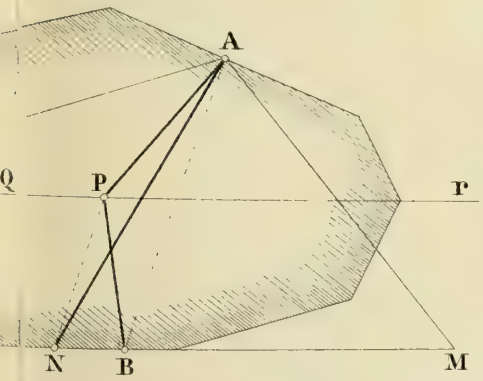


Fig. 52.

Fig. 56.



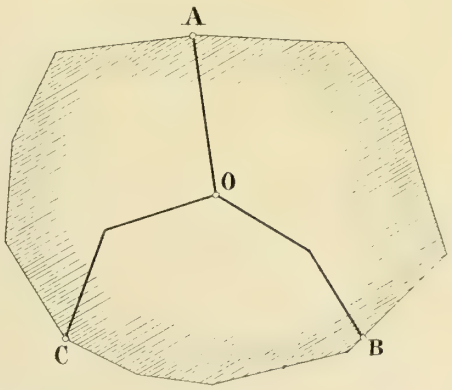


Fig. 59.

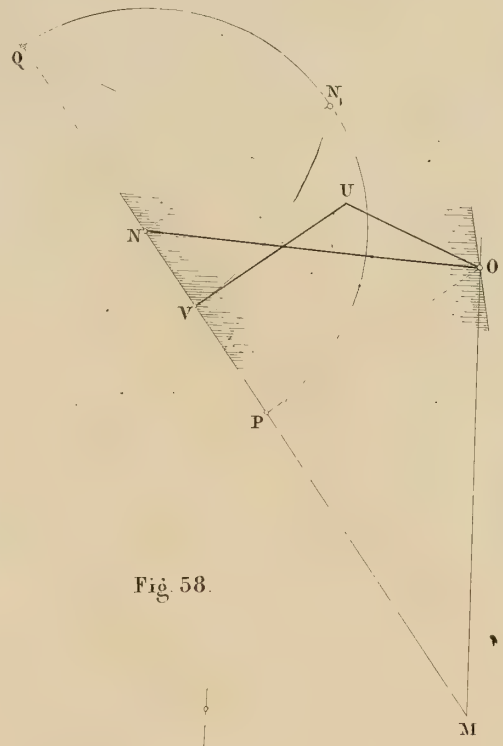


Fig. 58.

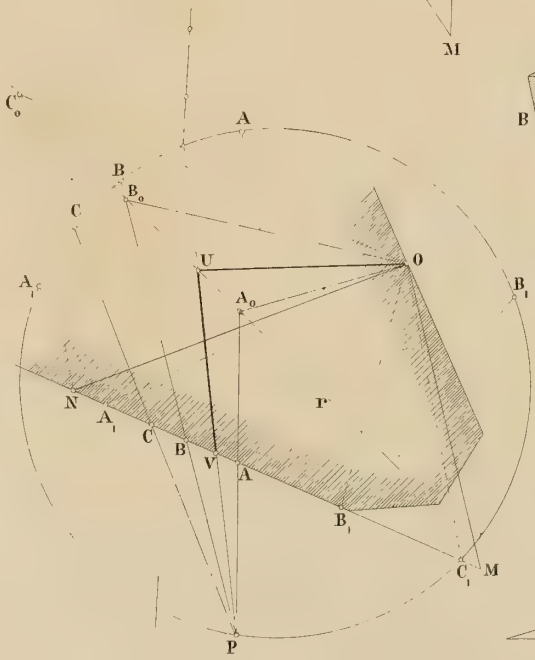


Fig. 51.

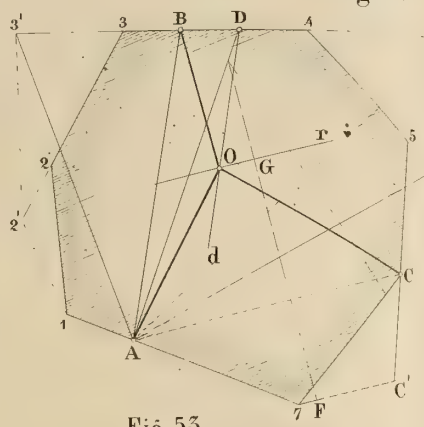


Fig. 53.

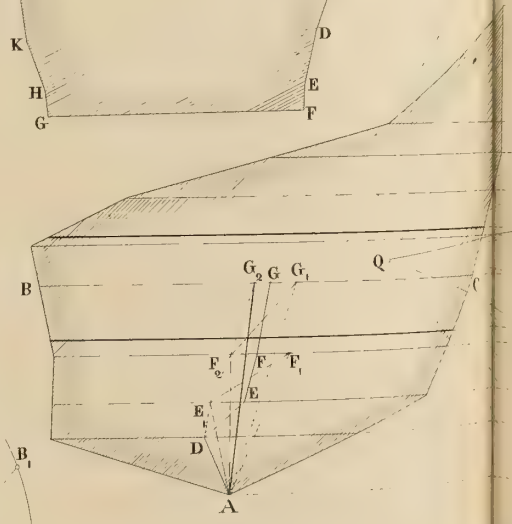
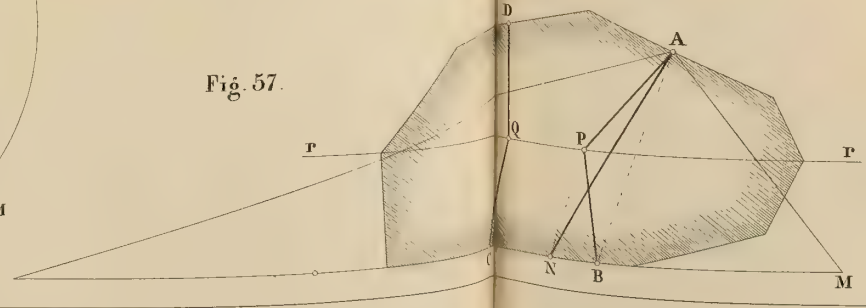


Fig. 57.



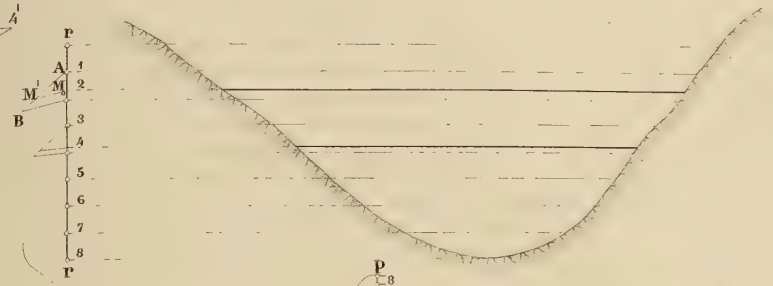


Fig. 55.

Fig. 54

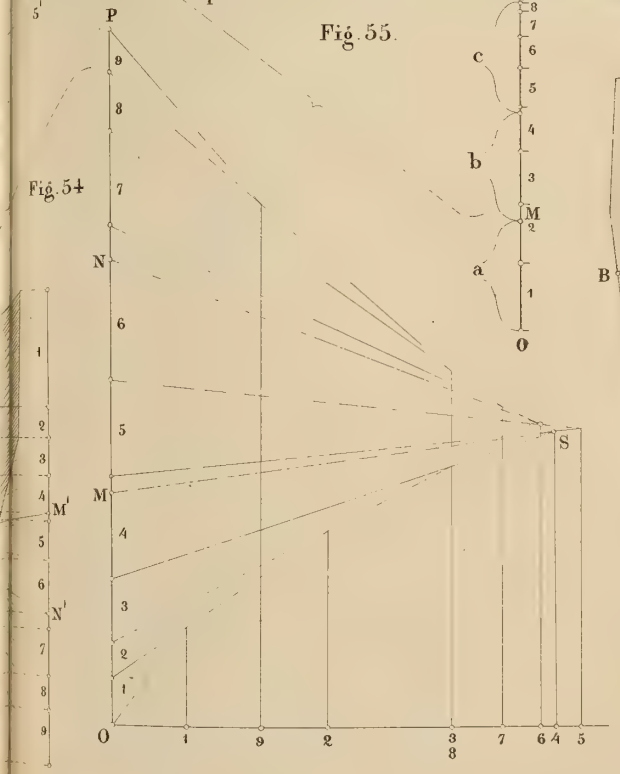


Fig. 52.

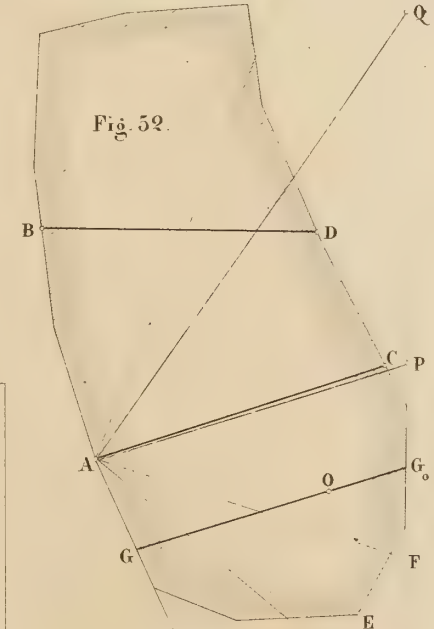
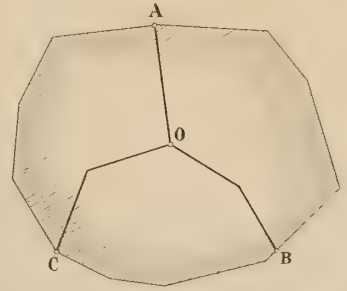


Fig. 56.



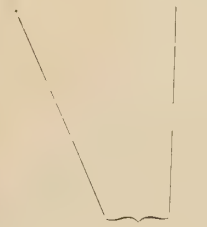


Fig. 60.

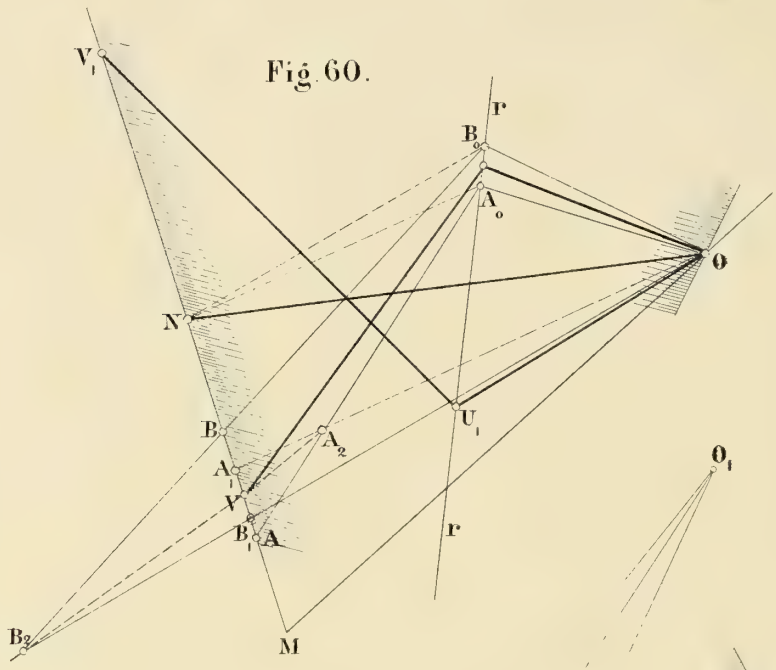
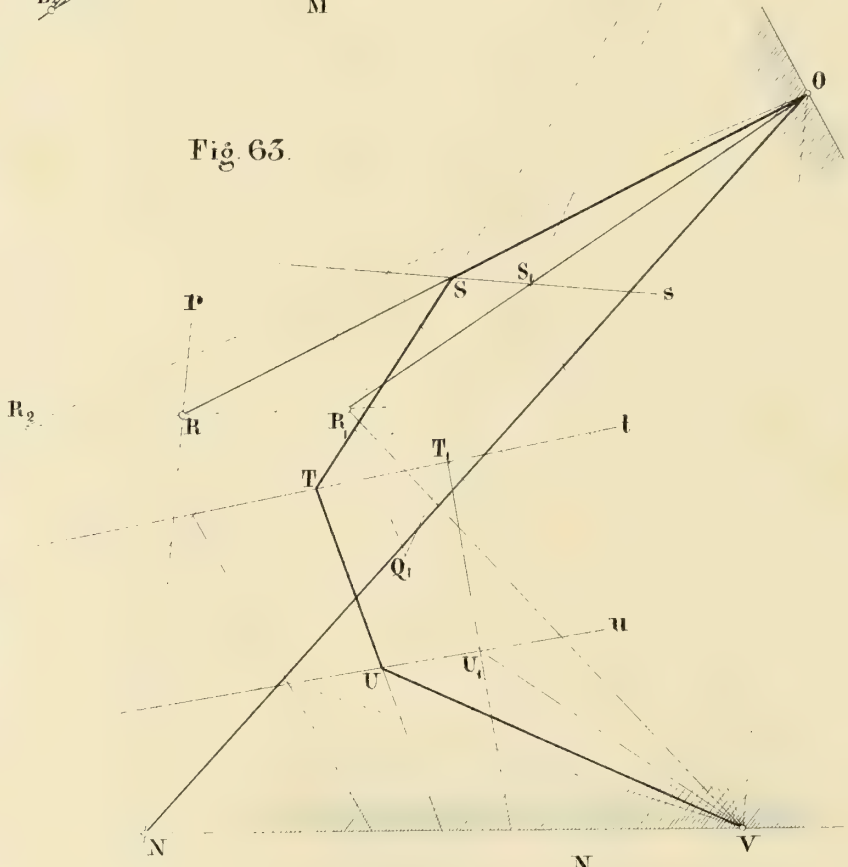


Fig. 42

Fig. 63.



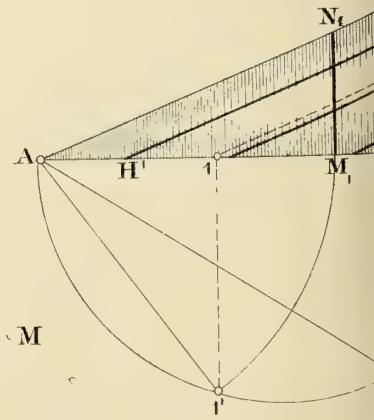
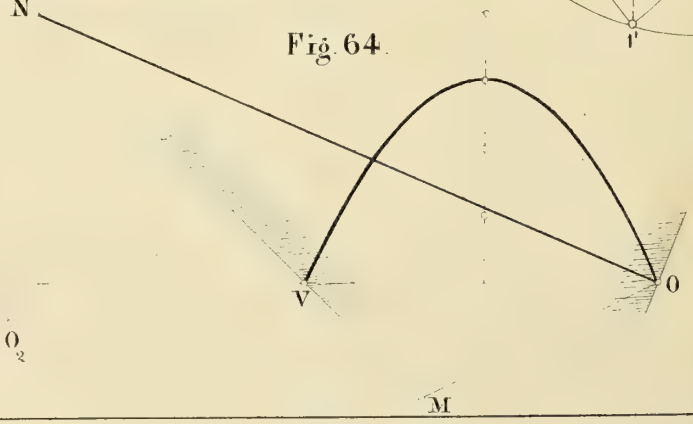
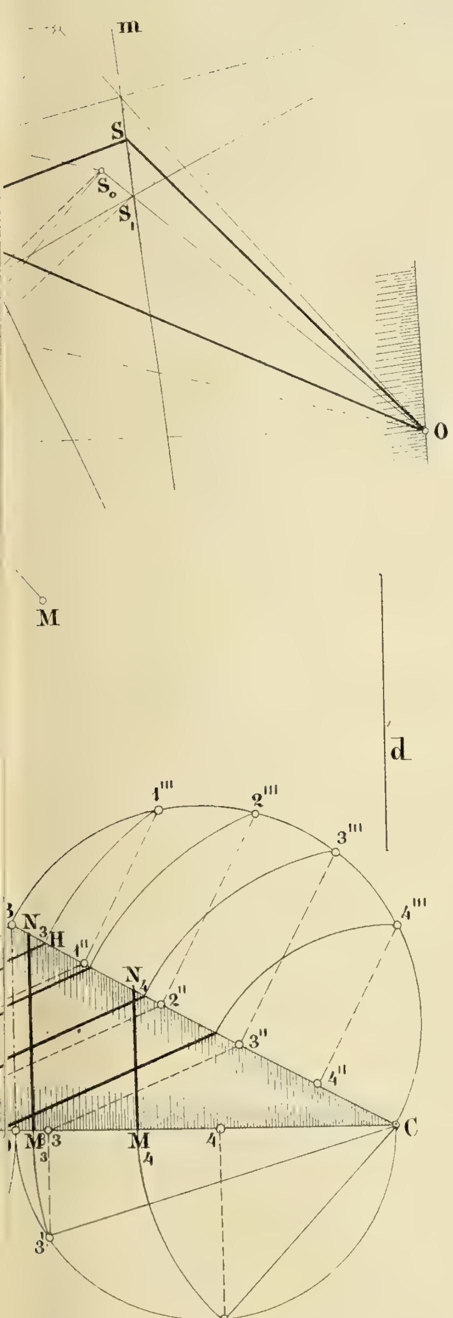


Fig. 64.



62.



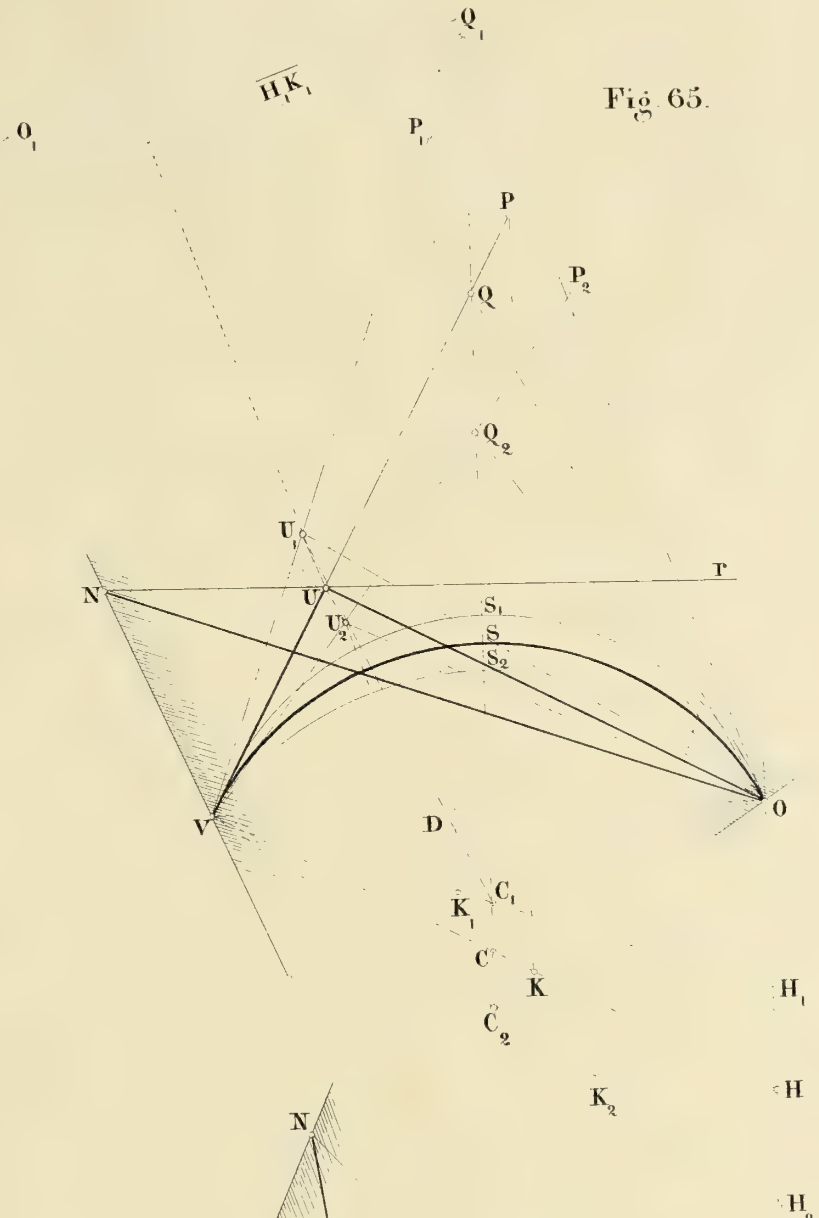


Fig. 65.

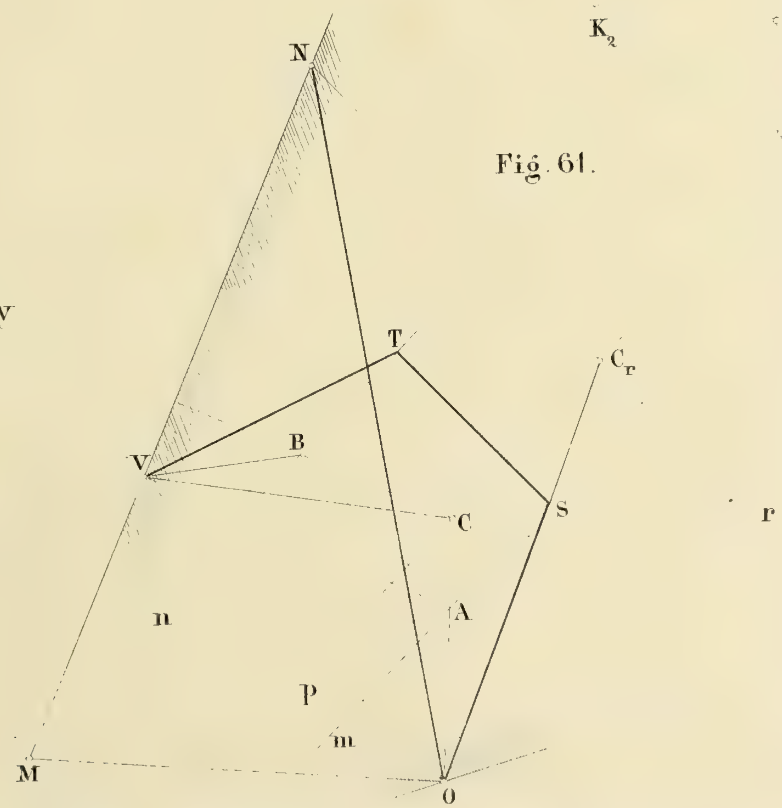


Fig. 61.

Fig. 60.

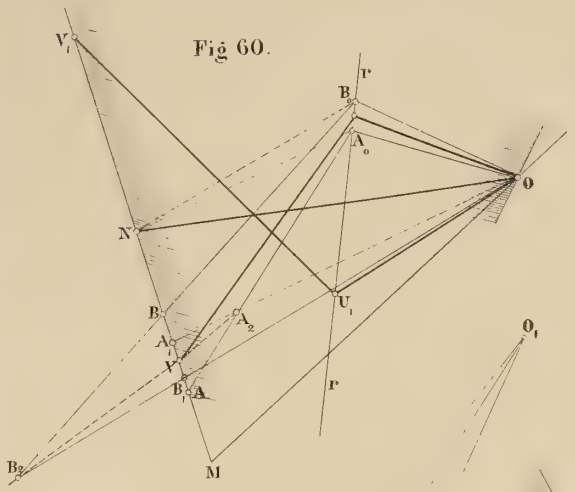


Fig. 62

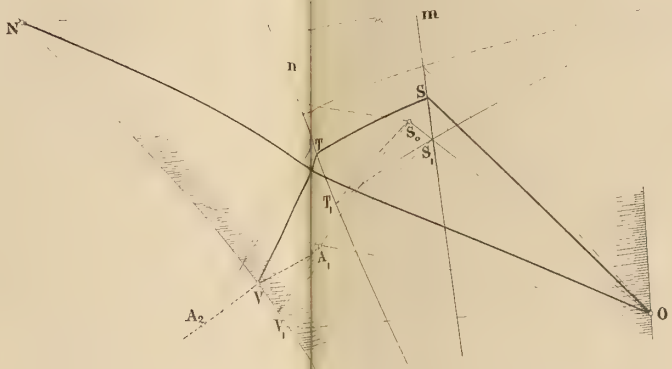


Fig. 63.

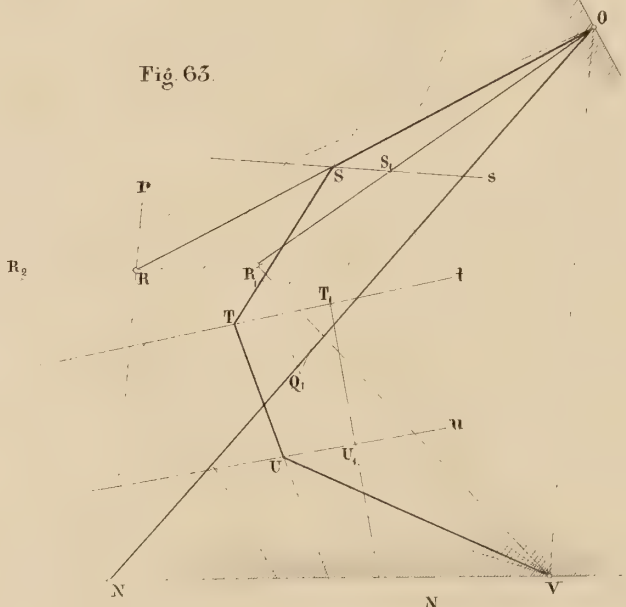


Fig. 42bis

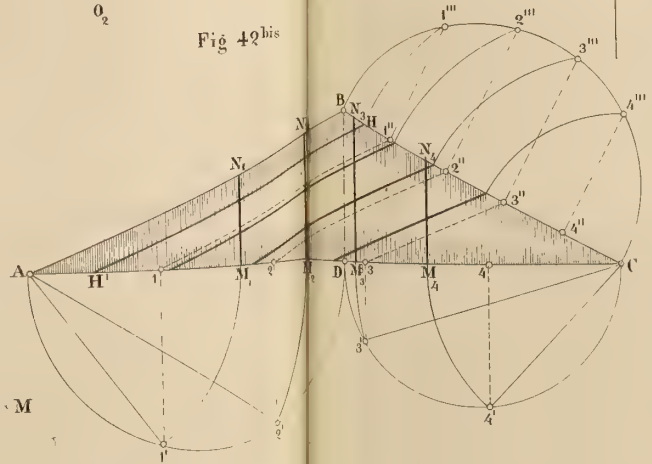


Fig. 64.

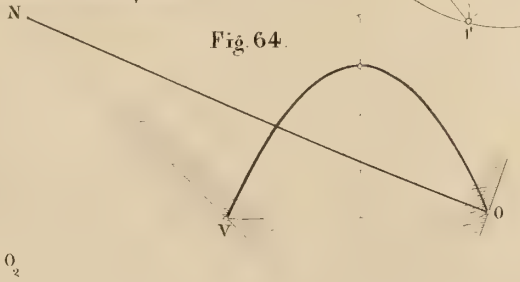


Fig. 65.

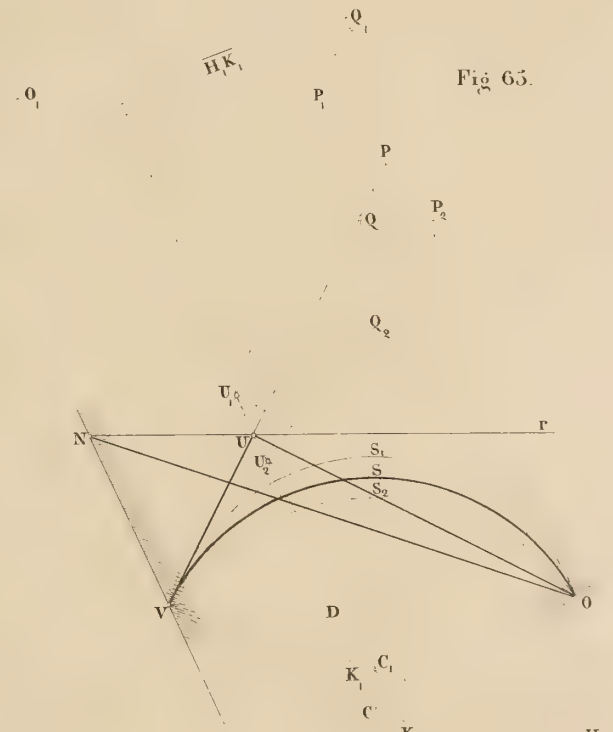


Fig. 61.

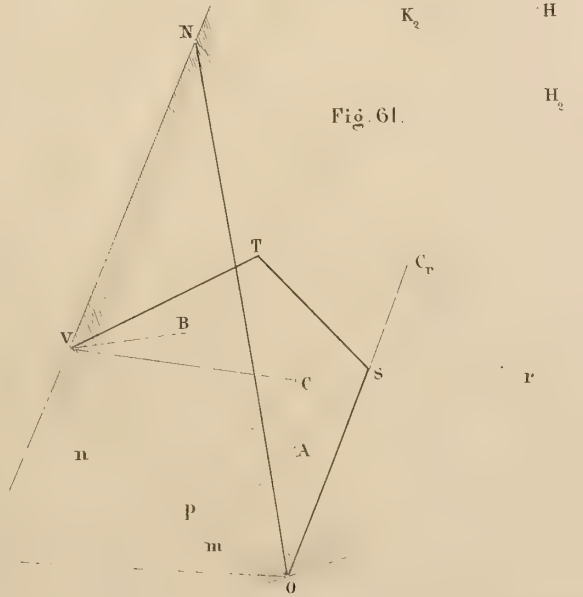
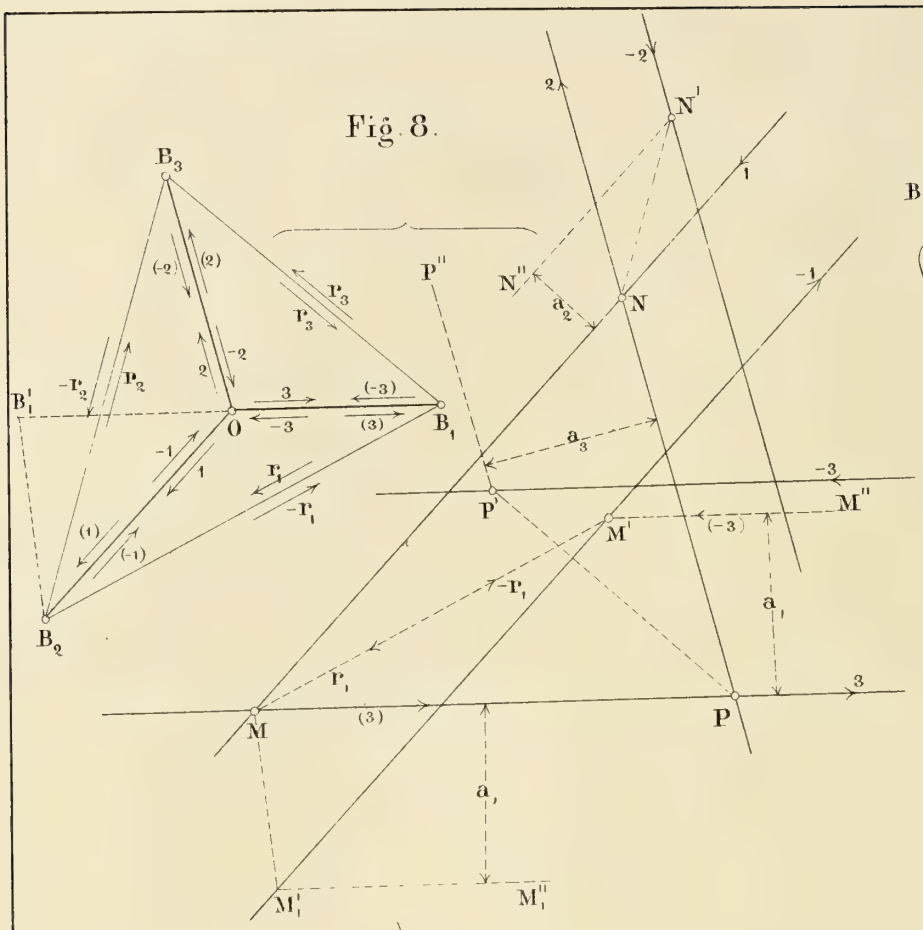


Fig. 8.



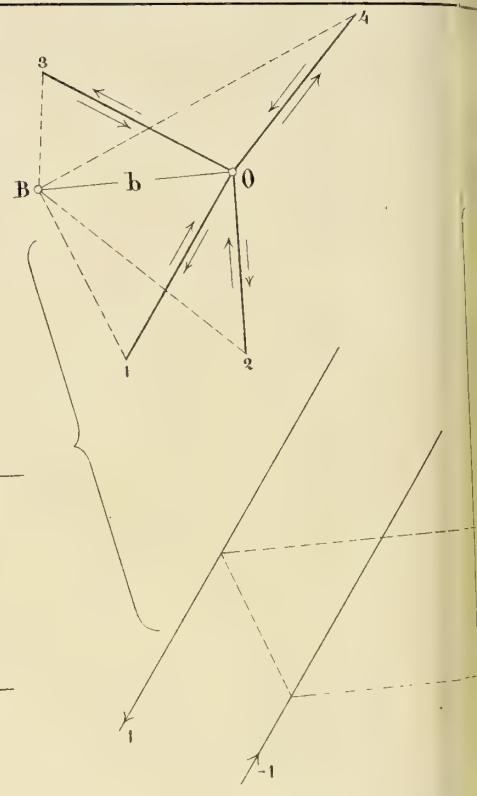


Fig. 7.

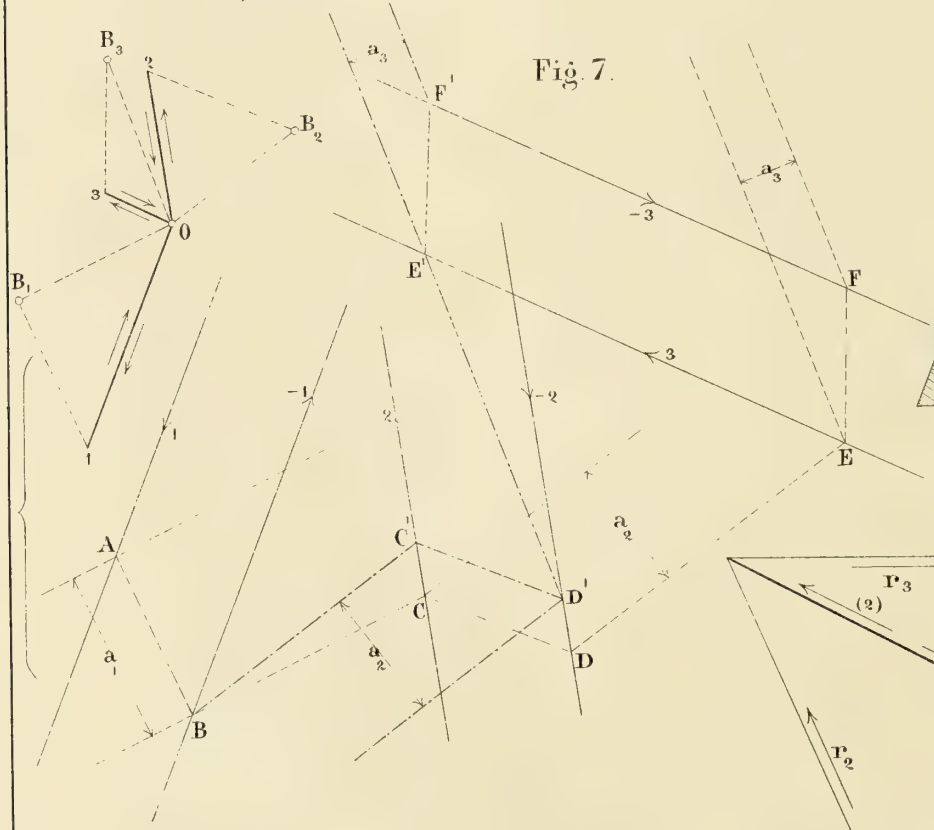


Fig. 9.

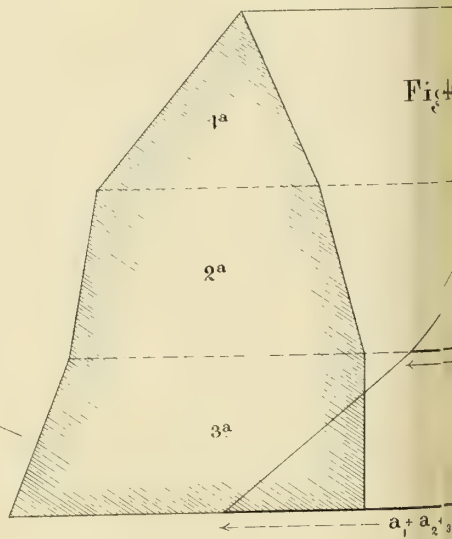


Fig. 10.

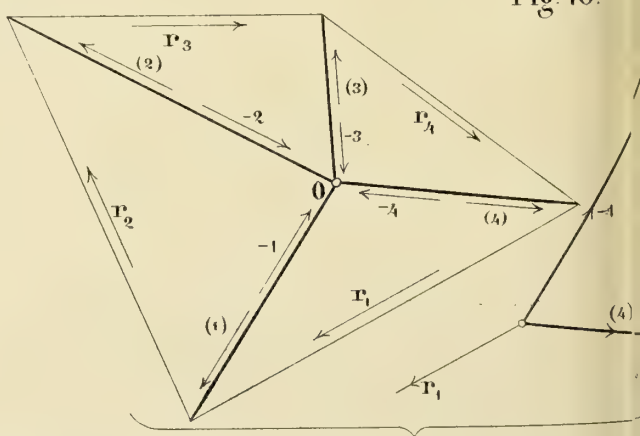


Fig. 1.

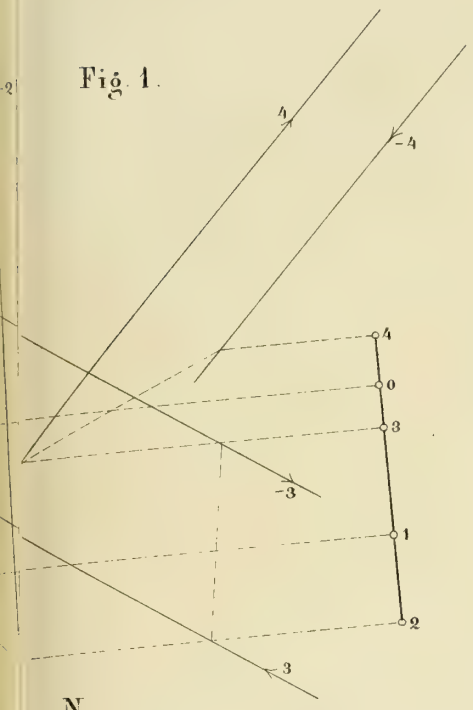


Fig. 2.

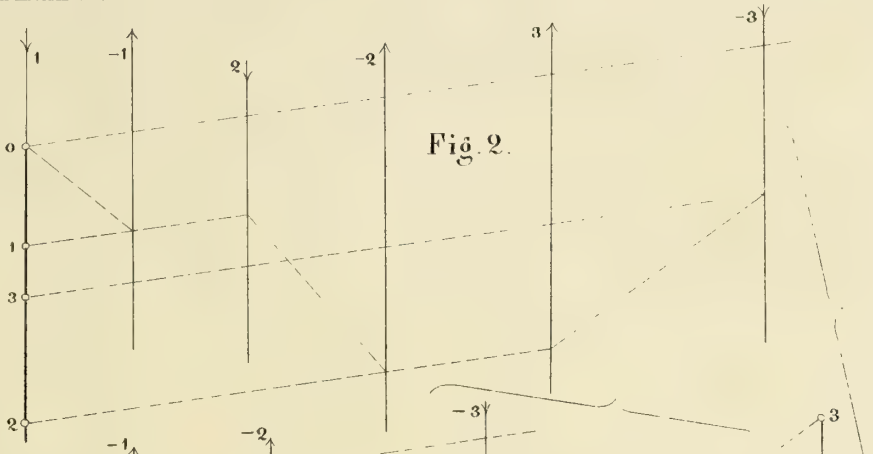


Fig. 3.

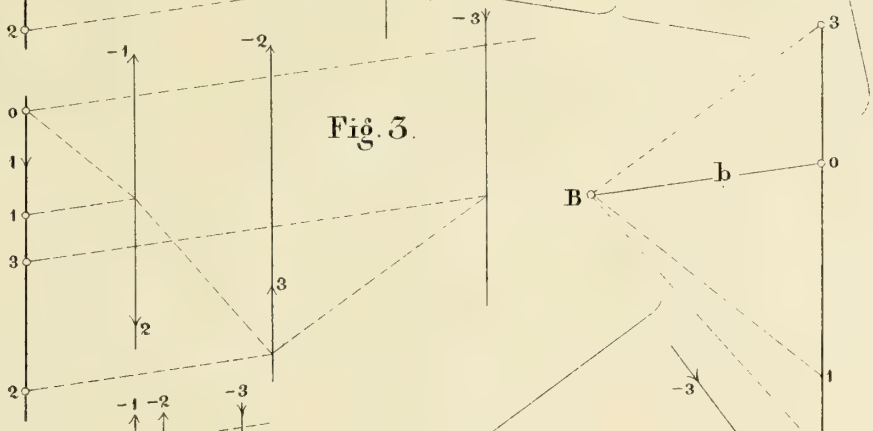
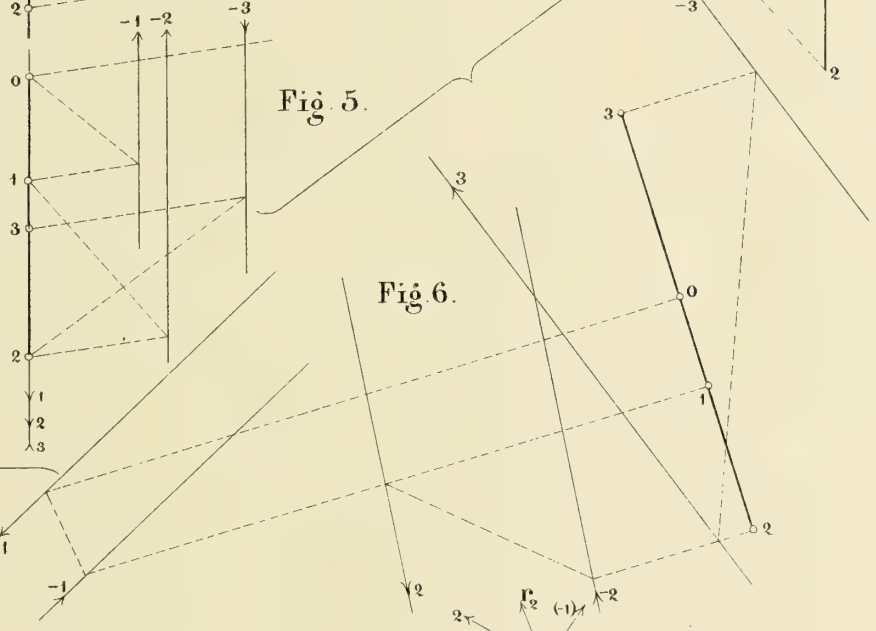


Fig. 5.



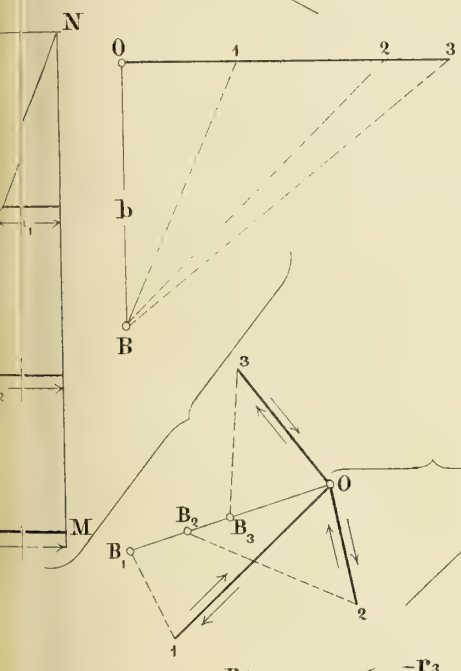


Fig. 6.

Fig. 9.

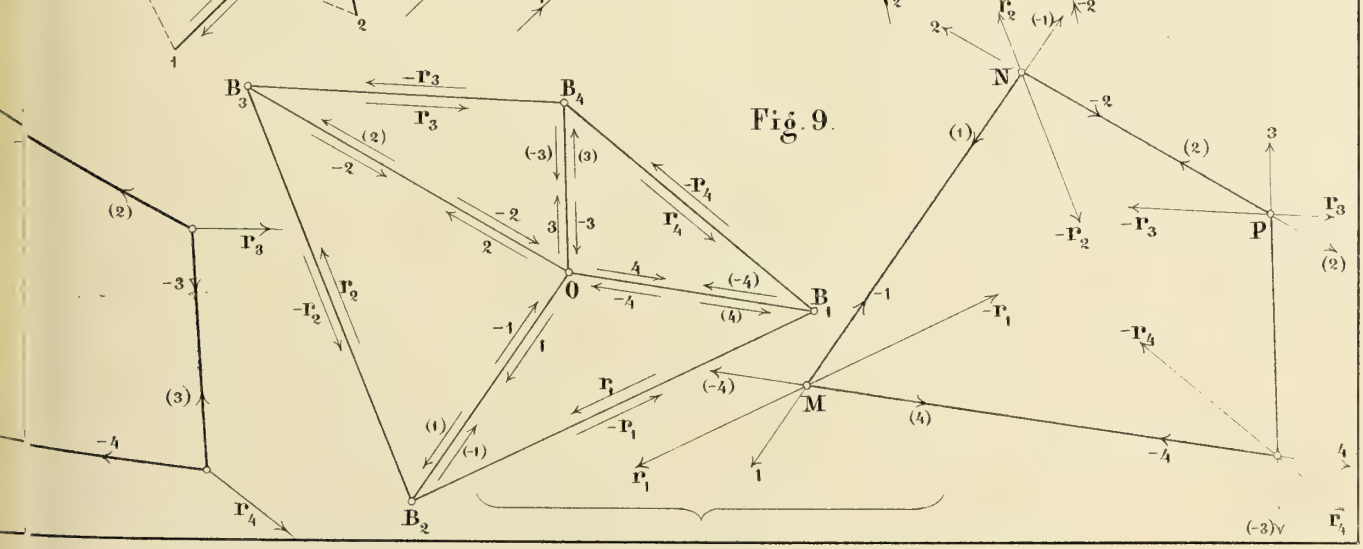
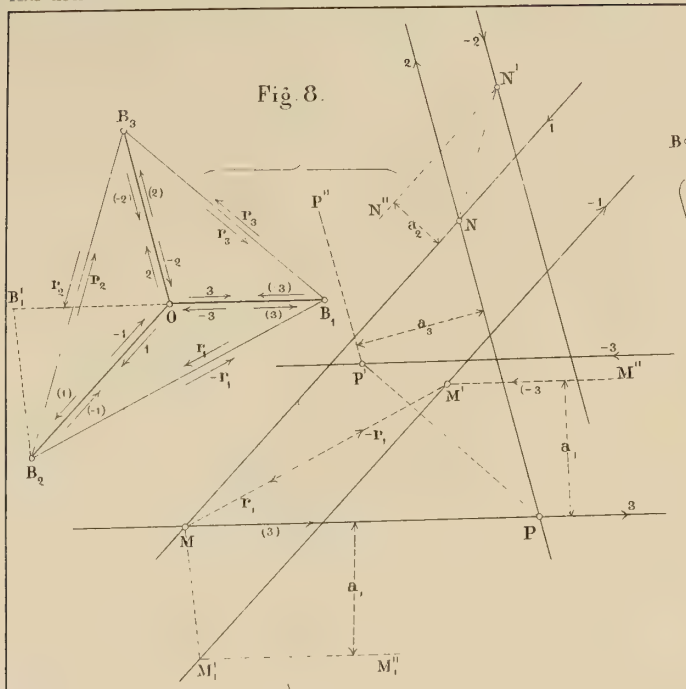


Fig. 8.



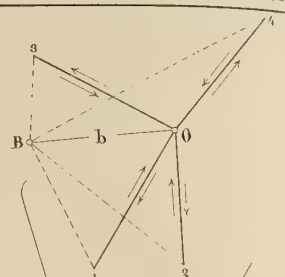


Fig. 1.

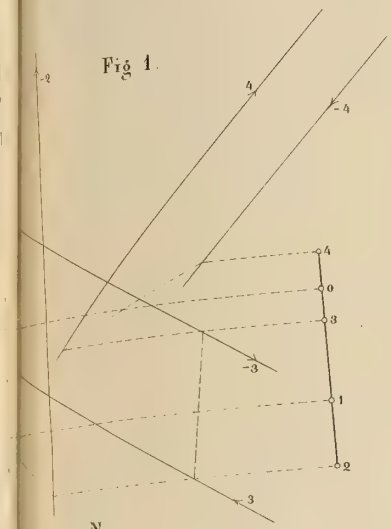


Fig. 2.

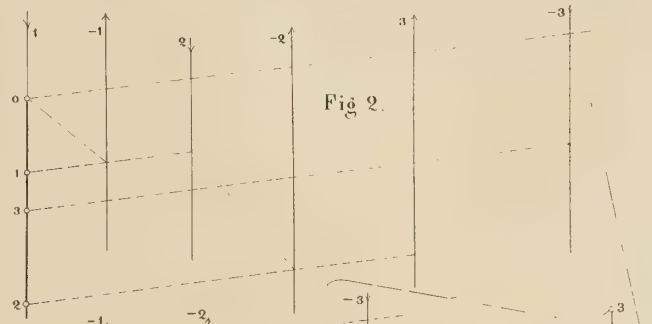


Fig. 3.

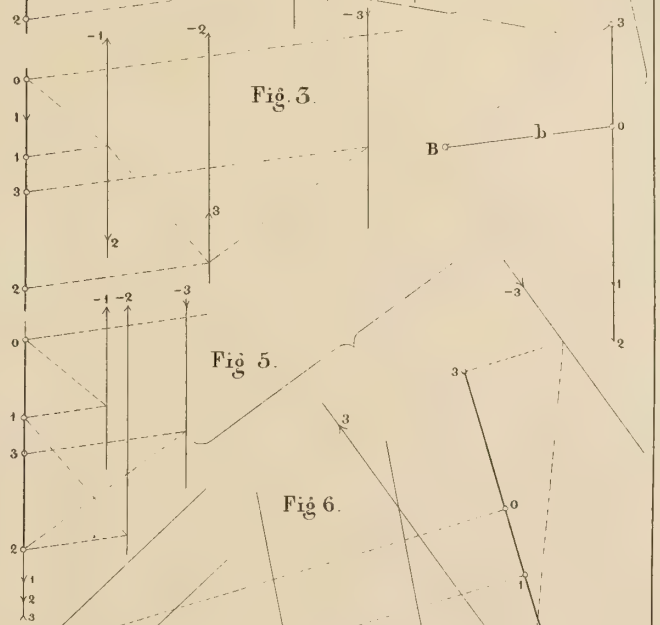


Fig. 4.

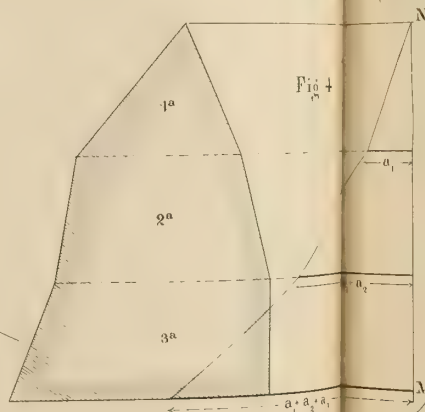


Fig. 5.

Fig. 6.

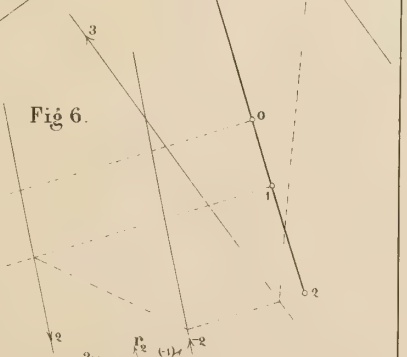


Fig. 7.

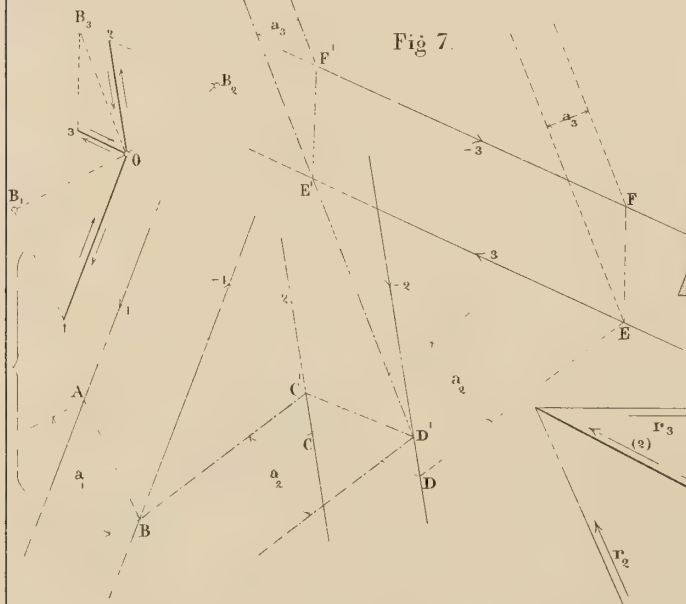


Fig. 10

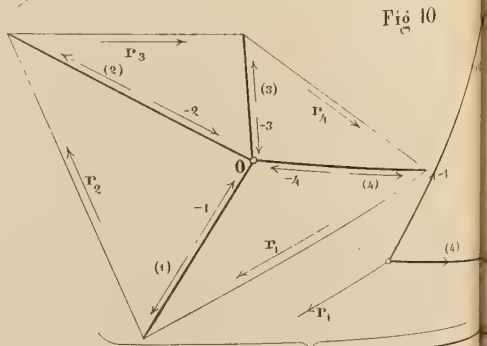
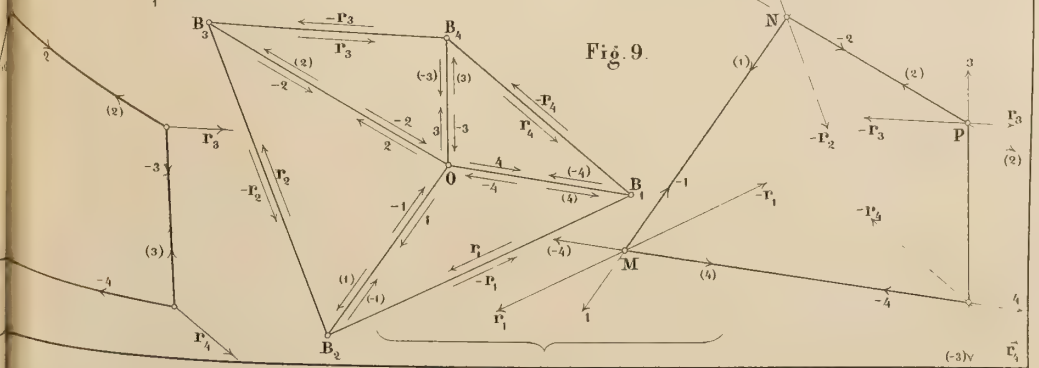


Fig. 9.



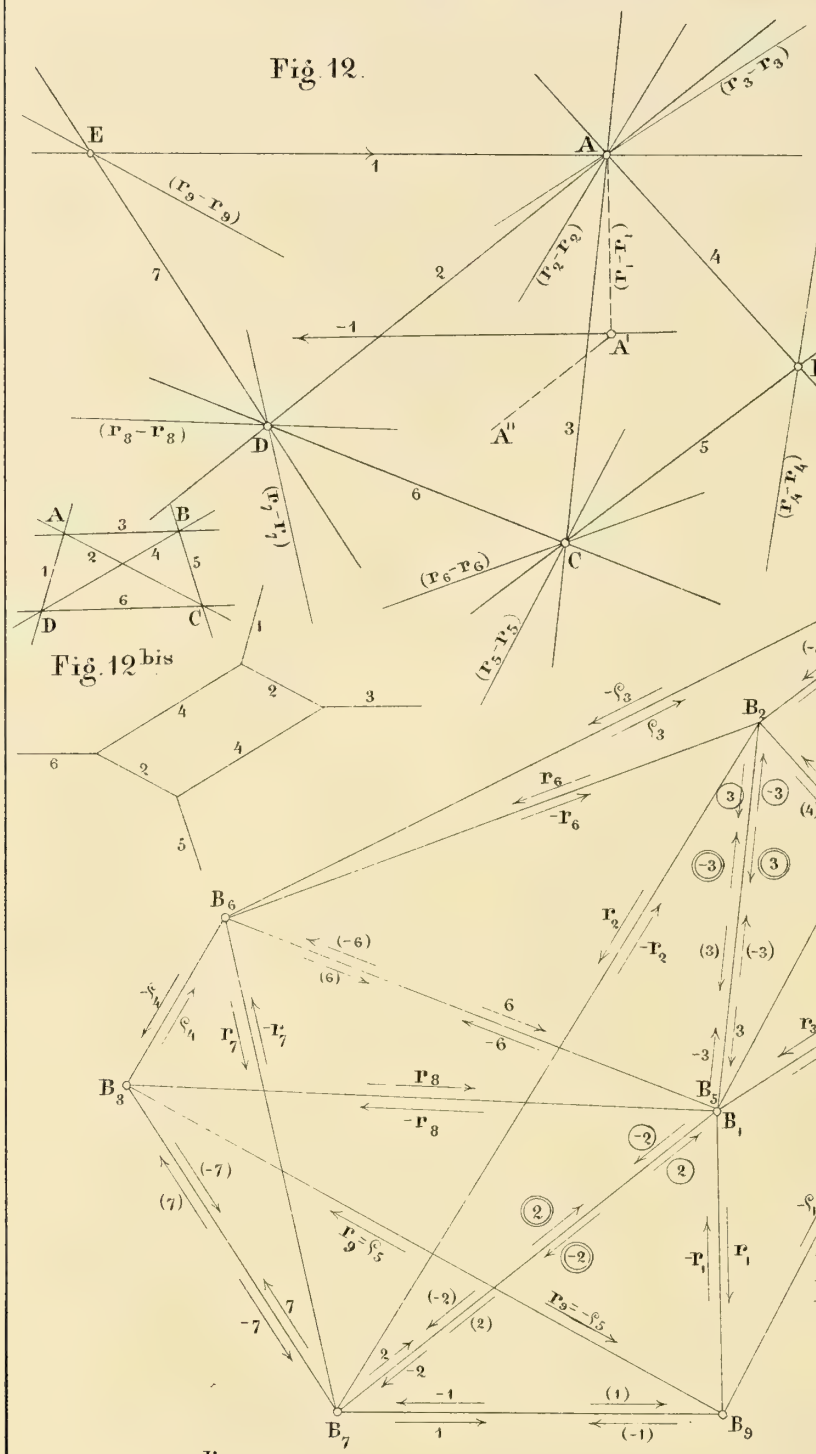


Fig. 12.
E
A
A'
A''
B
C
D
1
2
3
4
5
6
7
-1
$(r_9 - r_9)$
$(r_8 - r_8)$
$(r_7 - r_7)$
$(r_6 - r_6)$
$(r_5 - r_5)$
$(r_4 - r_4)$
$(r_3 - r_3)$
$(r_2 - r_2)$
$(r_1 - r_1)$

Fig. 12bis
A
B
C
D
1
2
3
4
5
6

B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
B_6
B_7
B_8
B_9
r_1
r_2
r_3
$r_4 = \varrho_2$
r_5
r_6
r_7
r_8
$r_9 = \varrho_5$
$-\varrho_3$
ϱ_3
ϱ_4
$-\varrho_4$
$-\varrho_5$
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(-1)
(-2)
(-3)
(-4)
(-5)
(-6)
(-7)

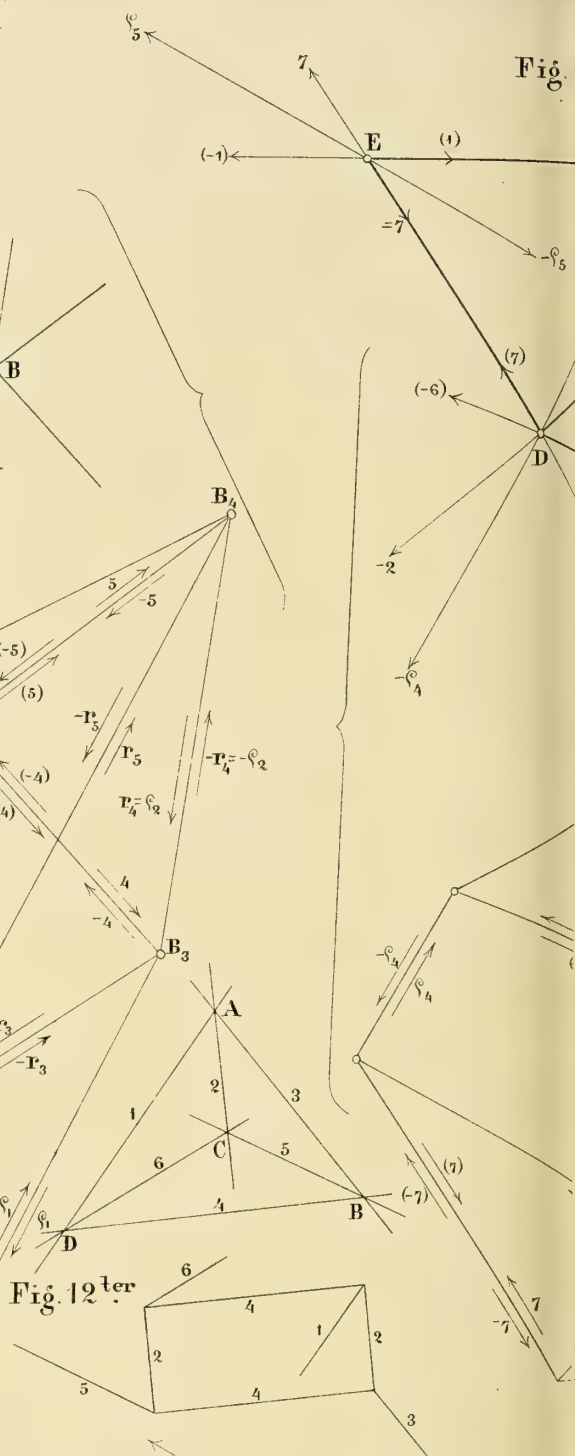


Fig.
E
D
ϱ_5
$-\varrho_5$
ϱ_4
$-\varrho_4$
1
2
3
4
5
6
7
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(-1)
(-2)
(-3)
(-4)
(-5)
(-6)
(-7)

Fig. 12ter
A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
ϱ_1
$-\varrho_1$
(7)
(-7)

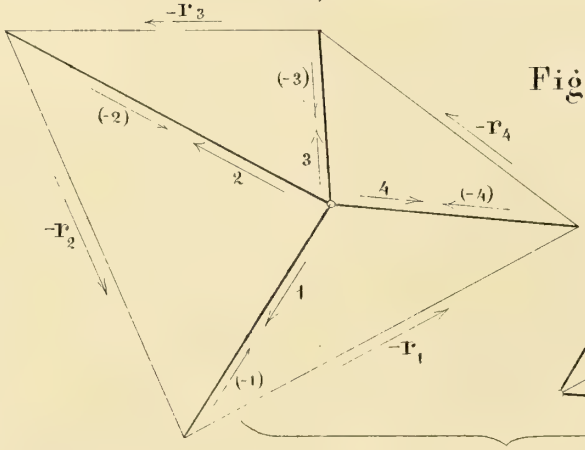


Fig. 11.
$-r_1$
$-r_2$
$-r_3$
$-r_4$
1
2
3
4
(-1)
(-2)
(-3)
(-4)

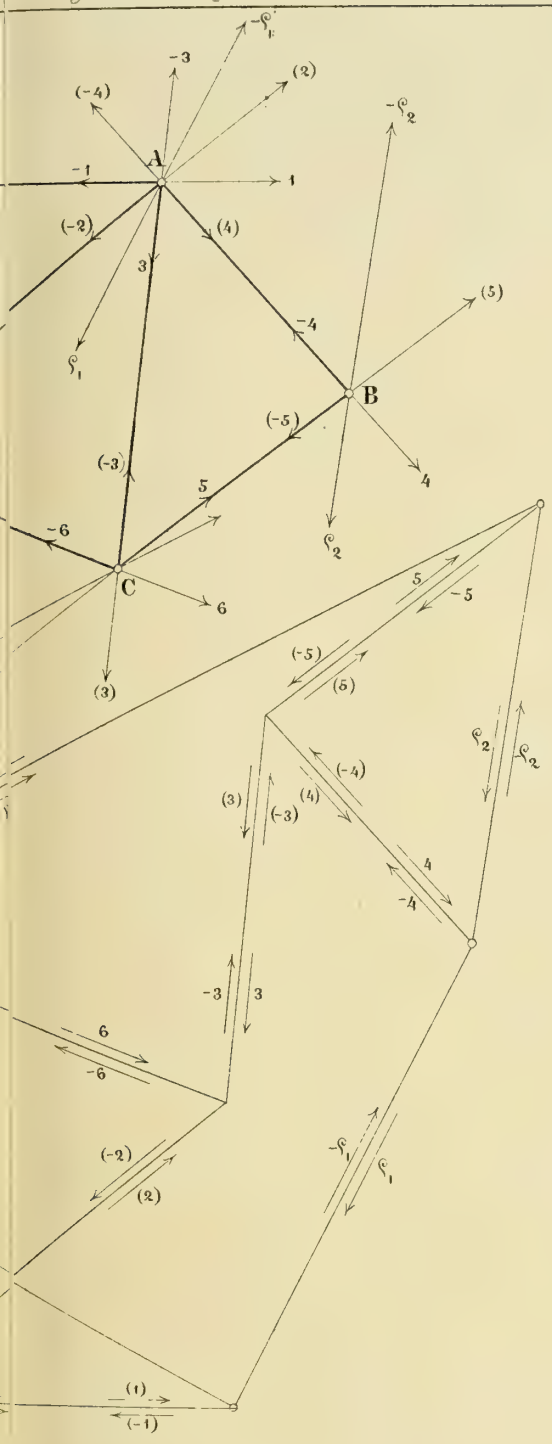


Fig. 14

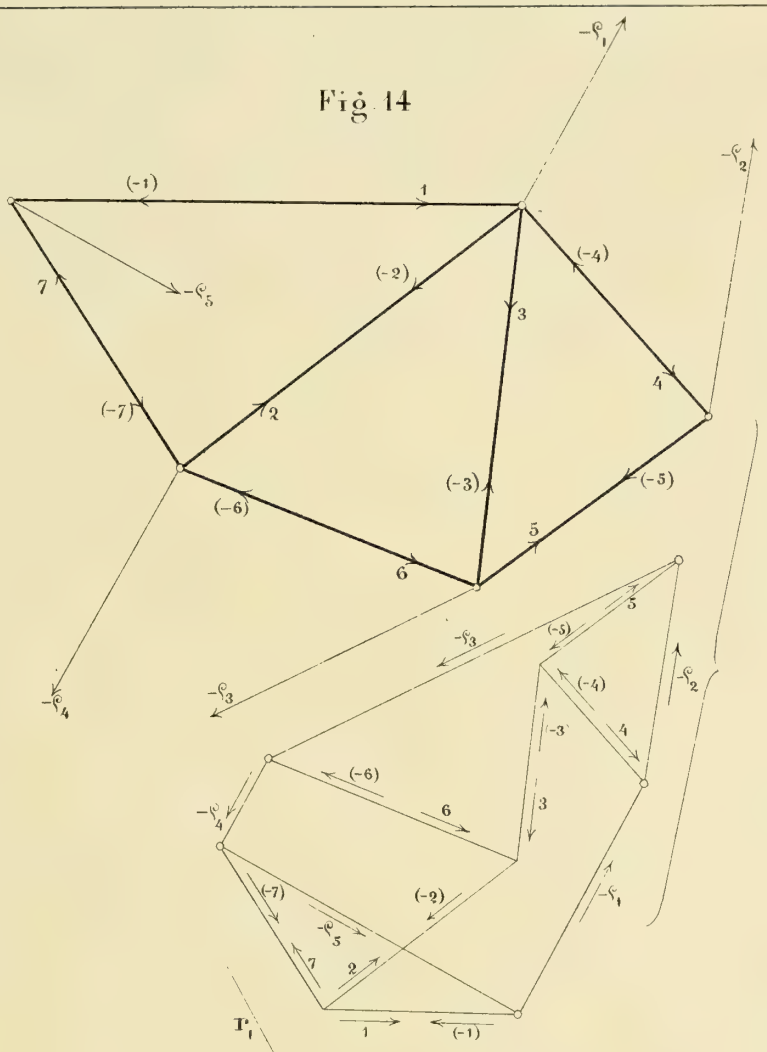


Fig. 15.

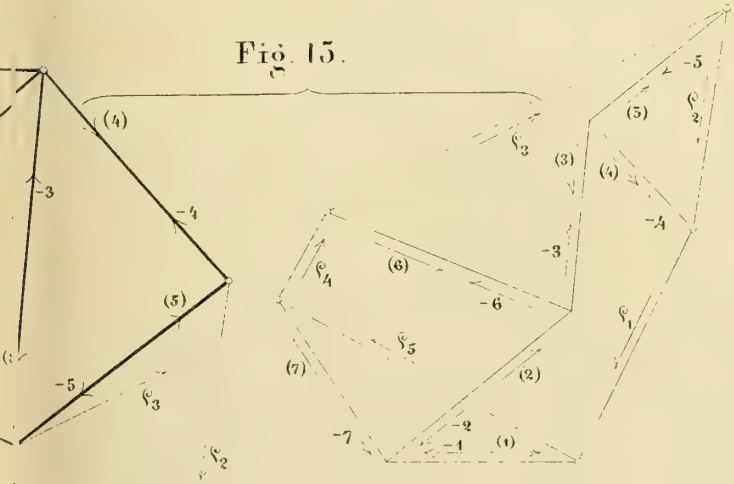
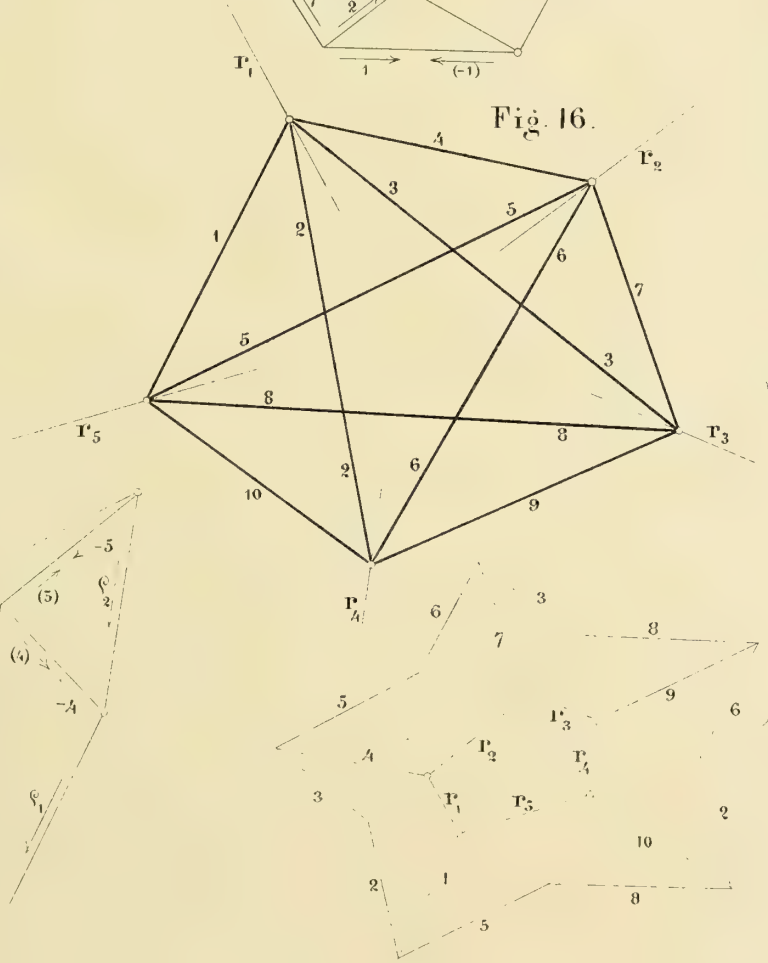


Fig. 16.



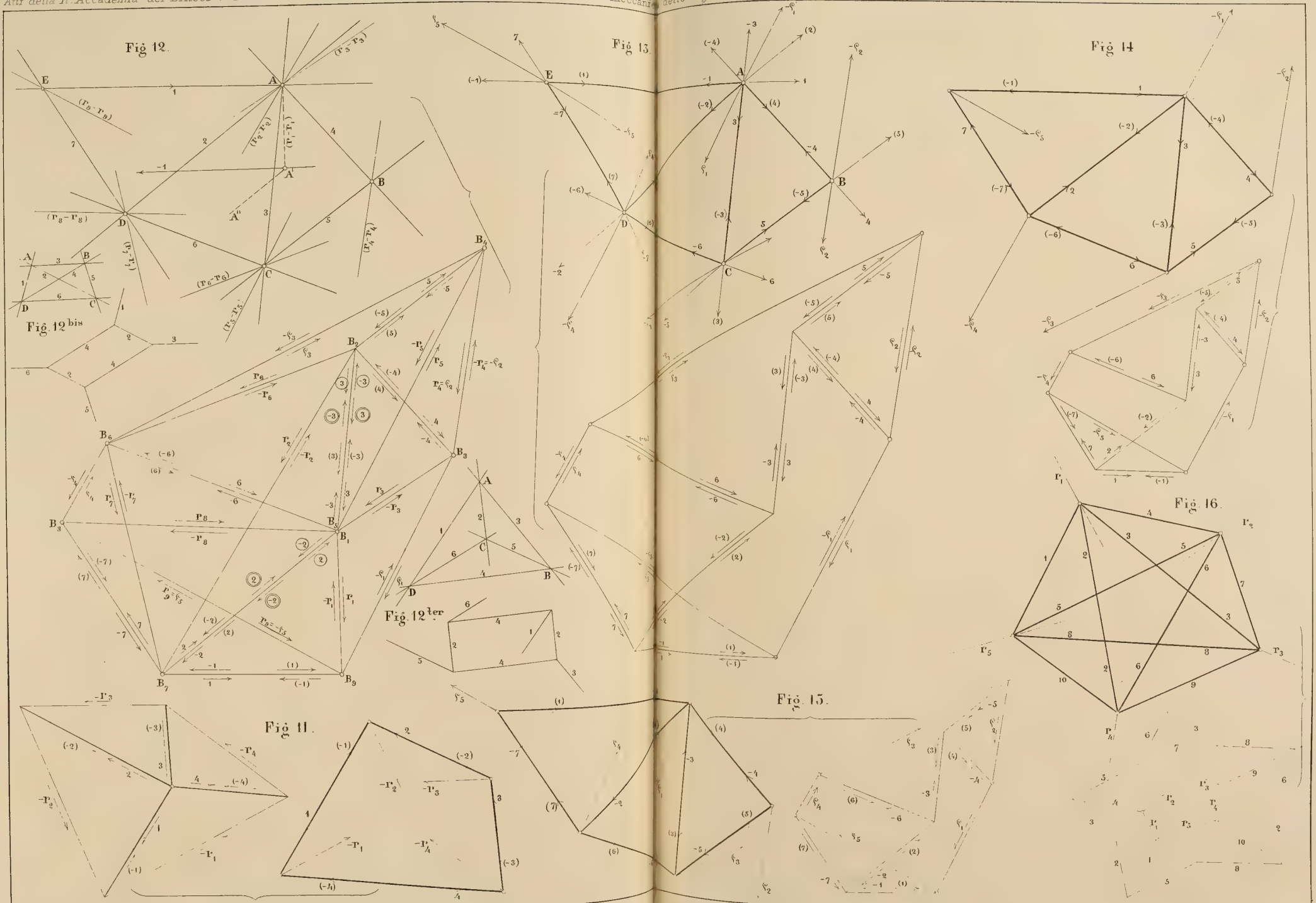
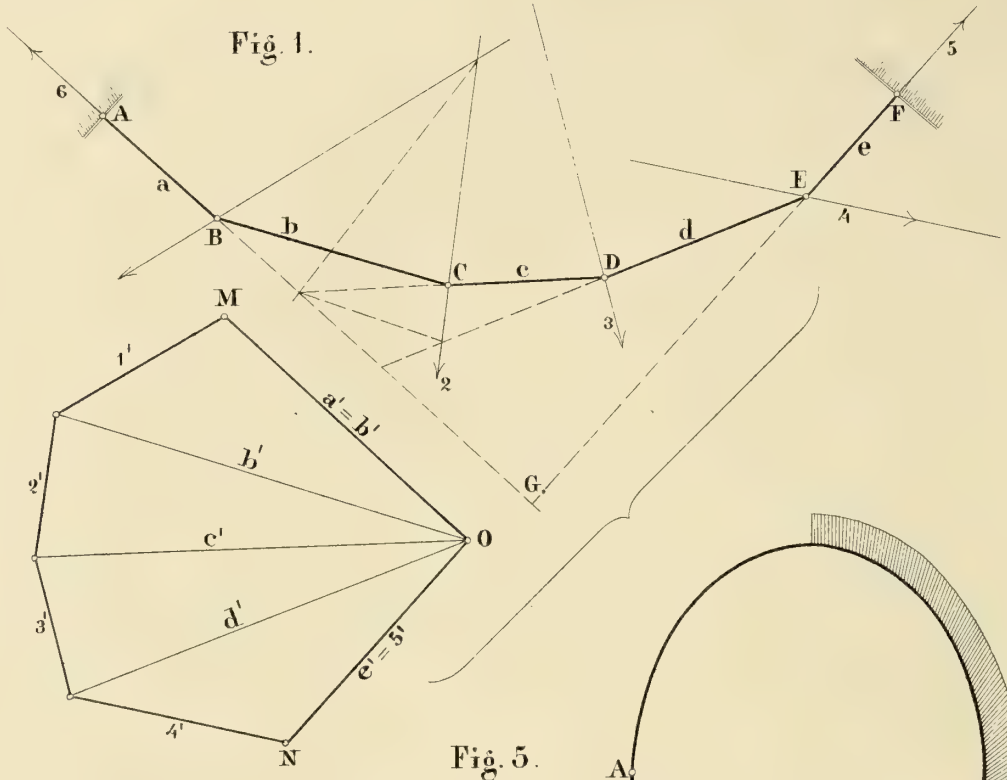


Fig. 12.
Fig. 12bis
Fig. 12ter
Fig. 13.
Fig. 14
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 11.

Fig. 1.



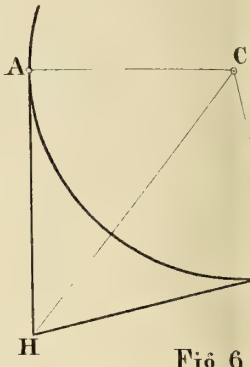


Fig. 6.

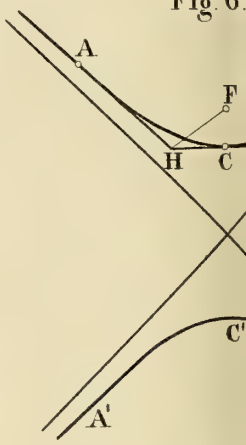
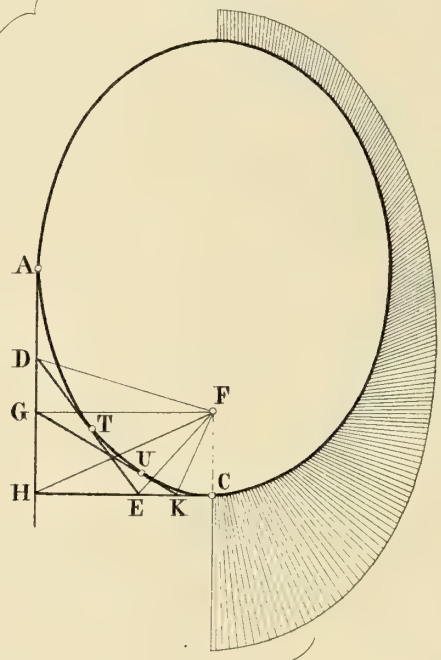
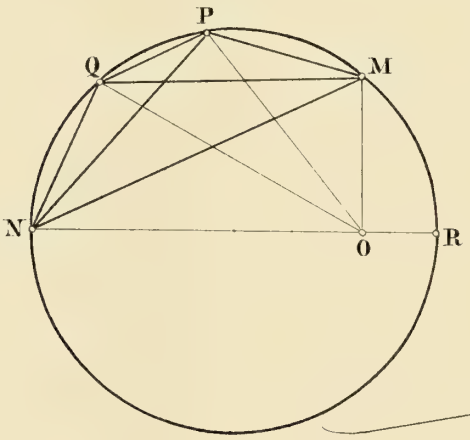


Fig. 5.





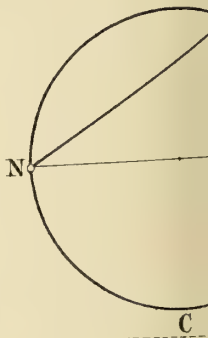
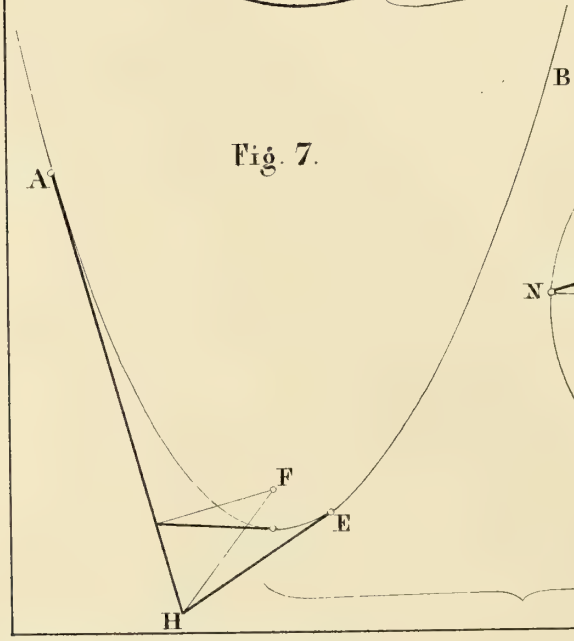
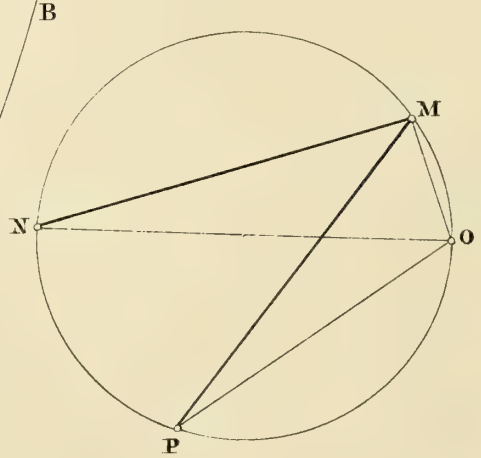
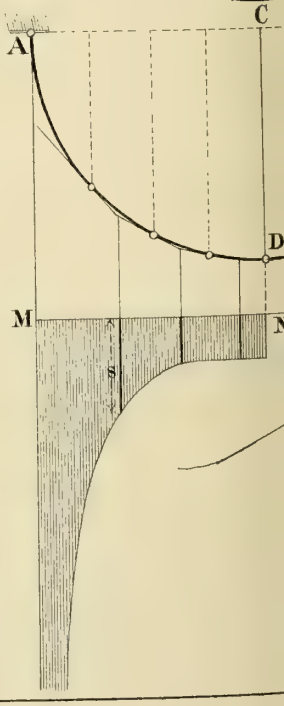


Fig. 7.







Lit. G. Cleman. Roma. Via Cesari 37.

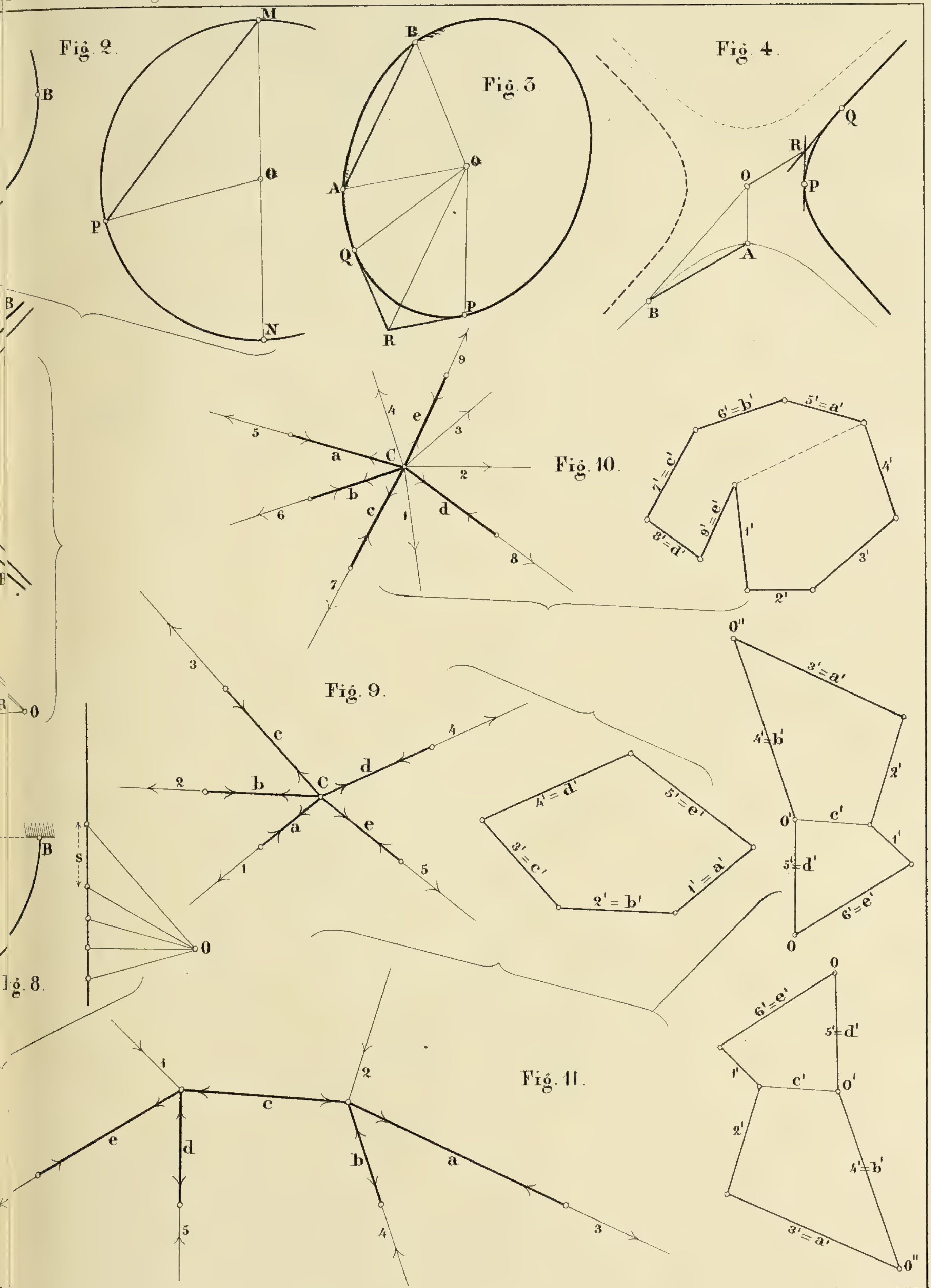


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
M
N
P
O
B
A
Q
R
C
6' = b'
5' = a'
7' = c'
4'
8' = d'
9' = e'
1'
3'
2'
4' = d'
5' = e'
3' = c'
1' = a'
2' = b'
0''
3' = a'
4' = b'
2'
0'
c'
1'
5' = d'
6' = e'
0

Fig. 1.

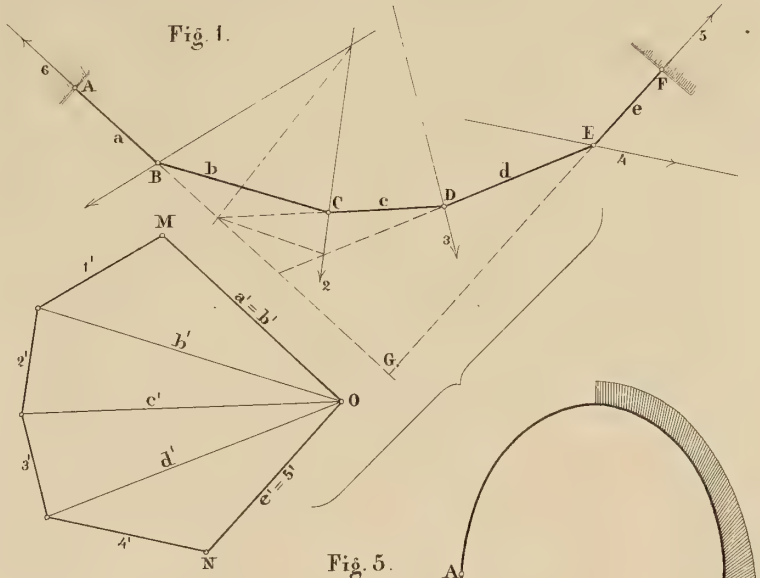
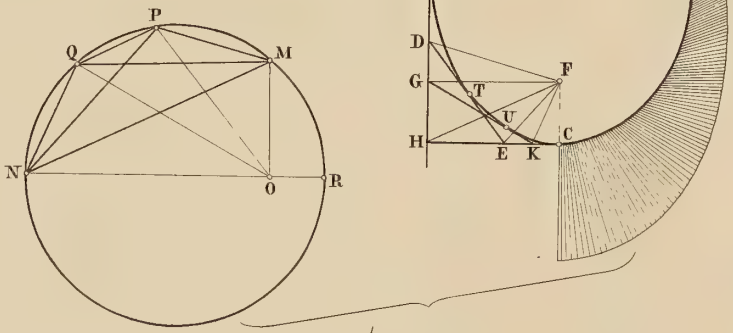


Fig. 5.



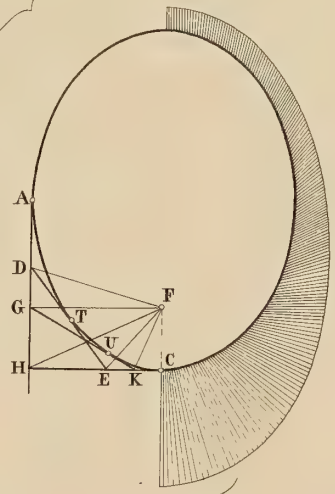
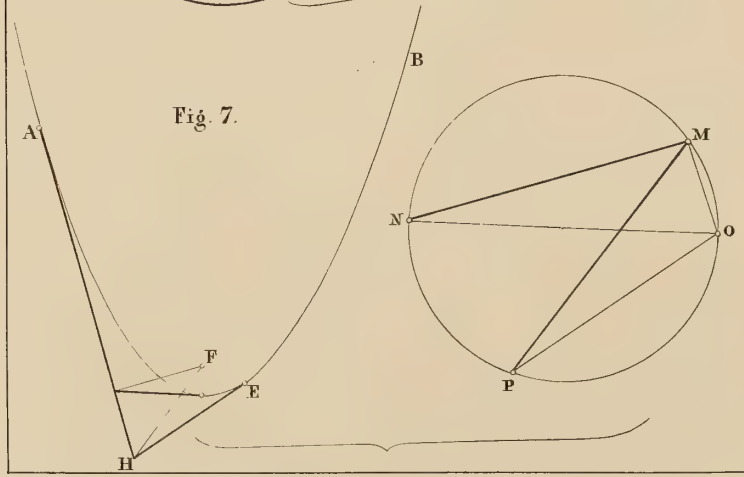


Fig. 7.



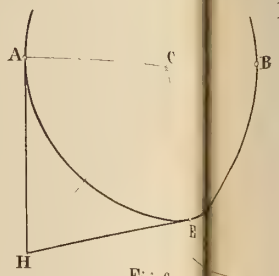
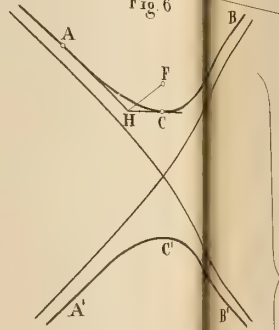


Fig. 6



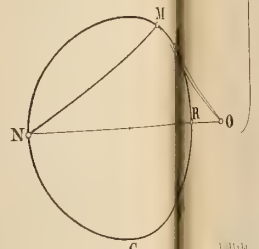


Fig. 8.

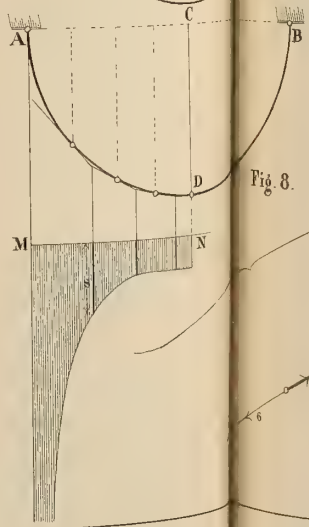


Fig. 2

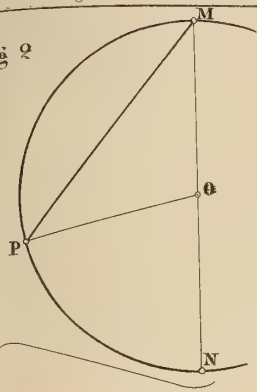


Fig. 3

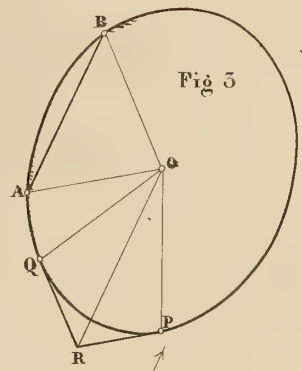


Fig. 4.

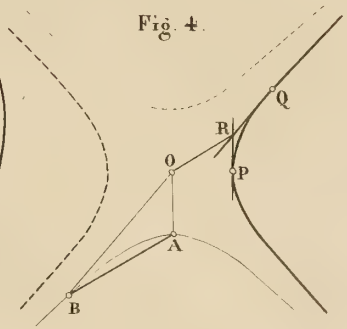
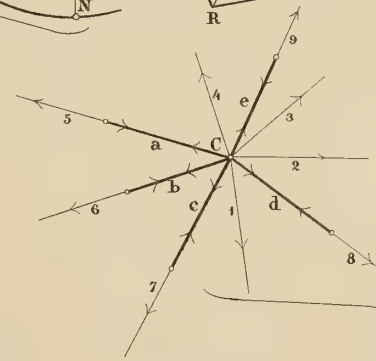


Fig. 10.



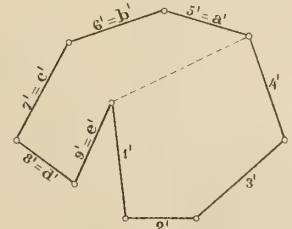
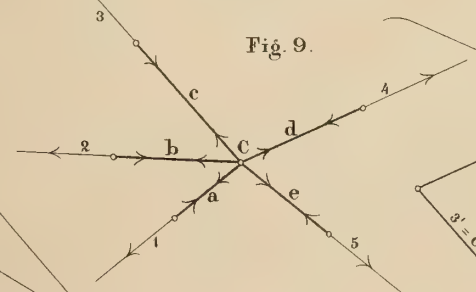
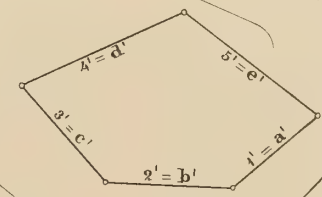


Fig. 9.





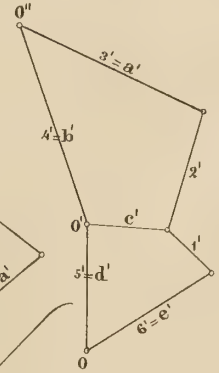
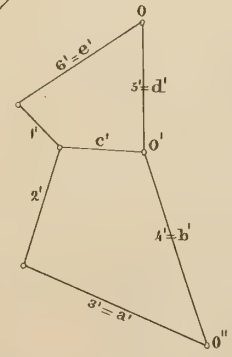


Fig. 11.



Lit. G Cleman Roma. Via Cesari 37.

U. Colonna inc.

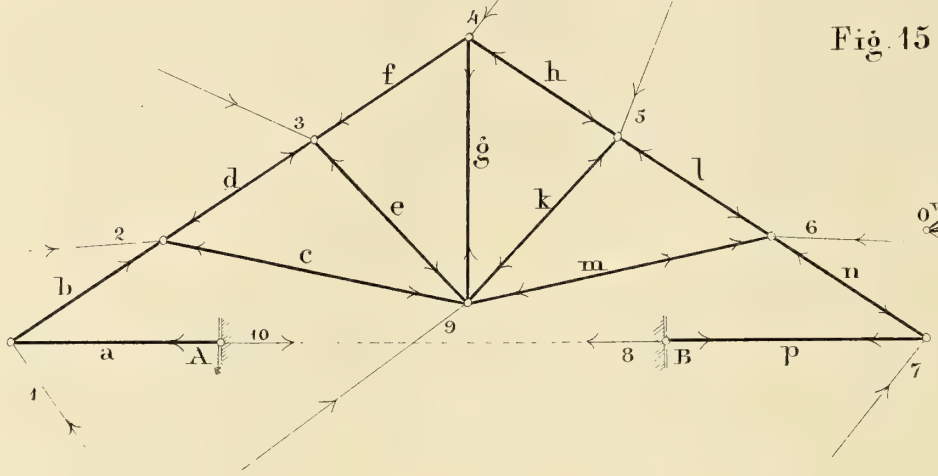


Fig. 15.

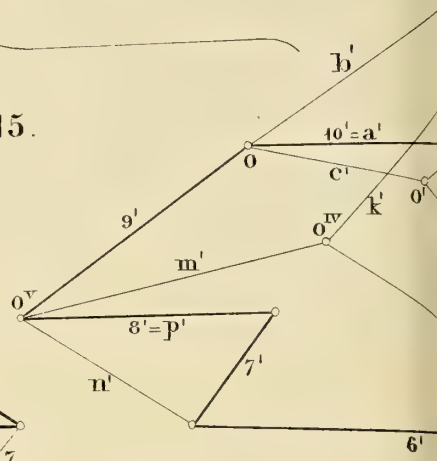
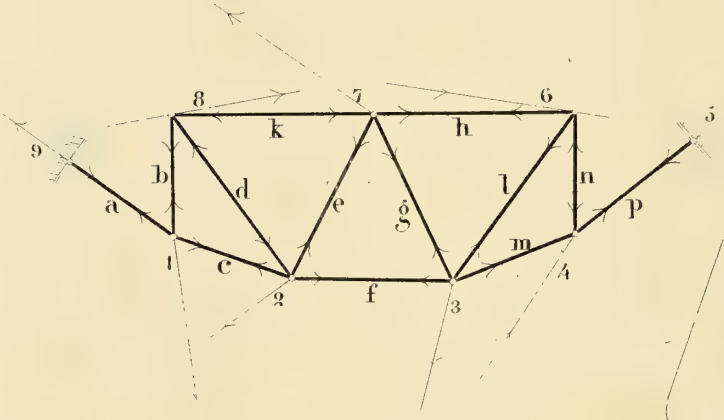
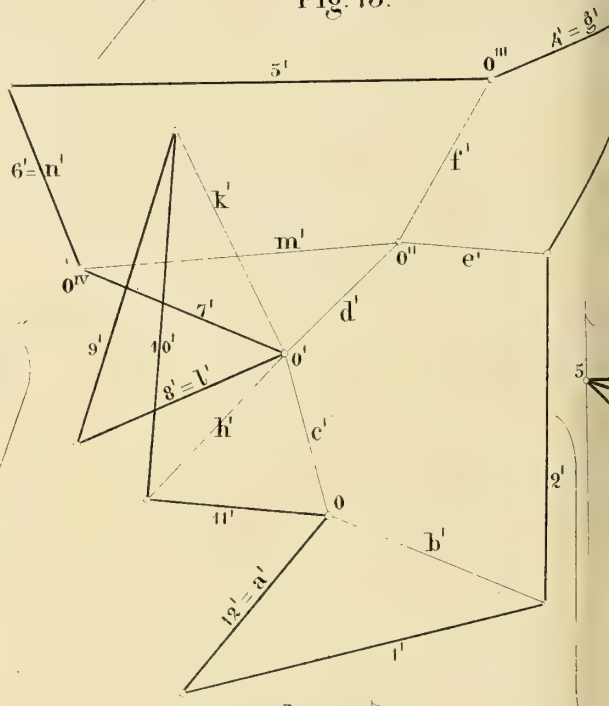
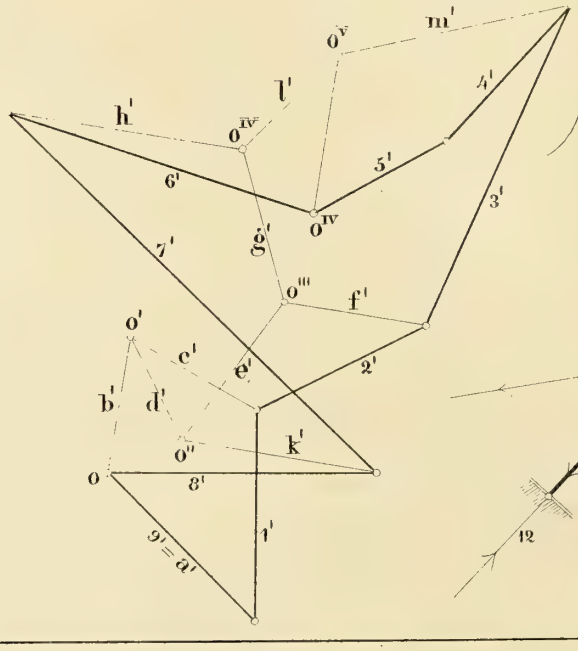


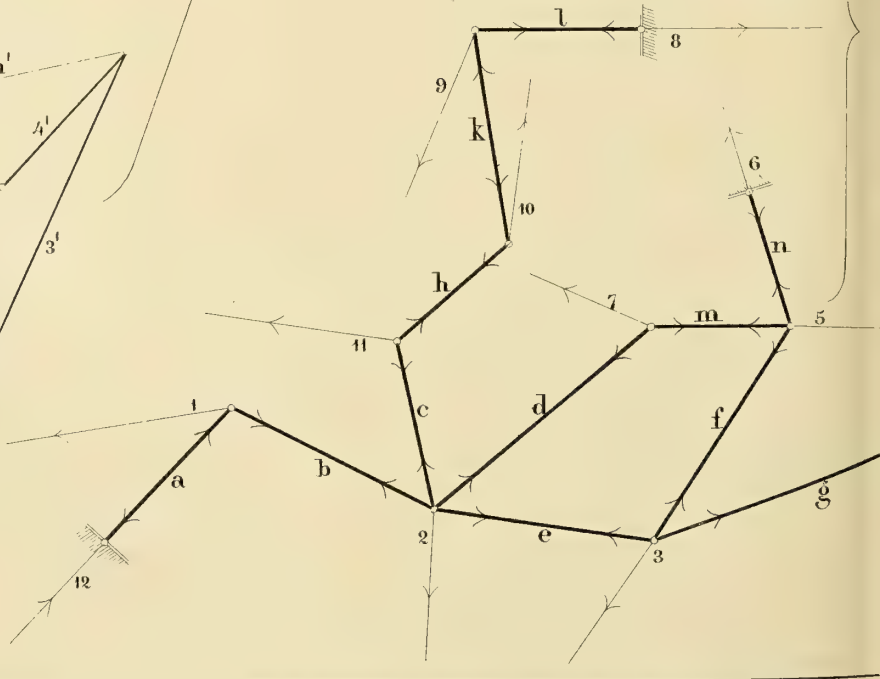
Fig. 13.

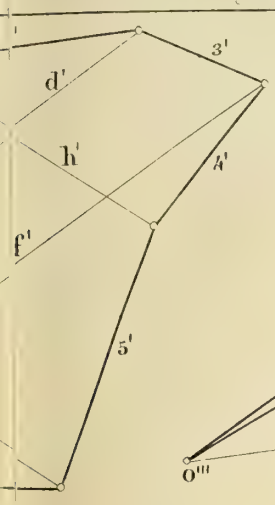
Fig. 14.











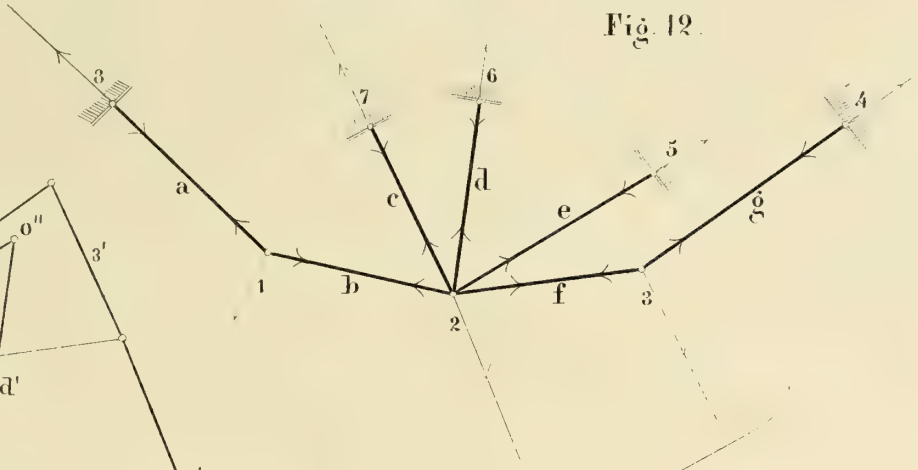


Fig. 12.

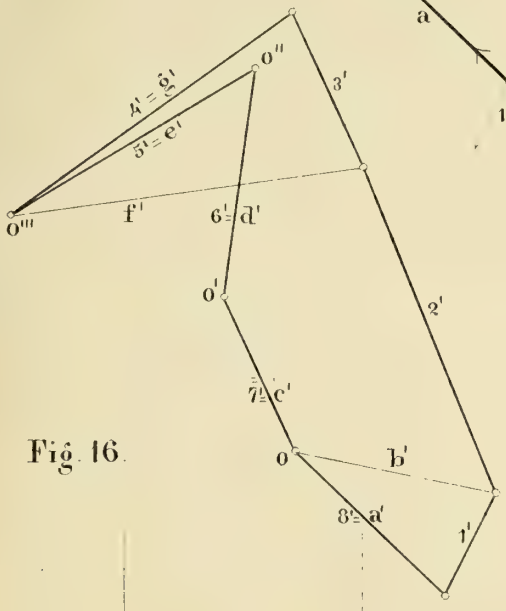
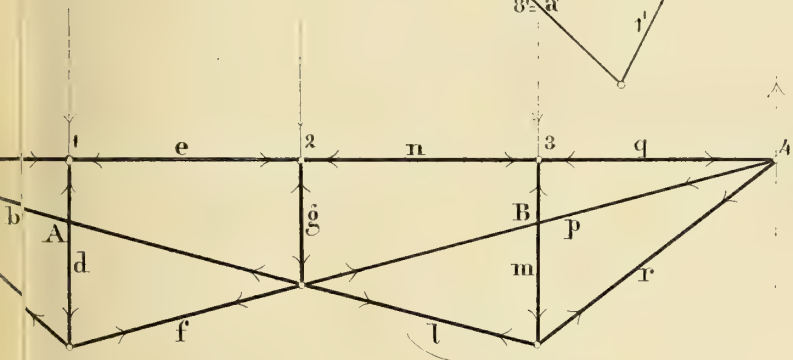
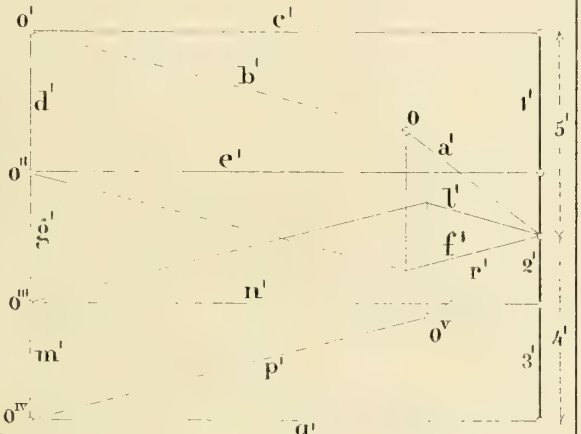


Fig. 16.





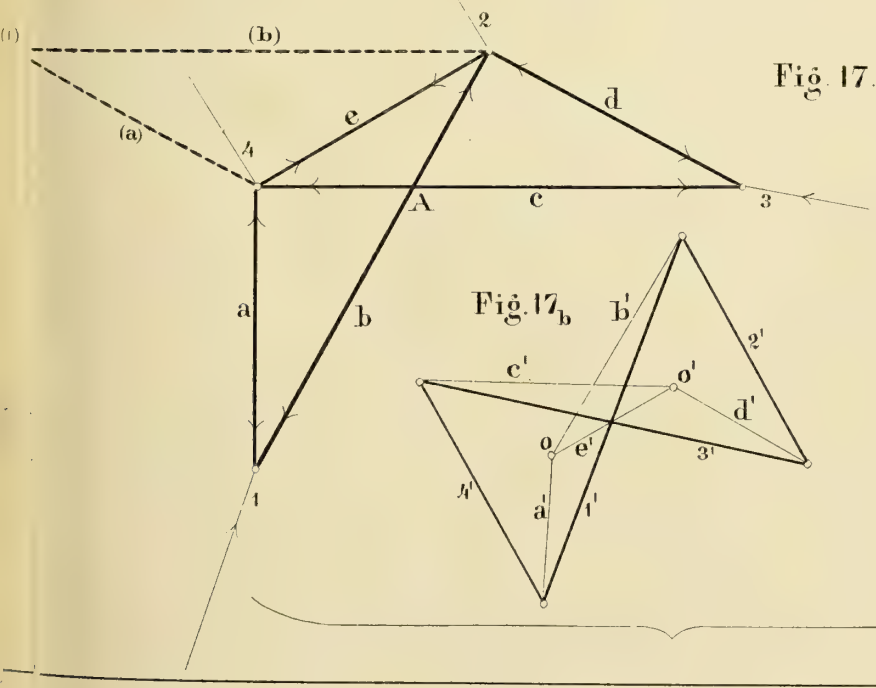


Fig. 17.

Fig. 17b

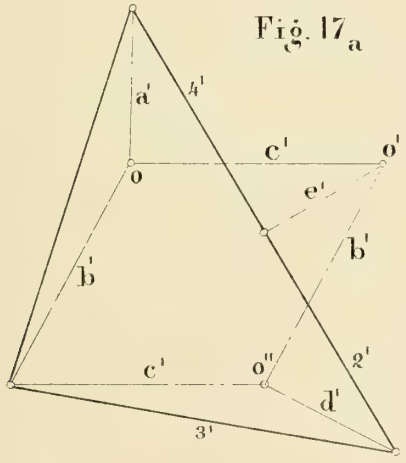


Fig. 17a

Fig. 15.

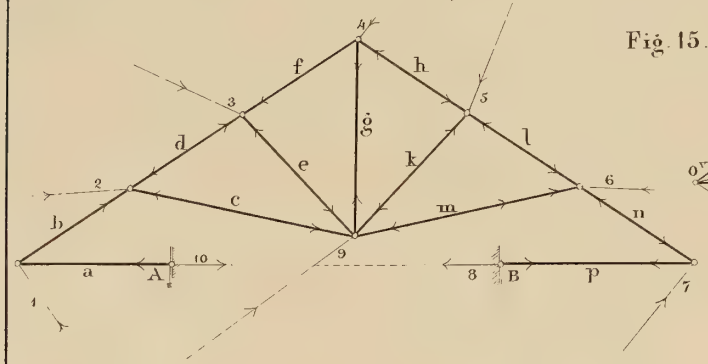


Fig. 14.

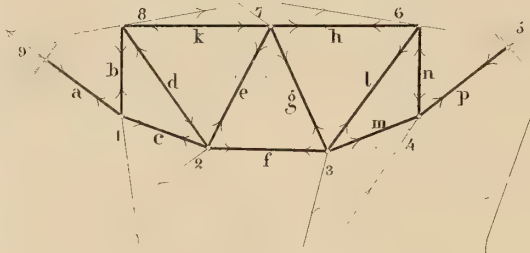
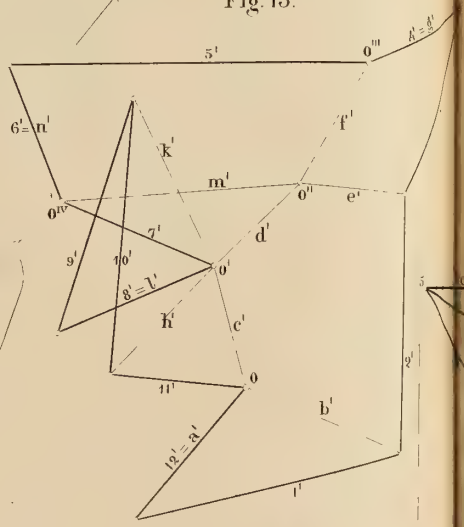
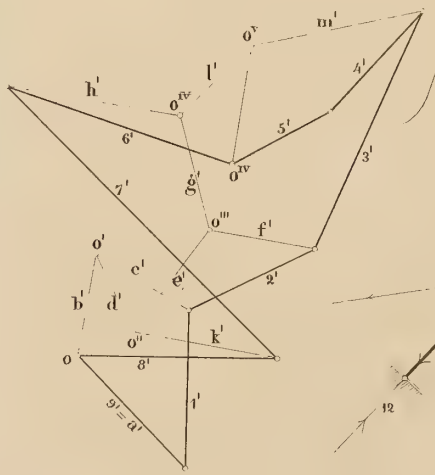


Fig. 15.





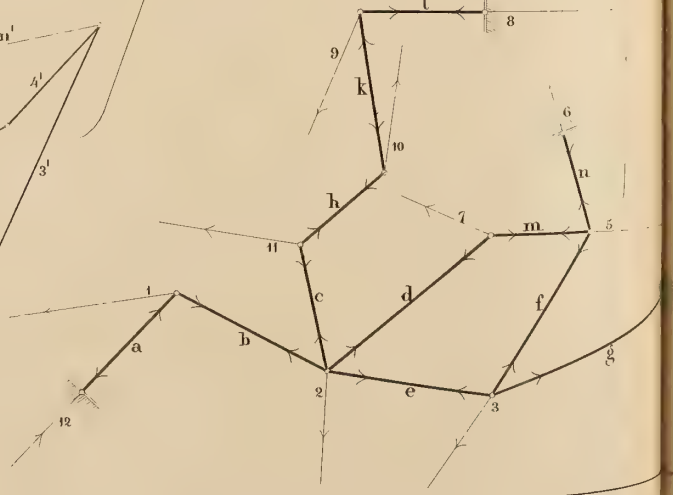
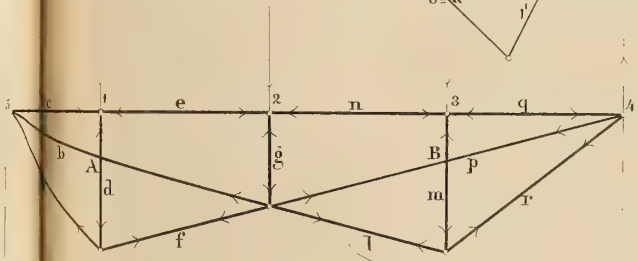


Fig. 16



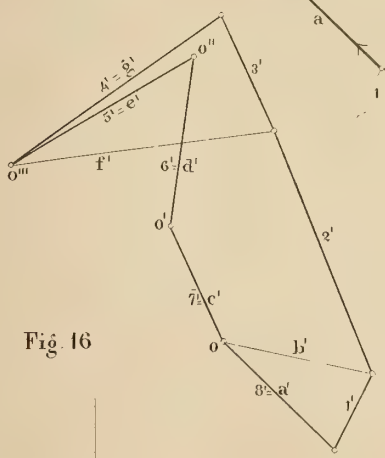


Fig. 17.

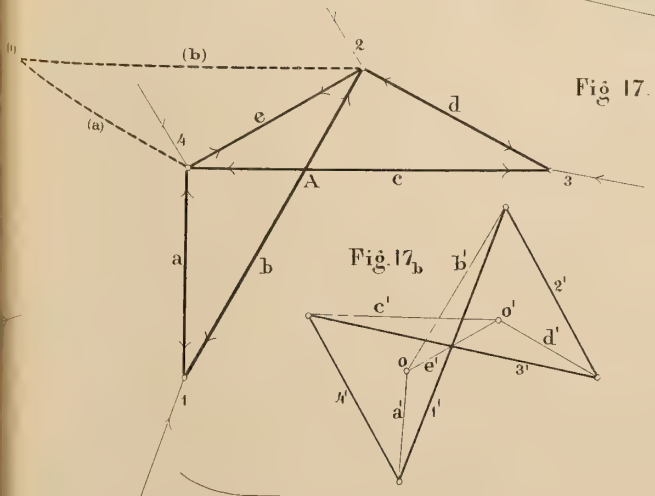
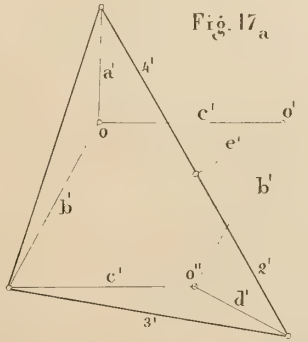


Fig. 17b

Fig. 17a



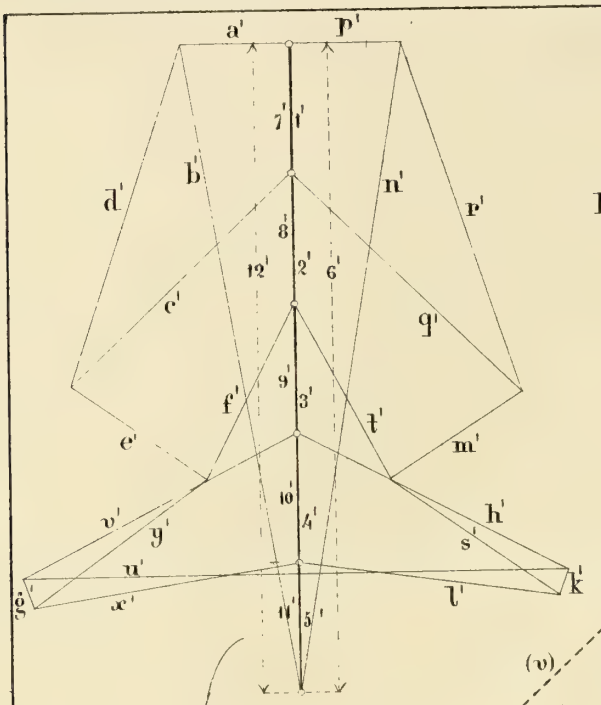


Fig. 18.

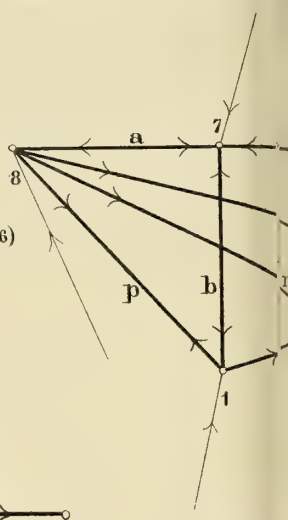


Fig. 24.

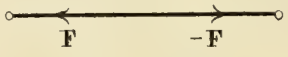
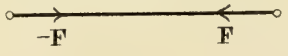
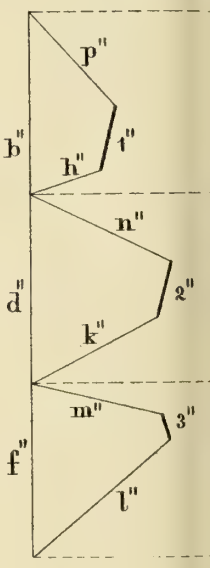
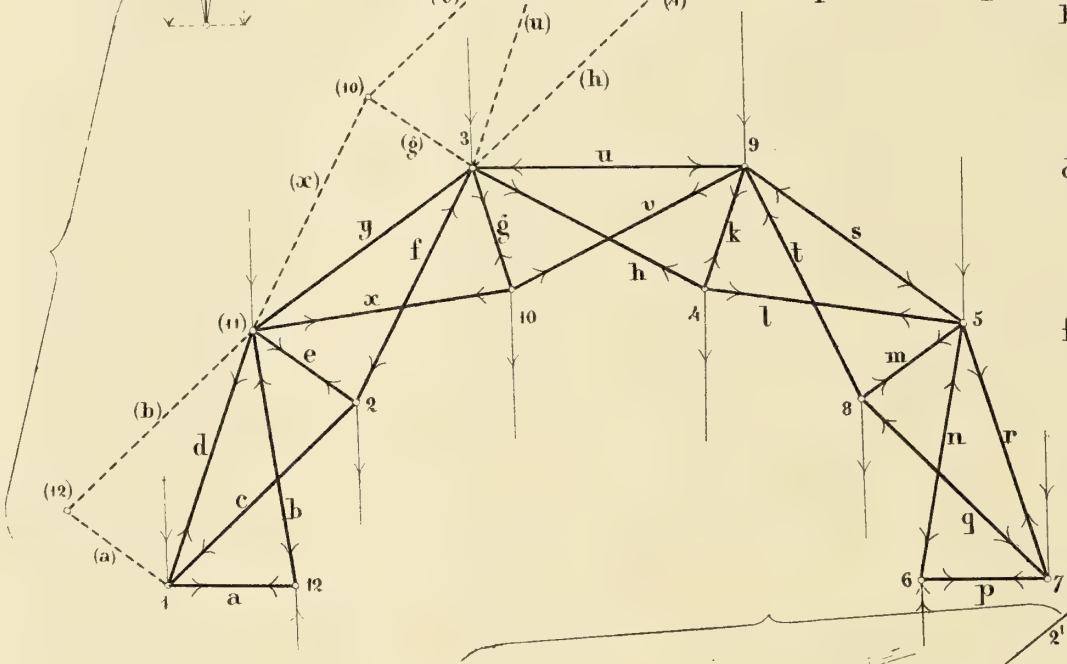


Fig. 25.







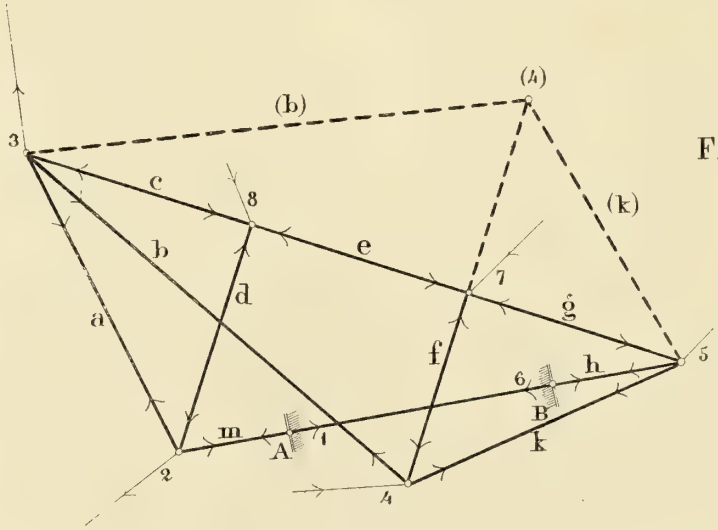
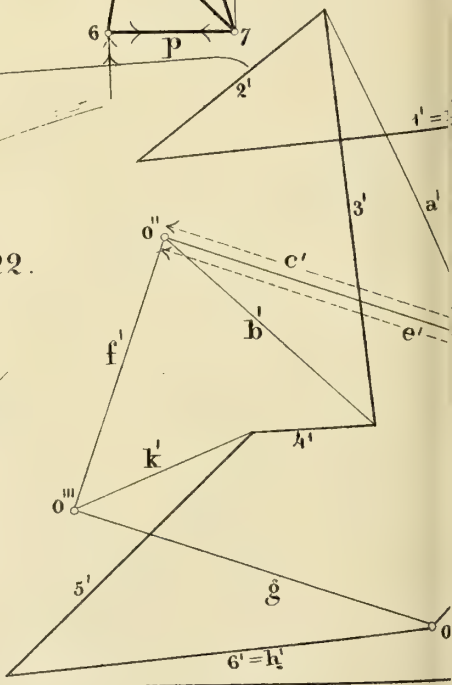


Fig. 22.



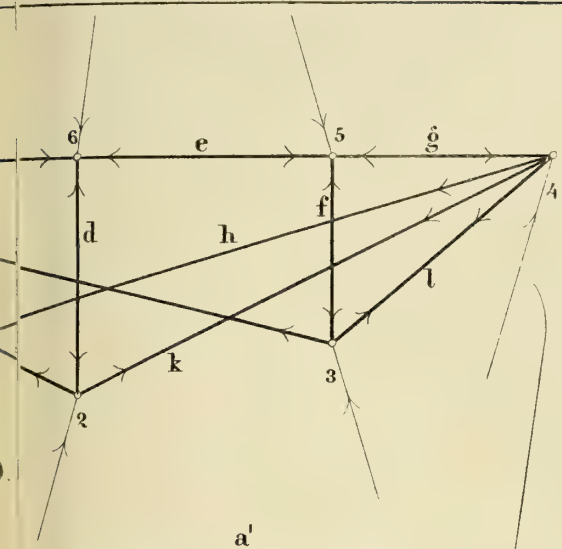
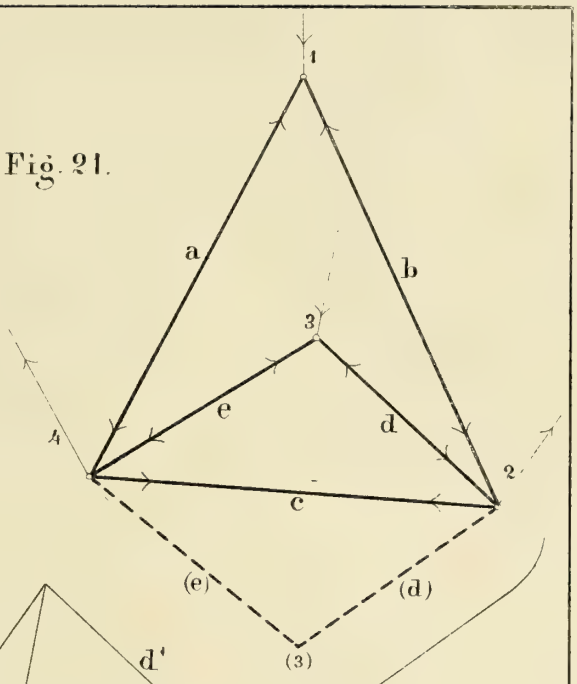
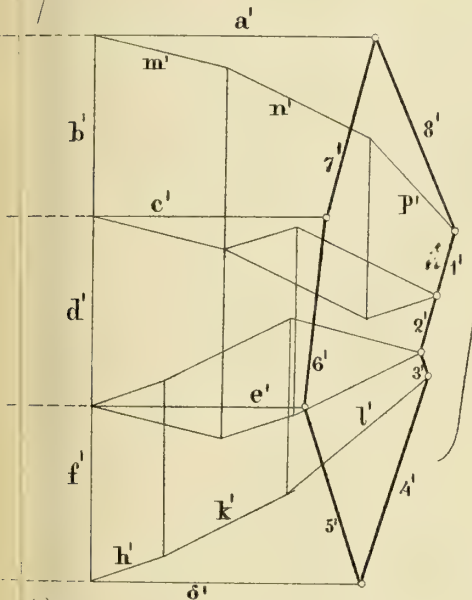
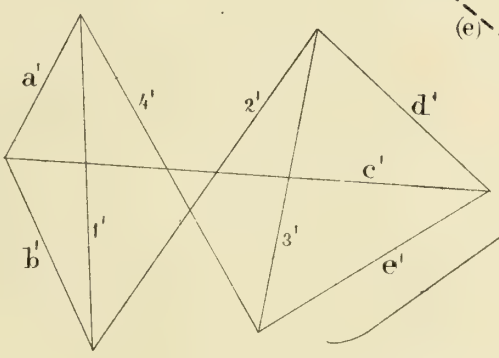


Fig. 21.







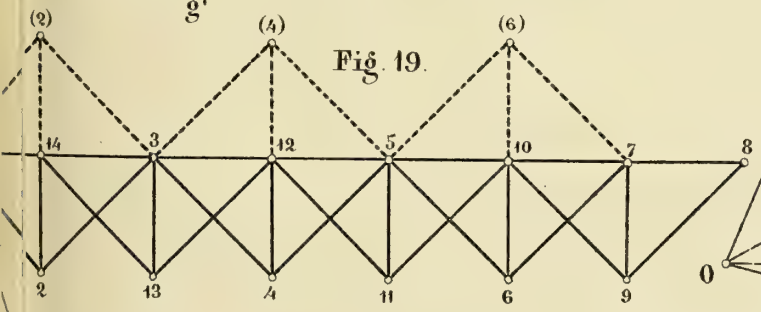
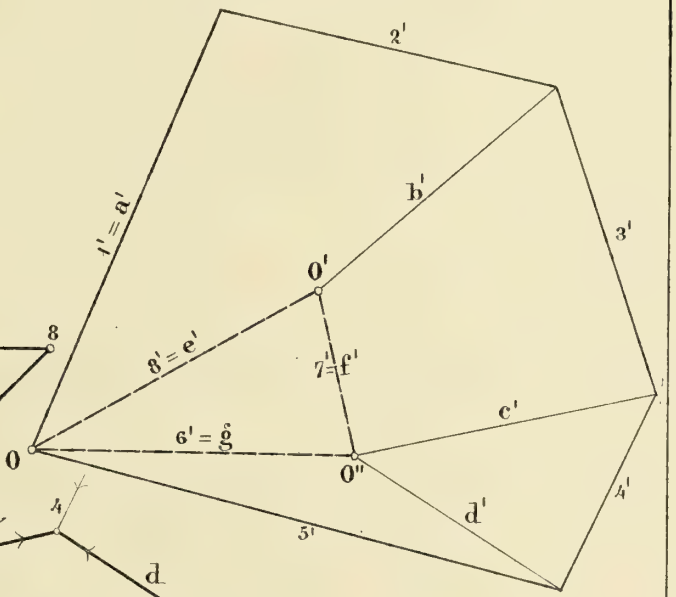


Fig. 19.



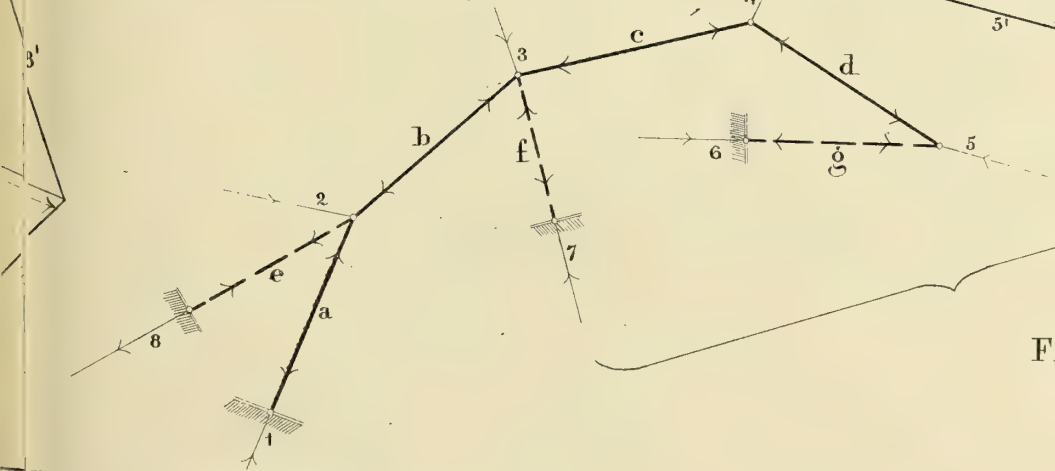
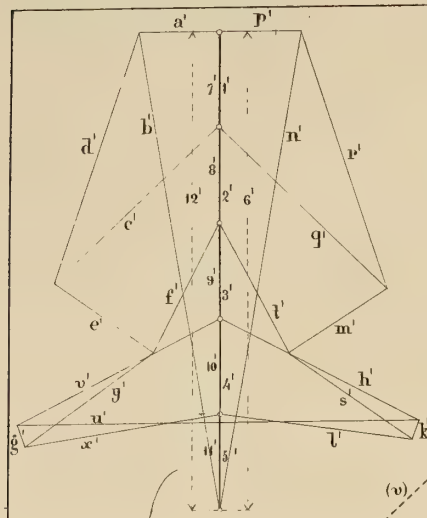


Fig. 23.

U. Colonna inc

Fig. 18.



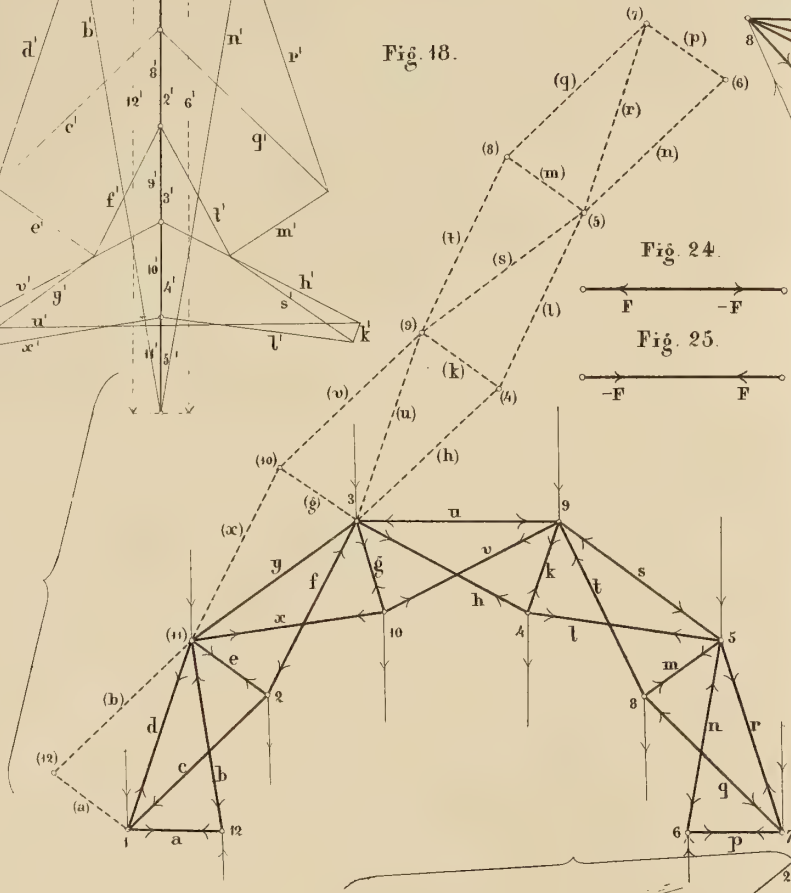
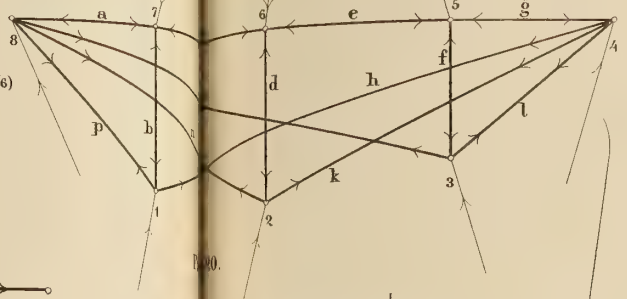
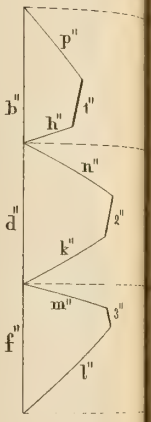


Fig. 24.

Fig. 25.





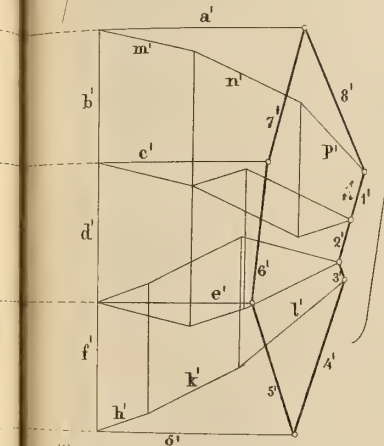
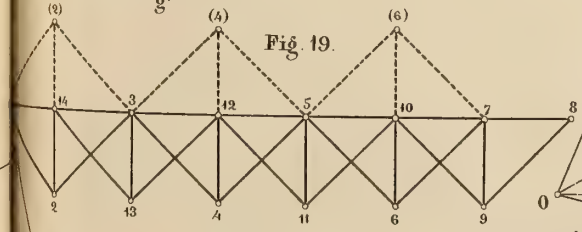


Fig. 19.



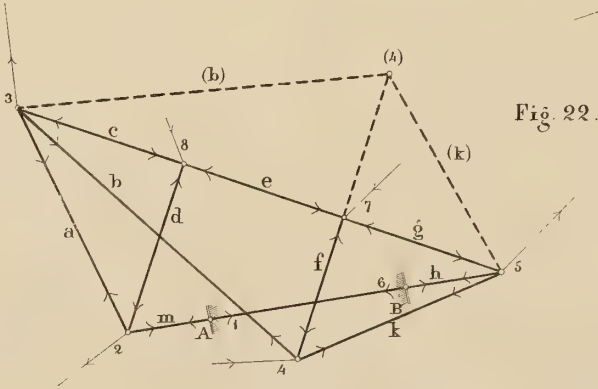


Fig. 22.

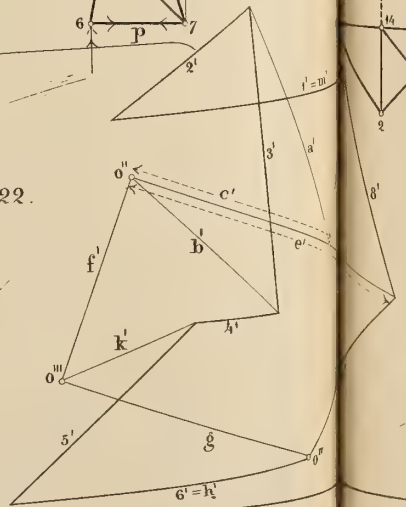
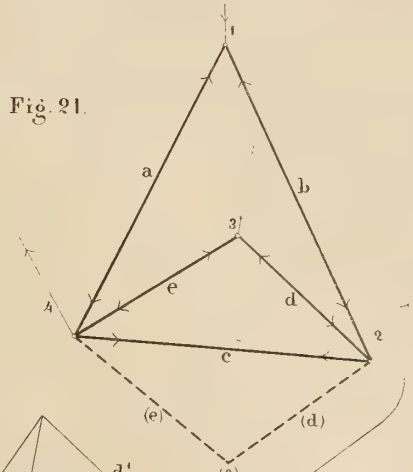
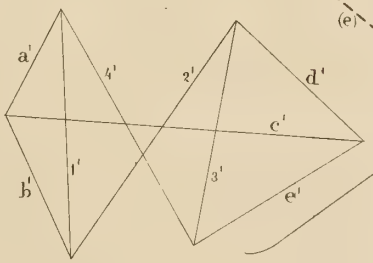
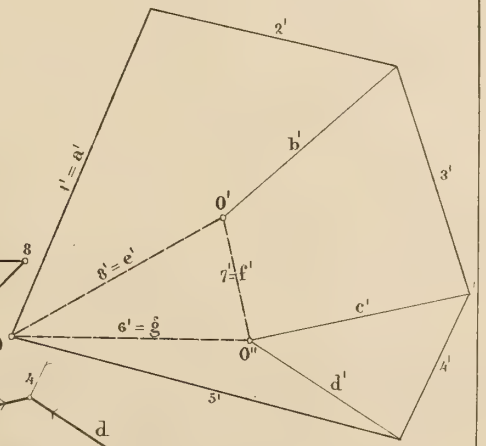


Fig. 21.







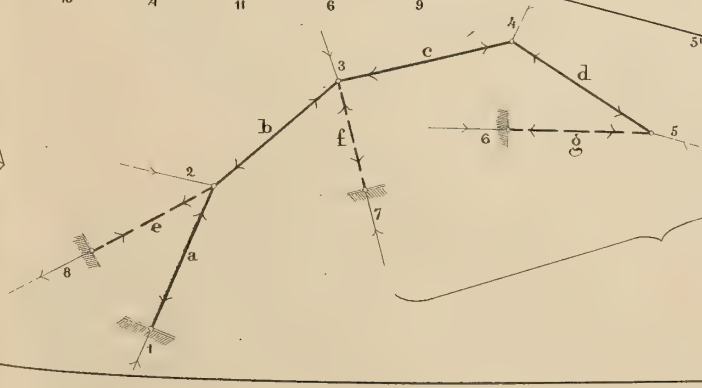


Fig. 23.

Delle ruote a turbine.

Nota dell'ingegnere GIACINTO GAUTERO
direttore della Scuola professionale di Biella
presentata dal Socio Q. SELLA

nella seduta del 17 giugno 1877.

1) Ordinariamente, le diverse specie di ruote a turbine, dette anche più brevemente turbini, vengono considerate anche per quel che ne riguarda la genesi, come macchine essenzialmente distinte, per ognuna delle quali si trovano formole speciali.

Volendo riunire tutte le turbini sotto uno stesso concetto, e così farle derivare da una sola, basta:

1° Lasciare indeterminato il sito in cui i due apparecchi, il fisso e il mobile, si trovano entro il tubo T che collega il canale d'arrivo al canale di fuga.

2° Sempre restando l'apparecchio mobile conassico all'apparecchio fisso, lasciare indeterminata la forma della superficie di rivoluzione S che li separa, nonchè l'estensione della porzione di essa superficie che l'acqua è obbligata attraversare per passare dall'apparecchio distributore all'apparecchio motore.

3° Lasciare indeterminata la forma dei canali dei due apparecchi fisso e mobile che l'acqua percorre.

Così considerate le cose, ecco come si può dare la teoria generale delle turbini ad asse verticale, non tenendo conto delle resistenze d'attrito.

Formole Generali.

2) *Denominazioni* — Chiamo:

P_0, P, P′, le pressioni per unità di superficie, dell'aria esterna; dell'acqua alla superficie di separazione S, e immediatamente dopo uscita dall'apparecchio mobile.

v, w, w′, v, w, le velocità dell'acqua, all'uscire dal distributore; entro all'apparecchio motore, appena entratavi, e quando ne è uscita; entro al tubo T ma dopo l'apparecchio motore; e all'uscire dallo stesso tubo per entrare nel canale di fuga.

w_0 la velocità dell'acqua all'uscire dall'apparecchio fisso rispetto a quello mobile.

v′ la velocità assoluta dell'acqua, quando abbandona l'apparecchio mobile.

E, F, le velocità perdute, nell'entrare dell'acqua nell'apparecchio mobile, e quando uscitane entra nel tubo T, passando così rapidamente la velocità da v′ a v.

r, r', le distanze dall'asse di rotazione a cui l'acqua penetra ed esce dall'apparecchio motore.

ω la velocità angolare di rotazione della turbine.

$\overline{\omega r}$, $\overline{\omega r'}$, le velocità di trascinamento dell'acqua, quando entra e quando esce dall'apparecchio mobile.

h l'altezza della superficie libera dell'acqua nel canale d'arrivo, sopra i centri di gravità delle luci del distributore.

e la quantità di cui l'acqua discende entro all'apparecchio mobile.

h' l'altezza dei centri di gravità delle luci d'efflusso dell'apparecchio motore, sopra la superficie libera dell'acqua nel canale di fuga.

$H = h + e + h'$ la caduta.

Q la portata in volume.

G il peso specifico dell'acqua.

g l'accelerazione dovuta alla gravità.

3) *Equazioni del lavoro* — Se si applica l'equazione generale del lavoro, prima di tutto al movimento dell'acqua compresa tra la superficie libera dell'acqua nel canale d'arrivo e la superficie S; poi al moto relativo dell'acqua nell'apparecchio mobile; e per ultimo al moto dell'acqua entro al tubo T tra l'apparecchio mobile e il canale di fuga, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_0}{G} + h &= \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{G} \\ \frac{P}{G} + e + \frac{\omega^2}{2g}(r'^2 - r^2) &= \frac{P'}{G} + \frac{1}{2g}(w'^2 - w^2{}_0 + E^2) \\ \frac{P'}{G} + h' &= \frac{P_0}{G} + \frac{1}{2g}(w^2 - v'^2 + F^2) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

4) *Determinazione di* w_o^2, E^2, v'^2, F^2 — Se si osserva che:

w_0, è la risultante di v, e $-\overline{\omega r}$

E, » » » v, $-\overline{\omega r}$ e $-w$

v', » » » w' e $\overline{\omega r'}$

F, » » » v' e $-v$

dalle formole generali, relative alla composizione delle velocità, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} w_0^2 &= v^2 + \omega^2 r^2 - 2\omega r.v\cos(v, \overline{\omega r}) \\ E^2 &= v^2 + w^2 + \omega^2 r^2 - 2\omega r.v\cos(v, \overline{\omega r}) - 2v.w\cos(v, w) + 2\omega r.w\cos(w, \omega r) \\ v'^2 &= w'^2 + \omega^2 r'^2 + 2\omega r' w'\cos(w', \overline{\omega r'}) \\ F^2 &= w'^2 + v^2 + \omega^2 r'^2 + 2\omega r'.w'\cos(w', \overline{\omega r'}) - 2vw'\cos(v, w') \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

nell'ultima delle quali si è supposta la direzione della velocità v essere quella della verticale, e quindi l'angolo $(v, \overline{\omega r'})$ di 90°.

5) *Equazioni della portata* — Sia V l'area totale della superficie di separazione tra l'apparecchio fisso e mobile, e ε la frazione di essa che è attraversata dall'acqua mentre dal primo di essi apparecchi si rende al secondo. Analogamente

siano W, W' le aree delle superficie di rivoluzione che limitano internamente ed esternamente l'apparecchio mobile; V la sezione trasversale del tubo T dove al velocità è v, e W la sezione trasversale della vena che dal tubo T effluisce nel canale di fuga, e dove essa è contratta.

Se μ, μ' saranno i coefficienti di contrazione relativi alle vene che escono dagli apparecchi fisso e mobile, si avrà:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \mu\,\varepsilon\, v\, V \cos(v, V) \\ Q &= \varepsilon\, w W \cos(w, W) \\ Q &= \mu'\,\varepsilon\, w' W' \cos(w', W') \\ Q &= v.V \\ Q &= w.W \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

intendendo che (v, V), (w, W), (w', W') rappresentino gli angoli che le velocità v, w, w', fanno rispettivamente colle normali alle superficie V, W, W'.

6) *Espressione dell'effetto utile* — Detto L, l'effetto utile del motore al 1'', si avrà:

$$L = GQH - \frac{GQ}{2g}(w^2 + E^2 + F^2)$$

od ancora:

$$L = \frac{GQ}{2g}(2gH - w^2 - E^2 - F^2)$$

Se si sommano le equazioni (1) membro a membro si ottiene:

$$H + \frac{\omega^2}{2g}(r'^2 - r^2) = \frac{1}{2g}(v^2 + w'^2 + w^2 + E^2 + F^2 - w_0^2 - v'^2) \qquad (a)$$

dalla quale:

$$2gH - w^2 - E^2 - F^2 = v^2 + w'^2 - w_0^2 - v'^2 - \omega^2(r'^2 - r^2)$$

e per conseguenza:

$$L = \frac{GQ}{2g}\left\{ v^2 + w'^2 - w_0^2 - v'^2 - \omega^2(r'^2 - r^2) \right\} \qquad (4)$$

È bene osservare, che quantunque quest'equazione sia stata stabilita non tenendo conto delle resistenze d'attrito, essa sussiste qualunque siano le resistenze che l'acqua incontra nel suo muoversi entro il tubo T e entro l'apparecchio fisso o mobile, e indipendentemente dal principio di Carnot sul calcolo della perdita di lavoro dovuta ai cambiamenti bruschi di velocità a cui l'acqua può andare soggetta, purchè la stessa una volta uscita dall'apparecchio mobile non vi rientri.

Se nell'equazione (4) per w_o^2 e v'^2 si mettono i loro valori dati dalle equazioni (2), si ottiene:

$$L = \frac{GQ}{g}\left\{ r.v\cos(v, \overline{\omega r}) - r'.w'\cos(w', \overline{\omega r'}) - \omega r'^2 \right\}\omega \qquad (5)$$

e sostituendo in questa a v, w', i valori che si ricavano dalle (3), sarà:

$$L = \frac{GQ}{g}\left\{ m\frac{Q}{\varepsilon} - \omega r'^2 \right\}\omega \qquad (6)$$

m, essendo una certa quantità costante per una stessa turbine, e il cui valore viene dato da:

$$m = \frac{r \cos (v, \overline{\omega r})}{\mu V \cos (v, V)} - \frac{r' \cos(w', \overline{\omega r'})}{\mu' W' \cos (w', W')} \tag{7}$$

7) *Relazione che passa tra la caduta, la portata, e la velocità angolare* ω — Se nell'equazione (a) per E, F, v', w_o, si mettono i loro valori dati dalle equazioni (2), e se si fa sparire il denominatore $2g$, si ottiene:

$$2gH + \omega^2 (r'^2 - r^2) = v^2 + w^2 + w'^2 + v^2 + w^2 - 2v.w \cos (v, w) + 2\omega r w \cos (\overline{w}, \overline{\omega r} -) - 2vw' \cos (v, w').$$

Ricavando da questa il valore di $2g$H, e sostituendo a v, w, w', v, w, i valori che si ricavano dalle (3) sarà:

$$2g G = (\alpha + \mathcal{E}) \frac{Q^2}{\varepsilon^2} + 2\beta\omega \frac{Q}{\varepsilon} - \omega^2 (r'^2 - r^2) \tag{8}$$

nella quale α e β sono costanti dipendenti dalle dimensioni della turbine, e $\mathcal{E}$ è una quantità dipendente dalle stesse dimensioni, ma ancora da W e ε. I valori di α, β, $\mathcal{E}$ sono:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \left(\frac{1}{\mu V \cos (v,V)}\right)^2 + \left(\frac{1}{W \cos (w,W)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu' W' \cos (w',W')}\right)^2 - \\ \qquad - \frac{2 \cos (v, w)}{\mu V.W \cos (v, V) \cos (w, W)} \\ \beta = \frac{r \cos (w, \overline{\omega r})}{W \cos (w,W)} \\ \mathcal{E} = \frac{\varepsilon^2}{V^2} + \frac{\varepsilon^2}{W^2} - \frac{2\varepsilon \cos (v, w')}{\mu' VW' \cos (w', W')} \end{cases}.$$

8) *Determinazione delle pressioni* P, P' — Dalla prima delle equazioni (1) si ricava:

$$\frac{P}{G} = \frac{P_0}{G} + h - \frac{1}{2g \left\{ \mu V \cos (v, V) \right\}^2} \cdot \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \tag{10}$$

la quale farà conoscere la pressione P, mediante la portata, e le dimensioni della turbine.

Per determinare P', si può fare uso dell'ultima delle equazioni (1), dalla quale si ha:

$$\frac{P'}{G} = \frac{P_0}{G} - h' + \frac{1}{2g} (w^2 - v'^2 + F^2)$$

e sostituendo a v' e F i valori dati dalle (2) sarà:

$$\frac{P'}{G} = \frac{P_0}{G} - h' + \frac{1}{2g} \left(w^2 + v^2 - 2vw' \cos (v, w') \right)$$

e per v, w, w' mettendo i valori che si hanno dalle (3), si trova:

$$\frac{P'}{G} = \frac{P_0}{G} - h' + \frac{\mathcal{E}}{2g} \cdot \frac{Q^2}{\varepsilon^2}. \tag{11}$$

Condizione d'applicabilità delle formole trovate e loro applicazione a diversi casi speciali.

9) La sola condizione che vuole essere soddisfatta per potere applicare le formole precedenti, è che l'acqua una volta effluita dall'apparecchio motore, non vi rientri. Questo caso si verifica quando ε è minore di uno e la turbine è sommersa.

10) *Caso in cui l'apparecchio motore, si muove nel canale di fuga* — Le formole relative a questo caso, si deducono da quelle generali trovate tralasciando in esse i termini in v, e w o in V, e W; e coll'avvertenza di non tenere conto delle due ultime equazioni delle (3).

11) *Caso in cui l'apparecchio motore, versa l'acqua nell'atmosfera* — Le avvertenze di cui al numero precedente, servono ancora per adattare le formole generali a questo caso, solo bisognerà in più fare $h' = 0$, e intendere che H rappresenti non più la caduta, ma l'altezza della superficie libera dell'acqua nel canale d'arrivo sopra i centri delle luci d'efflusso dell'apparecchio mobile.

12) *Caso delle turbini Fourneyron* — Per applicare le formole generali sulle turbini, alle turbini Fourneyron, basta osservare che per queste si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\text{ang}\,(v, V) = \frac{\pi}{2} - \text{ang}\,(v, \overline{\omega r}) \\ &\text{»}\quad (w, W) = \text{ang}\,(w, \overline{\omega r}) - \frac{\pi}{2} \\ &\text{»}\quad (w', W') = \text{ang}\,(w', \overline{\omega r'}) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

13) *Caso delle turbini Eulero* — Per le turbini Eulero, bisogna ancora fare, come precedentemente nelle formole generali:

$$\left.\begin{aligned} &\text{ang}\,(v, V) = \frac{\pi}{2} - \text{ang}\,(v, \overline{\omega r}) \\ &\text{»}\quad (w, W) = \text{ang}\,(w, \overline{\omega r}) - \frac{\pi}{2} \\ &\text{»}\quad (w', W') = \text{ang}\,(w', \overline{\omega r'}) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

ma di più, ritenere che in generale:

$$r' = r$$

14) *Caso delle turbini Poncelet, riceventi l'acqua dall'esterno* — Anche per queste turbini, servono le formole trovate, solo venendo stabilite per modo da versare direttamente nell'atmosfera, bisogna avere riguardo alle avvertenze di cui al n.° 11.

15) *Caso in cui l'apparecchio motore, si trova in una camera d'aria* — Le formole stabilite servono anche per questo caso, e solo quando il livello dell'acqua nella camera d'aria fosse notevolmente al disotto dell'apparecchio motore, converrebbe modificare l'espressione del termine F^2.

Di alcuni risultati che si deducono dalle formole (6) e (8).

16) *Equazione* (6) — L'equazione (6) mostra che per un dato valore di Q ed ε, la velocità angolare che chiamerò Ω, corrispondente al massimo effetto utile, è data da:

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{r'^2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon} \tag{12}$$

la quale dice che Ω varia proporzionalmente al rapporto $\frac{Q}{\varepsilon}$. Se dunque Ω deve restare costante comunque varii Q, bisognerà che varii ε, e precisamente nello stesso rapporto.

Quest'esame, porta così a conchiudere, che affinchè alla velocità angolare costante di regime della turbine, l'effetto utile corrispondente sia sempre massimo, comunque varii la portata; bisogna che ε possa variare, ossia la turbine sia ad alimentazione parziale, con possibilità di fare variare il numero delle luci dell'apparecchio fisso che stanno aperte.

17) Se si osserva che l'equazione (6), mostra che la velocità angolare massima della turbine, e che dirò ω', corrispondente al caso in cui l'effetto utile è nullo; è data da:

$$\omega' = \frac{m}{r'^2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon}$$

si conchiude:

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\omega'.$$

Per determinare Ω, basterà dunque lasciare camminare la turbine a vuoto, con che si determinerà ω'; e prendendo di ω' la metà, si avrà la velocità angolare più conveniente con cui la turbine deve camminare.

18) Conviene notare che l'effetto utile L di cui ai numeri precedenti, non rappresenta il lavoro che dirò L′ che verrebbe misurato da un dinamometro applicato all'albero della turbine, ma questo lavoro più quello che dirò l, che viene consumato nelle resistenze d'attrito, che si oppongono al movimento dell'albero della turbine e che essenzialmente si svolgono tra il perno dell'albero e la relativa ralla.

Se si ritiene la resistenza d'attrito allo scorrimento, indipendente dalla velocità, si ha:

$$l = k\,\omega \tag{13}$$

in cui k è una costante per una stessa turbine.

Frattanto essendo:

$$L = L' + l$$

si conchiude:

$$L' = L - l$$

e sostituendo in questa a L, e l, i loro valori dati dalle (6) e (13) sarà:

$$L' = \frac{GQ}{g}\left\{ m' \frac{Q}{\varepsilon} - \omega r'^2 \right\}\omega \tag{14}$$

nella quale m' è una quantità il cui valore viene dato da:

$$m' = m - \frac{gk.\varepsilon}{GQ^2}$$

e così m' non è una costante se non nel caso in cui ε e Q siano esse stesse due costanti.

Frattanto l'equazione (14) essendo della stessa forma della (6), e le equazioni di cui ai n.i 16 e 17, essendosi stabilite nella supposizione di ε e Q costanti, si conchiude che le stesse sussistono ancora quando in esse si cambii m in m', e L in L'.

19) Se nell'equazione (6) a ω si sostituisce il valore trovato per Ω; per espressione dell'effetto utile massimo L_m, della turbine, si trova:

$$L_m = \frac{GQ}{g}\left(\frac{m}{2r'} \cdot \frac{Q}{\varepsilon}\right)^2 \qquad (g)$$

od ancora:

$$L_m = \frac{GQ}{g}(\Omega r')^2 \qquad (15)$$

Quest'ultima equazione, serve anche nel caso in cui si tratti, non del lavoro L, ma del lavoro L'.

Si noti intanto che l'equazione (6) dalla quale si dedusse la (15) essendo vera qualunque siano le resistenze che l'acqua incontra nella turbine, anche la (15) sarà vera negli stessi limiti di generalità.

L'equazione (15) è particolarmente importante per la sua semplicità, e per l'applicazione che di essa se ne può fare alla determinazione dell'effetto utile di una turbine qualunque, semplicemente determinando la portata, il numero dei giri che dà, e la distanza dall'asse di rotazione a cui l'acqua sorte dalla turbine. Per applicare a questo fine l'equazione (15), basterà determinare Q e r' mediante misure dirette, quindi lasciare girare la turbine a vuoto, e dai giri che essa in un certo tempo avrà dati calcolare ω'; prendendo quindi di ω' la metà, si determinerà eseguendo i calcoli indicati dall'equazione (15), non la quantità L_m, ma il lavoro L'_m che un dinamometro applicato all'albero della turbine misurerebbe. Naturalmente nel fare girare la turbine a vuoto, bisogna disporre le cose per modo che Q e ε non cambiino.

20) La stessa equazione (15), quando mediante misure dirette si sia determinato L_m, Ω e r', farà conoscere la portata.

Se restando Q e ε costanti, si fanno su una turbine almeno due esperienze, per ognuna delle quali si determini L e ω, l'equazione (6) permetterà di ricavare Q, quando sia stato preventivamente misurato r'. Se invece di due sole esperienze, se ne faranno molte, si potrà allora pensare ad applicare alla determinazione di Q il metodo dei minimi quadrati. Si può del resto notare che siccome le quantità L, ω, r' si possono determinare con molta precisione, che il valore della portata che si ricaverà col metodo indicato dovrà riescire molto esatto.

21) *Equazione* (8) — La portata Q, giusta l'equazione (8) dipende in generale dalla velocità angolare ω. Il solo caso in cui Q sia indipendente da ω, è quello in cui:

$$\beta = 0 \quad ; \quad r' = r.$$

Se si esamina l'ultima delle equazioni (9), si vede che perchè β sia zero, bisogna che si abbia:

$$\text{ang}\,(w, \overline{\omega r}) = \frac{\pi}{2}$$

come appunto in generale si verifica per le turbini di Fourneyron e di Eulero.

Per le turbini di Eulero essendo poi ancora $r' = r$, ne viene che in esse la portata è indipendente da ω.

Per le turbini di Fourneyron invece, essendo $r' > r$, la portata dipende da ω, e giusta l'equazione (8) crescendo o diminuendo la velocità angolare cresce pure o diminuisce la portata, ben inteso se gli altri elementi che entrano nella stessa equazione non cambiano. Ora il crescere la portata quando la velocità aumenta, trae con sè la conseguenza, che diventando inoperosa qualcuna delle macchine operatrici alle quali la turbine dà moto, il moto nelle stesse si accelera tanto più, in quanto che il lavoro motore al 1″ aumenta. Manifestamente per evitare questo inconveniente, bisogna disporre le cose per modo che Q diminuisca quando ω cresce, o viceversa, il che si ottiene se β è zero, prendendo $r' <$ di r.

22) Se nell'equazione (8) per ω si sostituisce il valore di Ω dato dalla (12), si ottiene:

$$2gH = \left\{ \alpha + \mathcal{E} + \frac{m\beta}{r'^2} - \frac{(r'^2 - r^2)m^2}{4r'^2} \right\} \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \qquad (16)$$

Se $\frac{Q}{\varepsilon}$ è costante, quest'equazione mostra che la caduta H non cambierà col variare della portata che per il fatto che $\mathcal{E}$ contiene ε. Ma se la turbine è ad alimentazione parziale come lo suppone la variazione di ε; conviene stabilirla, affine di evitare che l'acqua uscita dall'apparecchio motore, non vi rientri, e venga così inutilmente agitata con perdita dell'effetto utile, o in una camera d'aria, o più semplicemente ancora, stabilirla per modo che versi direttamente nell'atmosfera.

In questo caso si ha:

$$\mathcal{E} = 0$$

e per conseguenza l'equazione precedente diventerà:

$$2gH = \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \left(\alpha + \frac{m\beta}{r'^2} - \frac{m^2(r'^2 - r^2)}{4r'^2} \right) \qquad (17)$$

la quale mostra che in questo caso la caduta H, resta costante comunque varii Q, purchè varii convenientemente ε.

23) L'equazione (16) che lega la caduta alla portata quando la turbine dà il massimo effetto utile, mostra che restando costante Q ed ε, la caduta cresce col crescere di $\mathcal{E}$ ossia col diminuire di W. Perchè quindi una turbine, senza che varii la caduta, possa dare passaggio ad una portata sempre più grande, bisogna che W vada costantemente crescendo.

Col variare quindi di W, non si ottiene altro risultato che quello di far sì che per una data caduta attraversi la turbine una determinata quantità d'acqua. Ma siccome col diminuire di W cresce la caduta per una determinata portata, senza che cambii

l'effetto utile, così si rende manifesto che più W sarà piccolo e più piccolo sarà il coefficiente di rendimento della turbine.

Da questo esame risulta così manifesta l'utilità di stabilire in generale le turbini per modo che versino direttamente nell'atmosfera.

24) *Coefficiente di rendimento massimo delle turbini ad alimentazione parziale, e che versano direttamente nell'atmosfera* — Detto i il coefficiente di rendimento d'una turbine, per determinarlo si avrà:

$$i = \frac{L}{GQH}$$

e per L, mettendo il valore massimo dell'effetto utile corrispondente ad una certa portata, si avrà:

$$i = \frac{L_m}{GQH}$$

per espressione del coefficiente di rendimento massimo d'una turbine. Se in questa equazione per L_m, si sostituisce il valore che è dato dalla (g), e per H il valore che si ricava dalla (17), si trova:

$$i = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\alpha r'^2 + m\beta - (r'^2 - r^2)m^2} \qquad (18)$$

la quale mostra che in queste condizioni, il coefficiente di rendimento della turbine, riesce costante qualunque sia del resto la portata.

Colle turbini ad alimentazione parziale, versanti direttamente nell'atmosfera, si ottengono adunque questi due vantaggi:

1° La velocità di regime della turbine, corrispondente al massimo effetto utile, non cambia comunque cambii la portata.

2° Il coefficiente di rendimento della turbine è costante, comunque la portata cresca o diminuisca.

25) Se si applica l'equazione (18) al caso delle turbini d'Eulero, per le quali si ha:

$$\beta = 0 \quad ; \quad r = r'$$

si ottiene:

$$i = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\alpha r^2} \qquad (19)$$

Se adesso si pone mente alle equazioni (e), (7) e (9), si avrà:

$$m = \frac{r \cos(v, \overline{\omega r})}{\mu V \operatorname{sen}(v, \overline{\omega r})} - \frac{r \cos(w', \overline{\omega r'})}{\mu' W' \operatorname{sen}(w', \overline{\omega r'})}$$

$$\alpha = \frac{1}{W^2} + \left\{\frac{1}{\mu V \operatorname{sen}(v, \overline{\omega r})}\right\}^2 + \left\{\frac{1}{\mu' W' \operatorname{sen}(w', \overline{\omega r'})}\right\}^2 - \frac{2 \cos(v, w)}{\mu V . W \operatorname{sen}(v, \overline{\omega r})}.$$

Osservando poi che:

$$\operatorname{ang}(v, w) = \operatorname{ang}(w, \overline{\omega r}) - \operatorname{ang}(v, \overline{\omega r}) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{ang}(v, \omega r)$$

e che con una certa approssimazione si può prendere:

$$\mu = \mu' = 1$$
$$V = W = W'$$

dopo alcune facili trasformazioni si troverà:

$$m = \frac{r}{V}\left\{\cot(v, \overline{\omega r}) - \cot(w', \overline{\omega r'})\right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{V^2}\left\{1 + \cot^2(v, \overline{\omega r}) + \cot^2(w', \overline{\omega r'})\right\}$$

Sostituendo nell'equazione (19) a m e α questi valori sarà:

$$i = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{\cot(v, \overline{\omega r}) - \cot(w', \overline{\omega r'})\right\}^2}{1 + \cot^2(v, \overline{\omega r}) + \cot^2(w', \overline{\omega r'})} \qquad (20)$$

e se si pone:

$$\cot(v, \overline{\omega r}) - \cot(w', \overline{\omega r'}) = x$$
$$\cot(v, \overline{\omega r}) + \cot(w', \omega r') = y$$

si avrà:

$$i = \frac{x^2}{2 + x^2 + y^2}$$

La quale mostra che i cresce col diminuire del valore assoluto di y, e col crescere di quello di x. Conviene quindi che x sia grande e y piccolo, ossia che le cotangenti degli angoli $(v, \overline{\omega r})$ e $(w', \overline{\omega r'})$ siano grandi e in valore assoluto eguali ma di segno contrario. Bisogna dunque che essendo l'angolo $(v, \overline{\omega r})$ piccolo assai, l'altro $(w', \overline{\omega r'})$ sia prossimo a 180°.

Se si prende:

$$\cot(v, \omega r) = -\cot.(w', \omega r')$$

si ha:

$$i = \frac{2}{2 + \operatorname{tang}^2(v, \overline{\omega r})} \qquad (21)$$

per espressione del coefficiente di rendimento massimo delle turbini di Eulero. Conviene però notare che l'equazione (17) si è stabilita non tenendo conto delle resistenze d'attrito, e che quindi essa come le (20 o (21) che ne derivano, servono solo fino a che dette resistenze, ossia le velocità, v, w', w non oltrepassano certi limiti. Ma diminuendo l'angolo $(v, \overline{\omega r})$ e diventando prossimo a 180° l'angolo $(w, \overline{\omega r'})$ le velocità v, w' per valori finiti di V, W' (form. 3; *e*), crescono continuamente e hanno per limite ∞. Ne viene di lì che le soluzioni $\text{ang}(v, \overline{\omega r}) = 0$ e $\text{ang}(w', \overline{\omega r'}) = 180°$, corrispondentemente alle quali il coefficiente di rendimento i sarebbe uno, si devono escludere, e che le formole (20) e (21) non sono applicabili che tanto che gli angoli $(v, \overline{\omega r})$ e $(w', \overline{\omega r'})$ sono convenientemente diversi; il primo dà zero, e il secondo dà 180°.

Osservazioni del diametro solare fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1876.

Nota del Socio L. RESPIGHI

letta nella seduta del 6 maggio 1877.

Le osservazioni della durata del passaggio meridiano del disco solare sono state eseguite nel passato anno 1876 collo strumento e col metodo usato negli anni antecedenti, sino alla fine del mese di maggio, e nella maggior parte dall'assistente sig. dott. Di Legge. Alla fine del maggio però venne cambiato il modo di osservazione, e cioè prendendo gli appulsi dei bordi coi fili sull'immagine ottenuta per projezione sopra opportuno diaframma, disposto perpendicolarmente all'asse del cannocchiale, a tale distanza da ottenere l'immagine stessa notevolmente ingrandita, del diametro cioè di 70 centimetri. Malgrado tale ingrandimento, portando per ogni contatto l'immagine del bordo al centro del campo dell'oculare, il lembo e i fili riescono così ben definiti da potersi osservare gli appulsi almeno con precisione eguale a quella che può raggiungersi nell'osservazione diretta, col vantaggio di una posizione molto più comoda per l'osservatore, tanto per osservare i contatti, quanto per prendere al cronometro i tempi corrispondenti.

Assicurato della bontà di questo modo di osservare la durata del passaggio del disco solare, ho creduto opportuno di approfittarne per instituire delle ricerche sugli errori personali in questa speciale osservazione, allo scopo di riconoscere l'esistenza di tali errori e l'influenza che essi possono produrre sulla misura del diametro solare; e quindi arguire entro quali limiti possano ragionevolmente ritenersi come paragonabili i risultati ottenuti da varî osservatori anche da regolari e lunghe serie di osservazioni.

Nelle mie antecedenti Note sulla grandezza e sulle variazioni del diametro solare, mentre cercai di mostrare non ammissibili in questo elemento variazioni irregolari ed a breve periodo, indicando le varie cause che di giorno in giorno e da luogo a luogo possono più o meno sensibilmente influire sul risultato delle osservazioni, e produrre quindi in essi degli errori accidentali, che da taluni venivano a torto considerati come corrispondenti invece a variazioni reali del diametro apparente del sole, parlando poi delle variazioni periodiche ed a lungo periodo, non esitai di dichiarare che mancavano i dati opportuni per risolvere questa delicata questione, non potendosi ritenere come rigorosamente paragonabili i risultati ottenuti anche da lunghe serie di osservazioni, fatte in condizioni e località diverse, con istrumenti diversi e da diversi osservatori, non essendo in questi casi esclusa l'influenza di errori sistematici e costanti.

E fra questi errori non mancai di far rimarcare l'errore personale, che non può ritenersi compensato nelle osservazioni dei contatti dei due bordi, trattandosi di due

osservazioni sostanzialmente diverse, e quindi probabilmente affette anche per lo stesso osservatore da due diversi errori personali.

Le ricerche finora fatte a questo riguardo dagli astronomi sono assai scarse e non abbastanza concludenti, perchè basate sopra serie di osservazioni non abbastanza numerose, o fatte in condizioni non del tutto identiche, per cui non resta escluso il dubbio che gli errori personali così dedotti non fossero alterati da altre cause estranee, e principalmente dalla diversità delle condizioni atmosferiche in cui furono fatte le osservazioni, non potendosi in questa speciale osservazione ritenere come assolutamente costante l'errore personale nei contatti dei due bordi.

Le osservazioni per projezione mi sembrano le più indicate per questa ricerca, per determinare cioè l'errore personale relativo di due o più osservatori, perchè potendo essi osservare simultaneamente lo stesso passaggio, gli stessi contatti, la differenza dei risultati non può dipendere che dai loro errori personali, ossia dal loro diverso modo di giudicare dell'istante del contatto; è perciò io mi proponeva di fare una serie di osservazioni di confronto fra me e gli assistenti dott. Di Legge e dott. Giacomelli, tutti convenientemente esercitati in questo genere di osservazioni.

Quantunque si potessero fare queste osservazioni simultaneamente da tutti e tre gli osservatori, pure esse furono fatte ordinariamente da due soli, non tanto per la difficoltà di poterli ottenere frequentemente disponibili tutti e tre per questa operazione, quanto per meglio assicurare ad essi la desiderata uniformità di condizioni per l'osservazione dell'immagine solare e del cronometro.

Il numero delle osservazioni simultanee complete fatte nello scorso anno dal 30 maggio sino al 31 decembre sono 87; delle quali 55 fra me e Di Legge, 28 fra me e Giacomelli, 4 fra Di Legge e Giacomelli.

Quantunque il numero delle osservazioni sia piuttosto limitato, pure per la costanza dei risultati è già sufficiente a mostrare l'esistenza e l'entità di questi errori personali, e nel caso nostro a valutarne approssimativamente le grandezze relative, le quali verranno anche meglio determinate per mezzo di nuove e più numerose osservazioni che ora si stanno raccogliendo.

Il numero totale dei passaggi osservati nello scorso anno 1876 è 197, in 87 dei quali le osservazioni furono fatte simultaneamente da due osservatori; per cui si ha un complesso di 284 misure del diametro orizzontale del sole: queste osservazioni sono divise fra i tre osservatori nel seguente modo e cioè

Di Legge n.° 140 Respighi n.° 90 Giacomelli n.° 54

I risultati di tutte queste osservazioni in ordine di data sono contenuti nell'unito Specchio, nel quale la prima colonna somministra in tempo siderale la durata del passaggio del diametro solare, la seconda la durata rispettiva data dal Nautical Almanac di Londra; la terza dà la differenza fra la durata osservata e la calcolata; la quarta contiene il semidiametro apparente dedotto dalla durata osservata, e finalmente l'ultima colonna indica i nomi degli osservatori distinti colle iniziali

D. . . . . Di Legge G. . . . . Giacomelli R. . . . . Respighi

Confrontando la durata osservata con quella data dal Nautical Almanac, si trova che in 284 osservazioni ve ne hanno 218 che danno la differenza osservazione-calcolo negativa, 6 nulla e 60 positiva; il che conferma il risultato ottenuto gli anni scorsi,

e cioè che le durate date dal Nautical Almanac sono maggiori del vero, e che perciò è troppo grande il valore del semidiametro medio sul quale esse sono calcolate.

Il medio di queste differenze dedotto dal complesso delle osservazioni è di

	Di Legge	Respighi	Giacomelli
-0^s, 083 cogli estremi	$+0^s$, 24	$+0^s$, 03	$+0^s$, 14
	— 0, 31	— 0, 33	— 0, 49

Prendendo separatamente le osservazioni dei tre osservatori si hanno le seguenti differenze medie:

Differenza media	-0^s, 050	da 140	osservazioni Di Legge
» massima	— 0, 128	da 90	osservazioni Respighi
» minima	— 0, 072	da 54	osservazioni Giacomelli

Le maggiori differenze si sono generalmente riscontrate, secondo il solito, nelle circostanze atmosferiche anormali e cioè col sole annebbiato o fra nubi, o durante le grandi agitazioni atmosferiche, per le quali il bordo solare riusciva indeciso saltellante od ondulato. Debbo però a questo riguardo avvertire che in circostanze di cielo nebbioso la durata del passaggio del disco solare è riuscita generalmente molto inferiore alla media, anche quando i bordi si presentavano ben definiti e stabili.

Prendendo il medio dei 284 valori ottenuti pel semidiametro solare, ridotto alla distanza media della terra al sole, si ha

$$\Delta = 961'',20$$

cogli estremi

massimo	963″,6
minimo	958,3

Prendendo invece i risultati avuti separatamente da ciascun osservatore, si ha

	Di Legge	Respighi	Giacomelli
Δ medio	$= 961'',44$	960″,82	961″,23
» massimo	$= 963,6$	962,0	963,2
» minimo	$= 959,4$	959,5	958,3

Da questi risultati si potrebbe dedurre che prendendo per tipo quello del dot. Di Legge, Respighi è soggetto all'errore personale — 0″,62 e Giacomelli all'errore personale — 0″,21. Ma considerando che le osservazioni furono fatte in epoche diverse, e quelle del Di Legge con due metodi di osservazione differenti, e cioè 53 col metodo ordinario ed 87 col metodo di projezione, mentre per gli altri due osservatori le osservazioni sono quasi tutte fatte per projezione, questo modo di confronto non è rigoroso, e quindi non accettabili gli errori personali relativi da esso dedotti.

Il confronto può rendersi meno difettoso, prendendo anche pel Di Legge le sole osservazioni fatte per projezione, dalle quali si ha per valore medio del semidiametro solare $\Delta = 961'',29$; e quindi per Respighi l'errore personale rispetto allo stesso Di Legge — 0″,47′, e per Giacomelli — 0″,07; ma con ciò non si esclude l'incertezza proveniente dalla diversità del numero delle osservazioni e delle epoche in cui furono fatte.

Per meglio assicurare i valori di questi errori personali sarebbe necessario che noi avessimo un sufficiente numero di osservazioni simultanee fatte dai tre osservatori, od almeno un numero sufficiente di osservazioni fatte simultaneamente da ognuna

delle tre coppie di osservatori Di Legge-Respighi, Di Legge-Giacomelli, Respighi-Giacomelli, ciò che appunto mi sono proposto di fare nel corrente anno 1877.

Ma siccome tra le osservazioni fatte nello scorso anno 1876, ne abbiamo un conveniente numero di quelle fatte simultaneamente da Di Legge e Respighi, e da Respighi e Giacomelli, così credo opportuno di utilizzarle per ottenere almeno in modo approssimativo i nostri errori personali relativi, colla intenzione e colla speranza di farne con ulteriori osservazioni una più esatta determinazione.

Il numero dei passaggi da me osservati insieme al Di Legge dal 30 maggio alla fine dell'anno 1876 è 55; e fatte pochissime eccezioni la durata del passaggio del diametro solare è stata dedotta dai contatti dei bordi a tutti i sette fili del reticolo.

Sopra 55 osservazioni 45 danno la differenza Respighi-Di Legge negativa, 8 positiva e 2 nulla: cosicchè in generale le durate da me osservate sono minori di quelle trovate dal Di Legge, risultando in medio la differenza

Respighi-Di Legge $= -0^s,076$

cogli estremi $-0^s,30$, $+0^s,11$.

Questi risultati, mentre provano che nell'osservazione del passaggio dei due bordi solari al meridiano esiste certamente fra me e Di-Legge un errore personale, e cioè un diverso modo di stimare l'istante dei contatti nei due bordi, per cui l'intervallo fra questi riesce sensibilmente minore nelle mie osservazioni, mostrano poi che questo errore personale è ben lontano dall'essere costante, potendo il medesimo oscillare in limiti molto larghi, e cioè oltre a $0^s,2$ in più od in meno.

Qualora si consideri che questi risultati sono dedotti da osservazioni simultanee, fatte nelle stessissime condizioni, collo stesso strumento, sulla stessa immagine, dalla osservazione insomma dello stesso fenomeno, e da osservatori molto esercitati nella medesima, facilmente si comprenderà quanto sia irragionevole il pretendere con poche osservazioni di ottenere un valore plausibile del diametro solare da un medesimo osservatore ed anche da più osservatori, e con quanta circospezione si debba procedere nella deduzione del valore vero od assoluto del diametro stesso da osservazioni fatte da diversi osservatori, e così quanto sia difficile il decidere se la differenza dei risultati, prescindendo anche dalle varie altre sorgenti di errore, provenga dai diversi modi di misurare la quantità, o da reali variazioni nella sua grandezza.

Le osservazioni simultanee fatte da me e Giacomelli sono 28, in 20 delle quali la differenza fra la durata del passaggio del disco solare Respighi-Giacomelli riescì 20 volte negativa, 7 positiva ed 1 nulla; dal che si deduce che in generale io trovo la durata del passaggio minore di quella osservata dal Giacomelli, risultando in medio questa differenza

Respighi-Giacomelli $= -0^s,042$

cogli estremi $-0^s,23$, $+0^s,14$

Tanto nella prima quanto nella seconda serie di osservazioni si trova poi che le maggiori differenze colla media hanno luogo generalmente in circostanze di condizioni atmosferiche anormali, che rendono il bordo solare non ben definito, oscillante o tremolante; per cui si vede che l'errore personale non può ritenersi come rigorosamente costante, ma variabile secondo lo stato del bordo solare, e ciò se non nel segno certo nella grandezza.

Le osservazioni simultanee fatte dal Di Legge e Giacomelli, non essendo che 4, non possono ragionevolmente impiegarsi alla determinazione dell'errore personale relativo dei due osservatori, il quale però potrebbe in via approssimativa ricavarsi da quelli ottenuti colle due altre coppie di osservatori, avendosi come termine comune di confronto Respighi, e con ciò si avrebbe fra Di Legge e Giacomelli l'errore personale

Di Legge-Giacomelli $= +0^s,034$

Il numero delle osservazioni di confronto è senza dubbio troppo limitato per potere ritenere che le trovate differenze rappresentino il valore medio dell'errore personale, quale si richiederebbe per rendere paragonabili i risultati ottenuti da lunghe serie di osservazioni dai tre osservatori, non potendosi ritenere in quei medî convenientemente compensate le variazioni od errori accidentali: ciò peraltro non esclude che avuto riguardo alla rigorosa comparabilità dalle osservazioni, i risultati ottenuti non si possano considerare come sufficientemente approssimativi; il che ritengo si farà più manifesto per le osservazioni che ora si vanno a questo scopo raccogliendo.

L'errore personale nella misura della durata del passaggio meridiano del disco solare, dipende dal diverso modo che seguono i varî osservatori nel giudicare o stimare l'istante dei contatti dei due bordi del sole coi fili del reticolo, e perciò esso risulta dalla differenza dei due errori personali proprî delle due singole osservazioni, i quali possono nel caso nostro essere studiati e separatamente determinati.

L'errore personale della durata del passaggio del sole può essere dedotto dalla differenza dei risultati ottenuti da varî osservatori da una lunga serie di osservazioni fatte collo stesso strumento; ma in questo modo non si hanno i veri errori personali cui andiamo soggetti nelle osservazioni dei contatti dei due bordi occidentale od orientale, ma soltanto la loro differenza; la quale se basta a rendere paragonabili i risultati ottenuti per la grandezza del diametro solare, quando l'osservazione è fatta ad entrambi i bordi ed a tutti i fili, non lo è egualmente se le osservazioni sono state fatte soltanto ad un bordo o soltanto ad alcuni fili del reticolo; nei quali casi è indispensabile di conoscere i valori dei due distinti errori nelle osservazioni dei due bordi.

Questi dati possono tornare proficui anche per la determinazione esatta del tempo del passaggio meridiano del sole, non potendosi accettare come tale il medio dei tempi dei passaggi dei due bordi.

Di più, la determinazione degli errori personali nei contatti dei bordi può riescire utilissima per istudiare le cause e le circostanze che concorrono alla produzione degli errori stessi.

Le osservazioni per projezione, da noi usate, sono certamente le più opportune per questa ricerca, potendosi in esse ottenere separatamente i tempi dei passaggi meridiani dei due bordi pei varî osservatori, e quindi dedurre per ognuno dei due passaggi i tempi corrispondenti.

Dalle 55 osservazioni simultanee fatte da me e dal Di Legge risulta pel passaggio del bordo occidentale l'errore personale medio

Respighi-Di Legge $= + 0,005$

pel bordo orientale

Respighi-Di Legge $= -0^s,071$

Dal che si deduce che l'errore personale fra me e Di Legge risulta principalmente dall'osservazione del secondo bordo, ossia del bordo orientale, pel quale io stimo il contatto a circa 7 centesimi di secondo prima di Di Legge, mentre per i contatti dell'altro bordo i risultati sono quasi identici.

Delle 28 osservazioni simultanee fatte da me e dal Giacomelli, prendendo separatamente i tempi osservati pel passaggio dei due bordi, si trova in risultato medio pel bordo occidentale

$$\text{Respighi-Giacomelli} = -0^s,059$$

e pel bordo orientale

$$\text{Respighi-Giacomelli} = -0^s,100$$

cosicchè nelle mie osservazioni sono anticipati i contatti tanto nel bordo occidentale come nell'orientale, avendosi però anche in questo caso, e cioè fra le mie osservazioni e quelle di Giacomelli, la parte principale dell'errore personale dipendente dall'osservazione del contatto del bordo orientale.

Questi risultati tenderebbero a mostrare che l'osservazione del secondo lembo solare, ossia del lembo occidentale, è più incerta che quella dell'altro lembo, mentre a primo aspetto ed anche in conformità all'opinione di varî astronomi, sembrerebbe che maggiore dovesse essere l'incertezza nell'osservazione del primo lembo, per la circostanza che nel contatto del bordo orientale i fili si veggono generalmente deboli e poco decisi prima del contatto, mentre nell'osservazione dell'altro lembo il filo oscuro, projettandosi sul disco luminoso, si mostra distintissimo, in modo da rendere l'osservatore ben preparato a prendere gli istanti dei contatti.

Ma tale opinione è basata sulla supposizione che l'indicata circostanza sia la principale sorgente di incertezza in queste osservazioni, mentre ciò è discutibile, potendo contribuire a questa incertezza altre cause, e principalmente la sostanziale differenza delle due osservazioni, corrispondendo la prima al contatto od ingresso di un filo oscuro su di un disco lucido pel lembo convesso, la seconda invece allo stacco od uscita di un filo oscuro da un disco lucido pel suo lembo concavo.

Perciò, se a *priori* può ammettersi come probabile e quasi certo un errore personale nella misura della durata del passaggio meridiano del disco del sole, non può egualmente ammettersi che questo errore debba dipendere piuttosto dall'osservazione del bordo occidentale che da quella del bordo orientale; mentre può accadere che per alcuni osservatori l'errore personale in questa misura risulti dalla somma di due errori eguali o diseguali e di segno contrario commessi nell'osservazione dei due bordi; in altri invece risulti da due errori diseguali e dello stesso segno, avendosi per alcuni maggiore l'errore nel bordo occidentale, per altri invece quello del bordo orientale.

Nelle nostre osservazioni, se gli errori personali relativi fra i tre osservatori sono abbastanza piccoli, specialmente nell'osservazione del contatto del bordo occidentale, ciò può dipendere dal metodo di osservazione, nel quale osservandosi i contatti per projezione, le immagini dei fili riescono molto regolari, ben definite e distintamente visibili, anche nel contatto del bordo occidentale, molto tempo prima del contatto stesso, in guisa che l'osservatore trovasi meglio preparato che nell'ordinario modo di osservare.

Ho di già accennato che le osservazioni per projezione sono almeno egualmente

buone che le osservazioni dirette, ma esaminando i risultati credo si possa dedurre che le prime osservazioni sono anzi migliori delle seconde per la minore grandezza dell'errore probabile.

Infatti, se noi prendiamo il medio dei risultati ottenuti dalle sole osservazioni per projezione dai tre osservatori, abbiamo pel semidiametro Δ ridotto alla distanza media della terra al sole

	Di Legge	Respighi	Giacomelli
Δ medio	= 961″,29	960″,82	961″,17
» massimo	= 962,8	962,0	963,2
» minimo	= 659,5	959,5	959,3
Errore probabile	= 0,478	0,450	0,525
Errore probabile del medio	= 0,051	0,047	0,070
Numero delle osservazioni	87	90	49

Le osservazioni dei passaggi del sole essendosi fatte negli anni antecedenti quasi esclusivamente dal dott. Di Legge, non possiamo fare un confronto fra gli errori probabili dei tre osservatori nelle osservazioni per projezione e gli errori delle osservazioni dirette: facendolo però per le osservazioni del Di Legge si trova che mentre nelle osservazioni per projezione l'errore probabile di ogni osservazione è di 0″,478, nelle osservazioni dirette invece per lo stesso osservatore l'errore probabile è riuscito negli anni antecedenti di circa 0″,600; il che indica un maggior grado di precisione nelle prime.

Riguardo al valore assoluto del semidiametro solare che può ricavarsi dalle osservazioni fatte nel 1876, credo opportuno di far rimarcare, che le osservazioni per projezione condurrebbero ad un valore alquanto minore di quello ricavato dalle osservazioni dirette; poichè prendendo in esame le osservazioni fatte dal Di Legge negli anni precedenti e nel presente anno col metodo ordinario, troviamo i seguenti valori pel semidiametro solare:

1874 . . . . Δ = 961″,42 osservazioni n.° 166
1875 . . . . Δ = 961″,60 » » 196
1876 . . . . Δ = 961,67 » » 53

mentre dalle osservazioni per projezione si trova

1876 . . . . Δ = 961″,29 osservazioni n.° 87

A questo proposito però deve riflettersi che la differenza di circa 0″,38 fra i risultati delle due specie di osservazioni potrebbe almeno in parte dipendere dal ristretto numero delle osservazioni per projezione, e dalla circostanza di corrispondere queste osservazioni ad una sola metà dell'anno.

Perciò la conferma della realtà e costanza di questa differenza deve attendersi da un più copioso materiale di osservazione. Supponendo che il medio dei risultati ottenuti dai tre osservatori nelle osservazioni per projezione rappresenti il vero valore del semidiametro solare si avrebbe

$$\Delta = 961'',09$$

e gli errori personali dei tre osservatori sarebbero prossimamente i seguenti:

Di Legge . . . . . + 0″,20
Respighi . . . . . — 0,27
Giacomelli . . . . . + 0,07

Supponendo inoltre che le osservazioni dirette e quelle per projezione siano egualmente buone, e che l'errore personale del Di Legge sia lo stesso nelle due specie di osservazioni, dai 507 passaggi da lui osservati risulterebbe per valore del semidiametro apparente del sole

$$\Delta = 961'',30$$

valore quasi identico a quello che si ottiene diminuendo $0^s,08$ la durata del passaggio del diametro solare dato dal Nautical Almanac, diminuzione ritenuta necessaria in base ai risultati delle recenti, numerose e regolari osservazioni fatte su questo elemento nel R. Osservatorio di Greenwich, e che perciò verrebbe pienamente confermata anche dalle osservazioni fatte nel nostro Osservatorio in questi tre ultimi anni.

OSSERVAZIONI DEL DIAMETRO ORIZZONTALE DEL SOLE

FATTE AL R. OSSERVATORIO DEL CAMPIDOGLIO NEL 1876.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1876					
Genn. 1	$2^m22^s,16$	$2^m22^s,18$	— 0,02	961″,8	D.
2	21,89	22,08	— 0,19	960,7	»
3	21,96	22,00	— 0,04	961,7	»
5	21,70	21,78	— 0,08	961,4	»
6	21,84	21,66	+ 0,18	963,2	»
10	21,10	21,10	0,00	961,9	»
14	20,13	20,42	— 0,29	959,8	»
15	19,99	20,24	— 0,25	960,2	»
18	19,45	19,66	— 0,21	960,5	G.
20	19,11	19,26	— 0,15	960,9	»
23	18,79	18,66	+ 0,13	963,1	D.
31	16,62	16,82	— 0,20	960,3	G.
Febb. 1	16,44	16,60	— 0,16	960,8	D.
3	16,07	16,14	— 0,07	961,3	G.
4	15,96	15,90	+ 0,06	962,2	D.
12	14,20	14,10	+ 0,10	962,6	»
13	13,39	13,88	— 0,49	958,3	G.
15	13,70	13,46	+ 0,24	963,6	D.
18	13,02	12,84	+ 0,18	963,1	»
19	12,51	12,62	— 0,11	960,9	»
20	12,40	12,44	— 0,04	961,4	»
21	12,48	12,26	+ 0,22	963,4	»
22	12,25	12,06	+ 0,19	963,2	»
25	11,63	11,54	+ 0,09	962,5	»
27	11,07	11,20	— 0,13	960,9	»
29	11,03	10,90	+ 0,13	962,8	»
Marzo 3	10,64	10,46	+ 0,18	963,1	»
4	10,51	10,34	+ 0,17	963,0	»
8	9,81	9,86	— 0,05	961,4	»
13	9,35	9,40	— 0,05	961,4	»
14	9,36	9,32	+ 0,04	962,0	»
15	9,34	9,26	+ 0,08	962,4	»
17	8,96	9,12	— 0,16	960,5	»
21	8,89	8,96	— 0,07	961,2	»
27	8,87	8,90	— 0,03	961,5	»
30	9,05	8,94	+ 0,11	962,5	»
Aprile 1	9,08	9,00	+ 0,08	962,3	»
2	8,94	9,04	— 0,10	960,9	»
3	8,95	9,08	— 0,13	960,7	»
4	9,06	9,14	— 0,08	961,1	»
5	8,88	9,20	— 0,32	959,4	»
6	9,23	9,26	— 0,03	961,5	»
7	9,28	9,32	— 0,04	961,4	»
8	9,40	9,38	+ 0,02	961,8	»
10	9,71	9,54	+ 0,17	962,9	»
12	9,54	9,72	— 0,18	960,4	»
19	10,57	10,48	+ 0,09	962,4	»
25	11,37	11,28	+ 0,09	962,4	»
28	11,55	11,72	— 0,17	960,7	»

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1876					
Apr. 29	$2^m11^s,74$	$2^m11^s,88$	— 0,14	160″,9	D.
Magg. 3	12,47	12,52	— 0,05	961,5	»
4	12,54	12,68	— 0,14	960,8	»
8	13,00	13,32	— 0,23	760,2	»
0	13,89	13,98	— 0,09	961,2	»
13	13,97	14,14	— 0,17	960,5	»
16	14,56	14,64	— 0,08	961,4	»
21	15,25	15,40	— 0,15	960,9	G.
22	15,55	15,56	— 0,01	961,8	D.
23	15,68	15,70	— 0,02	961,7	»
25	15,91	15,98	— 0,07	961,4	R.
30	16,67	16,64	+ 0,03	962,0	D.
»	16,53	» »	— 0,11	961,2	R.
31	16,66	16,76	— 0,08	961,3	D.
Giug. 1	16,68	16,86	— 0,18	960,6	»
»	16,53	» »	— 0,33	959,5	R.
2	16,86	16,98	— 0,12	961,1	D.
»	16,85	» »	— 0,13	961,0	R.
3	16,79	17,08	— 0,29	959,9	D.
»	16,74	» »	— 0,34	959,5	R.
5	17,27	17,26	+ 0,01	961,8	D.
»	17,31	» »	+ 0,05	962,1	G.
7	17,42	17,44	— 0,02	961,7	D.
»	17,34	» »	— 0,10	961,1	R.
9	17,52	17,58	— 0,06	961,4	D.
»	17,49	» »	— 0,09	961,2	R.
14	17,88	17,84	+ 0,04	962,1	D.
»	17,81	» »	— 0,03	961,6	R.
16	17,72	17,90	— 0,18	960,6	D.
»	17,64	» »	— 0,26	959,9	R.
17	17,73	17,92	— 0,19	960,6	D.
»	17,74	» »	— 0,18	960,7	R.
18	17,92	17,92	0,00	961,8	»
»	17,85	17,92	— 0,07	961,3	G.
19	17,84	19,92	— 0,08	961,2	D.
»	17,67	17,92	— 0,25	960,1	R.
22	17,68	17,92	— 0,24	960,2	D.
»	17,77	» »	— 0,15	960,8	R.
26	17,65	17,80	— 0,15	960,8	D.
»	17,60	» »	— 0,20	960,4	R.
28	17,79	17,70	+ 0,09	962,4	D.
»	17,72	» »	+ 0,02	962,0	R.
30	17,58	17,58	0,00	961,8	D.
»	17,32	» »	— 0,26	960,0	R.
Lugl. 1	17,59	17,50	+ 0,09	962,5	D.
»	17,29	» »	— 0,21	960,3	R.
3	17,18	17,34	— 0,16	960,6	D.
»	17,06	» »	— 0,28	959,8	R.
4	17,30	17,26	+ 0,04	962,1	D.

OSSERVAZIONI DEL DIAMETRO ORIZZONTALE DEL SOLE

FATTE AL R. OSSERVATORIO DEL CAMPIDOGLIO NEL 1876.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1876					
Lugl. 5	$2^m17^s,12$	$2^m17^s,16$	— 0,04	961″,5	D.
6	16,98	17,06	— 0,08	961,3	»
7	16,92	16,96	— 0,04	961,2	»
8	16,60	16,84	— 0,24	960,1	»
9	16,66	16,74	— 0,08	961,3	R.
10	16,64	16,62	+ 0,02	962,0	D.
»	16,40	» »	— 0,22	960,4	R.
11	16,39	16,48	— 0,09	961,2	D.
12	16,37	16,36	+ 0,01	961,9	»
15	15,78	15,94	— 0,16	960,8	»
»	15,61	» »	— 0,33	959,6	R.
16	15,56	15,80	— 0,24	960,2	»
»	15,61	» »	— 0,19	960,7	G.
17	15,60	15,66	— 0,06	961,5	D.
»	15,55	15,66	— 0,11	961,2	R.
18	15,59	15,50	+ 0,09	962,5	D.
19	15,32	15,34	— 0,02	961,7	»
23	14,81	14,70	+ 0,11	962,6	G.
24	14,55	14,54	+ 0,01	961,9	D.
25	14,29	14,36	— 0,07	961,4	G.
27	13,99	14,04	— 0,05	961,6	D.
28	13,85	13,86	— 0,01	961,7	»
29	13,57	13,68	— 0,11	961,1	G
30	13,52	13,52	0,00	961,9	»
31	13,42	13,34	+ 0,08	962,4	»
Agosto 1	13,24	13,16	+ 0,08	962,3	»
2	12,95	13,00	— 0,05	961,4	»
3	12,77	12,82	— 0,05	961,4	D.
4	12,59	12,66	— 0,07	961,3	»
5	12,45	12,48	— 0,03	961,6	»
6	12,26	12,30	— 0,04	961,6	G.
7	12,10	12,14	— 0,04	961,7	D.
8	11,99	11,96	+ 0,03	962,0	G.
9	11,57	11,80	— 0,23	960,2	D.
10	11,42	11,64	— 0,22	960,3	»
11	11,43	11,46	— 0,03	961,6	»
12	11,39	11,30	+ 0,09	962,4	G.
13	11,16	11,14	+ 0,02	962,0	»
14	10,90	11,10	— 0,10	961,2	»
15	10,98	10,84	+ 0,14	962,9	»
17	10,39	10,54	— 0,15	960,8	D.
18	10,59	10,38	+ 0,21	963,2	G.
19	10,06	10,24	— 0,18	960,5	D.
20	9,96	10,10	— 0,14	960,7	G.
21	9,76	9,96	— 0,20	960,3	D.
22	9,56	9,84	— 0,28	959,7	»
25	9,35	9,46	— 0,11	961,1	»
26	9,16	9,36	— 0,20	960,4	»
»	9,04	» »	— 0,32	959,6	R.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1876					
Agos. 27	$2^m9^s,19$	$2^m9^s,24$	— 0,05	961″,3	R.
28	9,07	9,14	— 0,07	961,5	D.
»	8,96	» »	— 0,18	960,5	R.
29	9,00	9,04	— 0,04	961,6	D.
»	8,84	» »	— 0,20	960,4	R.
30	8,82	8,94	— 0,12	961,0	»
Sett. 1	8,49	8,76	— 0,27	959,9	»
2	8,62	8,64	— 0,02	961,5	D.
3	8,43	8,60	— 0,17	960,7	R.
4	8,54	8,52	+ 0,02	962,0	D.
»	8,45	» »	— 0,07	961,2	R.
5	8,41	8,46	— 0,05	961,6	D.
»	8,30	» »	— 0,07	961,3	R.
6	8,44	8,40	+ 0,04	962,1	D.
»	8,39	» »	— 0,01	961,7	R.
7	8,14	8,34	— 0,20	960,3	D.
»	8,18	» »	— 0,16	960,6	R.
9	8,16	8,24	— 0,08	961,2	D.
»	8,11	» »	— 0,13	960,9	R.
10	8,06	8,20	— 0,14	960,8	D.
»	8,06	» »	— 0,14	960,8	R.
11	8,08	8,16	— 0,08	961,2	D.
»	8,09	» »	— 0,07	961,3	R.
13	7,92	8,12	— 0,20	960,3	D.
»	7,87	» »	— 0,25	960,0	R.
18	8,10	8,10	0,00	961,9	D.
»	8,02	» »	— 0,08	961,3	R.
19	7,79	8,10	— 0,31	959,5	D.
»	7,86	» »	— 0,24	960,0	R.
21	8,19	8,16	+ 0,03	962,0	D.
»	8,17	» »	+ 0,01	961,9	R.
22	8,11	8,18	— 0,07	961,3	D.
»	8,14	8,18	— 0,04	961,5	R.
23	8,24	8,22	+ 0,02	961,9	D.
»	8,11	» »	— 0,11	961,1	R.
24	8,15	8,28	— 0,13	961,0	D.
»	8,19	» »	— 0,09	961,3	R.
25	8,38	8,32	+ 0,06	962,2	D.
»	8,16	» »	— 0,16	960,6	R.
26	8,48	8,38	+ 0,10	962,6	D.
»	8,27	» »	— 0,11	961,1	R.
30	8,56	8,66	— 0,10	961,0	D.
»	8,56	» »	— 0,10	961,0	R.
Ott. 1	8,56	8,76	— 0,20	960,4	D.
»	8,53	» »	— 0,23	960,2	R.
2	8,82	8,76	— 0,04	961,6	D.
»	8,79	» »	— 0,07	961,5	R.
3	8,83	8,96	— 0,13	960,9	D.
»	8,94	» »	— 0,02	961,7	R.

OSSERVAZIONI DEL DIAMETRO ORIZZONTALE DEL SOLE

FATTE AL R. OSSERVATORIO DEL CAMPIDOGLIO NEL 1876.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1876					
Ott. 4	$2^m9^s,01$	$2^m9^s,06$	— 0,05	961″,4	D.
»	8,93	» »	— 0,13	960,8	R.
5	9,12	9,16	— 0,04	961,6	D.
»	8,94	» »	— 0,22	960,2	R.
6	9,36	9,28	+ 0,08	962,4	D.
»	9,26	» »	— 0,02	961,7	R.
7	9,53	9,40	+ 0,13	962,8	D.
»	9,42	» »	+ 0,02	962,0	R.
8	9,59	9,52	+ 0,07	962,3	D.
»	9,49	» »	— 0,03	961,6	R.
9	9,62	9,66	— 0,04	961,6	R.
»	9,68	» »	+ 0,02	962,1	G.
10	9,84	9,80	+ 0,04	962,1	D.
»	9,67	» »	— 0,13	960,9	R.
11	9,86	9,94	— 0,08	961,3	»
»	9,78	» »	— 0,16	960,7	G.
12	10,01	10,10	— 0,09	960,3	»
13	9,92	10,24	— 0,32	959,5	R.
»	10,05	» »	— 0,19	960,5	G.
14	10,35	10,40	— 0,05	961,5	R.
»	10,34	» »	— 0,06	961,4	G.
15	10,48	10,58	— 0,10	961,2	R.
»	10,64	» »	+ 0,06	962,3	G.
16	10,59	10,74	— 0,15	960,7	R.
»	10,78	» »	+ 0,04	962,1	G.
17	10,75	10,92	— 0,17	960,6	R.
»	10,86	» »	— 0,06	961,4	G.
18	11,06	11,10	— 0,04	961,6	R.
»	11,06	» »	— 0,04	961,6	G.
19	11,31	11,28	+ 0,03	962,0	R.
»	11,19	» »	— 0,09	961,2	G.
22	11,74	11,86	— 0,12	961,0	R.
»	11,81	» »	— 0,05	961,5	G.
23	11,84	12,06	— 0,22	960,3	R.
»	11,70	» »	— 0,36	959,3	G.
28	12,99	13,12	— 0,13	960,8	R.
»	13,00	» »	— 0,12	960,9	G.
29	13,26	13,34	— 0,08	961,2	»
30	13,51	13,56	— 0,05	961,4	R.
»	13,49	» »	— 0,07	961,3	G.
31	15,53	13,80	— 0,27	959,9	R.
»	13,59	» »	— 0,21	960,3	G.
Nov. 2	14,00	14,26	— 0,26	960,0	R.
»	14,14	» »	— 0,12	961,0	G.
3	14,34	14,48	— 0,14	960,8	R.
»	14,46	» »	— 0,02	961,7	G.
4	14,56	14,72	— 0,16	960,7	R.
»	14,63	» »	— 0,09	961,2	G.
5	14,82	14,96	— 0,14	960,8	R.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1876					
Nov. 5	$2^m14^s,85$	$2^m14^s,96$	— 0,11	961″,1	G.
6	14,98	15,20	— 0,22	960,3	R.
»	15,21	» »	+ 0,01	961,9	G.
7	15,46	15,44	+ 0,02	962,0	R.
»	15,46	» »	+ 0,02	962,0	G.
8	15,47	15,68	— 0,21	960,4	R.
»	15,39	» »	— 0,29	959,8	G.
10	16,08	16,14	— 0,06	961,4	R.
»	16,14	» »	0,00	961,8	G.
11	16,34	16,38	— 0,04	961,6	R.
»	16,42	» »	+ 0,04	962,1	G.
15	17,18	17,34	— 0,16	960,6	R.
»	17,24	» »	— 0,10	961,2	G.
18	17,79	18,02	— 0,23	960,1	R.
»	17,99	» »	— 0,03	961,6	G.
19	18,19	18,26	— 0,07	961,4	D.
»	18,08	» »	— 0,08	961,3	R.
22	18,71	18,92	— 0,21	960,3	D.
»	18,64	» »	— 0,28	959,8	R.
24	19,27	19,36	— 0,09	961,2	D.
»	19,10	» »	— 0,26	960,0	R.
25	19,45	19,56	— 0,11	961,2	D.
»	19,38	» »	— 0,18	960,6	R.
26	19,54	19,76	— 0,22	960,3	D.
»	19,46	» »	— 0,30	959,7	G.
Dec. 11	21,98	22,04	— 0,06	961,4	D.
»	21,92	» »	— 0,12	961,0	R.
12	22,10	22,14	— 0,04	961,6	D.
13	22,09	22,22	— 0,13	961,0	»
»	21,97	» »	— 0,25	960,1	R.
17	22,31	22,48	— 0,17	960,7	D.
»	22,13	» »	— 0,35	959,4	G.
25	22,45	22,54	— 0,09	961,2	R.
»	22,36	» »	— 0,18	960,5	G.
26	22,39	22,50	— 0,11	961,1	D.
»	22,41	» »	— 0,09	961,2	G.
27	22,44	22,46	— 0,02	961,6	R.
28	22,36	22,40	— 0,04	961,5	D.
29	22,19	22,34	— 0,15	960,9	»
»	22,14	» »	— 0,20	960,5	R.

Sulla propagazione del suono nella odierna teoria degli aeriformi.

Memoria del dottor ANTONIO ROITI

prof. nell' Istituto Tecnico di Firenze

presentata dal Socio BLASERNA

nella seduta del 3 giugno 1877.

Ho dimostrato nella Nota comunicata alla R. Accademia il 3 decembre 1876, che, ammessa un'uguale probabilità per tutte le direzioni delle trajettorie delle molecole concorrenti a formare un raggio sonoro, la velocità molecolare dovrebb'essere uguale a tre mezzi della velocità del suono.

Ora (§ 1) do un' altra dimostrazione di questo teorema, partendo sempre dalla medesima ipotesi, ma servendomi di considerazioni affatto diverse, e precisamente uguagliando il lavoro di una lastra, che si muove in un mezzo aeriforme, alla forza viva generata.

Faccio poi (§ 2) alcune osservazioni ad un lavoro del signor Hoorweg, il quale assegna a quel rapporto un valore poco differente, cioè 1,504. Discuto il suo tentativo di spiegare la diversità fra la velocità molecolare, ch'egli deduce in tal modo dalla velocità del suono, e la velocità molecolare dedotta con Krönig e Clausius dalla pressione, attribuendola al tempo impiegato dalle molecole nei loro urti; e mostro che invece di un ritardo, dovrebbe ammettersi più logicamente un'anticipazione nella propagazione del suono, dovuta agli urti medesimi. Esamino se tale anticipazione possa spiegarsi, supponendo che gl'impulsi sonori si propaghino fra molecola e molecola con la velocità molecolare, e dentro le molecole con una velocità maggiore: arrivo così a conseguenze che sono in contraddizione colle vedute teoriche di Clausius e di Maxwell intorno alle percorrenze medie fra due urti consecutivi, e colle esperienze di Regnault.

Dimostrata in tal guisa l'insussistenza di simile concetto, mi rivolgo (§ 3) a indagare con quale frequenza le varie direzioni dei moti molecolari dovrebbero contribuire a formare un raggio sonoro, affinchè la velocità molecolare media dedotta dalla propagazione del suono coincidesse con quella che deriva dalla pressione; e metto in rilievo come tale frequenza risulti diversa a seconda che si tratti di molecole gassose costituite da uno, da due o da tre atomi.

§ 1.

Prendiamo a considerare un tubo cilindrico contenente un gas ed avente in una sezione retta un diaframma solido che si muova lungo l'asse colla velocità V; e calcoliamo, analogamente a quello che fece Clausius per una parete in quiete, la

pressione p che soffre tal diaframma per ogni unità d'area, data che sia la velocità molecolare u e la densità del gas.

Una molecola, dopo aver urtato colla velocità u il diaframma sotto un angolo d'incidenza il cui coseno sia α, rimbalzi colla velocità U e con un angolo di riflessione il cui coseno sia β: allora sarà

$$\beta U = \alpha u + V.$$

Se poi indichiamo con n il numero delle molecole di massa m contenute nell'unità di volume, l'unità d'area del diaframma riceverà nell'unità di tempo, coll'incidenza compresa fra α e $\alpha + d\alpha$, un numero d'urti dato da:

$$\frac{n\alpha d\alpha}{\frac{1}{u\alpha} + \frac{1}{U\beta}} = n\frac{u\alpha(u\alpha + V)}{2u\alpha + V}\alpha d\alpha.$$

La componente normale della velocità incidente è:

$$-u\alpha.$$

quella della velocità riflessa è:

$$U\beta = u\alpha + V$$

e quindi la quantità di moto impressa in un urto ad una molecola è:

$$m(2u\alpha + V)$$

e per conseguenza la pressione cercata sarà data da:

$$p = mnu^2\int_0^1 \alpha^2 d\alpha + mnuV\int_0^1 \alpha d\alpha,$$

la quale, indicando con δ la densità del gas in prossimità del diaframma nell'istante cui si riferisce la velocità V, diventa:

$$p = \delta\left(\frac{u^2}{3} + \frac{uV}{2}\right).$$

Ora se supponiamo, come si usa in ogni teoria del suono, che le variazioni della densità siano piccolissime e se indichiamo con σ la cosiddetta condensazione e con δ_0 la densità naturale del gas, potremo scrivere:

$$\delta = \delta_0(1 + \sigma).$$

Ed otterremo il lavoro necessario a produrre uno spostamento dx del diaframma, moltiplicando questo spostamento per la differenza $p_1 - p_2$ delle pressioni esercitate sulle due faccie:

$$(p_1 - p_2)\,dx = \delta_0(1+\sigma)\left(\frac{u^2}{3} + \frac{uV}{2}\right)dx - \delta_0(1-\sigma)\left(\frac{u^2}{3} - \frac{uV}{2}\right)dx =$$

$$= \delta_0\left(uV + \frac{2}{3}u^2\sigma\right)dx.$$

Riflettendo poi che è:

$$dx = Vdt,$$

il lavoro necessario a muovere il diaframma pel tempo t_1, si potrà esprimere con

$$(1) \qquad L = \delta_0 u \int_0^{t_1} V^2 dt + \frac{2}{3} \delta_0 u^2 \int_0^{t_1} V\sigma \, dt.$$

D'altro canto calcoleremo la forza viva comunicata al gas per effetto di questo lavoro. A tal fine indichiamo con U_1 la velocità molecolare al tempo t_1 e ad una distanza dal diaframma compresa fra x ed $x + dx$, e con V_1 la variazione della velocità molecolare nella direzione x provocata dal moto del diaframma. Allora per quelle molecole che si muovono in direzione compresa fra α a $\alpha + d\alpha$ sarà:

$$U_1^2 = u^2 + 2u\, V_1\alpha + V_1^2$$

e quindi la forza viva delle molecole dipenderà dalla direzione del moto. Ma noi porremo in calcolo il valor medio di U_1^2 supponendo che le varie direzioni abbiano la stessa frequenza. Osserviamo per ciò, che nella direzione α avverranno, come si è veduto poc'anzi, $\nu\alpha d\alpha$ urti e quel valor medio sarà

$$U_1^2 = \frac{\nu \int_0^1 U_1^2\, \alpha d\alpha}{\nu \int_0^1 \alpha d\alpha} = u^2 + \frac{4}{3}\, u V_1 + V_1^2$$

e per conseguenza la forza viva dello strato compreso fra x e $x + dx$ al tempo t_1 sarà:

$$\frac{1}{2} \delta_0 (1 + \sigma_1) \overline{U_1^2}\, dx$$

invece di

$$\frac{\delta_0 u^2}{2} dx$$

come sarebbe se il diaframma non si fosse spostato.

Quindi l'eccesso di forza viva prodotto da tale spostamento in quello strato avrà il valore:

$$\frac{\delta_0}{2}\left(\frac{4}{3}\, u V_1 + u^2\sigma_1 + V_1^2 + \frac{4}{3} u V_1\, \sigma_1 + V_1^2 \sigma_1\right) dx$$

e dall'altra parte del diaframma nello strato simmetrico a quello ora considerato:

$$\frac{\delta_0}{2}\left(-\frac{4}{3} u V_1 - u^2\sigma_1 + V_1^2 + \frac{4}{3} u\ V_1\, \sigma_1 - V_1^2 \sigma_1\right) dx.$$

Se nel tempo t_1 la perturbazione si è propagata fino alla distanza x_1, la variazione totale della forza viva alla fine di quel tempo sarà data da:

$$(2) \qquad F = \delta_0 \int_0^{x_1} V_1^2\, dx + \frac{4}{3}\, \delta_0 u \int_0^{x_1} V_1\, \sigma_1\, dx:$$

e dovrà essere necessariamente:

$$(3) \qquad L = F.$$

La funzione potenziale delle velocità che determinano il fenomeno del suono è in generale della forma

$$\varphi = \varphi(x - vt)$$

ove v rappresenta la velocità di propagazione del suono. E quindi:

$$V = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} \quad V_1 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{t=t_1}$$

$$\sigma = -\frac{1}{v^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{x=0} \quad \sigma_1 = -\frac{1}{v^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=t_1}$$

e per essere

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{v}\frac{d\varphi}{dt}:$$

$$\sigma = \frac{1}{v}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{v}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{t=t_1}.$$

La (3), avuto riguardo alle (1) e (2), diventa dunque

$$\left(u + \frac{2}{3}\frac{u^2}{v}\right)\int_0^{t_1}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{x=0} dt = \left(1 + \frac{4}{3}\frac{u}{v}\right)\int_0^{x_1}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{t=t_1} dx. \tag{4}$$

Ma ponendo

$$x - vt = \theta, \quad dt = -\frac{d\theta}{v},$$

ed osservando che

$$x_1 = vt_1$$

e per conseguenza

$$\int_0^{t_1}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{x=0} dt = -\frac{1}{v}\int_0^{-vt_1}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{v}\int_0^{vt_1}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 d\theta$$

$$\int_0^{x_1}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{t=t_1} dx = \int_{-vt_1}^{x_1 - vt_1}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 d\theta = \int_0^{vt_1}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 d\theta,$$

la (4) si riduce a:

$$\frac{u}{v} + \frac{2}{3}\frac{u^2}{v^2} = 1 + \frac{4}{3}\frac{u}{v},$$

che è soddisfatta da

$$\frac{u}{v} = \frac{3}{2},$$

valore identico a quello che trovai nella Nota precedente appoggiandomi a considerazioni affatto diverse.

§ 2.

Il signor Hoorweg, come ho veduto da un sunto di una sua Memoria pubblicato nell'aprile e da me riprodotto nel *Nuovo Cimento* (1), giunge al valore alquanto diverso

$$\frac{u}{v} = 1,504.$$

La piccola differenza di $^4/_{1000}$ potrebbe forse attribuirsi alle approssimazioni cui egli ricorre ne' suoi calcoli; ma non nascondo che i suoi ragionamenti mi lasciano qualche dubbio, il quale non so se possa svanire leggendo direttamente la Memoria originale che non potei procurarmi. Ad ogni modo il signor Hoorweg, trattando il caso di onde sferiche, assume la funzione potenziale della forma:

$$\varphi = \frac{1}{r}\left[A\cos k\left(t - \frac{r}{v}\right) - B\,\mathrm{sen}\,k\left(t - \frac{r}{v}\right)\right]$$

ed arriva alla relazione

$$\frac{u}{v} = \frac{8B - 2A\pi}{A\pi - 2B},$$

la quale fornisce bensì il valore citato 1,504 nel caso particolare di $A = B$; ma in pari tempo richiede che il rapporto della velocità molecolare alla velocità del suono dipenda dalla legge di oscillazione del corpo sonoro: e ciò non può essere fino a che si tien conto, com'egli fece e come si usa generalmente, delle sole prime potenze dell'ampiezza d'oscillazione.

Il signor Hoorweg deduce poi dalla relazione stabilita e dalla velocità del suono $v = 332^m$ il valore $u = 499^m$, e pensa che la differenza di 14^m sul valore analogo determinato da Clausius provenga dal tempo che va impiegato in ogni urto fra le molecole del gas.

Clausius, trascurando questo tempo, avrebbe ritenuto che il numero degli urti fosse maggiore del vero, e quindi avrebbe trovato troppo piccola la velocità molecolare corrispondente ad una data pressione. Infatti, dice il signor Hoorweg, un secondo diventa, a causa del ritardo negli urti

$$1 + \frac{u\tau}{\lambda}$$

(τ durata di un urto, λ percorrenza media fra due urti consecutivi) e la formola di Clausius:

$$ps = \frac{Nmu^2}{3}$$

si muta in

$$ps\left(1 + \frac{u_1\tau}{\lambda}\right) = \frac{Nmu_1^2}{3}$$

(1) *Beiblätter zu den Annalen von Poggendorff*, Vol. I, p. 209. *Nuovo Cimento*, Serie 3, Vol. I, p. 125.

d'onde, trascurando $\frac{u^2 \tau^2}{\lambda^2}$ ed essendo $\frac{Nm}{s} = \delta$:

$$u_1 = \frac{3}{2} \frac{p}{\delta} \frac{\tau}{\lambda} + u ,$$

$$\frac{\tau}{\lambda} = \frac{2\delta}{3p} \left(u_1 - u \right)$$

e indicando il tempo che decorre fra due urti con $\Theta = \frac{\lambda}{u_1}$:

$$\frac{\tau}{\Theta} = \frac{2\delta}{3p} \left(u_1 - u \right) u_1 . \tag{5}$$

Sostituendo in questa formola il valore $u_1 = 499$ ricavato in precedenza dalla velocità del suono, si ottiene:

$$\frac{\tau}{\Theta} = 0{,}059$$

e però Hoorweg conchiude che il tempo impiegato in un urto è piccolissimo rispetto a quello che passa fra due urti.

Ora, prescindendo anche dalla circostanza che u non è veramente la velocità molecolare media, ma che invece u^2 è la media dei quadrati delle velocità molecolari, e ritenendo pure che tutte le molecole sopra una data superficie d'onda abbiamo la stessa velocità u; io credo che, se si vuole correggere u partendo dal concetto di una perdita di tempo τ in ogni urto, si debba tener presente che tale ritardo influirà non solo sul valore della velocità molecolare dedotto dalla pressione, ma anche su quello risultante dalla velocità del suono: e però non mi pare che siamo autorizzati a sostituire senz'altro nella (5) il valore $u_1 = 499$. — Ecco come procederei.

Ciascun impulso percorra una spezzata di n lati eguali a λ colla velocità molecolare corretta u_1 ed in ciascun urto vada impiegato il tempo τ. Allora il tempo richiesto a percorrere quella spezzata è:

$$\frac{n\lambda}{u_1} + n\tau ;$$

ma la spezzata è $^3/_2$ della propria projezione sul raggio sonoro cui corrisponde e per conseguenza, se v è la velocità del suono, il tempo realmente impiegato a percorrerla è:

$$\frac{2n\lambda}{3v} ;$$

dunque:

$$\frac{\tau}{\lambda} = \frac{2}{3v} - \frac{1}{u} . \tag{6}$$

Vediamo ora qual valore si debba assegnare a $\frac{\tau}{\lambda}$ partendo dalla pressione che il gas esercita sulle pareti in quiete.

Figuriamoci con Clausius due pareti piane e parallele alla distanza h, ed il

tempo necessario ad una molecola, che si muove facendo un angolo ϑ colla normale, per andare da una parete all'altra e ritornare alla prima, posto $\alpha = \cos\vartheta$, sarà:

$$\frac{2h}{u\alpha}$$

se non si tien conto del ritardo negli urti; ma nel caso contrario sarà:

$$\frac{2h}{u_1\alpha} + \frac{2h\tau}{\alpha\lambda}.$$

Quindi il numero degli urti impressi da quella molecola alla parete nell'unità di tempo è:

$$\frac{\alpha}{2h} \cdot \frac{u_1}{1 + \frac{\tau}{\lambda} u_1}$$

e il numero degli urti coll'incidenza compresa fra α e $\alpha + d\alpha$ è:

$$\frac{n}{2h} \cdot \frac{u_1 \alpha d\alpha}{1 + \frac{\tau}{\lambda} u_1}.$$

Ma la quantità di moto comunicata in ciascun urto è:

$$2mu_1\alpha,$$

dunque:

$$p = \frac{nm}{h} \cdot \frac{{u_1}^2}{1 + \frac{\tau}{\lambda} u_1} \int_0^1 \alpha^2 d\alpha$$

ossia

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta {u_1}^2}{1 + \frac{\tau}{\lambda} u_1};$$

ed essendo appunto secondo Clausius

$$\frac{3p}{\delta} = u^2, \tag{7}$$

sarà:

$$\frac{\tau}{\lambda} = \frac{u_1}{u_2} - \frac{1}{u_1}, \tag{8}$$

la quale confrontata colla (6) dà:

$$u_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{u^2}{v} \tag{9}$$

$$\frac{\tau}{\lambda} = \frac{u^2 - \frac{9}{4} v^2}{\frac{3}{2} v u^2} \tag{10}$$

che per la (7) e per la formola di La Place:

$$v^2 = \frac{kp}{\delta} \tag{10}'$$

diventa:

$$\frac{\tau}{\lambda} = \frac{2p}{\delta v u^2}\left(1 - \frac{3}{4}k\right).$$

Quindi per tutti i gas pei quali $k > \frac{4}{3}$ (per l'aria $k = 1,4$), risulta

$$\frac{\tau}{\lambda} < 0,$$

ed il preteso ritardo sarebbe negativo, cioè la trasmissione del suono avverrebbe più rapidamente per effetto degli urti. Nell'aria a 0° la velocità delle molecole fra urto e urto sarebbe quindi minore di quella di Clausius, e precisamente per la (9):

$$u_1 = \frac{2 \times 485^2}{2 \times 332} = 474.^{m}$$

Volendo perseverare in quest' ordine d' idee, si può concepire che un impulso venga trasportato da molecola a molecola colla velocità di traslazione molecolare u_1, ma che poi si propaghi entro la molecola con una velocità maggiore ω. In tal caso le molecole non si potranno più considerare come punti, ma si dovrà mettere in calcolo la distanza media ε percorsa dall' impulso entro la molecola, ed ε sarà una quantità dell'ordine delle dimensioni molecolari.

Allora la percorrenza λ fra due urti s'immaginerà decomposta in due parti: la prima $\lambda - \varepsilon$ percorsa colla velocità u_1, e l'altra ε colla velocità ω; e con considerazioni analoghe a quelle che condussero alla (6) si otterrà:

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\omega}{3v}\,\frac{3v - 2u_1}{\omega - u_1},$$

ed analogamente a quanto si praticò per la (8)

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\omega}{u^2}\,\frac{u^2 - u_1^2}{\omega - u_1}. \tag{11}$$

Eliminando $\frac{\varepsilon}{\omega\lambda}$, si ricade naturalmente sulla

$$u_1 = \frac{2}{3}\,\frac{u^2}{v} \tag{9}$$

e questa insieme alla (11) fornisce:

$$\omega = \frac{6vu^2\,\frac{\varepsilon}{\lambda}}{9v^2\left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - 1\right) + 4u^2}. \tag{11}'$$

Affinchè ω sia positivo, come dev'essere necessariamente, è d'uopo che sia:

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} > 1 - \frac{4}{9}\frac{u^2}{v^2}$$

ovvero

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} > 1 - \frac{4}{3k}$$

e per $k = 1{,}4$:

(12) $$\frac{\varepsilon}{\lambda} > \frac{1}{21} > 0{,}047.$$

Ora dalle ricerche di Clausius risulta che il diametro ρ delle molecole sta alla percorrenza media λ come 8 volte la somma s dei volumi delle molecole sta allo spazio S occupato dal gas:

(13) $$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{8s}{S}$$

e secondo Maxwell:

(13)′ $$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{8{,}5s}{S}.$$

Ponendo in queste formole per s il volume dell'acqua allo stato liquido e per S il volume del vapore che essa può generare, risulta:

$$\frac{\rho}{\lambda} < 0{,}004\ .$$

Bisogna dunque conchiudere che essendo certamente $\varepsilon < \rho$, l'ipotesi di una perdita o di un guadagno di tempo per effetto degli urti è insussistente con altri risultati teorici generalmente accettati. Ma essa è anche in contraddizione coi dati sperimentali.

Infatti, trascurando $\frac{v}{\omega}.\frac{\varepsilon}{\lambda}$ rispetto all'unità, la (11)′ dà:

(14) $$v = \frac{2}{3}\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}}},$$

stando alla quale, la velocità del suono v dovrebbe dipendere da $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ e quindi dalla pressione che, nel produrre un ravvicinamento delle molecole, impiccolisce la loro percorrenza media λ.

All'incontro Regnault non ha osservato differenze apprezzabili nella velocità del suono facendo variare la pressione da 247^{mm} a 1267^{mm}, ossia quintuplicandola. Nè si può obbiettare che le differenze richieste a giustificare la (14) potessero sfuggire alle misure di lui, le quali consentivano certo un'esattezza maggiore di 1^{m}, mentre la (14) accennerebbe ad una variazione di v maggiore di 11^{m} nel passare dalla pressione normale ad una pressione doppia. Infatti, quella formola equivale approssimativamente all'altra:

$$v = \frac{2}{3}u\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)$$

che per una pressione doppia diventa, avuto riguardo alle (13):

$$v_1 = \frac{2}{3} u \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right)$$

e quindi

$$v_1 - v = \frac{1}{3} u \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

e per la (12):

$$v_1 - v > \frac{485}{3 \times 21} > 11.$$

Se invece di assumere il valore $u = \sqrt{\frac{3p}{\delta}}$ calcolato da Clausius il quale, come dicemmo, è la radice quadrata della media dei quadrati delle velocità e quindi è tale che la forza viva di tutte le molecole corrispondente ad esso è identica a quella corrispondente alle velocità vere delle singole molecole, se invece di quel valore u si vuole adottare, com'è più logico in questo caso, il vero valor medio delle velocità:

(15) $$\Omega = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{p}{\delta}},$$

determinato da O. E. Meyer e da Maxwell, le contraddizioni ora avvertite sussisterebbero sempre, ed anzi verrebbero esagerate.

§ 3.

Veduto come la velocità molecolare dedotta dalla velocità del suono, benchè prossima a quella che risulta dalla pressione, non sia riducibile ad uguagliarla esattamente dal considerare la durata degli urti; non rimane altra via che di modificare le ipotesi che condussero al valore $^3/_2$ del rapporto fra la velocità molecolare e la velocità del suono, valore che già nella prima mia Nota dichiarai doversi considerare come una prima approssimazione. Ma l'unica ipotesi adoperata è quella che nella formazione del raggio sonoro abbiano uguale probabilità tutte le direzioni delle trajettorie delle molecole, in guisa che trasportate tutte parallelamente a loro stesse con un estremo nel centro di una sfera, ne incontrino la superficie in punti uniformemente distribuiti.

Cerchiamo dunque a che cosa si giunge supponendo invece che le varie trajettorie, così trasportate, determinino dei punti uniformemente distribuiti sopra un ellissoide allungato di rivoluzione, avente l'asse maggiore α nella direzione del raggio sonoro.

L'equazione di tale ellissoide sia

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

talchè il raggio vettore r condotto dal centro sia dato da:

$$r^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2) \cos^2 \theta},$$

o, ponendo:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\gamma^2$$

dà:

$$r^2=\frac{\beta^2}{1-\gamma^2\cos^2\theta},$$

e la porzione di superficie generata dalla rivoluzione dell'arco $d\theta$, sarà:

$$2\pi r^2\operatorname{sen}\theta d\theta=\frac{2\pi\beta^2\operatorname{sen}d\theta}{1-\gamma^2\cos^2\theta}$$

Il numero n' dei latercoli in direzione compresa fra θ e $\theta+d\theta$ sta al numero totale n dei lati della spezzata corrispondente al raggio sonoro come l'anzidetta superficie sta a mezza superficie dell'ellissoide. Quindi, indicando con C una costante, potremo porre:

$$n'=C\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{1-\gamma^2\cos^2\theta}.$$

D'altra parte se

$$\frac{-a}{e}$$

è la probabilità che una molecola percorra senz'urti un tratto maggiore dell' unità, la probabilità che un lato abbia la lunghezza l è data da:

$$\frac{a}{\cos\theta}\; e^{-\frac{al}{\cos\theta}}\, dl$$

e però il numero dei lati di lunghezza l e nella detta direzione sarà

$$Ca\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos\theta\,(1-\gamma^2\cos^2\theta)}\, e^{-\frac{al}{\cos\theta}}\, dl,$$

e la lunghezza L della spezzata e la sua projezione P sul raggio sonoro saranno espresse da:

$$L=Ca\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{(1-\gamma^2\cos^2\theta)\cos\theta}\int_0^{\infty} e^{-\frac{al}{\cos\theta}}\, ldl,$$

$$P=Ca\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{1-\gamma^2\cos^2\theta}\int_0^{\infty} e^{-\frac{al}{\cos\theta}}\, ldl.$$

Ma

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{al}{\cos\vartheta}} ldl = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2};$$

dunque:

$$L = \frac{C}{a}\int_0^1 \frac{zdz}{1-\gamma^2 z^2} = -\frac{C}{2a\gamma^2}\log(1-\gamma^2)$$

$$P = \frac{C}{a}\int_0^1 \frac{z^2 dz}{1-\gamma^2 y^2} = -\frac{C}{a\gamma^2}\left(1+\frac{1}{2\gamma}\log\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)$$

e per conseguenza, in logaritmi di Briggs,

$$\frac{L}{P} = \frac{\gamma\log(1-\gamma^2)}{2M\gamma+\log\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}; \qquad (M=\log e) \tag{16}$$

od anche

$$\frac{L}{P} = \frac{\sum_1^{\infty}\frac{\gamma^{2(n-1)}}{2n}}{\sum_1^{\infty}\frac{\gamma^{2(n-1)}}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^4}{6}+\cdots}{\frac{1}{3}+\frac{\gamma^2}{5}+\frac{\gamma^4}{7}+\cdots}; \tag{17}$$

dalla quale si vede subito, come riprova, che per $\gamma=0$, ossia pel caso di una sfera, diventa $L:P=3:2$.

Osservo ora (e non so se questa osservazione sia stata fatta, così in generale, da altri) che il valore del rapporto k fra i due calori specifici si può riguardare costante per tutti quegli aeriformi ai quali i chimici attribuiscono molecole di uno stesso numero d'atomi, e variabile al variare di questo numero. Per provarlo registro qui i valori di k quali si ottengono dalle velocità di propagazione del suono determinate da Masson:

Molecole di 2 atomi.			*Molecole di 3 atomi.*		
Ossigeno	O_2	$k=1{,}401$	Anidride carbonica	CO_2	$k=1{,}274$
Azoto	N_2	1,401	Ossido nitroso	N_2O	1,267
Idrogeno	H_2	1,401	Anidride solforosa	SO_2	1,248
Ossido di carbonio	CO	1,409	Solfuro idrico	H_2S	1,258
Ossido nitrico	NO	1,390	Vapor acqueo	H_2O	1,270
Acido cloridrico	HCh	1,392			
		Media $k=1{,}400$			Media $k=1{,}265$

Pel vapore di mercurio, la cui molecola si ritiene costituita da un solo atomo, Kundt e Warburg (1) trovarono $k = 1{,}666$; e pel cloruro di etile (C_2H_5Cl) il valore teorico ottenuto dal primo teorema della termodinamica è $k = 1{,}128$ (2).

Nel prospetto seguente ho messo di fronte al rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ degli assi dello ellissoide, che esprime la legge di frequenza delle varie direzioni, il corrispondente valore $\frac{L}{P}$ del rapporto teorico fra la velocità molecolare e la velocità del suono calcolato colla (16). I numeri della terza colonna danno il rapporto fra la velocità molecolare media dedotta dalla pressione e la velocità del suono secondo Laplace, e sono calcolati colla formola

$$\frac{\Omega}{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi k}},$$

che si ottiene dalle (10)′ e (15), e coi valori k della quarta colonna.

$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{L}{P}$	$\frac{\Omega}{v}$	k	
1	1,500	1,502	1,128	Cloruro d'etile C_2H_5Cl
$^3/_4 = 0{,}750$	1,421	1,420	1,265	Molecole di 3 atomi
$^2/_3 = 0{,}667$	1,392	1,382	$^4/_3 = 1{,}333$	
$^1/_2 = 0{,}500$	1,331	1,340	1,400	Molecole di 2 atomi
$^1/_3 = 0{,}333$	1,263	. . . .	. . . .	
$^1/_4 = 0{,}250$	1,227	1,236	$^5/_3 = 1{,}666$	Vapore di mercurio

Di qui si scorge che, con grande approssimazione, per molecole di atomi:

$$1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3$$

il rapporto degli assi dell'ellissoide sia rispettivamente:

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4},$$

e che per molecole complicate, come sarebbe quella del cloruro etilico (8 atomi), quel rapporto sembri essere molto prossimo all'unità, cosicchè in tal caso tutte le direzioni avrebbero la medesima frequenza.

Perchè poi la diversa frequenza delle trajettorie più inclinate sul raggio sonoro debba dipendere dalla struttura delle molecole non saprei davvero; nè saprei dire se questa deduzione si possa collegare con quelle del prof. Boltzmann (3), il quale abbandonando il concetto che le molecole sieno aggregati di punti tenuti insieme da forze

(1) *Poggendorff's Annalen* Vol. 157, p. 352.

(2) A. Wüllner, *Lehrbuch der Experimentalphysik* Vol. III.

(3) *Sitzb. der k. Akad. zu Wien*, decembre 1876. — *Pogg. Ann.*, gennaio 1877. — *Philosophical Magazine*, aprile 1877. — Considerando la molecola come un sistema, la cui configurazione e posizione nello spazio sia determinata da n variabili indipendenti, si suol chiamare n il *grado di libertà* del sistema. Se la molecola consta di n punti materiali, il suo grado di libertà è $3n$, quando ciascuno di questi può assumere una posizione qualunque.

variabili colle distanze, e considerandole invece come corpi rigidi, deduce per k i valori $^5/_3$; 1,4; $^4/_3$ secondo che siano di forma sferica, di rivoluzione, o qualunque.

Intanto mi piace rilevare come il numero degli atomi costituenti una molecola accenni ad influire anche sopra un'altra costante fisica. O. E. Meyer e Maxwell hanno dedotto dalla teoria dinamica degli aeriformi che il coefficiente di viscosità η deve essere proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta; ma tale deduzione teorica non fu confermata nè dalle loro esperienze che si riferivano all' aria, nè dalle successive di Obermayer (1) che le estese ad altri gas; giacchè indicato con η_0 il valore di quel coefficiente a 0°, con α il coefficiente di dilatazione termica e posto

$$\eta = \eta_0 \ (1 + \alpha t)^n,$$

Cotali punti sono tenuti insieme da certe forze, e se si suppone che il calore impiegato nel lavoro interno di queste forze stia a quello che accresce la forza viva totale, nel rapporto h; si ricava da alcuni teoremi di Boltzmann, generalizzati da Maxwell e Watson, che il rapporto de' due calori specifici di un gas è dato da

$$k = 1 + \frac{2}{m\ (1 + h)}.$$

che si riduce a

$$k = 1 + \frac{2}{m}$$

se la molecola si suppone rigida.

Questa è la formola che fornisce i tre valori surriferiti, facendovi rispettivamente $m = 3$; 5; 6. Nel 1.° caso la molecola si riduce ad un punto o ad una sfera rigida la cui posizione sarà determinata dalle 3 coordinate del centro; nel 2.° la molecola è concepita da Boltzmann come un sistema di due o più atomi sferici invariabilmente distribuiti sopra una linea retta, ed allora alle 3 coordinate necessarie a fissarne uno, si aggiungono le 2 che determinano la direzione della retta; il 3.° caso si riferisce ad un corpo perfettamente rigido, di forma qualunque.

Non ripugna certamente il considerare una coppia di atomi come un sistema di forma invariabile, giacchè basta supporre che fra di loro si eserciti una forza rapidissimamente variabile colla distanza: ma il concetto di una filza d'atomi a guisa di rosario, od anche di un altro qualunque gruppo di punti in quiete relativa, non mi pare gran fatto sodisfacente. — Non si potrebbe sostituirvi piuttosto l'ipotesi che la rigidità delle molecole non consistesse nella invariabilità assoluta della loro configurazione, ma semplicemente nell'invariabilità delle distanze fra alcuni atomi che la compongono?

Così per esempio potrei imaginarmi la molecola di vapor acqueo formata dai due atomi d'idrogeno liberi di muoversi sopra una superficie sferica intorno all' atomo d' ossigeno: la posizione di questo sarebbe determinata da 3 coordinate e da 2 quella di ciascun atomo di idrogeno, talchè il grado di libertà della molecola sarebbe $m = 7$ e quindi si otterrebbe il valore

$$k = 1\,^2/_7 = 1{,}286$$

molto prossimo al vero. Anzi, essendo alquanto maggiore di tutti quelli attribuiti dall' esperienza agli aeriformi con molecole di tre atomi, si concilia benissimo col fatto assai probabile che il lavoro delle forze interatomiche non sia assolutamente nullo, o che sia h alquanto diverso da zero.

Per le molecole più complicate delle triatomiche bisognerebbe tener conto del vario modo con cui gli atomi si comportano gli uni rispetto agli altri, mantenendosi alcuni a distanze invariabili, altri potendosi più o meno avvicinare, e forse le indagini spinte su questo terreno potrebbero svelare qualche relazione fra il rapporto de' calori specifici dei vapori e le nuove idee dei Chimici sul vario aggruppamento degli atomi per formare la molecola.

(1) *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien*, aprile 1876.

l'esperienza dà per n i seguenti valori ch'io separo a seconda che si tratta di molecole con un numero diverso d'atomi:

2 *atomi*		3 *atomi*	
Aria	$n = 0{,}76$	Ossido nitroso . . .	$n = 0{,}93$
Idrogeno	0,70	Anidride carbonica. . . .	0,94
Ossigeno	0,80	6 *atomi*	
Ossido di carbonio . .	0,74	Etilene C_2H_4	0,96
Azoto	0,74	8 *atomi*	
Media	0,75	Cloruro etilico C_2H_5Ch .	0,98

È indubitato che il fenomeno della traspirazione dei gas, al quale ricorse Obermayer per determinare questi valori di n, è affine a quello della propagazione del suono; e mi pare che si possa asserire, senza tema di andar errati, che siffatta dipendenza delle costanti k ed n non sia fortuita, ma sia collegata colla varia frequenza delle trajettorie molecolari diversamente inclinate sopra una direzione data, lungo la quale si consideri una trasmissione di forza viva o un trasporto di materia. — La questione mi si presenta irta di difficoltà, ma voglio provarmi a studiarla.

§ 4. *Aggiunto.*

Dopo che questo scritto fu presentato alla R. Accademia, mi giunse il fascicolo di giugno del *Philosophical Magazine,* contenente una Nota del sig. S. T. Preston *sul modo di propagazione del suono e sulla condizione fisica che ne determina la velocità in base alla teoria cinetica dei gas.* — Partendo dal concetto che per produrre in un gas l'equilibrio, o l'uniformità di pressione in tutte le direzioni, sia necessaria l'uniformità dei moti molecolari per ogni verso (cosicchè un ugual numero di molecole si muovano in due direzioni opposte qualunque) e che tale distribuzione di moti avvenga automaticamente in seno al gas; il sig. Preston analizza col semplice ragionamento le particolarità che accompagnano la propagazione del suono, e fra le altre osserva che la velocità del suono dev'essere minore della velocità molecolare del gas, ma ad essa proporzionale.

« Così la velocità molecolare dell'idrogeno a 0° C. è di 6050 piedi (1844^m) al secondo, mentre la velocità del suono nell'idrogeno a 0° C. è di 4164 piedi (1263^m) al secondo. Il rapporto costante fra le due velocità è 0,688 circa, ossia la velocità del suono in un gas è 0,688 volte la velocità delle molecole del gas medesimo, e quindi la velocità del suono in un gas si può ottenere moltiplicando per questa costante la sua velocità molecolare conosciuta. — Pare probabile che, tenendo conto de' moti obbliqui delle molecole nelle loro collisioni lungo la linea di propagazione dell'onda sotto tutti gli angoli imaginabili, si possa trattare la determinazione della velocità assoluta del suono in un gas come un problema *a priori* da risolversi matematicamente ».

Alla fine della Nota si legge il seguente poscritto: « Il prof. Clerk Maxwell, al quale vennero comunicati questi fogli e che prese un benigno interesse al soggetto, ha calcolato la velocità per un'onda o un impulso propagati da un sistema

di particelle muoventesi fra loro colla uniformità enunciata più sopra, ritenendole di diametro trascurabile rispetto alla loro distanza media e di forma sferica in guisa che negl' incontri non abbiano origine moti rotatorî (che trarrebbero seco una diminuzione della velocità).

« In tali ipotesi la velocità dell'onda fu trovata uguale a $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (ossia 0,745) moltiplicato per la velocità media delle molecole.

« Nel maggior numero de' gas la velocità del suono è alquanto minore, ciò che è da attribuirsi ai moti rotatorî prodotti negl' incontri delle molecole. Nel vapore di mercurio, secondo le determinazioni di Kundt e Warburg, la velocità del suono è esattamente $\frac{\sqrt{5}}{3}$ moltiplicato per la velocità molecolare ».

I due valori determinati da Maxwell $M = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e da me $R = \frac{2}{3}$ soddisfano alla relazione:

$$M^2 + R^2 = 1,$$

e ciò mi fa sospettare che la diversità delle due determinazioni dipenda da una svista che non mi fu possibile scoprire, quantunque ne abbia perfino scritto all'illustre scienziato inglese, pregandolo di comunicarmi il processo de' suoi calcoli e così illuminarmi.

Ad ogni modo mi permetterò di osservare che, se si prende di mira la *vera* velocità media molecolare, indicata in quanto precede con Ω, anzichè la radice quadrata u della media de' quadrati delle velocità molecolari, come usa il sig. Preston, il rapporto di Maxwell appare più consentaneo alla realtà, non pel caso di molecole monoatomiche quali sarebbero quelle del mercurio, ma bensì pei gas più comuni con molecole di due atomi, il cui rapporto de' calori specifici è $k = 1,4$. Infatti per essi abbiamo veduto essere $\frac{\Omega}{v} = 1,340$, che è quasi esattamente uguale a $\frac{3}{\sqrt{5}} = 1,342$.

Non sarebbe adunque necessario di ricorrere in questo caso alla possibile influenza che eserciterebbero le rotazioni delle molecole. Anzi bisognerebbe escogitare il motivo pel quale il vapore di mercurio, sebbene sembri soddisfare appunto alle ipotesi sopra enumerate di Maxwell, pure trasmetta il suono con velocità maggiore che non richieda l'annunziato rapporto $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Sulla risoluzione delle congruenze numeriche, e sulle tavole che danno i *logaritmi (indici)* degli interi rispetto ai varî moduli.

Memoria del Socio corrisp. prof. G. BELLAVITIS

letta nella seduta del 3 giugno 1877.

---

1. A risolvere le congruenze binomie gli indici servono nello stesso modo che i logaritmi valgono per le equazioni binomie; ed anzi quelli sono più indispensabili, giacchè le estrazioni di radici possono eseguirsi mediante un'operazione aritmetica, mentre nella teoria dei numeri interi, se non si abbiano le tavole degli indici, bisogna ricorrere a nojosi tentativi. Al nome insignificante d'*indice* io preferisco quello di *logaritmo*. Furono già calcolate parecchie tavole di questi *logaritmi*; quella del Gauss si estende fino al modulo 97; il *Canon arithmeticus* del Jacobi va fino al 1000, ma quest'opera è pochissimo comune; l'Hoüel pubblicò (Mém. de la Soc. des sciences de Bordeaux III) ed anche separatamente (Paris, 1866) alcune tavole che vanno fino al modulo 199, ed altre fino al 347.

2. Il Gauss aveva già osservato che mediante un breve calcolo potevano tener luogo delle tavole dei predetti *logaritmi* gli sviluppi in frazioni decimali periodiche di alcune frazioni aventi per denominatore il modulo di cui si tratta. Qualunque sia la base del sistema numerico che si adopera, è sempre lo stesso il numero totale delle cifre delle frazioni periodiche; perciò io trovo molto preferibile ad ogni altro sistema numerico, il sistema *binario*, che ha per base il 2, e quindi è formato colle sole cifre 1, 0; con questo sistema ho calcolato le frazioni contenute nella Tavola I, che ho esteso alquanto di più delle tavole dell'Hoüel e di cui sono molto più semplici e più comode.

3. Pel modulo 13 la frazione $\frac{1}{13}$ si sviluppa nella frazione binaria .000100 111011, che per brevità io scrivo così, $.\overset{3}{0}\overset{1}{1}\overset{2}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{0}\overset{2}{1}$, i numeri 3 1 2 indicano quante delle cifre 0 1 (poste al di sotto di ciascun numero) si deggiono ripetere per formare la frazione binaria, la quale, come è ben noto, equivale alla somma delle frazioni $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{2048}$, ecc. Se rispetto al modulo 13 si voglia il *logaritmo* di 6, bisognerà sviluppare in frazione binaria la frazione $\frac{6}{13}$; ciò potrà farsi nel modo

seguente: moltiplicato il numeratore 6 per 8 si ha 48 che diviso per 13 dà il residuo 9 ed il quoziente 3, il quale scritto secondo il sistema binario è 011; il residuo 9 moltiplicato per 8 e diviso per 13 dà in egual modo il quoziente 5, ossia 101; perciò le sei prime cifre della frazione binaria $=\frac{6}{13}$ sono .011101, che io scrivo $.^{1311}_{0101}$: ricercandola nel predetto sviluppo $.^{312312}_{010101}$

48	72
9	7
3	5
011	101

veggo che si deve cominciare dopo le cinque cifre .00010, e quindi si ha $l_2\, 6 = 5$. Il numero posto abbasso della caratteristica l indica che la base di questi logaritmi è il 2.

4. Spiegazione della Tavola I. Ciascun modulo è una potenza p^i di un numero primo; il numero $q = p^{i-1}(p-1)$ viene ad essere il modulo dei *logaritmi*, ed uguaglia il numero totale delle cifre formanti le frazioni binarie periodiche; — se 2 è radice primitiva rispetto al modulo p^i, tra le parentesi [ ] è scritto prima il numero q poscia la base 2 dei logaritmi, ciò si vede pei moduli 9, 11, 13, 19, 25, 27, 29,.... 269, 293, 317, 347, 349, 361; — se 2 non è radice primitiva, e sia $2^{q:r}$ la potenza di minimo esponente, che è rispetto al modulo p^i congrua coll'unità, dee prendersi per base b dei *logaritmi* una delle radici primitive, che soddisfanno la congruenza $b^r \underset{p^i}{=} 2$, e dopo del modulo p^i sono scritti i numeri $\left[\frac{q}{r}, b^r\right]$. Vengono poscia i numeri delle cifre formanti le frazioni binarie periodiche: sotto di questi numeri non sono scritte le cifre 0 1, che deggiono porsi avvertendo che sono sempre alternate anche quando si ritorna da capo nel periodo o nel mezzo periodo. Per esempio corrispondentemente al modulo 23 i numeri 411221 formano un intero periodo, che può essere tanto $^{411221}_{010101}$ quanto $^{411221}_{101010}$; invece pel modulo 27 i numeri 41211 per formare l'intero periodo deggiono ripetersi e danno perciò $^{4121141211}_{0101010101}$. I numeri più piccoli posti tra parentesi sono i *logaritmi* corrispondenti alle frazioni binarie periodiche; avvertendo che al *logaritmo* scritto di sopra appartiene la frazione binaria che comincia colla cifra 0, ed al *logaritmo* scritto di sotto appartiene la frazione che comincia colla cifra 1; così, rispetto al modulo 23, 0 è il *logaritmo* del numero 1, che si ottiene moltiplicando pel modulo 23 la frazione binaria periodica $.^{411221}_{010101}$..., ossia .0000 1011001 ... ed 11 è il *logaritmo* del prodotto di 23 per la frazione binaria $.^{4112}_{1010}$..., ossia .1111 0100... Se nella frazione binaria si tolgono alquante delle sue prime cifre, il corrispondente *logaritmo* aumenta di altrettante volte l'esponente r della congruenza $b^r \equiv 2$; così rispetto al modulo 23 essendo $r = 2$ ai *logaritmi* 6, 10 corrispondono rispettivamente le frazioni binarie $.^{11122}_{01010}$... $.^{12214}_{01010}$... ottenute tagliando 3 o 5 delle prime cifre dalla $.^{411221}_{010101}$; similmente il *logaritmo* 13 corrisponde alla frazione binaria $.^{31122141}_{10101010}$... ottenuta tagliando la prima cifra dalla $.^{411221}_{101010}$. I numeri corrispondenti ai *logaritmi* sono i valori delle frazioni binarie moltiplicate pel modulo, essi si avranno mediante

un calcolo analogo a quello spiegato al n. 3 eseguito procedendo in senso opposto: ecco i calcoli relativi alle precedenti frazioni binarie, le quali sono .010110; .011001; .111010

	64	138			72	23			167	46	
8	18			9	3			21	6		
	2	6			3	1			7	2	
	010	110			011	001			111	010	

cioè il numero 110 che è $= 6$ si moltiplica pel modulo 13 e si ottiene 138, che diviso per otto dà l'intero immediatamente superiore 18, a questo si somma il numero 010 $= 2$ moltiplicato pel modulo, e si ottiene 64, che nello stesso modo diviso per otto dà 8; per tal modo si trovò che

$$6 = l_5\,8,\quad 10 = l_5\,9,\quad 13 = l_5\,21.$$

Viceversa se si voglia trovare $l_5\,3$, il prodotto del numero 3 per otto diviso pel modulo dà il residuo 1 ed il quoziente $1 = 001$; il predetto residuo moltiplicato per otto poi diviso pel modulo dà il residuo 8 ed il quoziente $0 = 000$, così si ha la frazione binaria .001000 ossia $.\frac{213}{010}$, che deve ricercarsi nella 411221 posta nella Tavola I pel modulo 23;

	24	8			64	144			40	136	
3	1	8		8	18	6		5	17	21	
	1	0			2	6			1	5	
	001	000			010	110			001	101	

A tal fine si osservi che basta ricercare un numero 1 preceduto da altro numero non minore di 2 e seguito da numero non minore di 3 e ciò si ha tagliando le 8 prime cifre da $\frac{4112214}{010101\,0}$ rimanendo $\frac{214}{010}$, così $l_5\,3 = 0 + 8r = 16$, in simil modo si trova $l_5\,8 = 0 + 3r = 6$, $l_5\,5 = 11 + 6r \equiv_{22} 1$. Se il modulo fosse maggiore di 64 non sarebbe più sufficiente tener conto di sei cifre, ne adopreremo invece nove, così pel modulo 367 al *logaritmo* 235, che è $= 229 + 3r$ corrisponde la frazione binaria $.\frac{441}{0\,1\,0}$ da cui si ricava il numero 22; viceversa ai numeri 117, 10 corrispondono le frazioni binarie $.\frac{111132}{010101}$, $.\frac{5211}{0101}$ e quindi i *logaritmi* $104 = 94 + 5r$, $341 = 337 + 2r$.

	173	1377	2202			936	1616	1184			80	640	2184		
22	173	276			117	202	148	83		10	80	273	349		
	0	3	6			2	4	3			0	1	5		
	000	011	110			010	100	011			000	001	101		

Pei moduli maggiori di 512 si adopereranno 12 cifre, così se rispetto al modulo 1009 si voglia il logaritmo di 693 ripetendo quattro volte la moltiplicazione per 8 e la divisione per 1009 troveremo le dodici cifre $.\frac{1111611}{101010\,1}$ e quindi nella Tavola il $l_{570}\,693 \equiv_{1008} 837 + 3.2 = 843$. Viceversa se sia dato il logaritmo $281 = 279 + 1.2$ la Tavola dà le dodici cifre $.\frac{3111114}{010101\,0}$, e con queste procedendo in senso opposto moltiplicando per 1009 e dividendo per 8 si ottiene il numero 83 tale che $l_{370}\,83 \equiv_{1008} 281$.

	5544	3992	7720	5256											
	499	965	657	211											
	5	3	7	5											
	101	011	111	101											
			5298	2018											
	83	663	253												
			5	2											
	000	101	010	000											

5. Esercizî. — Vogliasi risolvere la congruenza rispetto al modulo 223, che io scrivo così:

$$25x^3 \underset{223}{=} 42$$

(cioè pongo il modulo al di sotto del segno = di congruenza). Per trovare il $l_{140}\,42$ opereremo come precedentemente ed avremo le nove cifre $.^{225}_{010}$ che cercheremo nella Tavola I corrispondentemente al modulo 223; abbiamo già avvertito che non occorre trovare precisamente i numeri 225, basta trovare un 2 preceduto da un numero non minore di 2 e seguito da uno non minore di 5; ciò avviene soltanto per l'ultimo 2 della terza ed ultima frazione binaria, perchè esso è preceduto dal 3 e seguito (a motivo che la frazione è periodica) dal 6; le nostre cifre sono $.^{225}_{010}$ perciò si deggiono togliere le prime 5 cifre della $^{111132}_{010101}$, e quindi il *logaritmo* superiore 41 deve accrescersi di $5r = 30$, così $l_{140}\,42 \underset{222}{=} 71$. Nello stesso modo pel numero 25 si hanno le cifre $.^{3321}_{0101}$ che si trovano nella terza frazione binaria nove cifre dopo del *logaritmo* inferiore 206, sicchè:

	336	904	96
42	113	12	96
	1	4	0
	001	100	000

	200	1600	312
25	200	39	89
	0	7	1
	000	111	001

$$l\,25 \underset{222}{=} 206 + 9r \underset{222}{=} 38.$$

La proposta congruenza ci dà quindi:

$$3\,l\,x = 71 - 38 = 33;$$

il qual *logaritmo* diviso per 3 conduce ai tre seguenti valori di

$$l\,x \underset{222}{=} 11, 85, 159.$$

Il primo di questi *logaritmi* diviso per $r = 6$ dà il residuo 5, e quindi lo si deve cercare tra i *logaritmi* superiori della terza frazione binaria, essendo $11 \underset{222}{=} 233 = 197 + 6.6$, esso ci dà le cifre $.^{2311113}_{010101}$, che noi moltiplicheremo pel modulo 223 nel modo spiegato nel n. 4 cioè:

$223.5 = 1115$, $1115:8 + 223.6 = 1478$,
$1478:8 + 223.1 = 408$, $408:8 = 51$

ed otterremo $x = 51$. Similmente i *logaritmi* $l_{140}\,x \underset{222}{=} 85, 159$ cercati tra i *logaritmi* superiori della seconda frazione e inferiori della prima danno mediante le frazioni $.^{311121}_{101010}$, $.^{212114}_{101010}$

	408	1478	1115
51	185	140	
	1	6	5
	101	110	101

	1638	614	1338
205	77	168	
	7	2	6
	111	010	110

	1520	1450	892
190	182	112	
	6	6	4
	110	110	100

danno le altre due radici 265, 190 della congruenza proposta. — Sia per secondo esempio la congruenza rispetto al modulo 169, $25x^3 \underset{169}{=} 42$, le frazioni binarie $.^{27}_{01}$, $^{212112}_{010101}$

	336	1336	1224
42	167	153	41
	1	7	7
	001	111	111

	200	248	632
25	31	79	125
	1	1	3
	001	001	011

mostrano che $l_2 42 \equiv 76 \pmod{156}$, $l_2 25 \equiv 18 \pmod{156}$ quindi $3 l_2 x \equiv 58 \pmod{156}$, e perciò la proposta congruenza non ammette alcuna radice, cioè il numero 49 corrispondente al *logaritmo* 58 e dato dalla frazione $.\overset{1121113}{0101010}$ non è residuo-cubico rispetto al modulo 169. Così abbiamo avuto l'esempio di una radice terza che ammette tre valori distinti, e di un'altra che non ne ammette alcuno. Se q non sia divisibile per 3 la radice terza avrà per certo un solo valore; sia per esempio $25 x^3 \equiv 42 \pmod{359}$, si trova mediante la nostra Tavola I $l_{19} 42 \equiv 79 + 2.2 = 83 \pmod{358}$, $l_{19} 25 = 138 + 7.2 = 152$, $3 l_{19} x \equiv 289 \pmod{358}$, $l_{19} x \equiv 335 \pmod{358}$, $x \equiv 259 \pmod{359}$.

		391	423	676
	49	53	85	8
		2	2	4
		010	010	100

6. Il calcolo della Tavola I si eseguisce pei varî moduli col processo spiegato ai n.i 3 e 5 proseguendo a calcolare finchè ricomparisca il numero da cui si è cominciato. Se si abbia la tavola di moltiplicazione del Crelle (Berlin, 1826), si procederà più speditamente adoperando per moltiplicatore, anzichè il $2^3 = 8$, il $2^9 = 512$, e dividendo pel modulo p^i. Per avere una continua verificazione si faranno contemporaneamente i calcoli con 1 e con $p^i - 1$, poscia con b e con $p^i - b$, ... fino a b^{r-1} e $p^i - b^{r-1}$. Confrontando la mia tavola con quella a frazioni decimali del Gauss, che l'Hoüel estese dal modulo 101 al 347, si scorgerà quanto le frazioni binarie la rendano più semplice; per ciascun modulo nella mia tavola o il periodo è ridotto alla metà, o sono la metà le frazioni periodiche che deggiono considerarsi, e ciò oltre la brevità che risulta dallo scrivere invece delle cifre 0 1 i numeri delle loro ripetizioni.

7. Le frazioni binarie che sono eguali ad 1, b, b^2... divisi pel modulo possono dedursi le une dalle altre moltiplicando per la base b scritta secondo il sistema numerico binario, ed è per questo che quando potei scegliere tra più radici primitive preferii prendere per base quella radice della $b^r \equiv 2$, che si esprimeva più semplicemente nel sistema binario; ebbi io pure occasione d'osservare che nel calcolo binario è necessaria qualche cautela per non cadere in errore. In un prezioso autografo che potei vedere or sono 33 anni, l'illustre Leibnizio inventore del calcolo binario incorreva in errore nel moltiplicare per se stessa la frazione binaria .010101.... equivalente ad un terzo, e conchiudeva con queste parole: *Miror tamen quomodo hoc prodeat, nam deberet prodire* 000111000111 *etc. quod significat* $\frac{1}{9}$, *nec possum adhuc capere unde oriatur diversitas.*

8. Desiderai che la mia tavola fosse alcun poco più estesa di quella dell'Hoüel: i moduli 349, 361 non mi presentarono alcuna difficoltà perchè 2 ne è radice primitiva; pel modulo 353 (e $q = 32.11$) avendo trovato che $2^{44} \equiv -1 \pmod{353}$, ne viene che 2 non è una radice primitiva e che la base b dev'essere una radice della $b^4 \equiv 2 \pmod{353}$. Ricercai da prima i valori di $\sqrt{2}$ osservando che tutti i numeri che accresciuti di 2 possono dare un quadrato deggiono essere: $\equiv 38, 39, 2, 7, 14, 23, 34, 22, 18 \pmod{40}$, e che $353 \equiv 33 \pmod{40}$, $1 : 33 \equiv 17 \pmod{40}$; riconobbi che i moltiplicatori di 353, tali che il loro prodotto accresciuto di 2 possa essere un quadrato, debbono essere $\equiv 6, 23, 34, 39, 38, 31, 18, 14, 26 \pmod{40}$ (questi numeri si ottennero moltiplicando per 17 i precedenti 38, 39, ecc.).

Con un simile esame osservando che $353 \equiv_{99} 56$, $1:56 \equiv_{99} 33$ trovai che i suddetti moltiplicatori di 353 deggiono essere:

$$\equiv_{99} 10, 40, 80, 1, 31, 91, 62, 13, 43, 53, 73, 34,$$
$$64, 25, 35, 46, 76, 7, 67, 97, 57, 98, 78, 89;$$

ne conchiusi che essi moltiplicatori sono alcuni dei 46, 34, 79, 31, 58, 98 ecc.; il 3° ed il 6° di essi mi conducono ai due quadrati 162^2, 186^2, e quindi $\sqrt{2} \equiv_{353} 167, 186$. Collo stesso metodo procedetti alle estrazioni $\sqrt{176}$, $\sqrt{186}$, e così trovai che

$$\sqrt[4]{2} \equiv_{363} 102, 251, 48, 305.$$

Questi quattro valori debbono esser radici primitive, giacchè se un loro *logaritmo* contenesse il fattore 11, nel *logaritmo* di 2 entrerebbe il fattore 44, e perciò prima di $2^{88} \equiv_{353} 1$ si avrebbe trovato $2^8 \equiv_{353} 1$. Tra queste quattro radici prescelsi la 48, che è la più semplice scritta nel sistema binario essendo $= 110000$; per tal maniera dalla frazione binaria periodica che esprime il valore di 1:353 si possono dedurre (n. 7) quelli di 48:353, 48^2:353, 48^3:353.

9. Se potessi avere il Canone aritmetico del Jacobi pubblicherei una tavoletta che per ciascun modulo da 379 a 997, pel quale 2 non sia radice primitiva, desse il valore della radice primitiva b tale che $b^r \equiv 2$; così chiunque volesse fare un calcolo relativo ad uno di quei moduli potrebbe in poco tempo e senza inutili tentativi formare la parte della Tavola I che riguarda quel modulo.

Aggiunta. Ecco la tavoletta ora indicata: 383 [191,246²].

401 [200,53²]. 409 [204,97²]. 431 [43,46¹⁰], 433 [72,20⁶].
439 [73,330⁶]. 449 [224,30²], 457 [76,71⁶]. 463 [231,203²].
479 [239,187²]. 487 [243,396²]. 499 [166,10³]. 503 [251,157²].
521 [260,272²]. 569 [284,201²], 571 [114,338⁵]. 577 [144,252⁴].
593 [148,104⁴]. 599 [299,433²]. 601 [25,66²¹]. 617 [154,201⁴].
631 [45,14¹⁴]. 641 [64,96¹⁰]. 643 [214,73³]. 673 [48,56¹⁴].
683 [22,96³¹]. 691 [230,288³]. 719 [359,395²]. 727 [121,116⁶].
733 [244,720³]. 739 [246,29³]. 743 [371,102²]. 751 [375,113²].
761 [380,73²]. 769 [384,133²]. 809 [404,195²]. 811 [270,23³].
823 [411,539²]. 839 [419,29²]. 857 [428,163²]. 863 [431,251²].
881 [55,58¹⁶]. 887 [443,685²]. 911 [91,451¹⁰]. 919 [153,265⁶].
929 [464,240²]. 937 [117,42⁸]. 953 [68,88¹⁴]. 967 [483,923²].
971 [194,185]. 977 [488,212²]. 983 [491,533²]. 995 [495,571²].
997 [332,114³].

Pare che pei moduli, che sono potenze di un numero primo, il 2 sia anche più frequentemente una radice primitiva; fino al 1000 i soli moduli eccettuati sono i seguenti: 49 [21,10²]. 289 [136,45²]. 343 [147,108²]. 529 [253,373²]. 961 [155,649⁶].

10. Logaritmi pel modulo 256. — Non mi pare che la tavola dell'Hoüel sia sufficiente; per comprendervi tutti i numeri dispari, bisogna considerare i *logaritmi* rispetto alle varie basi 3, —3, 7, 15, 31, 63; così la mia Tavola II contiene gli

antilogaritmi rispetto a ciascuna di queste basi, e la Tavola III contiene i *logaritmi* distinti con appositi segni secondo che appartengono all'una o all'altra base. Pei moduli 2^i, che sono summultipli di 256, valgono le medesime tavole II e III, notando soltanto che i *logaritmi* relativi alle basi ± 3 deggiono ridursi mediante il modulo 2^{i-2}, e quelli per le basi 7, 15 ecc. mediante i moduli 2^{i-3}, 2^{i-4}, ecc. Così per esempio rispetto al modulo 64 si avrà:

$$l_3 43 \equiv_{16} 31 \equiv_{16} 15,\ l_{-3} 37 \equiv_{16} 19 \equiv_{16} 3,\ l_3 33 \equiv_{16} 40 \equiv_{16} 8,$$
$$l_{-3} 33 \equiv_{16} 40 \equiv_{16} 8,\ l_7 33 \equiv_{8} 12 \equiv_{8} 4,\ l_{15} 33 \equiv_{4} 14 \equiv_{4} 2.$$

11. Per risolvere una qualsiasi congruenza del 2° grado rispetto ad un modulo 2^i non basta la tavola dei *logaritmi* e degli *antilogaritmi*, occorre eziandio una tavola che per ciascun valore di $[x]^2 = x(x+1)$ dia il valore della x; a ciò serve la Tavola IV pel modulo 256, essa può sempre ridursi ad ogni modulo summultiplo di 256.

12. Esempî. — Proposta la congruenza

$$33 x^4 \equiv_{256} 193,$$

prendendo nella Tavola III i *logaritmi* di 193 e di 3 e sottraendo quelli che hanno la stessa base avremo:

$$4 l_3 x \equiv_{64} 48 - 40 = 8,\ 4 l_{-3} x \equiv_{64} 8,\ 4 l_7 x = 8 - 12 \equiv_{32} 28,\ 4 l_{15} x = 4 - 14 \equiv_{16} 6,$$

ciascuna delle due prime dà:

$$l_3 x \equiv_{64} 2, 18, 34, 50,\ \text{e quindi}\ x = 9, 73, 137, 201;$$

la terza dà:

$$l_7 x \equiv_{32} 7, 15, 23, 31,\ x = 247, 55, 119, 183$$

e finalmente la quarta non dà alcuna radice. Se la congruenza fosse $33 y^2 \equiv_{266} 193$, le tre prime si accorderebbero nel dare $y \equiv_{256} 81, 209$ e la quarta darebbe $y \equiv_{256} 47, 175$.

Per risolvere la congruenza $x^6 \equiv_{256} 161$ abbiamo:

$$6 l_3 x \equiv_{64} 8,\ l_3 x \equiv_{64} 12, 44,\ x \equiv_{256} 241, 113$$
$$6 l_7 x \equiv_{32} 28,\ l_7 x \equiv_{32} 10, 26.\ x \equiv_{256} 241, 113$$
$$6 l_{15} x \equiv_{16} 6,\ l_{15} x \equiv_{16} 1, 9,\ x \equiv_{16} 15, 143$$

così in tutte sono quattro radici differenti.

13. Abbiasi la congruenza del secondo grado

$$5 x^2 + 98 x + 72 \equiv_{256} 0:$$

per liberarla dal coefficiente del primo termine non possono servire i *logaritmi*, perchè i numeri pari non ne hanno; invece la frazione 1:51 penultima convergente verso 5:256 ci mostra che $1:5 \equiv_{256} -51$, e che perciò dividere per 5 è lo stesso come moltiplicare per -51, così abbiamo:

$$x^2 + 122 x - 88 \equiv_{256} 0$$

la cui trasformata in $y = x + 61$, che è $y^2 + 31 \equiv_{256} 0$, si risolve prendendo i *logaritmi* $l_3 225 \equiv_{64} 24$, $l_7 225 \equiv_{32} 20$, $l_{15} 225 \equiv_{16} 2$ da cui risulta:

$$l_3 y = 12, 44,\ l_7 y = 10, 26,\ l_{15} y = 1, 9$$

ed

$$y = 241, 113,\ y = 241, 113,\ y = 15, 143$$

$x^2 + 122 x - 88$		
-61	$1 + 61$	$+31$
	$1 + 0$	

quindi la proposta congruenza ha le quattro radici

$$x = 180, 52, 210, 82.$$

Se invece la congruenza fosse stata

$$5x^2 + 97x + 100 \underset{256}{\equiv} 0,$$

che si riduce a $x^2 - 83x + 20 \underset{256}{\equiv} 0$,

la cui trasformata in $y = x - 42$ è

$$y^2 + y + 90 \underset{256}{\equiv} 0,$$

nella Tavola IV corrispondentemente a 166 si troverebbe:

$$y \underset{256}{\equiv} 34, 221, \text{ perciò } x = 76, 7.$$

14. Risoluzione di alcune congruenze. — Sia proposta la

$$x^2 + 4x - 448 \underset{43904}{\equiv} 0$$

ponendo $x = y + 2$, e decomponendo il modulo nei suoi fattori differenti si perviene alle

$$y^2 \underset{7.7.7.128}{\equiv} 452, \quad u^2 \underset{343}{\equiv} 109, \quad v^2 \underset{128}{\equiv} 68.$$

Cercheremo nella frazione binaria corrispondente al modulo 343 i numeri

$$109.512 : 343 = 162 = {}_{10100010} = \frac{1111311}{0101010}$$

e così avremo:

$$l \underset{108}{\equiv} 109 \underset{294}{\equiv} 58, \text{ da cui viene } l\,u = 29, 176;$$

il *logaritmo* 29 cercato nella Tavola I ci dà la frazione binaria $\frac{2241}{1010} = 414 : 512$, poscia $414.343 = 142002$ diviso per 512 dà l'*antilogaritmo* $u = 278$. Similmente $l\,u = 176$ conduce ad $u = 65$. La seconda congruenza noi la muteremo in $w^2 \underset{64}{\equiv} 17$, dopo di che la Tavola III ci darà $l_3 17 \underset{16}{\equiv} 4$, $l_7 17 \underset{8}{\equiv} 6$, da cui $l_3 w \underset{16}{\equiv} 2, 10$, $l_7 w \underset{8}{\equiv} 3, 7$ e per la Tavola II $w \underset{64}{\equiv} 9, 41, 23, 55$, quindi $v \underset{128}{\equiv} 18, 82, 46, 110$.

Per ciascuna combinazione tra due valori di u, v avremo:

$$y = u + 343\,t = v + 128\,\tau,$$

trovata la frazione 25:67 penultima convergente verso 128:343, sarà $t = 25\,(u - v)$: così per $u = 278$, $v = 18$ avremo:

$$y \underset{43904}{\equiv} 278 + 25.260.343 \underset{43904}{\equiv} 34578.$$

Gli otto valori di y sono

$$\underset{43904}{\equiv} \pm 9326, \pm 12626, \pm 13998, \pm 7954;$$

a quelli di x sono appajati così $x \underset{43904}{\equiv} 9328, -9324$, ecc.

Anche quando il modulo è potenza di un numero primo la congruenza può avere più radici del suo grado; così la congruenza $x^2 - 14x - 41 \underset{243}{\equiv} 0$ si trasforma ponendo

$$x = y + 7, \quad y = 3u \text{ nelle } y^2 - 90 \underset{243}{\equiv} 0, \quad u^2 - 10 \underset{27}{\equiv} 0,$$

da cui $u \underset{27}{\equiv} 8, 19, \quad y \underset{243}{\equiv} 24, 105, 186; 57, 138, 219$

ed $x \underset{243}{\equiv} 31, 112, 193; 62, 145, 226.$

15. Passiamo ad alcune congruenze cubiche, che si risolvono mediante la sostituzione Cardanica. Sia:

$$x^3 + 104x^2 + 81x + 50 \underset{125}{\equiv} 0$$

posto $x = 7 + z$ otterremo una congruenza senza secondo termine:

$$z^3 + 59\,z + 56 \underset{125}{\equiv} 0,$$

e ponendo $z = u + \dfrac{22}{u}$ avremo:

$$u^6 + 56\,u^3 + 23 \underset{125}{\equiv} 0, \text{ ossia } (u^3 + 28)^2 \underset{125}{\equiv} 11;$$

poscia successivamente $l_2\,11 \underset{100}{\equiv} 76,38 = l\,69,88 = l\,56$, $u^3 \underset{125}{\equiv} 41,28$, $lu^3 \underset{100}{\equiv} 44,87$, $l\,u \underset{100}{\equiv} 48,29$, $l\,22 \underset{100}{\equiv} 77$, $u \underset{125}{\equiv} 31,37$, $\dfrac{22}{u} \underset{125}{\equiv} 37,31$, $z = 31 + 37 = 68$, $x = 75$ e questa è l'unica radice della data congruenza.

Nello stesso modo per la congruenza

$$z^3 - 8\,z - 6 \underset{179}{\equiv} 0$$

i seguenti calcoli $z \underset{179}{\equiv} u + \dfrac{122}{u}$,

$$u^6 - 6\,u^3 + 72 \underset{179}{\equiv} 0, \quad (u^3 - 3)^2 \underset{179}{\equiv} 116$$

$$l_2\,116 \underset{178}{\equiv} 120, \quad l\,(u^3 - 3) \underset{178}{\equiv} 60,149, \quad u^3 \underset{179}{\equiv} 145,40,$$

$$l\,u^3 \underset{178}{\equiv} 78,141, \quad l\,u \underset{178}{\equiv} 26,47, \quad l\,122 \underset{178}{\equiv} 73, \quad u \underset{179}{\equiv} 153,133$$

danno l'unica radice $z = 153 + 133 \underset{179}{\equiv} 107.$

Sia $z^3 - 3\,z - 14 \underset{181}{\equiv} 0$

$$z = u + \frac{1}{u},\ u^6 - 14\,u^3 + 1 \underset{181}{\equiv} 0, \quad (u^3 - 7)^2 \underset{181}{\equiv} 48, \quad l_2\,48 \underset{180}{\equiv} 60,$$

$$l\,(u^3 - 7) \underset{180}{\equiv} 30,120, \quad u^3 \underset{181}{\equiv} 56,139, \quad l\,56 = 18, \quad l\,139 = 162, \quad l\,1 = 0,$$

$$l\,u \underset{180}{\equiv} 6,66,126;174,114,54, \quad u = 64,176,122;99,36,46$$

ed avremo le tre radici

$$z \underset{181}{\equiv} 64 + 99 = 163, \quad 176 + 36 \underset{181}{\equiv} 31, \quad 122 + 46 \underset{181}{\equiv} 168.$$

Invece la $z^3 - 3\,z - 8 \underset{181}{\equiv} 0$ conduce a $u^6 - 8u^3 + 1 \underset{181}{\equiv} 0$, $(u^3 - 4)^2 \underset{181}{\equiv} 15$, $l_2\,15 \underset{180}{\equiv} 32$, $l\,(u^3 - 4) \underset{180}{\equiv} 16,106$, $u^3 \underset{181}{\equiv} 18,171$, che non danno alcun valore ad u.

La soluzione Cardanica può applicarsi anche alla

$$z^3 + 17\,z - 3 \underset{43}{\equiv} 0,$$

quantunque ammetta le tre radici $z \underset{43}{\equiv} 4, 8, -12$.

16. Abbiasi ora la biquadratica:

$$x^4 - 12\,x^3 + 39\,x^2 + 45\,x - 36 \underset{179}{\equiv} 0,$$

per risolverla noi procediamo ad estrarne la radice

$$\left(x^2 - 6\,x + \frac{y}{2}\right)^2 = (y + 36 - 39)\,x^2 - (6\,y + 45)\,x + \frac{y^2}{4} + 36$$

determinando l'arbitraria y in modo che il secondo membro riesca un quadrato perfetto, il che esige che sia:

$$y^3 - 3\,y^2 + 144\,y - 432 = 36\,y^2 + 540\,y + 2025,$$

perciò $y^3 - 39\,y^2 - 38\,y + 49 \underset{179}{\equiv} 0,$

e posto $y = 13 + z,\ z^3 - 8\,z - 6 \underset{179}{\equiv} 0$

la quale vedemmo (n. 15) che ha la radice $\equiv 107$, quindi sarà $y \equiv 120$, e

$$(x^2 - 6x + 60)^2 \underset{179}{\equiv} 117x^2 + 130x + 56 \underset{179}{\equiv} (81x + 45)^2;$$

ne viene che la proposta biquadratica è

$$(x^2 - 87x + 15)(x^2 + 75x + 105) \underset{179}{\equiv} 0,$$

il suo secondo fattore $\underset{179}{\equiv} (x + 71)(x + 4)$ dà due radici.

Sia per secondo esempio la biquadratica

$$x^4 - 6x^2 - 7x - 18 \underset{43}{\equiv} 0$$

ossia

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 \underset{43}{\equiv} (y + 6)x^2 + 7x + \frac{1}{4}(y^2 + 72),$$

ed acciocchè il secondo membro sia un quadrato perfetto porremo:

$$y^3 + 6y^2 + 29y + 2 \underset{43}{\equiv} 49$$

facendo $y \equiv -2 + z$ questa cubica diventa $z^3 + 17z - 3 \underset{43}{\equiv} 0$ di cui trovammo (n. 15) le tre radici $z \equiv 4, 8, -12$, dunque $y \equiv 2, 6, -14$; soltanto il terzo di questi valori di y dà la decomposizione della biquadratica

$$(x^2 - 7)^2 \underset{43}{\equiv} -8x^2 + 7x + 24 \underset{43}{\equiv} (32x + 29)^2, \quad (x^2 + 11x + 7)(x^2 - 11x + 22) \underset{43}{\equiv} 0$$

ed è poi facile riconoscere che le due

$$(x - 16)^2 - 34 \underset{43}{\equiv} 0, \quad (x + 16)^2 - 19 \underset{43}{\equiv} 0$$

non ammettono alcuna radice, perchè sono dispari ambedue i *logaritmi*

$$l_{20}\, 34 \underset{42}{\equiv} 29, \quad l_{20}\, 19 \underset{42}{\equiv} 13.$$

17. Tavola V dei logaritmi degli interi immaginarî. — Rispetto ai moduli che sono numeri primi della forma $p \equiv 4i + 3$, giova avere anche una tavola che dia i *logaritmi* degli interi immaginarî, e ciò prendendo per base un immaginario b che sia radice primitiva, vale a dire di cui la potenza di minimo esponente che sia congrua all'unità positiva sia $b^q \underset{p}{\equiv} 1$, essendo $q \equiv p^2 - 1$; tutti gli interi (anche immaginarî) che non sono congrui tra di loro rispetto a p sono in numero di p^2, sicchè si vede che la tavola di questi *logaritmi* sarebbe piuttosto estesa anche per moduli non molto grandi: io trovai che può servire senza troppo incomodo una tavola molto meno estesa, di cui do un saggio nella Tavola V: per ciascun modulo gli interi ed i loro *logaritmi* sono separati in tre compartimenti, il primo compartimento comprende i numeri reali ed i loro *logaritmi*, i quali sono multipli di $(p + 1)$; nel secondo compartimento vi sono gli interi immaginarî, la cui grandezza è congrua all'unità, i loro *logaritmi* sono multipli di $(p - 1)$; finalmente nel terzo compartimento vi sono i precedenti interi moltiplicati per la base, e perciò i *logaritmi* sono quelli del secondo compartimento accresciuti di un'unità. Rispetto ai moduli 7 e 11 la tavola è completa; rispetto ai moduli successivi il primo compartimento è ridotto alla metà e gli altri due al quarto, si può facilmente supplire alle parti ommesse moltiplicando gli interi per -1, per $\sqrt{\ }$ o per $-\sqrt{\ }$. Per ogni modulo p i *logaritmi* di $\sqrt{\ }$, -1, $-\sqrt{\ }$ sono $\frac{1}{4}(p^2 - 1)$, $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$, $\frac{3}{4}(p^2 - 1)$.

18. Uso della Tavola V. — Dato un *logaritmo*, se è pari, il suo congruo rispetto a $2(p-1)$ si moltiplicherà per $\frac{1}{2}(p+1)$ e si avrà un *logaritmo*, che si troverà nel primo compartimento, e che sommato ad uno dei *logaritmi* nel secondo compartimento darà il *logaritmo* proposto, sicchè il numero corrispondente si otterrà moltiplicando tra loro i due interi corrispondenti. Se il *logaritmo* sia dispari, lo si diminuirà da prima dell'unità, poscia operando come sopra il secondo *logaritmo* si cercherà nel terzo compartimento anzichè nel secondo. — Viceversa per trovare il *logaritmo* di un dato immaginario, si determinerà il quadrato della sua grandezza, ed il numero ad esso congruo si cercherà nel primo compartimento ed il corrispondente *logaritmo* si dividerà per due e si cercherà nel primo compartimento; se non ve lo si trovasse lo si dovrebbe previamente diminuire di $\frac{1}{2}(p+1)$; pel numero corrispondente si dividerà il dato intero, poi lo si troverà nel secondo compartimento, o nel terzo se si abbia dovuto diminuire il *logaritmo*; la somma dei *logaritmi* corrispondenti sarà il *logaritmo* cercato. — Così se rispetto al modulo 11 sia dato il *logaritmo* 103, si osserverà che $102 \underset{20}{=} 2$, $2.6 = 12$, e $103 \underset{120}{=} 12 + 91$, quindi il numero corrispondente sarà $2(-2-3\sqrt{})\underset{11}{=} -4+5\sqrt{}$. Viceversa dato l'intero $5-4\sqrt{}$, al quadrato della sua grandezza che è $25+16=41\underset{11}{=}-3$ corrisponde il *logaritmo* 36, la cui metà diminuita di $\frac{1}{2}(p+1)$ è 12, a cui corrisponde il numero 2, poscia $\frac{5-4\sqrt{}}{2}\underset{11}{=}-3-2\sqrt{}$, che ha il *logaritmo* 71, dunque $l(5-4\sqrt{})\underset{120}{=}12+71=83$. — Per secondo esempio proponiamoci di calcolare rispetto al modulo 67 la $\sqrt[5]{(7-5\sqrt{})}$; il quadrato della grandezza di $7-5\sqrt{}$ è $49+25\underset{67}{=}7$, e la Tavola V dà $l\,7\underset{4488}{=}1972$; la sua metà diminuita di $\frac{1}{2}(p+1)=34$ è $952=l\,4$; poscia:

$$\frac{7+5\sqrt{}}{4}\underset{67}{=}119+85\sqrt{}\underset{67}{=}-15+18\sqrt{},\quad l(-15+18\sqrt{})=661,$$

$$\text{e}\quad l(7+5\sqrt{})=995+661=1613\underset{4488}{=}19565.$$

Questo *logaritmo* diviso per 5, cioè 3913 dà:

$$3912\underset{132}{=}84,\quad 84.34=2856,\quad \text{poi}\quad 3913=2856+1057,$$

da cui $3913=l(-3(-19-11\sqrt{}))$, dunque:

$$\sqrt[3]{(7+5\sqrt{})}\underset{67}{=}-10+33\sqrt{}.$$

19. Esercizî. — Sia proposta la congruenza cubica

$$x^3+32x+23\underset{43}{=}0,$$

colla sostituzione Cardanica $x=u+\frac{18}{u}$ si giunge alla

$$u^6+23u^3-16\underset{43}{=}0$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 1\ -10\ -30 \\ & 1\ +\ 0 \end{array}$$

nella Tavola I si trova $l_{20}\,30 \equiv_{42} 14 + 3\,\mathfrak{V} = 23$, che è dispari, perciò 30 non è residuo quadratico: ricorriamo alla Tavola V che ci dà $l_{1+2\mathfrak{V}}\,30 \equiv_{1848} 1276$; ne viene che

$$l\,(u^3 - 10) \equiv_{1848} 638, \text{ ed osservando che } 638 \equiv_{84} 50$$

$$638 \equiv_{1848} 50.22 - 924 + 462 = 176 + 462 = l\,(-20) + l\,(\mathfrak{V})$$

si ha $u^3 = 10 - 20\,\mathfrak{V}$: poscia $\mathrm{gr}^2\,(u^3) = 100 + 400 \equiv_{42} -16$,

$$l\,(-16) \equiv_{1848} 1188, \text{ metà } 594, \quad 572 = l\,(-10), \quad \frac{u^2}{-10} = -1 + 2\,\mathfrak{V},$$

$$l\,(-1 + 2\,\mathfrak{V}) \equiv_{1848} 967, \quad l\,u^3 \equiv_{1848} 572 + 967 = 1539.$$

Risulta da ciò che il *logaritmo* di u ha tre valori:

$$l\,u \equiv_{1848} 513, 1129, 1745, \text{ è poi } l\,18 \equiv_{1848} 1012.$$

quindi i corrispondenti *logaritmi* di $\frac{1}{u}$ sono:

$$l\frac{1}{u} \equiv_{1848} 499, 1731, 1115.$$

Passando dai *logaritmi* ai numeri, si ottengono nel solito modo i valori:

$$u \equiv_{43} -14 + 16\,\mathfrak{V},\ 12 + 17\,\mathfrak{V},\ 2 + 10\,\mathfrak{V}$$

$$\frac{1}{u} \equiv_{43} 12 - 17\,\mathfrak{V},\ -14 - 16\,\mathfrak{V},\ 2 - 10\,\mathfrak{V}$$

e sommando si hanno le tre radici della proposta cubica

$$x \equiv_{43} -2 - \mathfrak{V},\ -2 + \mathfrak{V},\ 4,$$

che non si sarebbero potuti trovare senza adoperare gli immaginarî.

20. Sia proposta la biquadratica

$$x^4 - 5\,x^2 + 13\,x + 16 \equiv_{59} 0.$$

procedendo ad estrarne la radice (n. 16) avremo:

$$\left(x^2 - \frac{y}{2}\right)^2 \equiv_{59} (5 - y)\,x^2 - 13\,x + \left(\frac{y^2}{4} - 16\right),$$

e dovrà essere $y^3 - 5\,y^2 - 5\,y + 17 \equiv_{59} 0$;

questa ha la radice $y = 14$ (che si trova col metodo adoperato al n. 15) quindi sostituendo

$$(x^2 - 7)^2 \equiv_{59} -9\,x^2 - 13\,x - 26 \equiv_{59} -3\,(x + 12)^2:$$

il che mostra che la equipollenza si decompone nelle due

$$(x^2 - 7 + (3\,x + 12)\,\mathfrak{V})\,(x^2 - 7 - (3\,x + 12)\,\mathfrak{V}) \equiv_{59} 0.$$

Ponendo $x \equiv_{59} 29\,\mathfrak{V} + z$ la $x^2 + 3\,\mathfrak{V}\,x - 7 + 12\,\mathfrak{V} \equiv_{59} 0$ diventa $z^2 + 10 - 12\,\mathfrak{V} \equiv_{59} 0$,

ora $l\,(-10 + 12\,\mathfrak{V}) \equiv_{3480} l\,(15\,(19 - 11\,\mathfrak{V})) = 480 + 755 + 870 = 2105$,

che essendo dispari mostra che z è impossibile; dunque la proposta è priva di radici tanto reali che immaginarie.

Tavola I

che dà i *logaritmi* degli interi rispetto ai moduli, che sono potenze di un numero primo dispari.

---

7 $[3, 3^2]$ $\binom{0}{3}$ 21 $\binom{6}{3}$.

9 $[6, 2]$ $\binom{0}{3}$ 3 $\binom{3}{6}$.

11 $[10, 2]$ $\binom{0}{5}$ 311 $\binom{5}{10}$.

13 $[12, 2]$ $\binom{0}{6}$ 312 $\binom{6}{0}$.

17 $[8, 6^2]$ $\binom{0}{8}$ 4 $\binom{8}{16}$, $\binom{15}{7}$ 211 $\binom{7}{15}$.

19 $[18, 2]$ $\binom{0}{9}$ 42111 $\binom{9}{18}$.

23 $[11, 5^2]$ $\binom{0}{11}$ 411221 $\binom{22}{11}$.

25 $[20, 2]$ $\binom{0}{10}$ 41113 $\binom{10}{20}$.

27 $[18, 2]$ $\binom{0}{9}$ 41211 $\binom{9}{18}$.

29 $[28, 2]$ $\binom{0}{14}$ 413211 $\binom{12}{26}$ 2 $\binom{14}{28}$.

31 $[5, 12^6]$ $\binom{0}{15}$ 41 $\binom{30}{15}$, $\binom{19}{4}$ 32 $\binom{19}{4}$, $\binom{20}{5}$ 2111 $\binom{20}{5}$.

37 $[36, 2]$ $\binom{0}{18}$ 521311 $\binom{13}{31}$ 122 $\binom{18}{36}$.

41 $[20, 17^2]$ $\binom{0}{20}$ 523 $\binom{20}{40}$, $\binom{15}{35}$ 312111 $\binom{33}{13}$ 1 $\binom{35}{15}$.

43 $[14, 20^3]$ $\binom{0}{21}$ 511 $\binom{21}{42}$, $\binom{25}{4}$ 313 $\binom{4}{25}$, $\binom{35}{14}$ 21112 $\binom{14}{35}$.

47 $[23, 40^2]$ $\binom{0}{23}$ 511113 $\binom{24}{1}$ 212231 $\binom{46}{23}$.

49 $[21, 10^2]$ $\binom{0}{21}$ 511123 $\binom{26}{5}$ 2114 $\binom{42}{21}$.

53 $[52, 2]$ $\binom{0}{26}$ 512211 $\binom{12}{38}$ 112143 $\binom{24}{50}$ 2 $\binom{26}{52}$.

59 $[58, 2]$ $\binom{0}{29}$ 513111 $\binom{12}{41}$ 121234 $\binom{25}{54}$ 211 $\binom{29}{58}$.

61 $[60, 2]$ $\binom{0}{30}$ 514221 $\binom{15}{45}$ 211331 $\binom{26}{56}$ 112 $\binom{30}{60}$.

67 $[66, 2]$ $\binom{0}{33}$ 641121 $\binom{15}{48}$ 312232 $\binom{28}{61}$ 11111 $\binom{33}{66}$.

71 $[35, 59^2]$ $\binom{0}{35}$ 632212 $\binom{32}{67}$ 411112 $\binom{52}{17}$ 113121 $\binom{70}{35}$.

73 $[9, 9^8]$ $\binom{0}{36}$ 63 $\binom{72}{36}$, $\binom{1}{37}$ 3132 $\binom{1}{37}$, $\binom{6}{42}$ 411111 $\binom{6}{42}$, $\binom{55}{19}$ 212211 $\binom{55}{19}$.

79 $[39, 70^2]$ $\binom{0}{39}$ 622412 $\binom{34}{73}$ 213311 $\binom{56}{17}$ 211111 $\binom{70}{31}$ 31 $\binom{78}{39}$.

81 $[54, 2]$ $\binom{0}{29}$ 622111 $\binom{13}{40}$ 213112 $\binom{23}{50}$ 4 $\binom{27}{51}$.

83 $[82, 2]$ $\binom{0}{41}$ 623111 $\binom{14}{55}$ 122113 $\binom{24}{65}$ 214412 $\binom{38}{79}$ 111 $\binom{41}{82}$.

89 $[11, 19^8]$ $\binom{0}{42}$ 6113 $\binom{88}{44}$, $\binom{64}{17}$ 212111 $\binom{37}{81}$ 12 $\binom{64}{17}$, $\binom{2}{46}$ 4322 $\binom{2}{46}$, $\binom{53}{39}$ 413111 $\binom{53}{39}$.

97 $[48, 14^2]$ $\binom{0}{48}$ 611111 $\binom{22}{60}$ 33115 $\binom{48}{96}$, $\binom{65}{17}$ 421122 $\binom{89}{41}$ 213121 $\binom{13}{61}$ 2 $\binom{17}{65}$.

101 $[100, 2]$ $\binom{0}{50}$ 611131 $\binom{13}{63}$ 321542 $\binom{30}{80}$ 211112 $\binom{38}{88}$ 311212 $\binom{48}{98}$ 2 $\binom{50}{100}$.

103 $[51, 65^2]$ $\binom{0}{51}$ 612531 $\binom{36}{87}$ 311221 $\binom{56}{5}$ 142321 $\binom{82}{31}$ 211111 $\binom{96}{45}$ 21 $\binom{102}{51}$.

107 $[106, 2]$ $\binom{0}{53}$ 612221 $\binom{14}{67}$ 353211 $\binom{29}{82}$ 211131 $\binom{33}{91}$ 111231 $\binom{47}{100}$ 411 $\binom{53}{106}$.

109 $[36, 57^3]$ $\binom{0}{54}$ 612112 $\binom{39}{93}$ 212 $\binom{54}{108}$, $\binom{88}{34}$ 534113 $\binom{34}{85}$ 1 $\binom{34}{88}$, $\binom{68}{14}$ 311111 $\binom{92}{38}$ 21322 $\binom{14}{68}$.

113 $[28, 66^4]$ $\binom{0}{96}$ 61214 $\binom{56}{112}$, $\binom{37}{93}$ 411211 $\binom{77}{21}$ 112 $\binom{93}{37}$, $\binom{6}{62}$ 323311 $\binom{58}{2}$ 1 $\binom{62}{6}$, $\binom{103}{47}$ 521221 $\binom{43}{99}$ 1 $\binom{47}{103}$.

121 $[110, 2]$ $\binom{0}{55}$ 614312 $\binom{17}{72}$ 241111 $\binom{27}{82}$ 121115 $\binom{38}{93}$ 221123 $\binom{49}{104}$ 213 $\binom{55}{110}$.

125 $[100, 2]$ $\binom{0}{50}$ 615231 $\binom{18}{68}$ 212213 $\binom{29}{79}$ 112114 $\binom{39}{89}$ 321111 $\binom{48}{98}$ 2 $\binom{50}{100}$.

127 $[7, 39^{18}]$ $\binom{0}{63}$ 61 $\binom{126}{63}$, $\binom{10}{73}$ 3112 $\binom{10}{73}$, $\binom{65}{2}$ 52 $\binom{65}{2}$, $\binom{111}{48}$ 4111 $\binom{111}{48}$, $\binom{4}{67}$ 3121 $\binom{4}{67}$, $\binom{41}{104}$ 43 $\binom{41}{104}$, $\binom{42}{105}$ 2122 $\binom{42}{105}$, $\binom{106}{43}$ 211111 $\binom{106}{43}$, $\binom{62}{125}$ 3211 $\binom{62}{125}$.

131 $[130, 2]$ $\binom{0}{65}$ 751131 $\binom{18}{83}$ 322112 $\binom{29}{94}$ 242121 $\binom{41}{106}$ 112141 $\binom{51}{116}$ 233111 $\binom{62}{127}$ 111 $\binom{65}{130}$.

137 68. 31^2 $\binom{0}{68}$ 731421 $\binom{36}{104}$ 131112 $\binom{54}{122}$ 133 $\binom{68}{136}$, $\binom{41}{109}$ 511222 $\binom{67}{135}$ 123241 $\binom{93}{35}$ 211111 $\binom{107}{39}$ 1 $\binom{109}{41}$.

139 138. 2 $\binom{0}{69}$ 731113 $\binom{16}{85}$ 141212 $\binom{27}{96}$ 211111 $\binom{34}{103}$ 211351 $\binom{47}{116}$ 124223 $\binom{64}{130}$ 21131 $\binom{69}{138}$.

149 148. 2 $\binom{0}{74}$ 721215 $\binom{18}{92}$ 111212 $\binom{26}{100}$ 441312 $\binom{41}{115}$ 113223 $\binom{53}{127}$ 311221 $\binom{63}{137}$ 111114 $\binom{72}{146}$ 2 $\binom{74}{148}$.

151 15. 7^{10} $\binom{0}{75}$ 721221 $\binom{150}{75}$, $\binom{136}{61}$ 414411 $\binom{136}{61}$, $\binom{82}{7}$ 312111 $\binom{22}{97}$ 1122 $\binom{82}{7}$. $\binom{93}{18}$ 511131 $\binom{63}{138}$ 12 $\binom{93}{18}$, $\binom{79}{4}$ 322112 $\binom{39}{114}$ 13 $\binom{79}{4}$.

157 52. 136^3 $\binom{0}{78}$ 721141 $\binom{48}{126}$ 121211 $\binom{72}{150}$ 2 $\binom{78}{156}$, $\binom{46}{124}$ 512321 $\binom{88}{10}$ 31341 $\binom{124}{46}$. $\binom{92}{14}$ 431111 $\binom{125}{47}$ 122211 $\binom{152}{74}$ 132 $\binom{14}{92}$.

163 162. 2 $\binom{0}{81}$ 722121 $\binom{45}{96}$ 551211 $\binom{30}{114}$ 212311 $\binom{40}{121}$ 433131 $\binom{55}{136}$ 113211 $\binom{64}{145}$ 111222 $\binom{73}{154}$ 41111 $\binom{81}{162}$.

167 83. 13^2 $\binom{0}{83}$ 723142 $\binom{38}{124}$ 132115 $\binom{64}{147}$ 411111 $\binom{82}{165}$ 131251 $\binom{108}{25}$ 212221 $\binom{128}{45}$ 112112 $\binom{144}{61}$ 331121 $\binom{166}{83}$.

169 156. 2 $\binom{0}{78}$ 725421 $\binom{24}{99}$ 211314 $\binom{33}{111}$ 111112 $\binom{40}{118}$ 211115 $\binom{51}{129}$ 121311 $\binom{60}{138}$ 211133 $\binom{71}{149}$ 223 $\binom{78}{156}$.

173 172. 2 $\binom{0}{86}$ 711411 $\binom{15}{101}$ 121121 $\binom{23}{109}$ 315133 $\binom{39}{125}$ 531222 $\binom{54}{140}$ 421111 $\binom{64}{150}$ 113112 $\binom{73}{159}$ 322121 $\binom{84}{170}$ 2 $\binom{86}{172}$.

179 178. 2 $\binom{0}{89}$ 711213 $\binom{15}{104}$ 451312 $\binom{31}{120}$ 111211 $\binom{38}{127}$ 422215 $\binom{54}{143}$ 321221 $\binom{65}{154}$ 123111 $\binom{74}{163}$ 111324 $\binom{86}{175}$ 111 $\binom{89}{178}$.

181 180. 2 $\binom{0}{90}$ 711211 $\binom{13}{103}$ 114124 $\binom{26}{116}$ 221131 $\binom{36}{126}$ 111122 $\binom{44}{134}$ 132111 $\binom{53}{143}$ 215145 $\binom{74}{164}$ 331212 $\binom{83}{173}$ 232 $\binom{90}{180}$.

191 95. 57^2 $\binom{0}{95}$ 711111 $\binom{24}{119}$ 133412 $\binom{52}{147}$ 112431 $\binom{76}{171}$ 115211 $\binom{98}{3}$ 122322 $\binom{122}{27}$ 113131 $\binom{142}{47}$ 121221 $\binom{160}{65}$ 214251 $\binom{190}{95}$.

193 96. 52^2 $\binom{0}{96}$ 711111 $\binom{24}{120}$ 232141 $\binom{50}{146}$ 211121 $\binom{66}{162}$ 34116 $\binom{96}{192}$. $\binom{113}{17}$ 521111 $\binom{135}{39}$ 431121 $\binom{159}{63}$ 132212 $\binom{181}{85}$ 223131 $\binom{13}{109}$ 2 $\binom{17}{113}$.

197 196. 2 $\binom{0}{98}$ 711122 $\binom{14}{112}$ 211111 $\binom{21}{119}$ 133143 $\binom{36}{134}$ 212112 $\binom{45}{143}$ 111412 $\binom{55}{153}$ 132311 $\binom{66}{164}$ 241131 $\binom{78}{176}$ 221652 $\binom{96}{194}$ 2 $\binom{98}{196}$.

199 79. 179^2 $\binom{0}{99}$ 711121 $\binom{26}{125}$ 211111 $\binom{40}{139}$ 232433 $\binom{74}{173}$ 122112 $\binom{92}{191}$ 115222 $\binom{118}{19}$ 131111 $\binom{134}{35}$ 314113 $\binom{160}{61}$ 212641 $\binom{192}{93}$ 21 $\binom{198}{99}$.

211 210. 2 $\binom{0}{105}$ 712212 $\binom{15}{120}$ 112232 $\binom{26}{131}$ 152414 $\binom{43}{148}$ 631134 $\binom{61}{166}$ 211111 $\binom{68}{173}$ 231213 $\binom{80}{185}$ 221141 $\binom{94}{196}$ 111311 $\binom{99}{204}$ 12111 $\binom{105}{210}$.

223 37. 140^6 $\binom{0}{111}$ 712121 $\binom{84}{195}$ 143131 $\binom{162}{154}$ 2341 $\binom{222}{111}$, $\binom{19}{130}$ 511214 $\binom{103}{214}$ 111211 $\binom{145}{34}$ 111242 $\binom{211}{100}$ 2111 $\binom{19}{130}$, $\binom{95}{206}$ 621332 $\binom{197}{86}$ 112223 $\binom{41}{152}$ 111132 $\binom{95}{206}$.

227 226. 2 $\binom{0}{113}$ 712151 $\binom{47}{130}$ 121133 $\binom{28}{141}$ 423225 $\binom{46}{139}$ 621231 $\binom{61}{174}$ 431111 $\binom{72}{185}$ 112121 $\binom{80}{193}$ 112213 $\binom{90}{203}$ 114111 $\binom{99}{212}$ 312221 $\binom{110}{223}$ 111 $\binom{113}{226}$.

229 76. 79^3 $\binom{0}{114}$ 713431 $\binom{57}{171}$ 131423 $\binom{99}{213}$ 122 $\binom{114}{228}$, $\binom{37}{151}$ 551122 $\binom{85}{199}$ 112131 $\binom{112}{226}$ 111124 $\binom{142}{28}$ 111 $\binom{154}{37}$, $\binom{8}{122}$ 621112 $\binom{47}{161}$ 111132 $\binom{74}{188}$ 221212 $\binom{104}{218}$ 321 $\binom{122}{8}$.

233 29. 140^8 $\binom{0}{116}$ 713221 $\binom{128}{12}$ 113111 $\binom{192}{76}$ 23 $\binom{232}{116}$, $\binom{5}{121}$ 312111 $\binom{77}{193}$ 111212 $\binom{141}{25}$ 223113 $\binom{5}{121}$. $\binom{218}{102}$ 541243 $\binom{138}{254}$ 212131 $\binom{218}{102}$, $\binom{187}{71}$ 621121 $\binom{59}{175}$ 142511 $\binom{174}{55}$ 11 $\binom{187}{71}$.

239 119. 140^2 $\binom{0}{119}$ 713121 $\binom{30}{149}$ 321112 $\binom{50}{169}$ 332311 $\binom{76}{195}$ 131122 $\binom{96}{215}$ 622212 $\binom{126}{7}$ 111151 $\binom{146}{27}$ 111112 $\binom{160}{41}$ 124114 $\binom{186}{67}$ 214122 $\binom{210}{91}$ 113531 $\binom{238}{119}$.

241 24. 56^{10} $\binom{0}{120}$ 714 $\binom{120}{0}$, $\binom{241}{91}$ 53121 $\binom{91}{241}$, $\binom{2}{122}$ 62211 $\binom{122}{2}$, $\binom{213}{93}$ 311221 $\binom{73}{193}$ 2 $\binom{93}{213}$, $\binom{4}{124}$ 41223 $\binom{124}{4}$, $\binom{235}{115}$ 4113111 $\binom{115}{235}$, $\binom{6}{126}$ 3321111 $\binom{126}{6}$. $\binom{77}{197}$ 42132 $\binom{197}{77}$. $\binom{78}{192}$ 511111 $\binom{178}{58}$ 2 $\binom{198}{78}$, $\binom{49}{169}$ 212111 $\binom{129}{9}$ 211 $\binom{169}{49}$.

243 162, $2^{}$ $\binom{0}{81}$ 714212 $\binom{17}{98}$ 122151 $\binom{29}{110}$ 111131 $\binom{37}{118}$ 341132 $\binom{51}{132}$ 112111 $\binom{58}{139}$ 122232 $\binom{70}{151}$ 53111 $\binom{81}{162}$.

251 50, 130^{5} $\binom{0}{125}$ 715111 $\binom{80}{205}$ 32211 $\binom{125}{250}$, $\binom{6}{131}$ 412121 $\binom{61}{186}$ 121421 $\binom{116}{241}$ 111 $\binom{134}{6}$, $\binom{92}{217}$ 313111 $\binom{142}{17}$ 111211 $\binom{177}{52}$ 12311 $\binom{217}{92}$. $\binom{128}{3}$ 624411 $\binom{218}{93}$ 223 $\binom{3}{128}$. $\binom{234}{109}$ 532133 $\binom{69}{194}$ 12212 $\binom{109}{234}$.

257 16, 27^{16} $\binom{0}{128}$ 8 $\binom{128}{256}$, $\binom{1}{129}$ 32111 $\binom{129}{1}$, $\binom{114}{242}$ 31112 $\binom{242}{114}$, $\binom{19}{147}$ 21122 $\binom{147}{19}$, $\binom{180}{52}$ 31121 $\binom{52}{180}$. $\binom{69}{197}$ 211111 $\binom{181}{53}$ 1 $\binom{197}{69}$, $\binom{86}{214}$ 413 $\binom{214}{86}$, $\binom{198}{71}$ 521 $\binom{71}{198}$, $\binom{104}{232}$ 431 $\binom{232}{104}$. $\binom{121}{249}$ 21221 $\binom{249}{121}$, $\binom{122}{250}$ 323 $\binom{250}{122}$, $\binom{174}{43}$ 611 $\binom{43}{171}$, $\binom{236}{108}$ 41111 $\binom{108}{236}$, $\binom{189}{61}$ 512 $\binom{61}{189}$. $\binom{206}{78}$ 422 $\binom{78}{206}$, $\binom{127}{255}$ 31211 $\binom{255}{127}$.

263 131, 110^{2} $\binom{0}{131}$ 852121 $\binom{38}{169}$ 151221 $\binom{62}{193}$ 314132 $\binom{90}{221}$ 411111 $\binom{108}{239}$ 121111 $\binom{122}{253}$ 422111 $\binom{144}{13}$ 231212 $\binom{166}{35}$ 611311 $\binom{192}{61}$ 133431 $\binom{222}{91}$ 122232 $\binom{246}{115}$ 112121 $\binom{262}{131}$.

269 268, $2^{}$ $\binom{0}{134}$ 842311 $\binom{49}{153}$ 521111 $\binom{30}{164}$ 112112 $\binom{38}{172}$ 211311 $\binom{47}{181}$ 114321 $\binom{59}{193}$ 322212 $\binom{71}{205}$ 351224 $\binom{88}{222}$ 131214 $\binom{100}{234}$ 111231 $\binom{109}{243}$ 611212 $\binom{122}{256}$ 111331 $\binom{132}{266}$ 2 $\binom{134}{268}$.

271 135, 96^{2} $\binom{0}{135}$ 843311 $\binom{40}{175}$ 112131 $\binom{58}{193}$ 142313 $\binom{86}{221}$ 521123 $\binom{114}{249}$ 222611 $\binom{142}{277}$ 211111 $\binom{156}{291}$ 115121 $\binom{178}{43}$ 132121 $\binom{198}{63}$ 221113 $\binom{218}{83}$ 124111 $\binom{238}{103}$ 222141 $\binom{262}{127}$ 31 $\binom{270}{135}$.

277 92, 181^{3} $\binom{0}{138}$ 831221 $\binom{54}{189}$ 211421 $\binom{84}{222}$ 313234 $\binom{132}{270}$ 2 $\binom{138}{276}$, $\binom{124}{262}$ 611231 $\binom{166}{28}$ 133211 $\binom{199}{61}$ 122211 $\binom{226}{88}$ 211112 $\binom{250}{112}$ 121 $\binom{262}{124}$, $\binom{77}{215}$ 512124 $\binom{122}{260}$ 141113 $\binom{155}{17}$ 111111 $\binom{173}{35}$ 15224 $\binom{215}{77}$.

281 70, 190^{4} $\binom{0}{140}$ 831121 $\binom{64}{204}$ 232112 $\binom{108}{248}$ 21113 $\binom{140}{280}$, $\binom{97}{237}$ 421211 $\binom{141}{1}$ 111121 $\binom{169}{29}$ 132312 $\binom{217}{77}$ 221 $\binom{237}{97}$. $\binom{86}{226}$ 512133 $\binom{146}{6}$ 441522 $\binom{218}{78}$ 2 $\binom{226}{86}$, $\binom{14}{151}$ 611113 $\binom{63}{203}$ 131112 $\binom{99}{239}$ 411411 $\binom{147}{7}$ 1 $\binom{154}{11}$.

283 94, 260^{3} $\binom{0}{141}$ 832421 $\binom{50}{201}$ 221321 $\binom{93}{234}$ 133131 $\binom{129}{270}$ 211 $\binom{141}{282}$, $\binom{55}{196}$ 611112 $\binom{91}{232}$ 121113 $\binom{118}{259}$ 112112 $\binom{142}{1}$ 311122 $\binom{172}{31}$ 233 $\binom{196}{55}$. $\binom{125}{266}$ 512141 $\binom{167}{26}$ 144125 $\binom{218}{77}$ 221111 $\binom{242}{101}$ 11141 $\binom{266}{125}$.

289 136, 45^{2} $\binom{0}{136}$ 833112 $\binom{36}{172}$ 312111 $\binom{54}{190}$ 221131 $\binom{74}{210}$ 421111 $\binom{94}{230}$ 212241 $\binom{118}{254}$ 135 $\binom{136}{272}$, $\binom{199}{63}$ 611111 $\binom{224}{85}$ 114122 $\binom{243}{107}$ 152322 $\binom{1}{137}$ 212513 $\binom{29}{165}$ 212131 $\binom{49}{185}$ 11311 $\binom{63}{199}$.

293 292, $2^{}$ $\binom{0}{146}$ 821611 $\binom{49}{165}$ 125513 $\binom{36}{182}$ 114211 $\binom{46}{192}$ 321231 $\binom{58}{204}$ 111311 $\binom{66}{212}$ 152431 $\binom{82}{228}$ 212112 $\binom{94}{237}$ 213411 $\binom{103}{249}$ 211121 $\binom{111}{257}$ 314122 $\binom{124}{270}$ 233221 $\binom{137}{283}$ 111112 $\binom{144}{290}$ 2 $\binom{146}{292}$.

307 102, 53^{3} $\binom{0}{153}$ 821111 $\binom{42}{195}$ 111433 $\binom{81}{234}$ 112115 $\binom{144}{267}$ 46111 $\binom{153}{306}$, $\binom{283}{130}$ 514111 $\binom{16}{169}$ 121113 $\binom{43}{196}$ 213412 $\binom{82}{235}$ 121124 $\binom{115}{268}$ 221 $\binom{130}{283}$, $\binom{86}{239}$ 511311 $\binom{122}{275}$ 122123 $\binom{155}{2}$ 223122 $\binom{191}{38}$ 211213 $\binom{221}{68}$ 132 $\binom{239}{86}$.

311 156, 66^{2} $\binom{0}{155}$ 821121 $\binom{30}{185}$ 111311 $\binom{46}{201}$ 515312 $\binom{80}{235}$ 113131 $\binom{100}{255}$ 112121 $\binom{116}{271}$ 114111 $\binom{134}{289}$ 111222 $\binom{152}{307}$ 132122 $\binom{174}{319}$ 111261 $\binom{198}{43}$ 245113 $\binom{230}{75}$ 423112 $\binom{256}{101}$ 332224 $\binom{288}{133}$ 121421 $\binom{310}{155}$.

313 166, 193^{2} $\binom{0}{156}$ 821131 $\binom{32}{188}$ 124111 $\binom{52}{208}$ 111145 $\binom{78}{234}$ 311133 $\binom{102}{258}$ 211161 $\binom{126}{282}$ 231141 $\binom{150}{306}$ 3 $\binom{156}{312}$, $\binom{39}{195}$ 515112 $\binom{90}{225}$ 132211 $\binom{89}{245}$ 112111 $\binom{103}{259}$ 221212 $\binom{123}{279}$ 223421 $\binom{151}{307}$ 423131 $\binom{179}{23}$ 21122 $\binom{195}{39}$.

317 316, $2^{}$ $\binom{0}{158}$ 822311 $\binom{17}{175}$ 142531 $\binom{33}{191}$ 131211 $\binom{42}{200}$ 121211 $\binom{50}{208}$ 511211 $\binom{61}{219}$ 232111 $\binom{74}{229}$ 111222 $\binom{80}{238}$ 113516 $\binom{97}{255}$ 122124 $\binom{109}{267}$ 212131 $\binom{119}{277}$ 111322 $\binom{129}{287}$ 141333 $\binom{144}{302}$ 144111 $\binom{156}{314}$ 2 $\binom{158}{316}$.

331 [30, 292^{11}] $\binom{0}{165}$ 82311 $\binom{165}{330}$, $\binom{34}{199}$ 431112 $\binom{166}{1}$ 3 $\binom{199}{34}$, $\binom{57}{222}$ 411322 $\binom{200}{35}$ 2 $\binom{222}{57}$, $\binom{245}{80}$ 313321 $\binom{58}{223}$2$\binom{80}{245}$, $\binom{191}{26}$612111 $\binom{323}{158}$3$\binom{26}{191}$, $\binom{291}{126}$511112 $\binom{82}{247}$112$\binom{126}{291}$, $\binom{281}{116}$ 311222 $\binom{72}{237}$ 121 $\binom{116}{281}$, $\binom{62}{227}$ 312211 $\binom{172}{7}$ 11111 $\binom{227}{62}$, $\binom{92}{247}$ 521411 $\binom{206}{41}$ 1 $\binom{217}{52}$, $\binom{196}{31}$ 64131 $\binom{31}{196}$, $\binom{164}{329}$ 421121 $\binom{285}{120}$ 211 $\binom{329}{164}$.

337 [21, 34^{16}] $\binom{0}{168}$ 824124 $\binom{336}{168}$, $\binom{57}{225}$ 642231 $\binom{9}{177}$ 12 $\binom{57}{225}$, $\binom{74}{242}$ 612133 $\binom{330}{162}$ 1211 $\binom{74}{242}$, $\binom{51}{219}$ 414112 $\binom{259}{91}$ 122111 $\binom{51}{219}$, $\binom{148}{316}$ 521211 $\binom{4}{172}$ 1233 $\binom{148}{316}$, $\binom{229}{61}$ 432213 $\binom{133}{301}$ 1311 $\binom{229}{61}$, $\binom{30}{198}$ 511111 $\binom{190}{22}$ 113111 $\binom{318}{150}$ 21 $\binom{30}{198}$, $\binom{87}{255}$ 321111 $\binom{231}{63}$ 211222 $\binom{55}{223}$ 11 $\binom{87}{255}$.

343 147, 108^{2} $\binom{0}{147}$ 811631 $\binom{40}{187}$ 312111 $\binom{58}{205}$ 111131 $\binom{74}{221}$ 111211 $\binom{88}{235}$ 212433 $\binom{118}{265}$ 113213 $\binom{140}{287}$ 231114 $\binom{164}{17}$ 122122 $\binom{184}{37}$ 415211 $\binom{212}{65}$ 121422 $\binom{236}{89}$ 112613 $\binom{264}{117}$ 411222 $\binom{288}{141}$ 21 $\binom{294}{147}$.

347 [346, 2] $\binom{0}{173}$ 811422 $\binom{18}{191}$ 131111 $\binom{26}{199}$ 112211 $\binom{34}{207}$ 131212 $\binom{44}{217}$ 332231 $\binom{58}{231}$ 121214 $\binom{69}{242}$ 122211 $\binom{78}{254}$ 324112 $\binom{94}{264}$ 314416 $\binom{110}{283}$ 312511 $\binom{123}{296}$ 121111 $\binom{130}{303}$ 152111 $\binom{144}{314}$ 134361 $\binom{159}{332}$ 321211 $\binom{169}{342}$ 211 $\binom{173}{346}$.

349 [348, 2] $\binom{0}{174}$ 811314 $\binom{18}{192}$ 214161 $\binom{33}{207}$ 322211 $\binom{44}{218}$ 123252 $\binom{59}{233}$ 112211 $\binom{67}{241}$ 511121 $\binom{78}{252}$ 312423 $\binom{93}{267}$ 441223 $\binom{109}{283}$ 121211 $\binom{117}{291}$ 112113 $\binom{126}{300}$ 321221 $\binom{137}{311}$ 363111 $\binom{152}{326}$ 111131 $\binom{160}{334}$ 121114 $\binom{170}{344}$ 112 $\binom{174}{348}$.

353 [88, 48^{4}] $\binom{0}{176}$ 811322 $\binom{68}{244}$ 112442 $\binom{124}{300}$ 311111 $\binom{156}{332}$ 5 $\binom{176}{352}$, $\binom{337}{161}$ 613112 $\binom{41}{217}$ 241211 $\binom{85}{261}$ 212126 $\binom{141}{317}$ 311 $\binom{161}{337}$, $\binom{322}{146}$ 521142 $\binom{30}{206}$ 133312 $\binom{82}{258}$ 131411 $\binom{126}{302}$ 113 $\binom{146}{322}$, $\binom{275}{99}$ 511131 $\binom{323}{147}$ 232111 $\binom{11}{187}$ 211111 $\binom{39}{215}$ 122122 $\binom{79}{255}$ 221 $\binom{99}{275}$.

359 [179, 19^{2}] $\binom{0}{179}$ 811212 $\binom{30}{209}$ 113211 $\binom{48}{227}$ 223122 $\binom{72}{251}$ 116321 $\binom{100}{279}$ 452512 $\binom{138}{317}$ 613133 $\binom{172}{351}$ 112421 $\binom{194}{15}$ 232341 $\binom{224}{45}$ 111112 $\binom{238}{59}$ 212131 $\binom{258}{79}$ 143152 $\binom{290}{111}$ 221111 $\binom{306}{127}$ 141211 $\binom{326}{147}$ 131112 $\binom{344}{165}$ 111121 $\binom{358}{179}$.

361 [342, 2] $\binom{0}{171}$ 811211 $\binom{14}{185}$ 123111 $\binom{23}{194}$ 212141 $\binom{34}{205}$ 111111 $\binom{40}{211}$ 323211 $\binom{52}{223}$ 342633 $\binom{73}{244}$ 113122 $\binom{83}{254}$ 212112 $\binom{92}{263}$ 211112 $\binom{100}{271}$ 115522 $\binom{116}{287}$ 243132 $\binom{134}{302}$ 131111 $\binom{139}{310}$ 613151 $\binom{156}{327}$ 241212 $\binom{168}{339}$ 3 $\binom{171}{342}$.

367 [183, 79^{2}] $\binom{0}{183}$ 811221 $\binom{30}{213}$ 112121 $\binom{46}{229}$ 254111 $\binom{74}{257}$ 231211 $\binom{94}{277}$ 211111 $\binom{108}{291}$ 113223 $\binom{132}{315}$ 242111 $\binom{154}{337}$ 162152 $\binom{188}{5}$ 213321 $\binom{212}{29}$ 222113 $\binom{234}{51}$ 111431 $\binom{256}{73}$ 111226 $\binom{282}{99}$ 141141 $\binom{306}{123}$ 213131 $\binom{328}{145}$ 135123 $\binom{358}{175}$ 31 $\binom{366}{183}$.

373 [372, 2] $\binom{0}{186}$ 811115 $\binom{17}{203}$ 122221 $\binom{27}{213}$ 421141 $\binom{40}{226}$ 112121 $\binom{48}{234}$ 121615 $\binom{64}{250}$ 432211 $\binom{77}{263}$ 221233 $\binom{90}{276}$ 413312 $\binom{104}{290}$ 523112 $\binom{118}{304}$ 111122 $\binom{126}{312}$ 411311 $\binom{137}{323}$ 111113 $\binom{145}{331}$ 211123 $\binom{155}{341}$ 131211 $\binom{164}{350}$ 146212 $\binom{180}{366}$ 132 $\binom{186}{372}$.

379 [378, 2] $\binom{0}{189}$ 811112 $\binom{14}{203}$ 231112 $\binom{24}{213}$ 453121 $\binom{40}{229}$ 342221 $\binom{54}{243}$ 111111 $\binom{60}{249}$ 321312 $\binom{72}{261}$ 321121 $\binom{82}{271}$ 111524 $\binom{96}{285}$ 111314 $\binom{107}{296}$ 331141 $\binom{120}{309}$ 121413 $\binom{132}{321}$ 236162 $\binom{152}{341}$ 125121 $\binom{164}{353}$ 131122 $\binom{174}{363}$ 121112 $\binom{182}{371}$ 12211 $\binom{189}{378}$.

383 191, 246^{2} $\binom{0}{191}$ 811111 $\binom{26}{217}$ 123321 $\binom{50}{241}$ (141311 $\binom{72}{263}$ 253111 $\binom{98}{289}$ 211344 $\binom{128}{319}$ 111621 $\binom{152}{343}$ 111143 $\binom{174}{365}$ 512111 $\binom{196}{387}$ 121321 $\binom{216}{25}$ 212242 $\binom{242}{51}$ 211222 $\binom{262}{71}$ 213141 $\binom{286}{95}$ 121113 $\binom{304}{113}$ 231131 $\binom{326}{135}$ 221231 $\binom{348}{157}$ 215261 $\binom{382}{191}$.

. . . . . .

631 [45, 14^{14}] $\binom{0}{315}$ 922513 $\binom{308}{623}$ 312231 $\binom{476}{161}$ 311321 $\binom{630}{315}$, $\binom{647}{302}$ 611211 $\binom{155}{470}$ 135241 $\binom{379}{64}$ 111411 $\binom{505}{190}$ 44 $\binom{647}{302}$, $\binom{373}{58}$ 541211 $\binom{569}{254}$ 111112 $\binom{37}{252}$ 221111 $\binom{149}{464}$ 212112 $\binom{275}{590}$ 1312 $\binom{373}{58}$, $\binom{108}{423}$ 616311 $\binom{360}{45}$ 221115 $\binom{528}{213}$ 111113 $\binom{10}{325}$ 2311 $\binom{108}{423}$,

$\binom{46}{361}$ 422121 $\binom{214}{529}$ 231112 $\binom{354}{39}$ 112433 $\binom{550}{235}$ 2223 $\binom{46}{361}$,
$\binom{103}{418}$ 712214 $\binom{341}{26}$ 211123 $\binom{481}{166}$ 212211 $\binom{607}{292}$ 311112 $\binom{103}{418}$,
$\binom{454}{139}$ 521321 $\binom{20}{335}$ 121141 $\binom{160}{475}$ 314111 $\binom{314}{629}$ 312121 $\binom{454}{139}$.

. . . . . .

683 $22, 96^{31}$ $\binom{0}{341}911\binom{341}{962}$, $\binom{528}{187}713\binom{187}{528}$, $\binom{374}{33}62111\binom{33}{374}$, $\binom{437}{96}44111\binom{96}{437}$, $\binom{500}{159}42113\binom{159}{500}$,
$\binom{160}{501}$ 311121 $\binom{439}{98}2\binom{501}{160}$, $\binom{409}{68}$ 41312 $\binom{68}{409}$, $\binom{131}{472}$ 31322 $\binom{472}{131}$, $\binom{566}{225}$ 212211
$\binom{163}{504}2\binom{225}{666}$, $\binom{257}{598}41132\binom{598}{257}$, $\binom{196}{537}311212\binom{506}{165}1\binom{537}{196}$, $\binom{104}{445}312121\binom{414}{73}1\binom{445}{104}$,
$\binom{198}{539}32213\binom{539}{198}$, $\binom{571}{230}211111$ $\binom{106}{447}211\binom{230}{571}$, $\binom{107}{448}731\binom{448}{107}$, $\binom{635}{294}51122\binom{294}{635}$.
$\binom{605}{264}$ 42131 $\binom{264}{605}$.

. . . . . .

1009 $504, 570^2$ $\binom{0}{504}916423$ $\binom{50}{554}213112$ $\binom{70}{574}412112$ $\binom{92}{596}$ 322211 $\binom{114}{618}$ 824112 $\binom{150}{654}121111$
$\binom{164}{668}121141$ $\binom{184}{688}334111\binom{210}{714}222361\binom{242}{746}212131\binom{262}{766}217332\binom{298}{802}111111$
$\binom{310}{844}$ 352211 $\binom{338}{842}$ 115212 $\binom{362}{866}$ 122212 $\binom{382}{886}$ 511111 $\binom{402}{906}$ 112711
$\binom{428}{932}$ 131225 $\binom{456}{960}$ 311121 $\binom{474}{978}$ 321131 $\binom{496}{1000}$ 4 $\binom{504}{1008}$,
$\binom{347}{851}$ 611221 $\binom{373}{877}$ 112313 $\binom{395}{899}$ 262112 $\binom{423}{927}$ 231142 $\binom{449}{953}$ 244141
$\binom{481}{985}$ 151221 $\binom{505}{1}$ 121412 $\binom{527}{23}$ 421113 $\binom{551}{47}$ 212212 $\binom{574}{67}$ 113221
$\binom{591}{87}$ 343231 $\binom{623}{119}$ 233121 $\binom{647}{143}$ 114111 $\binom{665}{161}$ 131133 $\binom{689}{185}$ 112112
$\binom{705}{201}$ 111211 $\binom{719}{215}$ 112123 $\binom{739}{235}$ 111122 $\binom{755}{251}$ 142151 $\binom{783}{279}$ 131111
$\binom{799}{295}$ 143155 $\binom{837}{333}$ 13111 $\binom{851}{347}$.

Tavola II.

Antilogaritmi pel modulo 256.

colle basi 3, — 3, 7, 15, 31, 63, 127.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+		3	9	27	81	243	217	139	161	227
1	169	251	241	211	121	107	65	195	73	219
2	145	179	25	75	225	163	233	187	49	147
3	185	43	129	131	137	155	209	115	89	11
4	33	99	41	123	113	83	249	235	193	67
5	201	91	17	51	153	203	97	35	105	59
6	177	19	57	171	1					
—		253	9	229	81	13	217	117	161	29
1	169	5	241	45	121	149	65	61	73	37
2	145	77	25	181	225	93	233	69	49	109
3	185	213	129	125	137	101	209	141	89	11
4	33	157	41	133	113	173	249	21	193	189
5	201	165	17	205	153	53	97	221	105	197
6	177	237	57	85	1					
·		7	49	87	97	167	145	247	193	71
1	241	151	33	231	81	55	129	135	177	215
2	225	39	17	119	65	199	113	23	161	103
3	209	183	1							
:		15	225	47	193	79	161	111	129	143
1	97	175	65	207	33	239	1			
∴		31	193	95	129	159	65	223	1	
: :		63	129	191	4					
:∴:		127	1							

Tavola III.

Logaritmi pel modulo 256.

	1	3	5	7	9
		1 +	11 —	1 .	2 ±
1	39 +	5 —	1 :	52 ±, 22 .	61 +
2	47 —	27 .	22 ±	3 +	9 —
3	1 ∴	40 ±, 12 ., 14 :	57 +	19 —	21 .
4	42 ±	31 +	13 —	3 :	28 ±, 2 .
5	53 +	55 —	15 .	62 ±	59 +
6	17 —	1 : :	16 ±, 24 ., 12 :, 6 ∴	49 +	27 —
7	9 .	18 ±	23 +	21 —	5 :
8	4 ±, 14 .	45 +	63 —	3 .	38 ±
9	51 +	25 —	3 ∴	56 ±, 4 ., 10 :	41 +
10	35 —	29 .	58 ±	15 +	29 —
11	13 +, 7 :	44 ±, 26.	37 +	7 —	23 .
12	14 ±	43 +	33 —	1 :·;	32 ±, 16 ., 8 :, 4 ∴, 2 : :
13	33 +	43 —	17 .	24 ±	7 +
14	37 —	9 :	20 ±, 6 .	29 +	15 —, 2 :
15	11 .	54 ±	35 +	41 —	5 ∴
16	8 ±, 28 ., 6 :	25 +	51 —	5 .	10 ±
17	63 +	45 —	11 :	60 ±, 18.	21 +
18	23 —	31 .	30 ±	27 +	49 —
19	3 : :	48 ±, 8 ., 4 :, 2 ∴	17 +	59 —	25 .
20	50 ±	55 +	53 —	13 :	36 ±, 30.
21	13 +	31 —	19 .	6 ±	19 +
22	57 —, 13 .	7 ∴	24 ±, 20 ., 2 :	9 +	3 —
23	13 .	26 ±	47 +	61 —	15 :
24	12 ±, 10 .	5 +	39 —	7 .	46 ±
25	11 +	1 —			

Tavola IV

che pel modulo 256 dà x conoscendo $[x]^2 = x(x+1)$

	0	2	4	6	8
		1,254	116,139	2,253	55,200
1	102,153	3,252	42,213	16,239	78,177
2	4,251	45,210	39,216	73,182	115,140
3	5,250	32,223	97,158	107,148	93,162
4	23,232	6,249	28,227	53,202	48,207
5	17,238	36,219	114,141	7,248	86,169
6	83,172	101,154	64,191	62,193	75,180
7	66,189	8,247	89,166	60,195	106,149
8	80,175	113,142	68,187	18,237	24,231
9	9,246	51,204	58,197	96,159	33,222
10	43,212	29,226	40,215	70,185	92,163
11	10,245	112,143	46,209	100,155	77,178
12	56,199	105,150	19,236	37,218	127,128
13	126,129	11,244	125,130	72,183	25,238
14	124,131	85,170	111,144	49,206	123,132
15	82,173	88,167	54,201	12,243	122,133
16	95,160	30,225	20,235	34,221	104,151
17	121,134	99,156	74,181	79,176	110,145
18	91,164	13,242	120,135	41,214	44,211
19	26,229	63,192	65,190	52,203	61,194
20	119,136	38,217	67,188	21,234	47,208
21	14,241	59,196	109,146	103,152	118,137
22	76,179	69,186	31,224	94,161	84,171
23	98,157	87,168	57,198	35,220	117,138
24	15,240	81,174	27,228	50,205	71,184
25	22,233	108,147	90.165		

Tavola V.

Logaritmi aventi le basi immaginarie.

Mod. 7, base $1 - 2\nu$

Num.	*Log.*	*Interi*	*Log.*	*Interi*	*Log.*
— 2	8	$-2-2\nu$	6	$1+2\nu$	7
— 3	16	ν	12	$2+\nu$	13
— 1	24	$2-2\nu$	18	$-2+\nu$	19
2	32	— 1	24	$-1+2\nu$	25
3	40	$2+2\nu$	30	$-1-2\nu$	31
1	48	$-\nu$	36	$-2-\nu$	37
		$-2+2\nu$	42	$2-\nu$	43

Mod. 11, base $3 - 2\nu$

2	12	$-3-5\nu$	10	$3+2\nu$	11
4	24	$-5-3\nu$	20	$1+\nu$	21
— 3	36	ν	30	$2+3\nu$	31
5	48	$5-3\nu$	40	$-2+3\nu$	41
— 1	60	$3-5\nu$	50	$-1+\nu$	51
— 2	72	— 1	60	$-3+2\nu$	61
— 4	84	$3+5\nu$	70	$-3-2\nu$	71
3	96	$5+3\nu$	80	$-1-\nu$	81
— 5	108	$-\nu$	90	$-2-3\nu$	91
1	120	$-5+3\nu$	100	$2-3\nu$	101
		$-3+5\nu$	110	$1-\nu$	111

19, base $3 + 2\nu$

— 6	20	$-4+2\nu$	18	$3-2\nu$	19
— 2	40	$-7+3\nu$	36	$-8-5\nu$	37
— 7	60	$3-7\nu$	54	$4+4\nu$	55
4	80	$2-4\nu$	72	$-5-8\nu$	73
— 5	100	ν	90	$-2+3\nu$	91
— 8	120				
— 9	140				
— 3	160				
— 1	180				

23, base $1 + 2\nu$

5	24	$4-10\nu$	22	$1-2\nu$	23
2	48	$8-11\nu$	44	$7+5\nu$	45
10	72	$-9-9\nu$	66	$9-4\nu$	67
4	96	$-11-8\nu$	88	$-4+9\nu$	89
— 3	120	$-10+4\nu$	110	$5+7\nu$	111
8	144	ν	132	$-2+\nu$	133
— 6	168				
— 7	192				
11	216				
9	240				
— 1	264				

31, base $3 + 2\nu$

13	32	$-2+11\nu$	30	$3-2\nu$	31
14	64	$7-13\nu$	60	$-15+6\nu$	61
— 4	96	$5+10\nu$	90	$-5+9\nu$	91
10	128	$4+4\nu$	120	$4-11\nu$	121
6	160	$10+5\nu$	150	$-11+4\nu$	151
— 15	192	$-13+7\nu$	180	$9-5\nu$	181
— 9	224	$11-2\nu$	210	$6-15\nu$	211
7	256	ν	240	$-2+3\nu$	241
— 2	288				
+ 5	320				
3	352				
8	384				
11	416				
— 12	448				
— 1	480				

Segue la TAVOLA V.

Logaritmi aventi le basi immaginarie.

Mod. 43, base $1+2\sqrt{}$				Mod. 47, base $1-2\sqrt{}$			
5	44	$8-18\sqrt{}$	42	5	48	$-10-18\sqrt{}$	46
-18	88	$-2+13\sqrt{}$	84	-22	96	$11-16\sqrt{}$	92
-4	132	$3+11\sqrt{}$	126	-16	144	$-22+9\sqrt{}$	138
-20	176	$7-9\sqrt{}$	168	14	192	$6-23\sqrt{}$	184
-14	220	$-20+17\sqrt{}$	210	23	240	$-4-19\sqrt{}$	230
16	264	$17-26\sqrt{}$	252	21	288	$-20-20\sqrt{}$	276
-6	308	$-9+7\sqrt{}$	294	11	336	$-19-4\sqrt{}$	322
13	352	$11+3\sqrt{}$	336	8	384	$-23+6\sqrt{}$	368
-21	396	$13-2\sqrt{}$	378	-7	432	$9-22\sqrt{}$	414
-19	440	$-18+8\sqrt{}$	420	12	480	$-16+11\sqrt{}$	460
-9	484	$\sqrt{}$	462	13	528	$-18-10\sqrt{}$	506
-2	528	$1-2\sqrt{}$	43	18	576	$\sqrt{}$	552
-10	572	$15+9\sqrt{}$	85	-4	624	$1+2\sqrt{}$	47
-7	616	$-19+17\sqrt{}$	127	-20	672	$-21+9\sqrt{}$	93
8	660	$-18+5\sqrt{}$	169	-6	720	$-4+6\sqrt{}$	139
-3	704	$-11+20\sqrt{}$	211	17	768	$7+12\sqrt{}$	185
-15	748	$14+14\sqrt{}$	253	-9	816	$5-11\sqrt{}$	231
11	792	$20-11\sqrt{}$	295	2	864	$-13+20\sqrt{}$	277
12	836	$5-18\sqrt{}$	337	10	912	$20-13\sqrt{}$	323
17	880	$17-19\sqrt{}$	379	3	960	$-11+5\sqrt{}$	369
-1	924	$9+15\sqrt{}$	421	15	1008	$12+7\sqrt{}$	415
		$-2+\sqrt{}$	463	-19	1056	$6-4\sqrt{}$	461
				-1	1104	$9-21\sqrt{}$	507
						$2+\sqrt{}$	553

Segue la TAVOLA V.

Logaritmi aventi le basi immaginarie.

Mod. 59, base $3-\sqrt{-1}$			Mod. 67, base $3+2\sqrt{-1}$		
10	60	$-11-23\sqrt{-1}$ 58	13	68	$21+30\sqrt{-1}$ 66
−18	120	$5-25\sqrt{-1}$ 116	−32	136	$10-13\sqrt{-1}$ 132
−3	180	$19-17\sqrt{-1}$ 174	−14	204	$-3+27\sqrt{-1}$ 198
29	240	$-10-44\sqrt{-1}$ 232	19	272	$-2+8\sqrt{-1}$ 264
−5	300	$24-29\sqrt{-1}$ 290	−21	340	$-14-26\sqrt{-1}$ 330
9	360	$13+3\sqrt{-1}$ 348	−5	408	$17-28\sqrt{-1}$ 396
−28	420	$-15+22\sqrt{-1}$ 406	2	476	$-9-11\sqrt{-1}$ 462
15	480	$22-15\sqrt{-1}$ 464	26	544	$7-32\sqrt{-1}$ 528
−27	540	$3+13\sqrt{-1}$ 522	3	612	$-32+7\sqrt{-1}$ 594
25	600	$-29+24\sqrt{-1}$ 580	−28	680	$-11-9\sqrt{-1}$ 660
14	660	$-14-10\sqrt{-1}$ 638	−29	748	$-28+17\sqrt{-1}$ 726
22	720	$-17+19\sqrt{-1}$ 696	25	816	$-26-14\sqrt{-1}$ 792
−16	780	$-25+5\sqrt{-1}$ 754	−10	884	$8-2\sqrt{-1}$ 858
17	840	$-23-11\sqrt{-1}$ 812	4	952	$27-3\sqrt{-1}$ 924
−7	900	$\sqrt{-1}$ 870	−15	1020	$-13+10\sqrt{-1}$ 990
−11	960	$3+\sqrt{-1}$ 59	6	1088	$30+21\sqrt{-1}$ 1056
8	1020	$-10-21\sqrt{-1}$ 117	11	1156	$\sqrt{-1}$ 1122
21	1080	$-19-11\sqrt{-1}$ 175	9	1224	$3-2\sqrt{-1}$ 67
−26	1140	$15+27\sqrt{-1}$ 233	−17	1292	$-11-19\sqrt{-1}$ 133
−24	1200	$-16+7\sqrt{-1}$ 291	−20	1360	$4+8\sqrt{-1}$ 199
−4	1260	$-17-4\sqrt{-1}$ 349	8	1428	$-22+20\sqrt{-1}$ 265
19	1320	$-23+22\sqrt{-1}$ 407	−30	1496	$10+28\sqrt{-1}$ 331
13	1380	$-8-8\sqrt{-1}$ 465	12	1564	$-27+17\sqrt{-1}$ 397
12	1440	$22-23\sqrt{-1}$ 523	22	1632	$-5+16\sqrt{-1}$ 463
2	1500	$-4-17\sqrt{-1}$ 581	18	1700	$18-15\sqrt{-1}$ 529
20	1560	$7-16\sqrt{-1}$ 639	33	1768	$24+24\sqrt{-1}$ 595
23	1620	$27+15\sqrt{-1}$ 697	27	1836	$-15+18\sqrt{-1}$ 661
−6	1680	$-11-19\sqrt{-1}$ 755	16	1904	$16-5\sqrt{-1}$ 727
−1	1740	$-21-10\sqrt{-1}$ 813	7	1972	$17-27\sqrt{-1}$ 793
		$1+3\sqrt{-1}$ 871	24	2040	$28+10\sqrt{-1}$ 859
			−23	2108	$20-22\sqrt{-1}$ 925
			−31	2176	$8+4\sqrt{-1}$ 991
			−1	2244	$-19-11\sqrt{-1}$ 1057
					$-2+3\sqrt{-1}$ 1123

I Vulcani degli Ernici nella Valle del Sacco.

Memoria del Dott. W. BRANCO presentata dal Socio Q. SELLA

nella seduta del 6 maggio 1877.

Nei dintorni di Frosinone, provincia di Roma, esiste un gruppo di vulcani spenti, ai quali dal Ponzi fu dato il nome di Ernici. Uno sguardo dalle alture della città di Frosinone, costruita sopra un'eminenza di macigno a 284 metri sul livello del mare (1), ci darà un'idea chiara della costituzione geologica di questa contrada.

Attorno alla città si estende una vasta valle, sparsa di colline, e diretta dal N-O al S-E. È la valle percorsa dal fiume Sacco (l'antico Trero), la quale nei dintorni di Valmontone è attualmente in comunicazione diretta colla Campagna Romana, mentre all'epoca terziaria, doveva evidentemente essere coperta dal mare.

Da un lato la valle è accompagnata dalla costa ripida del continente terziario dall'Appennino che in quella età era già sollevato; dall'altro lato dai Monti Lepini e Pontini, i quali costituivano un'isola montuosa del mare terziario, poco distante dal continente. Tanto il continente quanto l'isola appartengono, secondo le indagini del Ponzi, alla formazione cretacea. Sul fondo della lunga depressione, chiusa tra l'Appennino e i Monti Lepini, le acque del mare depositarono calcari, arenarie, sabbie e argille. La valle, un tempo stretto di mare, è oggidì percorsa dal Sacco; però il fiume, almeno presso Frosinone, non occupa la linea mediana della depressione, ma corre rasente il piede dei Monti Lepini. Questo suo corso è la conseguenza naturale della configurazione del fondo della valle, la quale dalle radici dei Monti Lepini sale lentamente verso l'Appennino. Infatti i calcari eocenici si elevano verso questi monti ad altezze considerevoli, formando così il passaggio alle catene altissime che essi presentano. Ai piedi però del colle, che porta sulla sua cima la città di Frosinone, quel labirinto di colline si ritira, mentre verso Ferentino estendesi una grande pianura alluvionale, la quale è divisa in due parti da una serie di basse alture, dirette dal N al S.

Questa valle terziaria, l'antica valle latina, fu la scena di una grande attività vulcanica. E se la geologia moderna crede di dover supporre la vicinanza di grandi masse d'acqua e la esistenza di spaccature nella crosta terrestre, come condizioni necessarie perchè si possano formare dei vulcani, troviamo, nella contrada in discorso, tutte le condizioni richieste. Poichè non è improbabile, che si siano formate nel terreno delle soluzioni di continuità a cagione del sollevamento delle due catene dell'Appennino e dei Monti Lepini. E per quanto riguarda la vicinanza dell'acqua, essa è provata dai tufi sottomarini che si prolungano dal Lazio nella valle latina fino quasi alla contrada vulcanica di Frosinone, ed i quali secondo il Ponzi, sono più recenti dei vulcani degli Ernici (2).

(1) Per le indicazioni altimetriche, vedi il lavoro più sotto citato di P. Zezi.

(2) Ponzi, *Storia dei vulcani laziali*. Roma, 1875.

Pare che l'esistenza della selce di Tichiena sia già stata nota agli antichi romani, poichè lo Spadoni (1) ci parla nel 1802 del ritrovamento di un'antica strada, il cui selciato era fatto di rocce assai simili a quelle di Tichiena. Lo Spadoni menziona di avere, per il primo, riconosciuto la natura del vulcano di Tichiena. Sembrerebbe pure che sia stata nota agli antichi la roccia che troviamo in posto presso la fontana detta Murecine; almeno mi si disse che nel 1867, nel sottosuolo della pianura vicina alla corrente di lava che si osserva in posto, fu ritrovata una strada antica fatta di lastroni di lava.

Troviamo ulteriori notizie sui vulcani di Frosinone nel catalogo ragionato del Brocchi (2). Ivi già sono indicati e descritti campioni di rocce di tre vulcani, di quelli cioè di Tichiena, di Pofi e della Selva dei Muli.

Più recenti scoperte si devono al Ponzi. Quest'infaticabile indagatore pubblicò, circa trenta anni fa, un lavoro geologico sulla valle latina (3) coll'aggiunta di una carta geologica. In questa non sono notati che i vulcani di Tichiena e di Pofi, ma l'autore, in un breve rapporto pubblicato posteriormente (4), ne cita altri tre denominati: Selva dei Muli, Callame, Giuliano. Ma anche il vulcano di Patrica era noto al Ponzi, come lo dimostra un'altra carta inedita, che egli ebbe la bontà di farmi esaminare.

Ultimamente comparve una Memoria geologica dell'ingegnere Zezi (5) sui dintorni di Frosinone e Ferentino. Il Zezi aggiunge ai vulcani già menzionati la Macchia Piana, ma non parla del vulcano di Giuliano.

Io stesso posso aumentare il numero dei vulcani degli Ernici, aggiungendo ai sei del Ponzi, altri due piccoli che hanno eruttato correnti di lava, il vulcano di S. Francesco all'E e quello di S. Marco al S-E di Ceccano. Come assai incerto sarebbe ancora da menzionare quello di Arnara, mancante di lava. Non credo poi che si possa ritenere la Macchia Piana per un vulcano indipendente. Di modo che avremmo, secondo lo stato attuale delle nostre cognizioni, otto e con quello di Arnara nove vulcani componenti il gruppo degli Ernici, cioè: 1° Giuliano; 2° Patrica; 3° Selva dei Muli; 4° Tichiena; 5° Callame; 6° S. Francesco; 7° S. Marco; 8° Pofi; 9° Arnara?

Finalmente sarebbe da aggiungere che il prof. Strüver è stato il primo a constatare l'esistenza della leucite come componente essenziale nelle lave degli Ernici, dietro l'esame microscopico di rocce raccolte dal Riccioli e dal Ponzi.

Colgo questa occasione di rendere pubbliche grazie al prof. Strüver, il quale mise a mia disposizione il suo materiale di studio, e volle prestarmi il valido aiuto dei suoi consigli.

I. Terreni sedimentarî.

Prima di entrare nel nostro argomento sarà necessario di dire due parole sulle rocce sedimentarie, in mezzo alle quali emersero i vulcani degli Ernici. La parte

(1) *Osservazioni mineralo-vulcaniche, fatte in un viaggio per l'antico Lazio* dal dott. P. Spadoni. Presse B. Capitani 1802.

(2) *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce disposto con ordine geografico per servire alla geognosia dell'Italia*, Milano, 1817.

(3) Ponzi, *Osservazioni geologiche fatte lungo la valle latina da Roma a Montecassino.* Vedi Raccolta di lettere ecc. compilata dal prof. Tortolini. Roma, 1849.

(4) Ponzi, *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* Roma, 1857.

(5) P. Zezi, *Osservazioni geologiche fatte ne' dintorni di Ferentino e di Frosinone.* Bollettino del R. Comitato Geologico d' Italia. Roma, 1876. n. 9 e 10 pag. 360-388.

dei Monti Lepini che si trova disegnata sulla carta aggiunta a questo scritto, non fu da me studiata; ma secondo il Ponzi essa spetterebbe alla formazione cretacea. Per quanto ho potuto vedere, gli strati s' inclinano verso S-E ed E. Come il calcare nummulitico, questi strati per decomposizione danno una terra rossa, la quale talora rassomiglia molto ai prodotti vulcanici interamente decomposti. L' alta catena cretacea rapidamente scende al Sacco. Dal piede di essa corrono numerose collinette, allungate normalmente alla direzione dei Lepini, verso il fiume. Esse si compongono dei terreni terziarî, i quali una volta costituivano un sistema di strati non interrotti ed appoggiati ai monti cretacei; ma percorsi da numerosi fossi, scendenti dai Lepini, si trasformarono in quelle serie di colli, ricoperti in gran parte da prodotti vulcanici, sotto i quali compare il terreno terziario in molti punti messo a nudo dalla erosione.

Il piano più basso della formazione terziaria si compone di calcari eocenici, i quali inclinano verso O e S-O, sotto angoli più o meno grandi. E così è di quasi tutti gli altri strati terziarî che troviamo presso Frosinone. Segue da ciò che più giriamo verso O, e più recenti sono le rocce che troviamo. Gli strati più bassi spesse volte rassomigliano non poco ai calcari della formazione cretacea; però ad essi si sovrappongono calcari brecciosi, i quali, secondo informazioni avute dal sig. ingegnere R. Meli di Roma, in parte corrispondono ai calcari eocenici di Subiaco, Carpineto, Acquasanta. In alcuni luoghi questi strati brecciosi sono ricchi di fossili mal conservati fra cui predominano coralli e principalmente nummuliti. Questi ultimi sembrano essere rotolati, il quale fatto farebbe credere che le rocce che li racchiudono, appartengano all'eocene superiore. Si trovano tali fossili particolarmente presso il cratere di Arcangelo (O di Ceccano) non che nel ruscello di Castro che scende dalla valle Teregna. Anche lungo il piede dei Monti Lepini incontransi qua e là sui campi frammenti di questo calcare caratteristico, framezzo ad altre rocce calcaree.

Sul calcare breccioso riposa, con stratificazione concordante, una arenaria ricca di mica. Il Ponzi, in altre contrade, trovò in questo macigno fucoidi, ciocchè dimostrerebbe che dobbiamo ritenerlo per appartenente all' eocene superiore.

Gli strati inferiori del macigno alternano ancora col calcare. Poi seguono strati potenti di macigno, fra cui sono intercalati strati di argilla turchina. Più verso O, ossia più vicino alle radici dei Monti Lepini, ordinariamente non troviamo che strati sottili di una arenaria abitualmente friabile, in alternanza con straticelli di argilla turchina; tutti s' inclinano (con poche eccezioni) verso S-O.

Ad E dell' Abbadia si osserva, intercalato nella serie degli strati arenacei, un conglomerato composto di ciottoli di granito, di gneiss, di porfido quarzifero, e di micaschisto, cementati da rena silicea. Questo fatto parrebbe favorevole alla ipotesi che gli strati in discorso siano da considerarsi come miocenici, poichè in molti luoghi d'Italia conglomerati analoghi costituiscono gran parte del miocene inferiore.

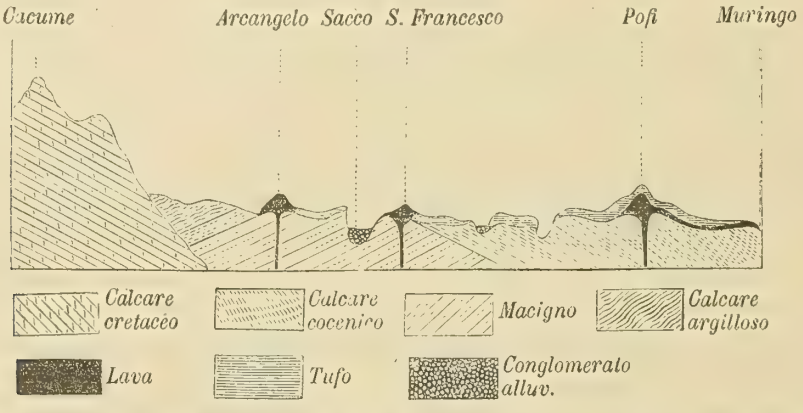
Resta ancora da fare menzione di un sistema di strati, composti di calcare argilloso, che si trovano raramente in alternanza con strati di argilla. Nella valle di Giuliano e Prossedi, ad es. vicino alla Madonna della Speranza, e così al piede dei Monti Lepini, ma principalmente sotto Castro si osservano questi strati, sempre colla medesima inclinazione verso S e S-O. Ciocchè distingue a prima vista questi calcari dagli altri cretacei e eocenici, si è il colore giallo che, al pari del macigno, danno

al terriccio sovrastante, mentre i calcari della creta e dell'eocene producono, per decomposizione, una terra rossastra. Di questa differenza fu tenuto conto nel separare sulla carta il calcare in questione da quello cretaceo, separazione assai difficile, perchè i calcari cretacei, rovinando, hanno ricoperto di numerosi frammenti i calcari argillosi. Talchè in certi luoghi alla superficie di questi terreni terziarî si vedono più rocce cretacee che terziarie. Non avendo trovato fossili, non ho potuto decidere se questi strati spettino ad un piano superiore dell'eocene nummulitico, ovvero siano miocenici.

Il piano superiore del terziario è composto di sabbie, probabilmente plioceniche. Il Ponzi già fa menzione di esse; il Zezi, non avendole trovate, pare di non voler credere alla loro esistenza. Ma pure ci sono. E se il Ponzi ha dato sulla sua carta a queste sabbie una estensione maggiore di quella che hanno realmente, ciò si spiega, perchè egli evidentemente non ha avuto in animo di fare una carta esatta in grande scala, ma semplicemente uno schizzo per servire di illustrazione alla sua Memoria. Ho trovato le sabbie (plioceniche?) a N-E di Castro, al Pozzo del Gatto (Castro), vicino alla strada ferrata presso Variano sotto la terra vegetale dei campi, a S. Maria d'Arnara ecc.

Prima di dar termine a questa breve descrizione del terziario, devo ancora far menzione di due fenomeni interessanti. Il primo è l'esistenza dell'asfalto e del petrolio al Colle della Pece sotto Castro ed in altri molti luoghi situati al N e all' E della carta che accompagna il mio scritto. Questo fenomeno, del resto, non è raro nel terreno cretaceo e in quello nummulitico delle catene dell'Appennino. Il secondo fatto è il seguente. Dalla regola comune, che cioè gli strati terziarî inclinano verso O e S-O e S-S-O, fa eccezione la grande massa del macigno che si estende tra Frosinone, Pofi e la strada ferrata, ed è inclinata verso N-N-E e N-E. Ad eccezione di alcuni punti sulla riva destra del Sacco, i quali appartengono ancora, secondo la loro inclinazione, a questa massa terziaria, il corso del Sacco da Ponte Tomacella fino a Castro segnerebbe la linea di rottura, ad E della quale tutti gli strati sono inclinati verso N-N-E, mentre ad O tutti gli strati inclinano verso S-O.

Sezione I.



La geologia moderna è portata ad ammettere come causa del sollevamento delle montagne una pressione laterale. Partendo da questo punto di vista, crederei

di dover ritenere, che la pressione laterale, la quale ha spinto in alto le due grandiose catene cretacee, l'Appennino cioè ed i Monti Lepini, abbia continuato nello stesso senso durante e dopo la formazione dei sedimenti terziarî, producendo finalmente in questi ultimi una rottura, oggi indicata dal corso del fiume Sacco.

Non ho bisogno d' insistere sulle difficoltà di chiarire pienamente le relazioni dei terreni sedimentarî in questione dietro lo studio di piccola parte di essi, difficoltà resa ancora maggiore dalla mancanza di fossili caratteristici.

Non potei constatare, in modo indubbio, l'esistenza nella nostra contrada, del terreno diluviale propriamente detto. A meno che debba ritenersi per tale il conglomerato calcareo che si osserva in un sol punto sulla strada carrozzabile al S di S. Maria d'Arnara. Esso compare nella parte superiore della collina di macigno, coprendo i declivi di essa verso O. Qui non esistono fossi che conducono seco ghiaie calcaree. E ugualmente difficile è di pensare ad una formazione marina, i resti della quale si dovrebbero pure trovare almeno in qualche altro punto delle colline circostanti. Trenta passi più verso E si trovano tufi vulcanici ad un livello più alto, e pare che questi siano sovrapposti al conglomerato. Ma le condizioni locali, durante il mio soggiorno, non mi permisero di mettere in chiaro queste relazioni fra il tufo e il conglomerato. Ond' è che sarebbe ancora possibile che il conglomerato sia appoggiato al tufo e in conseguenza più recente di quest' ultimo.

L'alluvione moderna svela una costituzione molto variabile. Mentre nei luoghi, il cui sottosuolo è formato dal macigno, le alluvioni sono di natura sabbiosa, nel terreno costituito dai tufi e dai lapilli, esse sono invece composte di elementi vulcanici, e qua e là, lungo il corso dei fiumi, consistono unicamente in frammenti e cristalli di augite e di olivina. Laddove finalmente i torrenti scendono dai monti calcarei, le alluvioni si compongono degli elementi di questi. Così, ad es. il Cosa che passa accanto a Frosinone, cambiando continuamente il suo letto, ha scavato una lunga e profonda valle nel macigno, ricuoprendola di ghiaie calcaree e di terra rossa, che ora formano una grande pianura. Anche il Sacco ed altri torrenti hanno trasportato di queste ghiaie; ma, in ragione della distanza dai monti, la grossezza di questo strato diminuisce rapidamente, ciò che dimostra che è una formazione alluvionale, prodotta dall'acqua corrente, e non diluviale o marina. Formazioni simili, ma di grande potenza, si vedono al fosso delle Brecce presso Supino, non che lungo il torrente della valle di Giuliano. Quest' ultimo si è aperto un passaggio nel calcare, profondo circa 20 metri, depositando sui suoi fianchi un conglomerato breccioso, un miscuglio cioè di ghiaie rotolate dall'acqua e di frammenti angolosi caduti dalle colline sovrastanti.

Mi resta ancora di render conto del travertino che si trova in due punti. Quello di Ferentino ha una grande estensione e ricuopre le pianure di Ferentino e di Anagni. Forse non è improbabile l'ipotesi che le grandi masse di tufo e di lapilli abbiano sbarrato la strada al Sacco, tanto a monte quanto a valle di Ceccano, e che quest'ostacolo sia stato la causa di inondazioni e di impaludamenti, dai quali risultò la formazione del travertino. Trovando sovente come ultimi indizî dell'attività vulcanica esalazioni di anidride carbonica, non è impossibile che tali emanazioni abbiano potentemente contribuito alla rapida formazione del travertino. Nel terreno di questo

travertino esiste, presso il Monte Radicino, una sorgente, le cui acque contengono assorbito del solfuro d'idrogeno. Una seconda formazione di travertino si mostra nel grande bosco situato a S-E di Pofi, e si estende fino alla congiunzione del Cascio e del Muringo.

II. I Vulcani.

1. *Giuliano.* — La valle di Giuliano-Prossedi ha la figura d'un triangolo aperto verso S-E e fiancheggiato dal Monte Siserno sul lato N-E e da un altro contrafforte che si stacca dal Monte Cacume, sul lato S-O. Verso N i due contrafforti si ravvicinano formando un angolo molto acuto. Poco distante dal punto in cui le due catene si toccano, troviamo il vulcano di Giuliano, presso a poco a 350 metri sopra il livello del mare (secondo notizie favoritemi dal sig. architetto Trojani di Giuliano). Situato alle scoscese falde del Siserno, il vulcano non potè inviare i suoi prodotti che verso S e O. Benchè sia difficile di rintracciare un vero cratere, tuttavia non vi può essere dubbio sul punto di eruzione, poichè la lava si spande dal paese di Giuliano nella valle. Verso O-N-O, S-O, e S possono seguirsi tre distinte masse di lava, le due ultime però congiunte nella parte superiore del loro corso. Sono talora coperte dai lapilli, mentre la maggior parte di questi e dei tufi estendesi verso il S. Laddove la strada carrozzabile da Ponte Tomacella raggiunge il paese, una piccola cava di pietra mette a nudo la lava della corrente O-N-O. Continuando la nostra strada nell' interno del paese, vediamo come la lava è ricoperta da una collina di scorie, sulla quale è costruito l' intero paese. Non si trovano strati distinti, nemmeno nella parte della collina che guarda il Monte Siserno. La strada che dalla suddetta cava conduce attorno al paese, verso Santo Stefano, taglia ancora le due altre correnti di lava. Un breve tratto dietro la cava a sinistra, si trova, invisibile dalla strada, una grotta antica contenente una lava interamente decomposta; in una massa bruna si vedono dei globuli a struttura sferoidale, composti cioè di strati concentrici alternativamente colorati in bruno e bianco. Più innanzi si ritrova sulla strada la lava, vicino alla Madonna della Rosa. Pare che si debba considerare questa lava come continuazione di quell'altra, che più sopra emerge di sotto alla casa Gabrielli. Questa corrente si spande verso S-O. In seguito, la strada attraversa ancora, per un tratto considerevole, altre masse di lava che si allargano verso S. È da notarsi la configurazione comune alle tre correnti; sotto il paese formano un erto pendìo, per poi prolungarsi nella valle a guisa di lunghe e poco elevate collinette. Ma in basso, mentre la estremità delle due prime correnti nettamente si disegna, essendo esse rigonfie, in parte all' incontro del calcare, in parte al pendìo del torrente, la terza corrente a poco a poco si confonde coi tufi e i loro prodotti di decomposizione. Questi tufi sono appoggiati ai declivi del Monte Siserno ed estendonsi a grande distanza nella valle. Essi inclinano verso S e S-O, e presentano una stupenda sezione naturale nella valle del fosso di Ciampino, che corre dalla strada Giuliano Santo Stefano verso il Mulino dei Preti. Il taglio trasversale mostra un sistema di strati, potente fino a 25 metri, di tufi e lapilli; ma la sua potenza complessiva è ancora maggiore, poichè la sezione non raggiunge lo strato più basso. Nella parte superiore, la sezione è formata da solidi tufi contenenti numerosi frammenti di calcare, e molto analoghi ai tufi di Patrica.

2. *Patrica*. — Al N-E del Monte Cacume giace il monte calcareo di Patrica (564 metri sopra il mare), riunito col primo per mezzo di una meno alta costiera, ancor essa formata di calcare nella sua parte inferiore, di tufo vulcanico nella parte superiore. Il paese di Patrica è costruito sul pendìo del monte calcareo che guarda il ridosso menzionato. Verso la catena dei Lepini, a S-O del paese, il calcare forma una lunga e profonda depressione, una parete della quale è formata dalla sopradetta costiera. Quella valle circolare apresi per il fosso dei Castelli nella pianura del Sacco. Scendendo da Patrica nella depressione, si osserva distintamente che un tempo la valle del fosso dei Castelli doveva aveva una larghezza molto maggiore, poichè era limitata al S della montagna di Patrica, al N dal ridosso cretaceo piuttosto distante, dietro il quale giace Supino. Più tardi, nel punto ove la valle del fosso sbocca nella valle circolare, ebbe luogo una eruzione, la quale riempì dei suoi prodotti la valle, sbarrando la depressione circolare. Dopo quest'avvenimento, il fosso dei Castelli si fece strada tra il terreno vulcanico e la montagna di Patrica.

A prima vista questo modo di vedere parrebbe alquanto arrischiato, poichè la erta parete del monte di Patrica sembra esclusivamente costituita dal calcare. Ma esaminando meglio la parete, si trovano qua e là resti di tufo, appiccicati al calcare. Quel fatto dimostra che una volta la depressione era ripiena di tufo. Del resto, se non fosse stato così, sarebbe difficile di spiegare come possansi trovare a 400 metri sopra la valle del Sacco, sulla costiera sopra descritta, degli strati di tufo che sono affatto isolati dal punto di eruzione e da esso divisi per una larga valle.

Ritorniamo ora nella valle, nel fondo della quale trovasi una piccola cava di lava. La corrente non si può seguire per lungo tratto, essendo la lava nascosta sotto il tufo. È certo però che la quantità della lava non era ragguardevole in confronto delle masse enormi di solido tufo, eruttate da questo vulcano. Ordinariamente, senza mostrare traccia di stratificazione, un labirinto di gigantesche rupi di tufo scende a valle e riempie tutta la contrada che dal fosso dei Castelli si estende per il fosso della valle di S. Maria fino alla collina posta dietro quest' ultimo. Dall'altra parte, lo stesso tufo posto in cima del ridosso che congiunge il monte di Patrica colla catena dei Lepini, compare in strati regolari. Inclinata sotto 20°-30° verso N-E e S-E, la massa di tufo scende giù rapidamente, circonda il lato S della montagna di Patrica e, riunendosi in basso colle masse provenienti dal punto di eruzione, si estende per la Macchia Piana fino alla Selva dei Muli. È chiaro che, una volta, il tufo ha riempito la valle del Sacco fino ad una ragguardevole distanza a monte, poichè esso si trova ancora nella pianura, vicino alla strada carrozzabile che da Supino conduce alla Mola di Supino, e ancora dietro Selva dei Muli, sulla sinistra del Sacco. Nella pianura di questo fiume, il tufo è sempre stratificato, presso a poco orizzontale, e accompagnato da tufi a grana fina. Tutta la massa descritta proviene senza dubbio dal vulcano di Patrica, e non posso attribuire al vulcano di Selva dei Muli il tufo che colà si trova, benchè oggi il corso del Sacco lo separi dal luogo della sua origine. E per lo stesso motivo credo che non sia ammissibile di ritenere la Macchia Piana per un vulcano indipendente, come sembra supporre lo Zezi, sebbene sopra la Macchia Piana, come sulla strada carrozzabile di Patrica, compaiano anche altri tufi decomposti e (alla Macchia Piana) frammenti di lava. L'argomento richiede di entrare fin d'ora

nella descrizione petrografica del nostro tufo. A Selva dei Muli e alla Macchia Piana, come ancora sul ridosso più volte menzionato di Patrica, si crederebbe di aver da fare con una breccia composta di frammenti di calcare e di una sostanza tufacea, cementati da calce carbonata, ai quali elementi si associano ancora cristalli di augite, di mica e di olivina. Spesso si vede distintamente, come attorno ad ogni elemento della breccia si depositasse uno strato calcareo e, vista questa singolare struttura non si potrebbe nemmeno pensare a paragonare la roccia al peperino, se essa non fosse diversa in altri luoghi. Esaminando quel labirinto di rupi, si osserva che generalmente i frammenti calcarei in questo punto, cioè più vicino al centro d'eruzione, sono maggiori; il quale fatto non parla in favore di un peperino, poichè una corrente melmosa dovrebbe aver la forza di trasportare anche questi frammenti più grandi, i quali in generale hanno tutt' al più un diametro di qualche decimetro, nella pianura del Sacco. Ma d'altra parte, l'aspetto petrografico è diventato diverso, essendo scomparso il cemento calcareo. La roccia si compone di una pasta compatta e solida, piena di frammenti calcarei e di cristalli non numerosi, talchè diventa simile ad un vero peperino. Di più, si tratta di trovare una spiegazione del fatto che a 400 metri sopra il Sacco, sulla cima della costiera sopradetta, si trova un tufo solido distintamente stratificato ed inclinato sotto angoli di 20 a 30 gradi. È difficile il credere che il tufo dopo essersi deposto sul calcare cretaceo sia stato sollevato unitamente a quest' ultimo, a quell'altezza. È vero che il calcare s'inclina verso E, e che gli strati di tufo presentano, ad un dipresso, la stessa inclinazione, ma questa, del resto non grande concordanza si spiega dacchè il tufo, riversandosi in una valle scendente verso E, era obbligato ad assumere una inclinazione ad E. Altrettanto improbabile è l' ipotesi che il tufo si sia depositato lassù entro l'acqua, ipotesi che ci obbligherebbe ad ammettere che l' intera valle del Sacco sia stata coperta, in un' epoca relativamente recente, da uno strato d'acqua di 400 metri. E allora si dovrebbe trovare almeno qualche traccia di questo antico e profondo mare o lago. Finalmente ci rimane l' ipotesi che abbiamo davanti a noi un vero peperino. Ammessa questa ipotesi, la stratificazione e la posizione elevata del tufo non presentano nulla di strano, perchè un vulcano può facilmente lanciare i suoi prodotti, siano pure impastati dall'acqua, anche a maggiore altezza. Ora però il solido tufo del ridosso in questione mostra precisamente quella struttura brecciforme sopra descritta, benchè vi si trovino passaggi all'altra più omogena. Mi pare che, tutto sommato, non vi sia altro mezzo di dare una plausibile teoria della formazione del nostro tufo, se non ammettendo di aver da fare con un vero peperino, il quale invece di presentare quasi l'aspetto di una roccia compatta cristallina, ha in parte assunta una struttura più porosa. E questa struttura meno compatta si spiegherebbe supponendo che le quantità di acqua cadute durante l'eruzione e miste ai materiali vulcanici abbiano bensì bastato a formare con questi una pasta tenace, ma non per trasformarli in una massa omogenea.

3. *Selva dei Muli.* — Posta sopra i tufi or ora descritti, si eleva dalla pianura del Sacco una collina di poca altezza. Alcune cave mostrano che la cima consiste verso E di scorie e nelle altre direzioni di masse decomposte rosse, usate come pozzolana. L'isolamento di questi massi rende più che probabile, che qui si tratta

di un piccolo vulcano, il quale, dopo un breve periodo di eruzione, si è spento. È sorprendente che al di là del Sacco, verso S. Anna di Supino, esistono anche masse vulcaniche rosse, decomposte, le quali sembrano anch'esse riposare sul tufo di Patrica. Mancano però tutti gli argomenti per poter dimostrare che queste masse siano in relazione col vulcano di Selva dei Muli.

4. *Tichiena.* — Al piede orientale del Monte Radicino compare un massiccio di lava di qualche rilievo, il quale però, esteso sopra basse colline terziarie, non si eleva di molto sopra la pianura alluvionale. Non ho potuto trovare tufi, i quali pure accompagnano tutti gli altri vulcani degli Ernici fino ad ora noti. Essendo trasformata tutta la superficie della lava in suolo coltivabile, non si può esaminare la lava stessa che in alcuni punti: al fosso della Ruana ed in alcune cave, la più grande delle quali è praticata nella corrente che si trova più vicino a Frosinone. I rilievi della superficie del terreno accennano all'incirca a quattro correnti di lava. Verso N come verso S i frammenti di lava scompaiono a poco a poco dai campi. Ma il suolo presenta ancora il color rosso-bruno dovuto alla decomposizione di materiali vulcanici. Sulla carta, questo terreno vulcanico decomposto fu distinto col medesimo colore rosso-chiaro che altrove indica il tufo. La mancanza di tagli naturali o artificiali non mi permise di constatare la presenza o assenza di veri tufi.

5. *Il Callame.* — Verso N-O di Ceccano, laddove il fosso dei Castelli si riunisce col Sacco, v'è una casa isolata in forma di torre. La contrada che giace attorno si dice Callame, il qual nome fu dato dal Ponzi anche al vulcano ivi da lui scoperto. La lava che si mostra distintamente lungo il fosso dei Castelli, sopra la casa menzionata, è messa a scoperto da cave antiche, e forma nella parte meridionale della regione un gran massiccio coperto di boschi. Di nuovo al S di questo massiccio, al di là della strada carrozzabile che conduce da Ceccano verso O, trovasi una grande depressione circolare, la quale molto probabilmente è un cratere. Le sue pareti si compongono al N di lava, ad E di tufi che si estendono molto verso E, al S ed O di macigno e calcare nummulitico; questi ultimi cadono, come è di regola per gli strati terziarî, verso S-O. Il cratere sarebbesi adunque aperto negli strati terziarî e si dovrebbe, per dir così, considerare come cratere di esplosione. L'orlo del cratere è interrotto fra la lava e il tufo, locchè impedisce l'accumularsi delle acque nella depressione. Per maggiore brevità chiamerò il cratere di Arcangelo che è il nome della contrada. È assai probabile che le lave di Callame e del Coleta non siano in relazione col nostro cratere, poichè in primo luogo, si trovano al N, sul Coleta, numerosi blocchi porosi di lava che accennano ad una eruzione che ivi avvenne; in secondo luogo esiste al N dell'Arcangelo, al fosso del Cerillo, un lembo di terreno terziario molto meno elevato del Coleta, il quale, se la lava in discorso fosse uscita dal cratere dell'Arcangelo, certamente sarebbe stato invaso da essa. Parla ancora in favore della indipendenza delle lave di Callame e del Coleta dal nostro cratere, la ragguardevole depressione che divide le une dall'altre, ma questa depressione potrebbe essere anche conseguenza della erosione posteriore.

6. *S. Francesco.* — Sulla sinistra del Sacco, a Ceccano, apresi, dietro il calcare, una grande valle rotonda. Una delle colline, le quali limitano la valle verso S, è chiamata di S. Francesco, e composta di lava che si è versata in corrente verso S.

fino al ruscello. Laddove la strada carrozzabile da Ceccano a Pofi passa quel ruscello, trovasi a sinistra una collina composta di scorie, la quale è da ritenersi come appartenente al vulcano di S. Francesco, benchè non sia situata a contatto della lava. I tufi che si trovano scoperti in grandi cave, poco prima di passare il ponte, sono friabili, mentre più verso l'E si vedono tufi solidissimi, simili al peperino.

7. *S. Marco.* — Sui pendii N-E del Monte Siserno è situato un gruppo di monticelli vulcanici, quasi affatto isolato, per mezzo del terreno terziario, dalle grandi masse di tufo e lapilli che si estendono tra Ceccano e Pofi. I folti boschi che ricuoprono questi monti, come la mancanza di sezioni naturali o artificiali, rendono impossibile di segnare nettamente i confini fra la lava e i tufi. Passando, sulla strada carrozzabile da Ceccano a S. Sozio, il fosso della Majura, e seguendo per breve tratto a monte il ruscello che sbocca dietro il ponte, si vede una fontana, dietro la quale giacciono grossi blocchi di lava, mentre a N-O di questo punto, più verso il fosso della Majura, la lava compare in posto. Anche nel letto del ruscello che proviene dalle colline vulcaniche presso la fontana, si vede la lava in posto, vicino al Monte Siserno. Che si tratti qui di lava in posto, non può esser dubbio, benchè simili dubbî facilmente assaltino l'osservatore che percorre questa regione. Così nella selva di Farneto, al contrafforte che si avanza sino al Sacco, fra Ceccano e Colle S. Marco, poi sulla collina situata presso Variano, fra il Sacco, la strada ferrata e il fosso dei Santi, trovasi una tale quantità di blocchi e massi di lava, che il geologo si aspetta ogni momento di incontrare una corrente di lava, ma nulla di ciò si osserva. Questa contrada si distingue anche per la grande quantità di lapilli, mentre i tufi vi sono meno frequenti. Ho dato al vulcano descritto a preferenza il nome di vulcano di S. Marco, essendo così chiamata dalla gente del paese la contrada nella quale il vulcano è posto. Aggiungo però, a scanso di equivoci, che il Colle di S. Marco della carta austriaca non è conosciuto sotto tal nome dagli abitanti dei dintorni.

8. *Pofi.* — Il paese di Pofi è costruito sopra un vulcano, il quale ha una altezza assoluta di 295 metri e di 130 metri sopra il Sacco. Il cono singolare mostra quasi soltanto tufi, lapilli e scorie. Unicamente al N del paese, una piccola cava mette a nudo una lava porosa, la quale, più in basso, si osserva anche alla superficie del suolo, mentre ancora più verso il N la sua presenza è indicata da grandi blocchi di lava sparsi sul suolo. Il resto della lava è sottratta all'occhio dell'osservatore presso a poco dappertutto nella vicinanza del paese. Ad E e S le prominenze di Pofi sono circondate da una pianura che dolcemente inclina verso il Muringo. Da questa pianura la lava emerge in due luoghi: al S ove comincia sotto la casa del sindaco Gori (sulla strada della stazione) e si estende fino alla fontana e, maggiormente estesa, lungo il corso del Muringo, dal quale essa può essere seguita, per distanze più o meno grandi, sui campi verso Pofi. Essa si estende anche al di là del Muringo per un tratto non breve. Un interessante conglomerato sarebbe poi da notare ad O, immediatamente al piede di Pofi. Esso è composto di elementi vulcanici, ai quali si associa una grande quantità di frammenti di macigno.

9. *Arnara.* — Ad Arnara troviamo un deposito di tufi e lapilli, non accompagnato nè da lava, nè da scorie. Il fatto che questo terreno vulcanico è presso a poco

isolato e separato dagli altri per mezzo del macigno, non è il solo che m'induce a discutere la possibilità che anche qui abbia avuto luogo una eruzione indipendente dagli altri punti vulcanici, o che un tale isolamento sia anche la semplice conseguenza di una vasta erosione. Ma vi sono ben altri motivi.

1. Posto che il vulcano di Pofi abbia lanciato i suoi materiali frammentizî fino ad Arnara, la catena di macigno, che si stende in direzione N-S tra Pofi ed Arnara, dovrebbe essere sparsa di lapilli sui suoi due versanti, mentre non lo è che il pendìo che guarda Pofi.

2. Il vulcano di S. Francesco non può avere lanciato quei massi ad Arnara, poichè tra esso e quest' ultimo paese si estende una vasta regione di macigno, nella quale non si trova traccia di materie vulcaniche.

3. Posto che i materiali sciolti siano stati trasportati ad Arnara dalle acque, queste avrebbero dovuto essere così profonde da cuoprire tutte le alte colline di macigno che circondano la valle di Arnara ad O-S ed E. Ma noi non troviamo traccie di depositi che si potrebbero ritenere dovute alla azione di queste acque, sul massiccio di macigno posto nel N della contrada in questione.

4. Nella valle al N di Arnara trovansi in posto solidi tufi formanti considerevoli rupi, mentre mancano al S e O di Arnara.

5. In questa stessa valle, come al S. di Arnara, trovai numerosi massi erratici cristallini (bombe), mentre a Pofi non ne incontrai quasi affatto, nonostante le più assidue ricerche.

Per tutti questi motivi credo, almeno fino ad un certo punto probabile, che ad Arnara abbia avuto luogo qualche eruzione indipendente dagli altri vulcani, benchè non bastino le prove sovraindicate per escludere ogni dubbio. Se si riuscisse a dimostrare che le acque hanno avuto parte essenziale nei depositi di tufo e lapilli, l'esistenza di un vulcano presso Arnara perderebbe quasi ogni probabilità.

III. L'età geologica dei vulcani.

Pochi sono i dati che possono servire per determinare l'età geologica del vulcano di Giuliano. Questi dati sono i seguenti:

1. I lapilli dovuti alla eruzione del vulcano sono sovrapposti a calcari argillosi (posteocenici?).

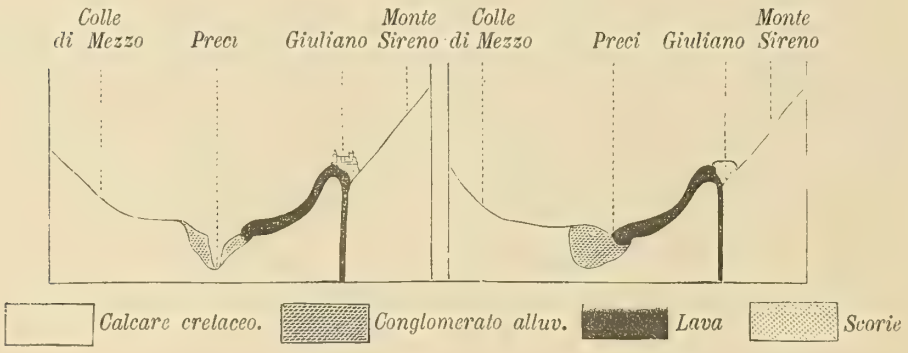
2. Gli strati di lapilli racchiudono rari frammenti di un'argilla gialla simile alla terra di Siena, la quale si osserva in posto alternante con sottili strati di arenaria, in un piccolo taglio nella contrada Ladano. Questo deposito è probabilmente dell'epoca terziaria recente.

3. Vicino al Mulino dei Preti, i lapilli ricuoprono una terra rossa, visibile in un sol punto. Ma ciò dimostra almeno che i prodotti vulcanici sono più recenti di questa terra, la quale non è altro che una antica alluvione.

4. La stessa età geologica sembra essere dimostrata da un altro fatto. A Preci (a S-O di Giuliano) la lava termina d'un tratto, con scarpa verticale, quasi sull'orlo di un burrone di 20 metri di profondità, percorso da un ruscello. Le pareti del burrone sono formate dal conglomerato, descritto a pag. 805, il quale si estende sotto la lava. Non è assolutamente impossibile che una grande corrente di lava si fermi

così innanzi ad un burrone, ma è certamente più probabile che essa coli sul fondo della depressione. Suppongo che la lava da Preci sia corsa fino a quel punto; che allora fu il più basso della valle, cioè fino al letto del ruscello. Dopo quel giorno sono passati tanti anni, di quanti il ruscello ebbe bisogno per scavarsi nel suolo un passaggio della profondità di 20 metri. Il disegno qui unito rappresenta le condizioni geologiche del punto in discorso, quali sono oggidì e quali sarebbero state, secondo me, al tempo della eruzione della lava.

Sezione II.



Il conglomerato non racchiude ciottoli di lava, mentre se ne trovano nel letto del ruscello.

Ancora più incerta è l'età geologica del vulcano di Patrica, sovrapposto, per quanto è dato osservare, alla formazione cretacea. Per analogia si potrebbe supporre che gli stessi strati terziarî, i quali si trovano al Monte Siserno, siano anche appoggiati al piede del Cacume, colla sola differenza, che nel primo caso sono visibili, nel secondo invece ricoperti da potenti strati di tufo. Al fosso dell'Uccellata, ove comincia il tufo di Patrica, questi strati terziarî sono ancora visibili, ma poi scompaiono sotto i tufi. In ogni caso, dopo l'eruzione del vulcano di Patrica è passato almeno tanto tempo, quanto ci volle perchè il fosso dei Castelli tagliasse non solamente la potente massa del peperino, ma anche parte del calcare cretaceo; poichè dal letto del fosso bisogna salire un bel tratto per giungere al punto in cui, sopra il calcare, incomincia la lava.

Più recente del vulcano di Patrica è certamente quello della Selva dei Muli, sovrapposto al tufo che fu eruttato dal primo.

Il vulcano di Tichiena è sovrapposto al macigno e sottoposto al travertino, quindi anteriore all'alluvione, o tutt'al più contemporaneo all'alluvione inferiore.

I vulcani di Callame e di S. Marco sono molto più recenti dei calcari argillosi (posteocenici?) e degli strati sottili di arenaria e di argilla che sopra abbiamo descritti. Infatti i prodotti vulcanici ivi riposano con stratificazione discordante sui depositi terziarî menzionati, i quali perciò erano già sollevati quando l'eruzione ebbe luogo. Ma vi ha di più. Questi strati terziarî facevano già parte del continente ed erano, per opera dell'erosione, trasformati in colline, prima di essere ricoperti

dai tufi. Poichè qua e là si può osservare come, sulla cima di una collina di tufo, compare il macigno alla superficie o almeno si trova a poca profondità sotto il tufo, talchè s' incontra scavando il suolo per la piantagione degli alberi, mentre ad un livello molto più basso, sul pendìo della collina, si mostrano i soli strati di tufo senza traccia di terreno terziario.

I vulcani di S. Francesco e di Pofi riposano pure in stratificazione discordante sul terziario. Presso S. Maria d'Arnara però, il tufo, in strati inclinati, è appoggiato ad una collina di sabbia (pliocenica?).

Considerando l'assieme dei fatti narrati e ammettendo la ipotesi, del resto molto probabile, che tutti i vulcani degli Ernici siano presso a poco della medesima età geologica, si viene nella conclusione che i nostri vulcani sono più recenti del terreno terziario superiore, ma anteriori alle antiche alluvioni. E in questa conclusione venne già, molto tempo fa, il Ponzi, il quale dice che l'attività vulcanica incominciò nel Lazio colla alluvione, mentre a quell' epoca i vulcani degli Ernici erano già spenti.

IV. I prodotti vulcanici.

Le lave dei vulcani degli Ernici macroscopicamente si mostrano composte di una pasta a grana fina di colore grigio-scuro, entro la quale sono sparsi, in quantità variabile, sovratutto cristalli di pirosseno. Questi ultimi generalmente non sono grandi nè molto numerosi. Le lave di Callame, di S. Marco e dei molti blocchi e lapilli che si trovano attorno a quest'ultimo si distinguono in generale per avere più numerosi e voluminosi cristalli. Vi sono due varietà di pirosseno, una nera ed una verde-chiara. Tutto il territorio situato fra S. Sozio, S. Marco, Majura (sulla destra del Sacco) e Farneto, Arnara, Variano (sulla sinistra del Sacco) petrograficamente contrasta col resto per il colore grigio più chiaro delle rocce, nelle quali domina l'augite di colore verde-chiaro, cui si aggiungono molti cristalli di olivina. Nelle altre lave, quest'ultima si trova raramente, forse più spesso ancora a Pofi e Giuliano, ma sovente essa manca affatto, e, quando c'è, si presenta preferibilmente in grani e non in cristalli perfetti. Molto più rara allo stato macroscopico è la leucite, la quale incontrasi qua e là nelle lave di Pofi, Giuliano e Tichiena, mentre compare relativamente spesso a Callame e massime nei frammenti sparsi sui campi al fosso dei Castelli. Il sanidino macroscopico è ancora più raro; più distintamente si osserva a Callame e a Tichiena. La magnetite non è sovente riconoscibile ad occhio nudo, e la mica manca quasi affatto; la trovai a Patrica e a S. Francesco.

Molte di queste lave, decomponendosi, mostrano grande quantità di punti bianchi, i quali sono da ritenersi per leucite. Una lava così decomposta si estrae per mezzo di una galleria aperta nella corrente di lava che si spande verso la tenuta di Tichiena, e si usa come pozzolana.

Al microscopio tutte le rocce si mostrano come vere lave leucitiche, non escluse le scorie della Selva dei Muli. Il pirosseno e la leucite formano, all' incirca a parti eguali, un miscuglio cristallino, in cui non potei trovare nulla di amorfo. Agli elementi indicati si aggiunge molta magnetite, talvolta accumulata in quantità bastevolmente grande, e non raramente la nefelite. È però da notarsi che non tutto ciò che par essere a prima vista nefelite, è realmente tale. Poichè non molti di questi

cristalli vengono decomposti dall'acido idroclorico, e tutti gli altri sono probabilmente da considerarsi come sanidino, tagliato parallelamente alla ortodiagonale. Un fatto analogo fu trovato dallo Strüver nella roccia del Tavolato, in alcune lave basaltine grigie e in alcuni speroni del Lazio (1). Ho trovato il plagioclasio tanto regolarmente nella lava di Pofi, che devo considerarlo come parte essenziale di essa, cosa già stata detta dallo Strüver nella Memoria citata a pag. 94. Raramente trovasi il plagioclasio nelle lave di Tichiena, Giuliano, S. Francesco, come nelle scorie della Selva dei Muli. L' olivina si trova, per dir così, nelle rocce di tutti i vulcani degli Ernici, ma è assai raramente visibile nei preparati microscopici. La biotite si mostrò in alcune rocce di Pofi, Tichiena, S. Marco, e la calcite, in ogni caso come prodotto secondario, nelle lave di Pofi e di Patrica.

Riguardo al modo con cui si comportano i singoli minerali al microscopio, devo aggiungere poche parole. Il pirosseno mostra ordinariamente un colore verde-chiaro, raramente più scuro. Quest' ultima varietà è distintamente pleocroica. Sovente le sezioni svelano struttura concentrica; in questo caso la parte interna ordinariamente è colorata in verde più oscuro (o bruno) e pleocroica, mentre la parte esterna presenta una tinta verde più chiara. Essendo gli strati, tanto interni quanto esterni ugualmente orientati, non vi può essere dubbio che spettino tutti al pirosseno. È da notarsi che lo Strüver ha osservato questo distinto policroismo, non comune nel pirosseno, nei cristalli di questo minerale che entrano nella costituzione delle rocce erratiche del Tavolato e in parecchie lave basaltine ordinarie del Lazio, non che in tutti i cristalli sciolti della medesima contrada che prese ad esame. Il distinto e frequente pleocroismo del pirosseno delle lave degli Ernici costituisce adunque un'altra analogia fra queste e le lave laziali, già tanto simili per essere tutte essenzialmente leucitiche. Del resto, il pirosseno delle nostre lave presenta i soliti caratteri; esso racchiude altri minerali e, talvolta, non forma che una sottile crosta attorno ad un nucleo costituito da tutti i minerali componenti la roccia. Nell'interno della leucite si vedono spesso aghetti incolori, i quali, non essendo orientati, non possono ritenersi per apatite. Forse spettano al feldspato ovvero anche al pirosseno apparentemente incolore a motivo della sua sottigliezza. La leucite mostra poi la ben nota struttura polisintetica e racchiude cristalli di augite e di magnetite ecc. disposti in strati sferici e concentrici, come distintamente si osserva muovendo la vite micrometrica del microscopio. Un fenomeno singolare si vede in due preparati fatti della lava che in blocchi si osserva al Callame. A prima vista si crede di aver sott' occhio una roccia in cui accanto alla leucite si trovi un minerale monorifrangente di colore giallo. Ma probabilmente questa sostanza non è altro che leucite in parte decomposta, poichè qualche volta si trova un individuo, per metà incolore e indubitatamente leucite, per l'altra metà colorato in giallo.

L'olivina e la magnetite presentano i soliti fenomeni di decomposizione. Piccoli aghetti, incolori e orientati, devono, a mio credere, ritenersi per apatite. Essendo però la direzione di massima estinzione nella apatite orientata come nella nefelite, e non bastando certamente la relativa grandezza da sè sola a distinguere i due minerali,

(1) *Studi petrografici sul Lazio*, per Giovanni Strüver. Roma, 1877. Reale Accademia de'Lincei.

si dovrebbe ogni volta ricorrere a mezzi chimici per constatare la presenza o assenza dell'acido fosforico.

La divisione pseudoregolare della lava in prismi, lastre e sferoidi si osserva in parecchi punti della contrada studiata. La divisione in lastre poligone è assai rara, la trovai soltanto a Tichiena e su piccola scala. A Pofi e più precisamente sul Muringo, vicino al molino più meridionale, si osserva la divisione in colonne. Già da lontano si scorge, sulla riva sinistra, la parete di colonne, alta circa 6 metri, che evidentemente diede il nome alla contrada circostante, il Vado Schiera. Le colonne, del resto non molto regolari, sono normali alla superficie dell'acqua ovvero alla superficie di raffreddamento. Un complesso di colonne cadute nell'acqua, svela distinta divisione in sferoidi. Questa divisione, unita sempre a struttura concentrica, è la più frequente. Sopratutto la corrente di lava di S. Francesco mostra questa struttura sferoidale e su più vasta scala ancora essa si osserva nei blocchi di lava sparsi a S e E di questo vulcano dal quale indubbiamente derivano. La stessa struttura sferoidale e concentrica si scorge assai perfetta dietro il vulcano di S. Marco, laddove questo piccolo gruppo di monti si appoggia al Monte Siserno; ivi esistono nelle selve parecchie fosse che una volta servirono alla cottura della calce. Un grosso sferoide di lava, incastrato nella parete d'una di quelle fosse ha assunto, sotto l'influenza del calore, una così minuta struttura concentrica, che i singoli frammenti si prenderebbero per sottili lastrine di lavagna durissima.

I tufi degli Ernici possono dividersi in due grandi gruppi. Quelli del primo gruppo rassomigliano per la loro composizione e solidità al tufo di Patrica, del quale abbiamo discorso a pag. 807 e 808. Però non è detto che tutti questi tufi siano veri peperini. Che se le condizioni geologiche non parlano in modo convincente a favore di una origine fangosa, non mi pare permesso di applicare il nome di peperino ad un tufo, solo a motivo del suo aspetto petrografico. Il secondo gruppo di tufi sarebbe poi formato di quelli a grana finissima, contenenti cristalli più o meno rari di pirosseno, di mica, di olivina. Non vi ho trovato la leucite in cristalli, bensì in frammenti; nei tufi decomposti di Patrica come della contrada Sabatino trovai frammenti irregolari di caolino, i quali, essendo il feldspato raro, molto probabilmente provengono dalla decomposizione della leucite. Oltre a questi due gruppi di tufo solido compare tutta la serie dei prodotti vulcanici sciolti, dai lapilli alle ceneri.

Mi resta ancora da discutere la questione, già da altri ventilata, se i tufi degli Ernici siano sottomarini o no. Sarebbe, a mio credere, più corretto di domandare, se vi esistono tufi deposti nell'acqua o no, poichè le acque palustri rendono gli stessi servizî delle acque marine.

Esaminando certe località, per es. a Pofi, ove i tufi sembrano inclinati costantemente nel senso dei pendii del monte, non si può a meno di concludere che si ha sott'occhio una formazione atmosferica. Considerando invece i tufi simili al peperino di Patrica, si crederebbe, anche senza attribuire ad essi un'uguale origine, che l'acqua sia entrata nella loro formazione. A ciò si aggiunge che gli strati di lapilli ecc. molte volte sono sottili ed estesi e per lungo tratto inclinati di non più di 10° a 15° sull'orizzonte. Difficilmente si potrebbe pensare ad acque molto agitate, perchè i tufi trovansi sempre nelle vicinanze dei vulcani, ovvero non sono

mai stati strascinati a grandi distanze. Non rinvenendosi poi resti di conchiglie marine, nè traccie di sedimenti indubbiamente marini che difficilmente mancherebbero, se i tufi fossero formati nel mare, credo di dovere attribuire la regolare stratificazione di questi piuttosto all'azione di acque dolci. Ad eccezione del vulcano di Giuliano, i tufi si estendono, da ambi i lati del Sacco. È chiaro che questo fiume esisteva di già nell'epoca delle eruzioni, che la valle latina deve essersi formato un canale di scolo nel suo punto più basso. Non è impossibile che il fiume abbia formato un grande bacino, forse paludoso, nel quale sarebbe caduta una parte dei prodotti vulcanici. Ma finchè non si avrà una carta topografica a curve di livello, per potere determinare in ogni punto, fino a quale altezza salgono questi tufi, supposti di origine acquea, dovremo enunciare una simile ipotesi colla più grande riserva.

V. I minerali.

Non è grande il numero dei minerali, da me trovati nelle geodi delle lave, o nei blocchi erratici, o eruttati allo stato di cristalli sciolti. In confronto del grande numero di minerali che i Monti Albani ci hanno fornito, il materiale da me raccolto nel distretto degli Ernici è assai scarso. Ciocchè in parte si spiega essendochè nel Lazio, da molti decennî a questa parte, numerosi raccoglitori hanno accumulato dei campioni cristallizzati, mentre il territorio degli Ernici non fu sinora studiato sotto questo aspetto. Tuttavia sembra che i vulcani degli Ernici siano assai meno ricchi del vulcano Laziale in belle cristallizzazioni.

a) Minerali che si trovano nelle geodi e sulle pareti delle fessure che attraversano le lave.

A Tichiena compaiono numerosi cristalli di nefelite (Cava grande verso Frosinone), i quali però, per la loro opacità ed il colore bianco, indicano di già un principio di decomposizione. Nella lava di Patrica troviamo, entro geodi, la nefelite in cristalli splendenti unitamente al pirosseno nero. Aghi bianchi sottilissimi, otticcamente orientati, e aghetti neri, che si sfaldano in una direzione parallela al loro massimo diametro e rimangono opachi anche in frammenti sottilissimi, si trovano a Patrica, Pofi, Giuliano. La jalite finalmente si osserva in diversi punti presso Tichiena.

b) Aggregati minerali erratici o trovanti.

Essi si trovano quasi unicamente ad Arnara e al S di questo paese. Sono:

1. Mica in gruppi di cristalli perfetti o in masse porose, contenenti nelle cavità cristalli che sembrano quasi fusi.
2. Lamine di mica racchiudenti cristalli sparsi di leucite.
3. Sferoidi di lava a pasta compatta bruna, racchiudente cristalli di mica (S. Francesco).
4. Lava bruna contenente numerosi cristalli di mica, pirosseno e sanidino.
5. Gruppi di cristalli di augite con mica, leucite, sanidino.
6. Lava bruna con grossi cristalli di leucite, pirosseno, mica, sanidino.
7. Cristalli di pirosseno e mica in una pasta giallo-chiara, porosa.
8. Sanidino in numerosi cristalli entro una massa fusa scoriacea.
9. Sanidino con ottaedri di magnetite.

10. Sanidino con granato bruno, mica e opale.

11. Roccia porosa a grana fina, composta di sanidino e amfibolo, e racchiudente nelle geodi limpidi cristalli di sanidino.

12. Roccia a grana grossa, composta di sanidino, amfibolo, titanite. Essa ha l'aspetto di una sienite, il cui feldspato sia stato sottoposto ad una elevata temperatura.

13. Trachite molto ruvida al tatto, simile ad un conglomerato di grandi cristalli di sanidino con poco amfibolo.

14. Trachite a pasta ruvida scura, entro la quale sono sparsi cristalli di sanidino e di plagioclasio, quest' ultimo riconoscibile al microscopio.

15. Granito ad ortoclasio bianco e granati bruni, con poca tormalina.

16. Granito ad ortoclasio bianco, mica nera, piccoli granati gialli, titanite.

Ho trovato sovente i graniti sopra indicati e sempre sul terreno vulcanico. Essi si distinguono dal granito che incontriamo nel conglomerato dell'Abbadia, e dai ciottoli rotolati di granito che si osservano ad Arnara, per contenere un feldspato più bianco, il quale per il suo aspetto screpolato ricorda alquanto il sanidino, ma provengono evidentemente da uno strato simile a quello dell' Abbadia. Sono poi friabili e costantemente in frammenti angolosi, mai rotolati. Quest'ultimo fatto però potrebbe aver la sua causa nella poca solidità del granito.

Ora nasce la questione, se questi frammenti siano stati eruttati dal vulcano. Avendoli trovati sempre fra i lapilli sui campi, credo di dover dare una risposta affermativa, ritenendo che essi siano staccati da rocce che si trovano in posto sotto il vulcano. Se questi graniti non fossero eruttati dal vulcano, sarebbe dimostrato, che anche una parte dei lapilli e tufi si è depositata sott'acqua. Ma devo confessare che non sono riuscito a trovare un sol pezzo di questi graniti sul macigno.

17. Il pirosseno comune nei tufi allo stato di cristalli, fu trovato una sola volta in un esemplare grossissimo.

18. Devo ancora far menzione di una mica a splendore perlaceo particolare, biancogiallognola, opaca, comunissima nei tufi decomposti della Macchia Piana e di Patrica.

19. Finalmente non posso tralasciare di dire due parole su certe scorie, vetri, e frammenti di rocce semifuse, i quali ultimi contengono della leucite sparsa nella loro massa. Il vetro si mostra al microscopio fortemente devitrificato e racchiude sferoliti. Sarebbe stato difficile di decidere, se questo vetro sia stato prodotto dal vulcano o no, se non avessi trovato racchiuso un pezzo di carbone in uno di questi massi. Questo fatto indica un prodotto artificiale. Anche i frammenti che contengono la leucite, non sono altro che lava semifusa o ricotta, adoperata come fondente o come materiale nella costruzione di fornaci. I frammenti in discorso si trovano presso Arnara (ad O) e al Passo di Serre sul Muringo.

Lava
Scorie
Tufo e terreni vulcanici sciolti
Calcare cretaceo
Macigno eocenico
Calcare cristallino e breccioso eocenico
Calcare argilloso (miocenico?)
Alluvio
Travertino
Conglomerato calcare
Cavi e sezioni naturali e artificiali
Linea di demarcazione

Scala 1: 86400

Effetti di alcuni liquidi specialmente acidi e salini sopra i moti dei filamenti spermatici, dell'epitelio vibratile, delle opaline e del cuore, nonchè degli acidi sulla tenacità dei nervi.

Memoria del Socio ALIPRANDO MORIGGIA

letta nella seduta del 3 giugno 1877.

Conosco de' lavori già condotti da altri nella direzione del titolo del presente opuscolo per quanto riguarda lo studio degli accennati movimenti, ma oltrecchè essi non concernono tutte le citate parti, o piuttosto l'uno o l'altro, che l'insieme dei movimenti qui considerati, credetti il terreno per sè abbastanza interessante da richiamare nuove diligenze sperimentali per ricolmare qualche lacuna a cui finora più specialmente non s'era diretta l'attenzione: e per recare in mezzo a questo proposito qualche cosa di concreto, basterà citare quanto afferma la generalità degli sperimentatori intorno alla nocevolezza o l'innocenza di certe soluzioni saline (1) e degli acidi assai diluiti sui movimenti spermatozoidici, molti senza precisare la dose de' sali, o fissandola male, altri senza pensare, che per quanto riguarda i mammiferi, che pel loro posto zoologico più davvicino ci toccano, allo stato attuale delle cose non era ben fattibile attribuir l'offesa dei liquidi aciduli ai moti de' nemaspermi piuttosto all'acido, che all'acqua, per quanto questa si sappia innocente alla motilità de' filamente spermatici di animali d'altre classi, tanto che per es. al nostro Spallanzani ne' batraci le fecondazioni artificiali riuscivano assai meglio collo sperma assai diluito in acqua (2).

FILAMENTI SPERMATICI DEL PORCELLINO D'INDIA.

La maggior parte delle sperienze sopra i movimenti dei così detti spermatozoi vennero eseguite nella state alla temperatura del laboratorio, 22° a 27° C. (3), sopra

(1) Così per esempio Kölliker stesso (*Éléments d'histologie humaine*, 2ª traduzione francese sulla 5ª edizione alemanna, Parigi, 1868) a pag. 682-83 afferma, che il fosfato sodico è favorevole alla conservazione de' moti degli spermatozoi (di porcellino d'India pare) nella soluzione del 3 al 10 %, come pure il solfato sodico: vedremo in seguito, che le indicate soluzioni riescono già mortali prima d'arrivare alle massime dosi di sale accennate.

(2) Donné (*Cours de microscopie*, Paris 1844) a pag. 286 scrive: *l'eau n'a aucune action délétère sur les animalcules spermatiques*, (non è detto preciso, ma sembra che fossero d'asino): mentre è conosciuto ora, ed io stesso verificai pei nemaspermi del porcellino d'India, che resi tosto immobili nell'acqua, subito posson ripigliare i movimenti ove abbia luogo rapida aggiunta di opportuna soluzione salina, od albuminoidea; però se ciò non avvenga subito, essi nell'acqua vi periscono e presto assai e per sempre.

(3) Si sa già dalle sperienze dello Spallanzani quanto il calore giovi alla vita dei *vermicelli* degli animali superiori, mentre per quelli per es. dei ranocchi bastano 2′ di esposizione alla temperatura di 32° R. per toglier loro ogni moto e virtù fecondante.

porcellini adulti, robusti, alcuni conviventi con femmine, ed altri isolati; il porcellino fisso sopra un patibolo di legno coll'addome in sopra, veniva ferito nel basso ventre praticandovi una stretta finestra, per la quale, senza quasi punto di emorragia, si facea uscire fuori un testicolo col suo epididimo e condotto deferente: colla punta di un bisturi si feriva leggermente in un tratto il canal deferente, che biancheggiava, come per contenenza di latte, ed il pochissimo sperma, che ne usciva, per mezzo di bastoncello di vetro si recava sopra il portaoggetti, e rapidamente veniva esaminato al microscopio.

Assicurato della ricchezza degli spermatozoi, della loro maturità e vivacità di moto (1), e ciò non per una sola volta nel corso dell'intera sperienza, per mezzo di pressioni dalla primitiva ferita, o coll'ajuto di ulteriori incisioni, si riusciva ad avere tante frazioncelle di gocciole spermatiche da potere comodamente da un testicolo ottenere 20 a 30 e più preparati microscopici, senza notevole differenza tra di loro per la grande rapidità, con cui erano fatti ed esaminati. Perchè non si rapprendesse lo sperma o si essiccasse sul portaoggetti, si preferì sempre mettervi prima qualche goccia del reagente da usare, dilavandovi poscia la punta della bacchetta di vetro, che di volta in volta per ciascun preparato veniva intrisa di sperma: quindi rapidamente si procedea all'esame microscopico del preparato, mettendolo dappoi da banda per osservarlo più tardi altre volte e facendo luogo intanto ad altri preparati, con diversi reattivi: esaurito l'un testicolo si usufruiva l'altro. Dopo la castrazione tutti gli animali ci sopravvivevano.

In generale gli spermatozoi si mostrarono abbondanti, vivaci, isolati, talvolta però a fasci (sperma dell'epididimo): in qualche preparato stavano frammiste delle emazie.

Talora capitò d'intermettere per 4 a 5^h la sperienza, e riesaminando gli spermatozoi del medesimo testicolo scoperto, già freddo ed assai arrossato, si presentarono buoni, come pure quelli dell'altro testicolo, ad onta della larga e varia sofferenza dell'animale.

Essendoci convinti della fulminea quiete indotta dall'acqua ordinaria e distillata ne' spermatozoi, nelle dosi enunciate di esame (cioè piccolissima porzion di sperma in 2 o 3 goccie di liquido acqueo, locchè non sarebbe più invertendo le proporzioni), allora pensammo esser inutile tentarvi gli effetti degli acidi, riportati dagli autori, come nocevoli ai loro moti.

Per assicurarmi, se anche ne' mammiferi gli acidi fossero per sè nocevoli a' moti, come già tra gli altri accuratamente provarono il nostro Spallanzani (2) e Bizzozero (3) pei filamenti spermatici dei ranocchi, cercai di risuscitar i moti de' spermatozoi del porcellino trattati con acido diluito, facendo arrivare al portaoggetti opportuna

(1) Lo sperma anche puro del porcellino presenta buoni movimenti a differenza di quanto nota Kölliker per l'umano, il quale senza l'aggiunta di altri umori de' genitali, rimane così denso, che i nemaspermi vi restano in riposo.

(2) Spallanzani nella sua *Fisica animale e vegetale* ebbe a vedere che l'aceto (metà sperma di ranocchio e metà aceto), riusciva fatale ai movimenti, sebbene lo stesso sperma così trattato non perdesse punto la sua facoltà fecondatrice. Questa osservazione ripetuta di uno sperimentatore così coscienzioso, preciso, minuto, abile, è veramente singolare.

(3) *Sulla vitalità degli elementi contrattili*, studî sperimentali di G. Bizzozero. Napoli, 1868.

soluzione alcalina, ma a differenza di quanto incontrò per l'acqua semplice, come si scrisse, non si rianimarono.

Cercai pure un altro modo per circuire la difficoltà dell'azione dell'acqua, servendosi invece che di acqua semplice acidificata, di reattivi salini per sè innocui, resi leggermente acidi per opportuno acido, pensando che l'acqua per sè dovesse tornare dannosa specialmente coll'alterarne troppo profondamente i processi osmotici.

Perciò addivenni ad una serie di sperienze sui moti degli spermatozoi con diverse soluzioni e diluzioni saline, per trovare dapprima di ciascuna per sè il grado nocivo o favorevole, e quindi tentarle anche opportunamente acidificate: pigliai pure occasione per isperimentarvi alcuni liquidi animali.

SPERMATOZOI.

Fosfato sodico. — 10% La soluzione di fosfato sodico 10% immobilizzò istantaneamente i nemaspermi. — 7½% Dopo 14′, pochissima vivacità: dopo 47′, immobili. — 3 e 5% Eccellenti diluzioni per conservare a lungo e ben vivaci i movimenti.

Fosfato sodico acidificato (1). — 10% Si usò 1 vol. di questa soluzione salina e quasi 2 dell'acqua acidulata: la reazione risultante rimase leggermente acida: gli spermatozoi osservati per 1^h, 30′ si conservarono abbastanza mobili.

Era singolare (e ciò incontrammo anche altre volte), vedere assai più vivaci i nemaspermi, se recavano adesa qualche emazia; questa li stimola, reca loro qualche conforto? Se non fosse la difficoltà del camminare de' spermatozoi tra il ciottolato delle emazie, si potrebbe forse trovar là anche una parte di ragione del più facile ingravidare, durante o subito dopo le regole?

Solfato sodico. — 12 e 10% Sull'istante i nemaspermi si fermarono. — 7% Dopo 10′, quasi tutti semimorti. — 4 a 6% Buona conservazione.

Solfato sodico acidificato. — 15, 12 e 5% Queste varie diluzioni saline acidificate leggermente, conservarono, quale un po' più, quale un po' meno, i movimenti spermatici buoni per circa 30′.

Solfato magnesiaco. — 20% Morte istantanea. — 17% Vivaci per soli circa 10′. — 15% Tutti morti dopo 43′. — 12, e 10% Non ancora tutti morti dopo 50′: si osservarono diverse emazie assai raggrinzate, e ciò molti minuti prima che cessassero i moti spermatici.

Solfato magnesiaco acidulato. — Si tentò il sale in varie diluzioni e variamente acidificato, sempre si ebbe la morte de' spermatozoi assai rapidamente; colle diluzioni più favorevoli viveano da 5′ a 6′.

Cloruro sodico. — 3% Morte istantanea. — 2% Dopo 25′, tutti morti. — 1% Buona conservazione de' moti. — ½% Meno buona.

Già Spallanzani avea notato che lo sperma de' ranocchi col sale perde la virtù fecondante (esso non ne scrisse la dose, ma debbe essere stata piuttosto copiosa).

Zucchero di canna. — La miglior diluzione è la seguente: zucchero gramma 10: acqua distillata 90 c.c. la conservazione de' movimenti già riesce male con soli 80 c.c.

(1) Come acidificante fu sempre usata la seguente diluzione di acido cloridrico: acido cloridrico (densità 1170) 1 per 300.

d'acqua, e peggio con 100 c.c., per cui mi sorprese di sentire Kölliker, e con esso altri autori, affermare che per la buona conservazione de' moti occorre semplicemente una soluzione zuccherina di mezzana concentrazione, mentre secondo me, in ristrettissimi confini oscilla la titolazione buona, al disopra ed al disotto della quale ben tosto si cade nella nocevolezza.

LIQUIDI DIVERSI ANIMALI.

Siero di latte vaccino. — Si conoscono a questo proposito i risultati opposti di alcuni autori: Donné trovò gli spermatozoi (di mammifero) vivere nel latte: Spallanzani rinvenne invece quei de' ranocchi vivere nel siero e morir nel latte: io li riscontrai sempre morti col latte vaccino di Roma. Facilmente si spiegano questi diversi risultati dalla diversa ricchezza del latte in sali, in albuminoidi, e grassi, ma particolarmente in acidi. Il latte delle vacche degenti in Roma, anche munto freschissimo, io l'ho sempre trovato acido.

Albumina. — La parte più liquida dell'albume d'ovo di gallina conservò a lungo i movimenti spermatici.

Liquido boccale umano. — Anche per questo liquido non mancano i contradicenti risultati.

Donné lo trovò sempre letale: Müller nella sua fisiologia riporta, che Lampferhof ve li riscontrò vivere a lungo (non è detto di che animale fossero gli spermatozoi).

Longet scrive, che la saliva, il muco, il latte, il pus non offendono gli spermatozoi (di qual animale?).

Godard trovò buono lo sperma umano emesso durante le uretriti acute e croniche.

Io vidi sempre infenso il liquido boccale; mi riuscì solo una volta di conservare i moti per 5′ colla saliva di chi stava fumando.

L'offesa varia della saliva a spermatozoi dipenderà dalla eventuale maggiore o minore acidità combinata colla variabile ma sempre grande acquosità del liquido, e forse anche in parte pel solfocianuro potassico?

In fine aggiungerei volentieri un' altra ragion probabile: le varie dosi rispettivamente usate nella mischianza salivo-spermatica.

È singolare però, che Spallanzani trovò la saliva conservare gli spermatozoi umani, quelli del rospo, ed uccidere quelli del toro.

CONSERVAZIONE DEGLI SPERMATOZOI MORTI.

Godo dell'occasione per aggiungere qualche risultato di sperienze, che ho tentato per conservare a lungo gli spermatozoi per le occorrenze specialmente dell'insegnamento: già sono conosciuti de' reattivi opportuni a ciò: dirò che io ho trovato buoni i reattivi seguenti: fosfato sodico 5%: soluzione acquosa del *curare*: miscuglio acetico medio di Moleschott.

Orina umana. — Mantegazza la trovò sempre fatale agli spermatozoi: lo stesso scrisse Donné e Kölliker. Müller nella sua fisiologia cita Wagner, che vide gli spermatozoi vivere lungamente nell'orina (non è detto l'animale).

Nel lavoro già citato del mio amico prof. Bizzozero a pag. 7 si scrive, che nei liquidi acidi dell'organismo (succo gastrico, muco vaginale, orina) i loro movimenti (nemaspermi, cellule a cigli vibratili, cellule semoventi) si arrestano.

Io trovai l'orina sempre rapidamente fatale: soltanto con quella di un mio amico riuscii a conservare i moti per circa 6′.

È bene tener conto anche per questo liquido delle medesime ragioni, che abbiamo recato in mezzo parlando del liquido boccale: l'acquosità e l'acidità dell'orina è conosciuto quanto possono variare, e ciò può tornare non indifferente in certe quistioni di medicina legale.

Siero artificiale. — Si compose un siero come segue:

Acqua	856
Albume d'ovo	130
Lattato sodico	4
Idroclorato sodico e potassico . . .	6
Fosfato sodico	4
	1000

Il liquido risultante era lievemente alcalino e conservava assai bene i movimenti.

Lo stesso siero reso lievemente acido riuscì a conservare ancora per qualche tempo i movimenti.

Bile. — La bile di coniglio morto da 2 giorni, neutra, uccise istantaneamente gli spermatozoi: altrettanto fece la bile di porcellino vivente: questa però allungata con metà di orina umana, allora conservò abbastanza a lungo i movimenti.

Aggiunta della bile ad un preparato, dove in opportuna soluzione zuccherina si aveano assai buoni movimenti, questi cessarono sull'istante: lo stesso fu aggiungendo bile a spermatozoi in cloruro sodico 1%

Burdach afferma, che gli spermatozoi non muojono nella bile del medesimo animale.

Spallanzani avea trovato, che il seme del rospo mescolato a metà di bile, rimanea ancora capace per la fecondazione artificiale.

Oehl e Kölliker segnano nocevole la bile ai moti spermatici.

Kölliker però scrive, che la bile nuoce quando è troppo diluita: dicemmo di sopra d'averla anzi trovata innocua diluendola con orina: nè potrebbe l'azione intensa della bile dipendere dalla reazione alcalina: noi la trovammo neutra di reazione.

EPITELIO VIBRATILE, OPALINE, CUORE.

Si è dalla rana che si tolsero a studiare le parti qui accennate, e per la maggiore facilità di sperimentazione e per aver più a lungo e ritrarre più completa, direi, l'analisi de' fenomeni, per cui anche nell'insegnamento abitualmente vi si ricorre: si capisce quindi, che avendo tentata la sostanza protoplasmatica-muscolare de' batraci, le risultanze sperimentali non sono che approssimativamente applicabili a quella de' nemaspermi studiati e viceversa.

Le rane usate in generale eran venute di fresco dalla campagna, e sulla medesima rana per lo più si procurava di esaminare contemporaneamente l'epitelio della lingua, il cuore staccato, e le *opaline* stanziate massimamente nel retto intestino.

La stagione di esame è stata essenzialmente la calda (oscillò tra i 20° e 24° C. la temperatura).

La lingua stessa serviva quando per 3, quando per 5 preparati consimili di epitelio vibratile, che coi diversi reattivi si procurava di esaminare il più che si potea, parallelamente: alcune volte però occorse di praticare le sperienze o col medesimo o con diversi reattivi, volta per volta, con lingue di rane diverse; lo stesso fu per le *opaline*: pel cuore di ciascuna rana per lo più fu adoperato un sol reattivo.

Per l'epitelio vibratile, prima dell'aggiunta del reagente, si studiava il preparato da sè solo colla semplice umidazione di assai scarsa acqua distillata: quindi tosto levato il coprioggetti (1), con carta bibula rapidamente si toglieva l'acqua aggiunta, e messe 4 o 5 goccie di reattivo, perchè il preparato sempre largamente pescasse nel menstruo, ricoperto si esaminava al microscopio, tenendo di mira più specialmente quella parte di epitelio, che appariva la più vivace: quando pel protrarsi dell'osservazione era minacciata soverchia diminuzione del liquido, allora dai bordi del coprioggetti se ne facea arrivare del nuovo.

Anche per le *opaline*, si procurava sempre di usare al più possibile la medesima quantità dello sterco che le contenea e del menstruo: delle *opaline* si esaminavano più specialmente quelle che apparivano come imprigionate in una cerchia di materia fecale.

I cuori poi venivano sempre scelti tra i migliori ed i più gagliardi; tolti dall'animale col rapido taglio del pedicciuolo formato da grossi vasi, senza punto di lesione nella sostanza muscolare, fattili scolare, ed osservati per alcuni secondi ne' loro battiti, si metteano in piccole ed uguali capsulette in modo che vi pescassero adagiati nel contenuto reattivo, per circa due terze parti.

Ecco ora il risultato de' principali reattivi usati e delle loro più interessanti graduazioni di diluzione.

EPITELIO VIBRATILE LINGUALE ED OPALINE.

Acido cloridrico (densità 1170). — Diluzione $1^0/_{00}$ L'epitelio della lingua vi moriva sull'istante. — $^1/_{1500}$ Visse per 5′ a 7′. — $^1/_{1700}$ Visse per 15′ a 22′. — $^1/_{2000}$ Visse per assai lungo tempo. — $^1/_{13000}$ L'epitelio di trachea di coniglio vi morì sull'istante.

I movimenti delle *opaline* e del loro epitelio vibratile si conservarono in generale meglio e più a lungo che quelli dell'epitelio linguale, ed anche in diluzioni acide meno spinte, come $1^0/_{00}$ ed anche $^1/_{700}$: dipenderà ciò forse anche in parte da primitiva reazione alcalina dello sterco per sè?

Idrato potassico. — Diluzione $1^0/_{00}$ L'epitelio era tosto morto e disfatto. — $^1/_{1500}$ Visse per 4′. — $^1/_{2000}$ Visse per 10′. — $^1/_{3000}$ Visse per 14′. — $^1/_{3500}$ Visse per 1^h, 15′. — $^1/_{4000}$ Visse per molte ore.

Le *opaline* nella soluzione $^1/_{1500}$ erano disfatte in 3′ ad 11′: nel $^1/_{1700}$ esse vissero per 35′ ed ancora più nel $^1/_{2000}$.

(1) M'appigliai a questo modo, onde il bagno dell'epitelio nel reattivo tornasse più rapido ed uniforme.

È da osservare, che l'idrato potassico usato portato fino alla diluzione di $^1/_{376000}$ ancora dava alla carta qualche segno di reazione.

Le diluzioni potassiche nocive non solo faceano cessare i moti, ma la maggior parte, a differenza dei menstrui acidi, più o meno rapidamente disfaceano l'epitelio e le *opaline*: però le diluzioni meno intense si vedeano prima uccidere l'*opalina* e per ultimo il suo epitelio, anzi dirò meglio le ciglia: lo stesso è da dire dell' epitelio della rana: talora si vedeano cellule cilindriche staccate sfasciarsi, ma per qualche secondo rimanere il bordo cigliato e le ciglia seguitare a muoversi.

Fosfato sodico. — 10% Conservò per più di 20′ l'epitelio vibratile della lingua, ma uccise quasi subito le *opaline* ed il loro epitelio.

Le diluzioni maggiori del sale sono troppo conosciute come favorevoli a moti protoplasmatici. Il fosfato sodico 10% acidificato leggerissimamente (soluzione salina vol. 1: acido idroclorico 1 per 300 vol. 2), conservò per ore il moto all' epitelio della lingua ed alle *opaline*.

Solfato sodico. — 15% Tosto uccise l'epitelio linguale e le *opaline*. — 10% Conservò solo i moti dell' epitelio linguale per 15′.

Solfato sodico acidificato. — Soluzione salina 10% vol. 10: acido cloridrico una goccia. — Le *opaline* rimasero morte sull'istante ma l'epitelio della lingua seguitò a battere per più di 1 ora, con 4 goccie di acido. — Morte subitanea delle *opaline* e conservazione con rallentamento del moto cigliare linguale.

Anche con altri reattivi salini acidi o non si trovò sempre relativamente una azione assai più infensa alle opaline, che all'epitelio linguale, quando la soluzione salina era piuttosto carica.

Solfato magnesiaco. — 20% Morte istantanea dell'epitelio. — 15% Si trovò conservare il moto vibratile della lingua per 30′, dopo cui si smise l'osservazione. — 10% Conservazione ed a lungo del moto vibratile linguale e morte istantanea delle *opaline* e del loro epitelio.

Col solfato magnesiaco acidificato non si ebbero risultati salienti.

Cloruro sodico. — 1 % Vissero bene l'epitelio e le *opaline*. — 2½% Vissero abbastanza bene. — 3 % Vissero per soli 8′. — 3½% Morte istantanea.

Acetato calcico. — 5 % Le *opaline* vi perirono tosto e raggrinzate: l'epitelio della lingua seguitò a battere per 25′ a 30′.

Albume acido. — L' albume d' ovo sbattuto con acqua acidula per idroclorico (idroclorico 1‰), con risultante reazione leggermente acida conservò assai a lungo l' epitelio col suo moto e le *opaline*.

Siero di latte vaccino. — E l'epitelio e le *opaline* vi perirono in pochi minuti primi: il siero era discretamente acido.

Bile. — La bile fresca di porcellino d'India conservò i moti cigliari per 25′, quindi li rallentò.

Siero artificiale. — Esso era composto come l'altro usato per gli spermatozoi: conservò assai bene ed epitelio ed *opaline*.

Reso distintamente acido uccise tosto le *opaline* e lasciò sopravvivere piuttosto a lungo l'epitelio linguale.

CUORE.

I cuori di rana nell'acqua comune seguitarono a battere per vario tempo da 30′ a 70′, dando da 10 a 16 battute nel minuto primo con ritmo regolare.

Acido cloridrico. — $1^0/_{00}$ Il cuore vi moriva in 12′ a 16′. — $^1/_{2000}$ in 30′ a 50′.— $^1/_{16000}$ in 2^h.

Acido acetico. — Scoperto il cuore e bagnandolo sovente in posto con soluzione di acido acetico glaciale $1^0/_0$, dopo 8′ i battiti si rallentarono assai, facendosi lunghissime le diastoli: dopo 1^h si ebbe completa morte.

Altri cuori divelti dall'animale e posti in soluzione acetica $^1/_{16000}$, s'impiccolirono e s'imbrunirono: il battito rallentò assai (4 a 6 per 1′) e finalmente dopo 1^h morirono col ventricolo in sistole e le orecchiette in diastole.

Acido solforico. — Il cuore in solforico $^1/_{64000}$ ha battuto per 1^h, 30′, morendo in sistole.

Acido ossalico. — Il cuore in acido ossalico $^1/_{4000}$ ha battuto per 25′, ed in acido $^1/_{8000}$ per 40′.

Idrato potassico. — Diluzione $^1/_{2000}$ Morte del cuore in diastole dopo 2′ a 3′. — $^1/_{32000}$ Tardanza di battito (5 a 6 per 1′), diastoli espanse e lunghe, morte in diastole dopo 1^h. — $^1/_{96000}$ Diastoli lunghe, espanse: morte in diastole dopo 2^h.

In tutte queste soluzioni potassiche ed anche in altre più diluite, il cuore appena immerso si fermava tosto per 5′ a 6′, per ripigliare dappoi la descritta frequenza.

Solfato sodico. — $10^0/_0$ Il cuore andò scemando i suoi battiti e dopo 40′, era diventato immobile.

Solfato magnesiaco. — $10^0/_0$ Il cuore smise di battervi dopo 20′.

La medesima soluzione salina con una goccia d'acido idroclorico permise ad altro cuore di battervi regolarmente per 1^h.

Cloruro sodico. — $1^0/_0$ Il cuore vi morì in 6′. — $^1/_{300}$ Visse da 2 a 3^h, morendo in diastole: i battiti erano abbastanza regolari, ma più frequenti che nell'acqua cioè 20 a 25 per 1′.

Lo stesso risultato presso a poco s'ebbe colle diluzioni del sale $^1/_{500}$, $^1/_{750}$ ed $1^0/_{00}$, solchè la frequenza di battiti vi era ancora più elevata (25 a 30 per 1′).

Cloruro sodico acidulato. — Soluzione salina $10^0/_0$ leggermente acidulata. Il moto durò 19′. — Soluzione salina $1^0/_0$ leggermente acidulata. Il moto durò 30′.

Siero di latte vaccino. — Il liquido era marcatamente acido: il cuore vi perì in 5′.

LA TENACITÀ DEI NERVI ACIDIFICATI.

Il Presidente Sella avendo comunicata all'Accademia una lettera(1) di G. Scurati Manzoni, nella quale si dimostrava l'aumento della tenacità de'fili di cotone, dopo subìto opportuno bagno acidulato, locchè venne verificato anche a Roma dal senatore

(1) Atti dell'Accad. de' Lincei serie 2ª vol. III pag. 55. Ivi è scritto, che il filo di cotone, dopo bagnatura in acqua acida per solforico, sopportava gramma 630, mentre prima non ne reggeva che 412: però questo aumento artificiale di tenacità andava a cessar quasi del tutto, quando il filo acidificato veniva fatto bollire con acqua ordinaria o con ranno, come dimostrò Cannizzaro.

Cannizzaro, mi venne vaghezza di vedere insieme all'assistente D^r Battistini, se anche i fili animali da questo lato si comportassero come i vegetali, ed a ciò abbiam creduto i più opportuni i nervi: quindi sopra questi intraprendemmo una serie di sperienze per saggiarne la tenacità naturale e quella artificiale, dopo bagnatura in acqua acidulata.

I nervi tentati furono i due sciatici della rana: le rane erano di mezzana grandezza e non delle più fresche: la camera in cui si sperimentava avea da 20° a 24° C.

La tenacità de' nervi veniva desunta dal peso, che essi sopportavano prima di rompersi: i pesi si aggiungevano al bilancino rapidamente, dapprima grossi e quindi in serie assai decrescente: il peso massimo sopportato, che additeremo, sarà quello, che accresciuto di 0,50 ad 1 gramma li facea spezzare: non si teneano buone le spezzature, se non un po' distanti dalle morse, che reggevano i due capi del nervo.

Il tratto libero intermedio alle due morse era della lunghezza di cent. 2, 8.

I confronti sperimentali, s'intende, si operarono sempre al più possibile in condizioni uguali.

Il quadro sinottico seguente racchiude alcuni saggi delle sperienze fatte.

Nervi	Stato dei nervi	Peso sopportato. Grammi.
1.° (1)	Tentato fresco	67
2.°	idem	70
1.°	Lasciato 3^h all'aria	59
2.°	idem	60
1.°	Lasciato 24^h all'aria	76
2.°	idem	77
1.°	Messo in acqua distill. per 5', poi asciug. con carta asciug.	62
2.°	Messo in acqua appena acidula per cloridrico per 5', poi asciug.	79
1.°	In acqua acida per clorid. (densità 1170) 2% per 10', e quindi lasciato all'aria per 3^h	85
2.°	Lasciato all'aria per 3^h	61
1.°	In clorid. 2% per 10', quindi all'aria per 24^h	90.
2.°	Lasciato all'aria per 24^h	78.
1.°	Come 1.° sopra	131
2.°	Come 2.° sopra	121
1.°	In clorid. 2% per 20' e quindi all'aria per 24^h	83
2.°	In clorid. 2% per 30' e quindi all'aria per 24^h	60
1.°	In clorid. 4% per 10' e quindi all'aria per 24^h	79
2.°	In clorid. 4% per 20' e quindi all'aria per 24^h	54

(1) Diremo 1° e 2° i due nervi riferentisi alla medesima rana.

Tentati poi i nervi subito dopo un bagno di 3′ a 5′ in acqua appena alcalina per idrato potassico, il risultato costante è stato, che i nervi alcalinizzati perdevano in tenacità rispettivamente a nervi in istato normale o bagnati in acqua semplice ed ancora più per riguardo a nervi acidificati: ecco qualche cifra: tenacità de' nervi da cloridrico 2% per 5′, gramma 102, 137, 70: corrispondenti nervi da acqua alcalina, 85, 120, 60.

Si tentarono pure diverse sperienze su muscoli di rana, ma i risultati furono meno netti, anche per le maggiori difficoltà di sperimentazione: il senso generale però de' risultati è stato che la tenacità de' muscoli bagnati per 5′ in acqua semplice od appena alcalina od acida (cloridr. 2%) scemava rispettivamente a quella de' muscoli non bagnati, fossero essi co' pesi tentati freschi o variamente essiccati: il bagno acidulo fu quello, che fece scendere di più la tenacità: diminuì perfino di $^1/_4$ ad $^1/_5$ rispettivamente a quella de' muscoli non bagnati: il bagno alcalino facea soffrir più poco e meno ancora il semplice acquoso.

Dall'insieme delle sperienze praticate, comprese o non nel quadro sinottico, sulla tenacità delle parti animali, risulterebbe che i nervi offrono tenacità talora ben differenti anche in rane apparentemente uguali, e talfiata perfino diverse nello stesso animale, anche fatta tara alle imperfezioni dello sperimentare. La tenacità de' nervi leggermente acidificati per cloridrico cresce, e da questo lato i fili animali si comportano come i vegetali (cotone): la tenacità però scema ove il bagno sia o troppo acido o troppo prolungato. Il bagno acquoso, ed ancora più l'alcalino (potassico) diminuisce la tenacità. I nervi sul vivente acidificandosi naturalmente nel lavoro crescono di tenacità, mentre vanno rimettendo del loro potere fisiologico? Si potrebbero tentare sperienze a questo proposito.

I muscoli, per quanto si può dedurre dalle fatte sperienze, patirebbero nella loro tenacità tanto da bagno semplice che alcalino (potassico) ed acido, ma più particolarmente da quest'ultimo.

Mycologia Romana.

Memoria di CARLO BAGNIS
presentata dal Socio TOMMASI CRUDELI

nella seduta dell' 8 aprile 1877.

> Étudier les plantes pour arriver à distinguer et à séparer tout ce que la Nature elle même a séparé, en observant en même temps tous les points de contact qu'ont entre elles les diverses espèces, c'est ramener la science à son but.
>
> (JORDAN, *Asphodiles. Sess. extraor. de la Soc. botan. de France à Grenoble.* VII p. 725).

Benchè a prima giunta la nostra Italia sembri ormai tutta perlustrata, e le naturali sue produzioni vegetali sembrino di già del tutto conosciute, noi siamo ben lungi dall'avere raggiunto tal grado di scientifico avanzamento. Ed infatti è pur vero che allo studio della Flora Fanerogamica italiana poco vi sia da aggiungere, ma d'altra parte è pur cosa non dubbia che ben molto rimane a fare prima che si possegga una completa conoscenza delle produzioni crittogamiche.

La Crittogamia è di natura sua campo vastissimo, e sì vasto che la breve vita di un individuo a mala pena può riuscire a conoscere convenientemente alcuno dei principali suoi scompartimenti. In Italia poi, non giova dissimularlo, tale studio non fu che appena qua e là sfiorato, sia per la mancanza di mezzi, sia pel genio più presto sintetico degli italiani, che come giustamente osservò il nostro chiarissimo professore De Notaris, padre degli italici studî crittogamici, difficilmente si ostina a ricerche minuziose e di lunga lena.

Per cui, già da più anni occupandomi con amore di tal genere di studî, mi avvidi come quel vasto territorio che appellasi Agro Romano, fosse ben poco conosciuto dal lato delle sue produzioni crittogamiche.

Non dobbiamo però dimenticare la *Bryologia Romana*, pregevole lavoro della contessa Fiorini, ma astrazion fatta di questo importante scritto, e di qualche Nota sui Funghi lasciataci dal Mauri e dal dottor Lanzi, noi non possediamo altro.

Nè è a credersi che tal vasta superficie di terreno non presenti un reale interesse scientifico.

La natura sua geologica, la sua posizione fisica, l'avvicendamento incessante del terreno, i monti, i piani, le valli, la vicinanza al mare, le paludi, i luoghi aprichi e sferzati dai cocenti raggi di un sole quasi meridionale, fanno sì che danno alla vegetazione un aspetto il più variato, ed il più attraente all'occhio dell'osservatore.

E la famiglia dei Funghi, che già di natura sua possiamo dire cosmopolita, ha non pochi suoi rappresentanti sia delle regioni più fredde, come delle più calde.

Per tal motivo, essendo ormai già più di cinque consecutivi anni che vado perlustrando tale regione, ho potuto mettere assieme un materiale scientifico così abbondante, che credo potere colla presente pubblicazione esporre i primi frutti dei miei studî e delle mie ricerche sulla Mycologia Romana.

E sarebbe già stata mia intenzione e mio desiderio di far nota tal mia nuova contribuzione agli studî crittogamici, se la malattia e la repentina morte del tanto da me amato prof. De Notaris, il quale in tal genere di studî fu mio maestro e guida, non mi avessero deviato dalle abituali mie occupazioni.

I materiali che ormai io posseggo sono sufficientemente copiosi, e vanno ogni giorno aumentando, ma non avendoli ancora tutti e del tutto illustrati, ho creduto esser meglio disporli a Centurie; per cui col presente mio scritto darò alla luce la prima di queste, promettendo di pubblicarne quanto prima le successive.

Le specie non sempre son quelle che usualmente riscontransi nelle altre parti d'Italia; il numero delle nuove, parve a me ed al prof. De Notaris più grande di quel che realmente non sarebbesi creduto; e di ciò ne principian a far fede varie specie di già pubblicate nella *Mycotheca universalis* per cura del chiarissimo Thümen.

Probabilmente le specie citate e descritte in queste Centurie non occuperanno sempre la loro naturale posizione, venendo più volte alterata la vera parentela dei generi, ma di ciò ne è causa il metodo di illustrazione che solo mi è permesso di fare, e con un indice generale di tutte le specie da me studiate, che pubblicherò al fine del lavoro, come repertorio, e fatto sulla naturale classazione della famiglia dei Funghi, porrà facilmente riparo agli errori che mi potranno essere sfuggiti.

CENTURIA PRIMA

1. Agaricus (Amanita) muscarius.

Fries *Syst. myc.* I, p. 16. — *Epicrisis* p. 5, n. 7. — Schaeff. t. 273. — Amanita muscaria. Pers. *Syn.* p. 253. — DC. *Fl. Fr.* 561. — Kromb. fasc. 2, p. 7, t. 9. — Vittad. p. 33, t. 5. — Venturi *Stud. myc.* p. 2, t. 1, fasc. 5, 6. — Viviani *I fung. ital.* p. 29, t. XXIX. — Agaricus Pseudo-aurantiacus. Bull. t. 122. — Agaricus imperialis. Batsch.

Hab. Alla macchia Mattei (dintorni di Roma) — Frascati — Monte Fiscello.

2. Agaricus (Amanita) phalloides.

Fries *Syst. myc.* I, p. 13. — *Epicrisis* p. 4. — Agaricus bulbosus et verrucosus. Bull. t. 2, 577. — DC. *Fl. Fr.* 2, p. 210. — Viviani *Fung. ital.* p. 14, t. XV. — Agaricus virosus. Vittad. t. 17. — Kromb. t. 69, fig. 10-17. — Cordier p. 216. — Roques p. 347.

Hab. Alla macchia Selvotto (presso l'Ariccia) — A Monte Severo — Valle d'Inferno.

3. Agaricus (Amanita) ovoideus.

Fries *Syst. myc.* I, p. 15. — *Epicrisis* p. 3. — Bull. t. 364. — Cordier p. 215. — Agaricus coccola. Scop. — Amanita alba. Pers. *Champ. Com.* p. 177. — Vittad. *Fung. mang.* p. 9, t. 2. — Venturi *Stud. Micol.* p. 1, t. 1, f. 1, 2. — DC. *Fl. Fr. suppl.* 562. — Roques p. 344. — Viviani *Fung. ital.* p. 38, t. XXXIV.

Hab. Dintorni di Rocca di Papa — Boschi di Tivoli — Subiaco.

4. Agaricus (Lepiota) procerus.

Fries *System. myc.* I, p. 20. — *Epicrisis* pag. 12. — Agaricus Colubrinus. Bull. t. 78, 583. — Schaeff. t. 22, 23. — Cordier p. 201. — Roques p. 295. — Kromb. fasc. 4, p. 7, t. 14, fig. 1-12. — Venturi p. 9, t. 3, fig. 22-23. — Hartz pl. 46. — Vittad. p. 182, t. 24. — Viviani *I fung. ital.* p. 8, t. VIII.

Hab. Dintorni di Frascati — Boschi dei dintorni del lago Nemi.

5. Agaricus (Armillaria) melleus.

Fries *Syst. myc.* I, p. 30. — *Epicrisis* p. 22. — *Fl. Danim.* t. 1013. — Agaricus obscurus. Schaeff. t. 74. — Agaricus annullarius. Bull. t. 377, 540, f. 3. — Agaricus polymyces. Pers. *Syn.* p. 269. — DC. *Fl. Fr.* 548. — Cordier p. 199. — Roques p. 302. — Kromb. f. 6, p. 15, tav. 1, fig. 13; t. 44, fig. 2-6. — Venturi p. 8, pl. 3, fig. 20-21. — Vittad. p. 16, t. 3. — Hartz p. 8. — Viviani *I fung. ital.* p. 63, t. 41.

Hab. Macchia Madama (monte Mario) — Pascoli al di là di s. Paolo fuori le mura.

6. Agaricus (Mycena) lacteus.

Pers. *Syn.* p. 439. — Russula lactea. Fr. *Epicrisis* p. 355. — Kromb. fasc. 8, p. 23, t. 61, fig. 1-2. — Paul. t. 74, f. 2. — *Fl. Dan.* t. 1845, fig. 1. — Bull. t. 563, f. N. O.

Hab. Pascoli al di là di s. Paolo fuori le mura (dint. di Roma).

7. Agaricus (Clitopilus) prunulus.

Fries *Epicris.* p. 148. — *Syst. myc.* I, p. 193. — Berkl. *Outl.* t. 7, f. 7. — Kromb. t. 55, fig. 7-8. — Viviani *I fung. ital.* p. 3, t. IV. — Agaricus moriceron. Bull. t. 142. — Agaricus albellus. Schaeff. t. 78.

Hab. Praterie fuori porta Pia (dintorni di Roma).

8. Agaricus (Psalliota) campestris.

Fries *Epicris.* p. 213. — Berk. *Outl.* t. 10, f. 2. — Cook. *B. F.* t. 10. — Smith *E. M.* f. 5. — Fungus esculentus. Mich., *Gen. Plant.* p. 174. — Schaeff. *Fung.* t. 33. — Agaricus edulis. Bull. *Champ.* pl. 134-514, f. 4. M. — Pers. *Syn.* p. 418. — Hypophillum campestre. Paul. *Champ.* t. 130, f. 10. — Letell. *Hist. et descript. des Champ.* p. 76, f. 64. — Vittad. *Fung. mang.* p. 41, t. 6-8. — Viviani *Fung. ital.* f. 50, t. XLVI.

Hab. Nelle praterie e boscaglie dei dintorni di Roma — d'Albano — Velletri — Frascati.

9. Polyporus (Mesopus) perennis.

Fries *Epicris.* p. 434. — Rostk. t. 6. — Bolt. t. 87. — Sow. t. 192. — *Fl. Dan.* t. 1075, f. 1. — Bull. t. 449, f. 2. — Schaeff. t. 125. — Klot. *Exs.* n. 31. — Fckl. *Exs.* n. 1400. — *Engl. Fl.* V, p. 136. — Ventur. t. 61, f. 1. — Bisch. f. 3257.

Hab. Macchia Braschi (Monte Mario) — Acqua Traversa — Zagarolo.

10. Polyporus (Pleuropus) varius.

Fries *Epicris.* p. 440. — Batsch. t. 129. — Bull. t. 360, 445, f. 2. — Buxb. V, t. 15, f. 2. — Bolt. t. 168. — *Engl. Fl.* V, p. 136. — Kl. *Exs.* n. 223.

Hab. Macchie di Genzano e Passerano.

11. Polyporus (Pleuropus) quercinus.

Fries *Epicris.* p. 442. — Grev. t. 245. — Rostk. t. 13. — Kromb. t. 4, f. 22-24. —

Sow. t. 134. — Paul. t. 10, fig. 1-2. — Berk. *Outl.* t. 15, f. 2. — *Engl. Fl.* V, p. 136. — Venturi t. 49, fig. 1-2.

Hab. Nelle macchie di Monte Mario ed Acqua Traversa.

12. Polyporus (Pleuropus) lucidus.

Fries *Epicris.* p. 441. — Krombh. t. 5, f. 3-5; t. 48, f. 11-13. — Paul. t. 18, f. 1-4. — *Ann. N. His.* n. 344.

Hab. Monte Soratte — Macchia Mattei (dintorni di Tivoli).

13. Polyporus (Merisma) Sulphureus.

Fries *Epicris.* p. 450. — Grev. t. 113. — Bisch. f. 3287. — Klot. *Exs.* n. 1005.— Rostk t. 20. — Bull. t. 429 — Sow. t. 135. — *Engl. Fl.* V, p. 138. — Fckl. *Exs.* n. 1392.

Hab. Boschi di Subiaco — Monte Salomone.

14. Polyporus (Apus) hispidus.

Fries *Epicris.* p. 458. — Grev. t. 14. — Bolt. t. 161. — Sow. t. 345. — Bull. t. 210-493. — Krombh. t. 48, f. 7-10. — *Engl. Fl.* V, p. 138. — Klot. *Exs.* n. 1913. — Fckl. *Exs.* n. 1389.

Hab. Boscaglie di Monte Mario — Pineto Sacchetti.

15. Polyporus (Apus) applanatus.

Fries *Epicris.* p. 465. — Batsch f. 130. — Bull. t. 454, f. C. — *Fl. Boruss.* t. 393. — Fckl. *Exs.* n. 1388.

Hab. Ad Acqua Serena — alla Faiola.

16. Polyporus (Apus) fomentarius.

Fries *Epicris.* p. 465. — Lenz. f. 48. — Sow. t. 133. — Batt. t. 37. fig. E. — *Engl. Fl.* V, p. 144. — Klotz. *Exs.* n. 222. — Schwz. t. 16, f. 28. — Fckl. *Exs.* n. 1386.

Hab. Nelle boscaglie dei Monti Albani.

17. Polyporus (Resupinatus) medulla panis.

Fries *Epicris.* p. 485. — Sow. t. 387, f. 7. — Jacq. *Miscel.* I, t. 11. — *Fl. Dan.* t. 2028, fig. 1. — Letell. t. 690, f. 1. — Bolt. t. 166, f. 2? — *Engl. Fl.* V, p. 146.— Fckl. *Exs.* n. 1369.

Hab. A Monte Flavio.

18. Trametes Pini.

Fries *Epicris.* p. 489.— *Fl. Boruss.* t. 380. — Corda, *Anl.* t. 11, f. 75, n. 36 37.— Klot. *Exs.* II, ed. n. 118.— Bail. t. 31.

Hab. Al Pineto Sacchetti — nelle Selve di pino non lontane dal Mediterraneo.

19. Daedalea quercina.

Fries *Epicris.* f. 492. — Lenz. f. 28-29. — Sow. t. 181. — Bol. t. 73. — Bull. t. 352. — Berkl. *Outl.* t. 19, f. 5. — *Engl. Fl.* V, p. 131. — Bail. t. 31. — Fckl. *Exs.* n. 1362. — Venturi t. 60, fig. 1-2. — Grev. t. 338.

Hab. Nelle boscaglie di Monte Mario — Farnesina — Valle d'Inferno.

20. Merulius tremellosus.

Fries *Epicris.* p. 500. — *Fl. Dan.* t. 1553, 776, fig. 1. — *Ann. nat. hist.* n. 77. — Fckl. *Exs.* n. 1358. — *Ann. scien. nat.* 1837, VIII, t. 10, f. 22. — Bail. t. 30. — Klot. *Exs.* II, n. 7. — Boletus arboreus. Sow. t. 346. — Bisch. f. 3447.

Hab. A Monte Gennaro — Cervara.

21. Fistulina hepatica.

Fries *Epicris.* p. 504. — Schaeff. t. 116-120. — Sow. t. 58. — Bail. t. 29. — Klot. *Exs.* n. 1404. — *Fl. Dan.* t. 1039. — Grew. t. 270. — Vittad. t. 36. — Berk. *Outl.* t. 17, f. 1. — *Engl. Flor.* V, p. 154. — Venturi t. 36, fig. 1-2. — Fckl. *Exs.* n. 1357.

Hab. Rocca di Papa — Monte Cavo — Subiaco.

22. Bovista nigrescens.

Fries *S. M.* III, p. 23. — Berk. *Outl.* t. 20, f. 5. — Bon. t. 306, f. 2. — Bolt. t. 118. — Sower. t. 331. — *Engl. Fl.* V, p. 302. — Fckl. *Exs.* n. 1884. — Klotz. *Exs.* n. 1410.

Hab. A Monte s. Felicita — ai Monti della Breccia.

23. Lycoperdon pyriforme.

Fries *S. M.* III, p. 39 — Ray *Syn.* III, p. 19, n. 7. — Grev. t. 304. — Schaeff. t. 189. — *Fl. Dan.* t. 1680. — *Engl. Fl.* V, p. 304. — Cook. *Exs.* n. 215. — Fckl. *Exs.* n. 1260.

Hab. Boscaglie e pascoli di Nemi — Albano — Monte Mario.

24. Scleroderma vulgare.

Fries *S. M.* III, p. 46. — Huss. I, t. 17. — *Fl. Dan.* t. 1969, fig. 2. — Vaill. t. 16, f. 8. — Bolt. t. 116. — Bull. t. 270. — Sow. t. 268. — *Engl. Fl.* V, p. 305.— Berkl. *Outl.* t. 15, f. 4. — Tuber solidum With. III, p. 459. — Fckl. *Exs.* n. 1253.

Hab. Nei Pascoli fuori porta s. Lorenzo (territorio di Roma) — nei dintorni di Terracina.

25. Leptostroma litigiosum.

Desm. *Ann. sc. nat.* 1843, XIX, p. 338. — Mouge, *Exs.* n. 673. — Cook. *Exs.* n. 335.

Hab. Sulla *Pteris aquilina* nelle boscaglie di Monte Mario — a macchia Mattei — a Monte Rotondo.

26. Leptostroma caricinum.

Fries *Obs.* II, t. 7, f. 4. — *S. M.* II, p. 598. — *Engl. Fl.* V, p. 297. — Fckl. *Exs.* n. 186. — Klot. *Exs.* n. 383.

Hab. Su foglie di *Carex flava* alle Paludi Pontine — su foglie di *Carex filiformis* a Cervara — e sul *Carex distans* ad Ostia.

27. Phoma Samarorum.

Desmaz. *Exs.* n. 349, 1875. — Berk. et Broo. *Ann. nat. hyst.* n. 398. — Cook. *Exs.* n. 160.

Hab. Sui semi di *Acero* nel R. Orto Botanico Romano — a Monte Gianicolo.

28. Phoma Hederae.

Desm. *Exs.* n. 350. — *Engl. Fl.* V, p. 284. — Berkl. *Exs.* n. 90. — Fr. el. II, p. 119. — Sphaeropsis hederae. Lev. *Ann. scienc. natur.* 1846 V, p. 296.

Hab. Sulle foglie di *Hedera helix.* nel R. Orto Botanico Romano — Monte Gianicolo — Monte Mario.

29. Phoma longissimum.

Berk. *Outl.* p. 314. — Sphaeria longissima. Pers. *Syn.* p. 31. — Fr. *S. M.* II, p. 431. — *Engl. Fl.* V, p. 256. — Curr. *Linn. Transac.* XXII, p. 285.

Hab. Su *Anethum graveolens* (arido) a Fratocchia — a Malagrotta.

30. Sphaeropsis Evonymi.

Desmaz. *Pl. Crypt. de France* Ed. III, n. 677.

Hab. Sulle foglie di *Evonymus japonicus* nel R. Orto Botanico Romano.

31. Diplodia viticola.

Desmaz. *Ann. scienc. natur.* 1838, X, p. 311. — Desm. *Exs.* n. 989. Berk. *Ann. natur. hyst.* n. 207. — Fckl. *Exs.* n. 541.

Hab. Sulla vite nelle vigne dei dintorni di Roma — Marino — Frascati.

32. Diplodia ilicis.

Currey *Linn. Transac.* XVII, n. 343. — Sphaeria ilicis. Fries *S. M.* II, p. 501. *Engl. Flor.* V, p. 273.

Hab. Sulle foglie di *Elice spinoso* al R. Orto Botanico Romano — Monte Gianicolo.

33. Hendersonia Araucariae.

Thümen (*nov. spec.*).

Hendersonia peritheciis spuriis, sparsis, erumpentibus, epidermide perforantibus, subconicis, amphigenis, parvis, atris; — sporidiis elongato-orculaeformibus, utrinque plano truncatis, triseptatis, loculis aequalibus, ad septas obsolete, fere non constrictis, brevi pedicellatis, dilute cinereis, 15 mm. long. 5 mm. crass, sine pedicello; pedicellis evanescentibus, hyalinis, 4-5 mm. long, parte superiore minime dilatatis.

Hab. Sulle foglie secche di *Araucaria Brasiliana* nel R. Orto Botanico Romano.

34. Septoria Oleandri.

Duri. et Mtg. *Flor. d'Alger.* I, 593.

Hab. Sulle foglie di *Nerum Oleander* nel R. Orto Botanico Romano — dintorni di Roma e Frascati.

35. Cytispora Carphosperma.

Fries *S. M.* II, p. 543. — *Engl. Fl.* V, p. 282. — Cytispora leucosperma. Fries *S. M.* II, p. 543. — Desmaz. *Exs.* n. 489.

Hab. Sulla corteccia di un *Melo* nei dintorni di Roma e Frascati.

36. Puccinia Macrostyla.

Forma ovoidali, cellulis rotundatis seu paullulum oblungatis, didymis medio constrictis, plus minusve fuscis, episporio aequiter crasso, glabro, pedicellis longis hyalinis, non coloratis (Bagnis *Monographia Pucciniae generis* p. 22. spec. n. 3). — Puccinia Tanaceti DC. *Fl. Franc.* II, 222. — Westendorp u Vallays. *Herb. Crypt. belg.* 422. — Fuckel *Enumer. fung. Nassov.* f. 4, 5. — Fuckel *Fung. ren. exsic.* n. 341. — *Erbar crittog. ital.* 795. — Puccinia Taraxaci (Rebentisch. *Fl. Prod. Neomarchicae*).

Hab. Sulle foglie del *Tanacetum vulgaris* a Monte Flavio — ai Monti Sabini — sulle foglie di *Taraxacum laevigatum* a Bravetta e Ampillone.

37. Puccinia Ornithogali.

Puccinia formae varia, generaliter claviformi, in medio leviter constricta, cellulis magnis obtusis, cellula superiore rotundata, inferiore fusoidea, episporio duarum cellularum aequiter crasso, glabro, tenui, leviter colorato, pedicellis longis, hyalinis, non coloratis. (Bagnis *Monograp. gener. Pucciniae* p. 23, n. 4). — Puccinia liliacearum. Duby *Bot. Gall.* II, 891. — Puccinia liliacearum for. Ornithogali umbellati. Klotzschii *herb. viv. mycol.* ed. II, 794. — Corda *Icones.*

Hab. Sulle foglie di *Ornithogalum umbellatum* a Monte Fortino — a Palestrina.

38. Puccinia tenuis.

Forma ovoidea, vel oblungato ovoidea, in medio leviter constricta, cellulis obtusis, oblungatis, hyalinis, vel levissime coloratis, episporio cellularum aequiter crasso, glabro, pedicellis longis, hyalinis, non coloratis (Bagnis *Monograph. gen. Pucciniae* p. 24, n. 6). — Puccinia Malvacearum. Montagne *Fl. Chil.* VIII, 43. — Corda *Icon.* VI, f. 12. — Puccinia Stellariae. Duby *Bot. Gall.* II, 887. — Klotz. n. 885, ed. II, n. 86. — Fuckel *Fung. rhen. exsic.* n. 363. — *Erb. crittog. ital.* n. 499.

Hab. Sulle foglie di *Althaea officinalis*, » di *Malva neglecta*, » di *Malva rotundifolia*, » di *Malva silvestris* } per tutto l'Agro Romano.

Sulle foglie di *Stellaria media* a Monte Mario — a Castel Giubileo.

39. Puccinia fallens.

Forma ovoidea, oblunga, vix in dimidio constricta, cellulis obovatis, vel suboblungatis, episporio aequiter crasso, glabro, fusco, pedicellis brevibus coloratis (Bagnis *Monograp. gener. Pucciniae* pag. 26, n. 7. — Cook. *Hand. Br.* f.). — Puccinia trifolii. Hedw. — Puccinia inquinans. Wallr. *Fl. Cript.* II, 229.

Hab. Sulle foglie di *Trifolium pratense* a Castel Gandolfo — Ariccia e Frascati — sulle foglie di *Ononis repens* a Torre d'Astura e Terracina.

40. Puccinia vulgaris.

Puccinia subglobosa aut ovato-globosa, medio haud constricta, magnitudine varia, episporio duarum cellularum aequiter crasso, glabro, pedicellis brevibus hyalinis non coloratis. (Bagnis *Monograp. gener. Pucciniae* p. 27, n. 9). — Puccinia Chondrillae. Corda *Icon.* IV, 15, t. 4, f. 46. — *Erbar. crittog. ital.* n. 352. — Fuckel *Fung. rhen. exsic.* n. 346. — Puccinia Umbilici. Berkel. *Britis. fung.* n. 329. — Puccinia obtegens. Fuckel *Fung. rhen. exsic.* n. 348. — Puccinia cirsii. Rabenh. 89. — Fuckel *Fung. rhen.* n. 340. — Puccinia compositarum. Schlectd. *Fl. berol.* II, n. 133. — Fr. *Lim. Veg.* n. 513. — Desmaz. *Plts. crypt. de France* n. 172. — Klotzs *Herb. vir. mic.* n. 274. — Fuckel *Fung. rhen.* n. 344, 345. — Puccinia Menthae. Pers. *Syn. fung.* n. 227. — Desm. *Plts. crypt. Fr.* n. 171. — Berk. *Brit. fung.* n. 217. — Fuck. *Fung. rhen.* n. 335-338. — Puccinia violarum. Lk. *Spec.* II, 80. — Berkl. *British. fung.* n. 223. — Fuckel *Fung. rhen.* n. 374.

Hab. Sulle foglie di *Taraxacum officinale* e *Chondrilla muralis* a Civita-Lavinia. — Sulle foglie di *Cotyledon Umbilicus* a Monte Gianicolo. — Sulle foglie del *Cirsium arvense* a selva Mesica ed alla Faiola. — Sulle foglie del *Cirsium lanceolatum* nei prati a Mentana. — Sulle foglie della *Prenanthes purpurea* a monte Gennaro. — Sulle foglie di *Menta arvensis* e *Menta viridis* a Tivoli e Subiaco, e sulla *Viola odorata* Monte Gianicolo.

41. Puccinia minima.

Forma sub-ovata oblunga, medio constricta, cellulis minimis, episporio duarum cellularum aequiter crasso, crassiusculo, glabro, fusco-ochraceo, pedicellis longissimis filiformibus hyalinis (Bagnis Nov. spec. *Monograp. gener. Pucciniae* p. 43, n. 13).

Hab. Sulle foglie del *Pruno domestico* in varie località dell'Agro Romano (dintorni di Roma — Frascati — Marino).

42. Puccinia Asphodeli.

Forma rotundata ovalari, vix in dimidio constricta, cellulis giganteis, episporio duarum cellularum aequiter crasso, crassissimo, glabro, ochraceo, pedicellis minimis, hyalinis, basi dilatatis (Bagnis, Nov. spec. *Monograp. gener. Pucciniae* p. 43, n. 14). — Questa *Puccinia Asphodeli* non è quella descritta dal Duby nel suo *Botanicon Gallicum*. La forma presente è ben diversa, è una vera specie nuova. Ho voluto chiamarla *Puccinia Asphodeli* perchè non si riscontra che sull' *Asphodelus ramosus*. La specie del Duby, secondo me, va unita ad un'altra specie come risulta nella mia *Monografia sul genere Puccinia*.

Hab. Sulle foglie di *Asphodelus ramosus* per i pascoli in vicinanza al mare, e lungo il Tevere da Roma ad Ostia.

43. Puccinia mammillata.

Forma ovali, fere nihil ad medianum septum constricta, cellulis rotundatis regolaribus, episporio fusco, mammillato, mammillis rotundatis, irregulariter sparsis, laevissime pedunculatis, stipite longo, crasso hyalino, non colorato (Bagnis, Spec. nov. *Monogr. gener. Pucciniae* p. 73, n. 44). — È specie rarissima trovata da me due sole volte, una sulla *Tulipa Celsiana* proveniente dall'Austria, ed un'altra sulla *Tulipa sylvestris* nell'Agro Romano.

Hab. In un orto a Frascati, e nei dintorni di Tivoli.

44. Uredo Suaveolens.

Pers. *Syn.* p. 221. — *Engl. Fl.* V, p. 379. — Trichobasis suaveolens. Berk. *Outl.* p. 208. — Cooke *M. F.* t. 7, f. 151, 153. — Cooke *Exs.* n. 73. — De Bary *Brandspilze* t. III, fig. 1-4.

Hab. Sulle foglie di *Carduus nutans* nei dintorni di Roma.

45. Uredo quercus.

Engl. Fl. V, p. 383. — Cooke *M. F.* p. 205. — Cooke *Exs.* n. 281. — Berkel *Exs.* n. 239.

Hab. Sulle foglie di *Quercus suber* a Monte Mario — Acqua Traversa.

46. Uredo Orchidis.

Mart. *Fl. Mosq.* p. 229. — Cooke *Exs.* n. 61. — Uredo confluens γ. Orchidis. — Alb. et Schw. p. 122. — Uredo circinnalis α. Orchidis. — Strauss *Wett. Ann.* II, 88. — Caeoma Orchidum. Lk. *Sp. pl.* II, p. 9.

Hab. Sulle foglie di *Orchis Romana*, e *Orchis Aracnifera* a Valle d' Inferno (dintorni di Roma).

47. Uromyces Croci.

Uromyces acervulis subrotundis vel linearibus, primo epidermide velatis, dein nudis, fuscis, sporis subrotundis badio-fuscis, episporio *scabriusculo* stipite persistente hyalino.

Faccio però notare come l'*Uromyces Croci* trovato da me non corrisponda esattamente a quello trovato dal prof. Passerini, poichè mentre quello avrebbe l' episporio *scabriusculo* come sta scritto nella descrizione che io ho riportata dalla *Mycotheca Universalis* del Thümen; questo avrebbe l'episporio perfettamente *glabro*.

Hab. Sulle foglie di *Crocus biflorus* nei dintorni della Farnesina (presso Monte Mario).

48. Ustilago Carbo.

Tul. *Ann. sc. nat.* 1847, t. 3, f. 1-12. — Ustilago segetum. Ditm. t. 33. — Cook. *Exs.* n. 54. — Corda, IV, f. 9. — Uredo segetum. Pers., *Syn.* p. 224. — Moug. *Exs.* n. 291. — Baxt. *Exs.* n. 43. — *Engl. Fl.* V, p. 374. — Kl. *Exs.* n. 81.

Hab. Sul grano alla Farnesina (dintorni di Roma) — Frascati.

49. Aecidium Euphorbiae.

Pers. *Syn.* p. 211. — *Engl. Fl.* V, p. 374. — Moug. *Exs.* n. 87. — Seem. *Journ.* II, p. 35. — Cook. *M. F.* p. 191. — Cook. *Exs.* n. 6. — Fckl. *Exs.* n. 279. — Berk. *Exs.* n. 229.

Hab. Sull' *Euphorbia cyparissias* a Monte Mario, ed *Euphorbia dulcis* a Tivoli.

50. Aecidium ranunculaceaarum.

D. C. *Fl. Fran.* VI, p. 97. — Sow. t. 397, f. 2. — Seem. *Journ.* II, p. 36. — Cook. *M. F.* t. 2, f. 12, 14. — Cook. *Exs.* n. 8. — Fckl. *Exs.* n. 263-265. — Cook. *L. F.* n. 55.

Hab. Sulle foglie del *Ranunculus Ficaria* nel R. Orto Botanico Romano — Monte Mario.

51. Aecidium Smirnii.

Aecidium acervulis hypophyllis, sparsis, magnis, in macula exarida, aurantiacis; sporidiis polygonis vel irregulariter rotundatis 12-28 mm. in diam. flavescentibus, epidermide crassiusculo, aspro, hyalino.

Hab. Sulle foglie di *Smirnium Olusatrum* Monte Gianicolo (Roma). (Bagnis, Spec. nov. in *Mycoth. Universalis*).

52. Fusarium Bagnisianum.

Thümen, Nov. spec. *Mycotheca Universalis* cent. II n. 170. — Fus. acervulis atris, primo epidermide tectis, dein erumpentibus, lineariformibus, usque ad 25 centm. longis; hyphis abbreviatis, filiformibus, continuis, hyalinis, sporidiis lineari-oblongis, utrinque obtusis, raro uniseptatis, non curvatis 10-11 mm. long. 3 mm. crass. hyalinis.

Hab. Sui rami di *Spartium junceum* nel R. Orto Bot. Romano — al Gianicolo — all' Insugherata — a Monte Mario.

53. Fusarium lateritium.

Fr. *S. M.* III, p. 470. — Nus. f. 26. — Berk. *Ann. nat. hist.* n. 249. — *Ann. sc. nat.* 1837 VIII, t. 2, f. 7. — Bisch. f. 3837. — Fckl. *Exs.* n. 210. — Berk. *Exs.* n. 262.

Hab. Sul gelso comune, nell'Orto di Panisperna (Roma).

54. Fusarium roseum.

Fr. *S. M.* III, p. 471. — *Engl. Fl.* V, p. 355. — Fckl. *Exs.* n. 208-211. — Cook. *Exs.* n. 344.

Hab. Sul *Bupleurum falcatum* disseccato a s. Onofrio.

55. Peronospora nivea.

Cook. *Micr. F.* p. 273. — Botrytis Macrospora. Ung. *Exs.* t. 2, f. 14. — Berk. et Bro. *Ann. nat. hyst.* n. 527. — Rabh. *Exs.* n. 1172. — Fckl. *Exs.* n. 27. — Cook. *Exs.* n. 191. — Botrytis crustosa. Fr. — Berk. *Exs.* n. 333. — *Engl. Fl.* V, p. 343.

Hab. Su foglie di *Chaerophyllum sylvestris* nei dintorni di Tivoli — Rocca di Papa.

56. Peronospora gangliformis.

Cook. *Micr. F.* t. 14, f. 265. — Pop. *Sc. Rev.* III, t. 8, f. 4. — Botrytis gangliformis. Berk. *Journ. Hort. Soc.* I, t. 4. — Fckl. *Exs.* n. 33. — Cook. *Exs.* n. 190. — Rabh. *Exs.* n. 1775. — Bremia lactucae. Reg. *Bot. Zeit.* 1843, t. 3. — B. Botrytis geminata. Ung. *Bot. Zeit.* 1847, t. 6, f. 9.

Hab. Sulle foglie di *Lactuca sylvestris* e *Chondrilla muralis* alla Farnesina.

57. Peronospora Viciae.

Cook. *Micr. F.* t. 15, f. 266; t. 10, f. 212. — Pop. *Sc. Rev.* III, t. 8, f. 5. — Botrytis Viciae. Berk. *Journ. Hort. Soc.* I, p. 31. — Berk. et Broo. *Ann. nat. hyst.* n. 524. — Rabh. *Exs.* n. 490, II ed.

Hab. Sulle foglie di *Vicia Faba* a Panisperna (Roma) — Monte Mario — S. Onofrio — Ponte Molle.

58. Peronospora Urticae.

Cook. *Micr. F.* p. 216. — De Bary *Ann. sc. nat.* 1863, XX, p. 116. — Botrytis Urticae. Berk. et Broom. *Ann. nat. hyst.* n. 522. — Cook. *Exs.* n. 292.

Hab. Sulle foglie di *Urtica Dioica* a Panisperna (Roma) — Monte Gianicolo — Monte Mario — Ponte Molle.

59. Peronospora sparsa.

Berk. *Gard. Chon.* 1862, p. 308, fig. 9. — *Ann. nat. hyst.* 1865, n. 1057. — Cook. *Microm. Fung.* p. 217.

Hab. Su foglie di *Rosa* nel R. Orto Botanico Romano ed a Frascati.

60. Peronospora candida.

Fckl. *Exs.* n. 38. — De Bary *Ann. sc. nat.* 1863, XX, p. 120. — Cook. *Micr. F.* 2nd. ed. p. 225.

Hab. Su foglie di *Cichorium Intibus* a Frascati, e su foglie di *Rhagadiolus stellatus* a Paluzzuola — Monte Mario.

61. Oidium concentricum.

Berk. et Broo. *Ann. nat. hyst.* n. 547. — Cylindrosporium concentricum. Ung. *Exanth.* t. 2, f. 9. — Fusisporium Urticae. Desm. *Exs.* n. 230. — *Ann. sc. nat.* 1838, X, p. 309.

Hab. Su foglie in putrefazione di *Parietaria officinalis* alla Farnesina.

62. Erysiphe Linkii.

Lev. *Ann. sc. nat.* 1851, XV, p. 161, t. 10, f. 29. — Cook. *M. F.* t. XII, f. 248-249. — Cook. *Exs.* n. 199. — Fckl. *Exs.* n. 648-649. — Erysiphe communis. *Engl. Fl.* V, p. 325.

Hab. Sulle foglie di *Hypericum humifusum* (raro) a Monte Leone.

63. Erysiphe Martii.

Lev. *Ann. scienc. nat.* 1851, XV, p. 166, t. 10, f. 34. — Cook. *M. F.* t. XI, f. 237-239. — Cook. *Exs.* n. 96. — Fckl. *Exs.* n. 660-671. — Tul. *Carp.* I, p. 216, t. 5, f. 7 ab. — *Engl. Fl.* V, p. 325.

Hab. Su foglie di *Smirnium Olusatrum* nel R. Orto Botanico Romano.

64. Erysiphe lamprocarpa.

Lev. *Ann. sc. nat.* 1851, XV, p. 163, t. 10, f. 31. — Cooke *F. M.* t. 12, f. 250, 251. — Cook. *Exs.* n. 200. — Fckl. *Exs.* n. 650-658.

Hab. Sulle foglie di *Mercurialis annua* alla Farnesina.

65. Erysiphe tortilis.

Lev. *Ann. scienc. nat.* 1851, XV, p. 170, t. 11, f, 35. — Cooke *M. F.* t. XII, f. 245, 246. — Cooke *Exs.* n. 98. — *Engl. Fl.* V, p. 327. — Tul. *Carp.* I, p. 213. — Fuckl. *Exs.* n. 672. — Berk. *Exs.* n. 204.

Hab. Su foglie di *Bellis annua* ad Acqua Traversa ed alla Fajola.

66. Erysiphe communis.

Lev. *Ann. sc. nat.* 1851, XV, p. 171, t. 11, f. 38. — Cook. *M. F.* t. XII, f. 240-242, — Cook. *Exs.* n. 99. — *Engl. Fl.* V, p. 325. — Tul. *Carp.* I, p. 214, t. 5, f. 3-7. — Fuckl. *Exs.* n. 675-685. — Berk. *Exs.* n. 200-203, 269, 313.

Hab. Su foglie di Fava nell'Orto di Panisperna (Roma) e su foglie di *Trifolium repens* a Monte Mario.

67. Helvella crispa.

Fries *Syst. myc.* II, p. 14. — Berk. *Outl.* t. 21, f. 4. — Cook. *Handb.* n. 1944. — Grev. *Sc. Crypt. Fl.* t. 143. — Vitt. *Mang.* t. 31, fig. 1. — Lenz fig. 57. — Badham t. V, f. 1. — Barla t. 43, fig. 1-5. — Price *Illus.* f. 57. — Helvella mitra. Purt. *Midl. Fl.* III, t. 16. — Bull. t. 466, f. A. — Helvella leucophaea. Tratt. Austr. f. 36.

Hab. Dintorni di Subiaco — Rocca di Papa — Castel Gandolfo.

68. Helvella lacunosa.

Afz. in *Act. Holm.* 1783, p. 304. — Kilot. *Flor. Bor.* t. 383. — Fries *System. Myc.* II, p. 15. — Holms *Otis* p. 45, t. 24. — Cook. *Handbook* n. 1945. — Weberbauer t. 5, f. 2. — Lenz fig. 58. — Barla t. 43, f. 6-11. — Helvella mitra. Bull. t. 190, t. 466, f. B. — Grev. *S. Cr. Fl.* t. 36. — Helvella nigra. Berg. *Phyt.* t. 147. — Helvella nigricans. Schaeff. *Ic.* t. 154.

Hab. Valle d'Inferno (dintorni di Roma) — Rocca di Papa.

69. Mitrula paludosa.

Fries *System. Myc.* I, 491. — Cook. *Handb.* n. 1952. — Huss. *Myc.* I, t. 9. — Karst. *Myc. Fenn.* p. 28. — Fckl. *Symbol. Myc.* p. 232. — Kick. *Fl. Fland.* I, 50. — Clavaria phalloides. Bull. *Champ.* t. 465, f. 10. — Clavaria epiphylla. Dicks *Crypt.* t. 3, f. 10. — Leotia Bulliardi. Pers. *Syn.* 612. — Leotia uliginosa. Grev. *Sc. Crypt. Fl.* t. 312.

Hab. Su foglie in macerazione presso Tivoli.

70. Mitrula alba.

W. G. Smith in *Grevillea* I, p. 136, t. 10. — Cook. *Mycograph.* part. 3, pl. 45, f. 177.

Hab. Macchia Madama a Monte Mario — Monte Cavo.

71. Mitrula Saccardoa.

Mitrula albido vinosa; capitulo globoso, ovoideo, crasso, inferius albo, superius vinoso. Stipite farcto, albido-lutescente. Ascis linearibus, claviformibus 8 sporis. Sporis hyalino-vinosis, nucleatis, asperulis (Bagnis, spec. nov.).

Hab. Fra foglie e steli secchi in macerazione in un bassofondo nei pascoli fuori porta s. Pancrazio (Roma).

72. Geoglossum hirsutum.

Pers. *Comm.* p. 37. — Syn. *Fung.* p. 608. — Fries *Syst. Myc.* t. 488. — Karst. *Myc. Fenn.* t. 31. — Weinm. *Hym.* 496. — Fckl. *Sym. Myc.* 333. — Cook.

Handb. n. 1861. — Clavaria simplex hirsuta. Schmidt. *Icon.* t. 25, f. 1-19. — Clavaria atra. Schrad. in *Pers. comm.* p. 37. — Nees *Syst.* f. 157.

Hab. In boscaglie a Monte Leone.

73. Peziza (Humaria) humosa.

Fries *Obs. Myc.* p. 309. — Fries *Syst. Myc.* II, 71. — Cook. *Handb.* n. 2001; *Grevillea* III, fig. 71 (non Fckl. *F. R.* 2290). — Berk. et Broo. *Ann. nat. hyst.* n. 1156, t. 3, f. 15.

Hab. Fra i muschi a Monte Mario — Acqua Traversa — Tre Fontane — Ciampino — Monti d'Albano.

74. Peziza glumarum (Humaria).

Desm. *Ann. scienc. nat.* 1841, XV, p. 129. — *Grevillea* III, f. 77.

Hab. Su paglia in putrefazione a Panisperna (Orto in Roma). — Su paglia macerata ad Ostia.

75. Peziza vivida (Humaria).

Nyl. in *Flora,* 1875, p. 467. — Nyl. *Obs. Pez.* p. 22. — Gonn. et Rabenh. *Myc. Eur.* III, t. 4, f. 3. — *Grevillea* III, fig. 80, p. 120. — Peziza Polytrichi. Rabh. *Herb. Myc.* II, 310.

Hab. Fra i muschi nelle boscaglie a Monte Mario — ai Monti Parioli.

76. Peziza (Humaria) macrospora.

Wallr *Fl. Germ.* II, 500. — *Grevillea* III, f. 204. — Humaria macrospora. Fckl. *Sym. Myc.* 323.

Hab. Nei pascoli presso Palo — presso Maccarese.

77. Peziza (Sarcoscypha) lanuginosa.

Bull. *Champ.* p. 261, t. 396, fig. 2. — Cook. *Fung. Brit.* I, 471; II, 362. — Babhn. *Fung. Europ.* 1419.

Hab. Nei pascoli fuori porta s. Paolo (Roma) — Villa Borghese — Dint. di Frascati.

78. Peziza (Sarcoscypha) nigrella.

Pers. *Syn.* p. 648. — Fries *Syst. Myc.* II, 81. — Karst. *Myc. Eur.* p. 61. — Weinm. p. 434. — Cervuan *Fl. Fin.* p. 51. — Kiek. *Fl. Fland.* I, 492. — Gonn. et Rabehn *Myc. Europ.* III, t. 4, fig. 6. — Weberbauer I, t. 3, f. 5. — *Grevillea* III, f. 93. — Pseudo plectania nigrella. Fckl. *Sym. Myc.* p. 324.

Hab. Su foglie secche di pino nel R. Orto Botanico Romano — Villa Borghese (dintorni di Roma).

79. Peziza (Sarcoscypha) scutellata.

Linn. *Succ.* 458. — Fries *Syst. Myc.* II, 85. — Sow. *Fung.* t. 24. — Bull. *Champ.* p. 247, t. 10. — *Fl. Dan.* t. 1457, f. 2. — Karst. *Myc. Fenn.* f. 70. — Weinm. p. 437. — Kick. *Fl. Fland.* I, p. 491. — Cook. *Handb.* n. 2025. — Weberbauer I, t. 3, f. 3. — Elvella ciliata. Schaeff. *Icon.* t. 284. — Peziza ciliata. Hoffm. *Reg. Crypt.* II, p. 25, t. 7, f. 3.

Hab. Sul legno putrido a Monte Sacro — Monte Compatri.

80. Peziza (Sarcoscypha) olivascens.

Cook. *Grevillea* III, f. 115. — Peziza macrochaeta. Rabh. in *Gonn.* et Rabh. *Mycol. Europ.* t. 5, f. 4 (nec Fries). — Peziza scutellata β *macrochaeta.* — De Not. *Erb. Crittog. ital.* 585. — *Comm. crypt. ital.* 1863. p. 387.

Hab. Sul legno putrido a Monte Gennaro — al lago di Albano.

81. Peziza (Sarcoscypha) coccinea.

Jacq. *Austr.* t. 169. — Fries *Syst. myc.* II, 79. — Nees *Syst.* f. 288. — Bolt. *Fung.* t. 104. — Karst. *Myc. Fenn.* p. 43. — Gonn. et Rabenh. *Myc. Europ.* III, t. 4, f. 5. — Weinm. p. 434. — Grew. *S. C. Flor.* t. 161. — Peziza epidendra. Bull. *Champ.* t. 467. — Plectania coccinea. Fckl. *Sym. Myc.* p. 324.

Hab. Nei pascoli fuori porta s. Lorenzo (Roma) — Valle d'Inferno.

82. Peziza (Humaria) limnicola.

Hazslinrszky in *litt.* — *Grevill.* IV, fig. 231.

Hab. Su tralci di vite in putrefazione a Panisperna (Orto Botanico) e su rami secchi in putrefazione a Villa Pamfili.

83. Peziza (Sarcoscypha) virido-rubescens.

Subgregraria, carnosa, substipitata, cupula hemisphaerica, intus viridis, extus rubeola-vinosa; margine elevato, denticulato, piloso — pilis, crassis, erectis, articulatis intense rubris. — Ascis crassis clavato-cylindraceis — sporidiis ovoideis, viridescentibus, aspris. — Paraphysibus articulatis, viridescentibus, supra subclavatis (Bagnis, spec. nov.).

Hab. Raccolta su rami e paglia putrefatta a Monte Leone. — Non ne trovai che pochi esemplari ma stupendamente sviluppati.

84. Peziza (Sarcoscypha) Notarisiana.

Solitaria, stipitata, stipite longissimo, cupula carnosa conoidea, extus cum stipite radicato, sursum incrassato, albido-luteola, intus splendente, eximie coccineo, margine elevato, eleganter et fine crenito-inciso; crenarum apicibus acutis. — Ascis exilibus, longissimis, cylindraceis, sporidiis glabris, ovoideo-oblungatis, uninucleatis. — Paraphysibus filiformibus septatis, coccineis, apice subclavatis (Bagnis, spec. nov.).

Hab. Raccolta dal chiariss. prof. De Notaris una sola volta a Villa Borghese su rami in putrefazione, ed un'altra volta da me, a Torre-nuova (rara).

85. Phacidium repandum.

Fr. *S. M.* II, p. 578. — *Engl. Fl.* V, p. 293. — Cook. *L. F.* n. 81. — Cook. *Exs.* n. 283.

Hab. Sulle foglie secche di quercia e di altri vegetali nelle macchie di Monte Mario.

86. Phacidium trifolii.

Bond. *Ann. sc. nat.* (1869) X, p. 69. — Ascobolus trifolii. Bir-Bemh. *St. rar.* t. 6, f. 3. — Berk. *Exs.* n. 69. — Fr. *S. M.* II, p. 165. — Desm. *Exs.* n. 520. — Berk. *Eng. Fl.* V, p. 209. — Outl. p. 374. — Cook. *Exs.* n. 331. — Pseudopeziza trifolii. Fckl., *Symb. myc.* p. 290.

Hab. Sulle foglie di *Trifolium repens* a Monte Mario, e su foglie di *Trifolium alpinum* a Monte Fiscello.

87. Hyterium curvatum.

Fr. *El.* II, p. 138. — Duby *Hist.* 31. — Ber. et Broom. *Ann. nat. hyst.* n. 587. — Hyterium elongatum β. Fri. *El.* II, p. 138.

Hab. Su rami d'albero secchi, raccolti a Monte Cavo.

88. Hyterium pulicare.

Duby *Hist.* p. 25. — Fr. *S. M.* II, p. 579. — Mich. t. 54, f. 2. — Nees f. 302. — Moug. *Exs.* n. 266. — Grev. t. 167, fig. 1. — *Engl. Fl.* V, p. 293. — Corda V, f. 61. — Desm. *Exs.* n. 779. — Fckl. *Exs.* n. 749.

Hab. Sulle quercie nei boschi di Monte Mario (abbondante).

89. Nectria cinnabarina.

Tul. *Carp.* III, p. 80, t. 12, 13, f. 14-21. — Currey. *Linn. Trans.* XXII, t. 49, f. 175, 176. — Fries *S. M.* II, p. 412. — Tode f. 68. — Fries *Exs.* n. 184. — Moug. *Exs.* n. 570. — Baxt. *Exs.* n. 26. — Cooke *Exs.* n. 260. — *Engl. Fl.* V, p. 252. — Cucurbitaria cynnabarina. Grev. t. 135.

Hab. Su corteccia d'albero al lago Nemi.

90. Hypoxilon fuscum.

Fries *S. V. S.* p. 384. — Tul. *Carp.* II, p. 39, t. 4, f. 7-11. — Fckl. *Exs.* n. 1054. — Berk. *Outl.* p. 387. — Sphaeria fusca. Fries *S. M.* II, p. 332. — *Engl. Fl.* V, p. 237. — Dill. *Musc.* t. 18, fig. 7. — Weig. t. 3, f. 2. — Hedw. *Obs.* t. 6. — Tode f. 100. — Pers. *Ann.* t. 2, f. 3. — Nees f. 310. — Fries *Exs.* n. 42. — Mong. *Exs.* n. 178, — Schm. *Exs.* n. 51.

Hab. Sul legno putrido a Valle d' Inferno — Macchia Madama — Villa Borghese — Villa Pamfili.

91. Hypoxilon coccineum.

Bull. p. 174, t. 195, f. 2. — Tul. *Carp.* II, p. 34, t. IV, f. 1-6. — Berk. *Outl.* p. 386. — Grev. t. 136. — Fckl. *Exs.* n. 1056. — Sphaeria fragiformis. Fr. *S. M.* II, p. 332. — Pers. *Syn.* t. 1, fig. 1-2. — *Eng. Fl.* V, p. 236. — Ann. Bot. t. 2, f. 5. — Fries *Exs.* n. 41. — Moug. *Exs.* n. 273.

Hab. Sul legno putrido a Villa Pamfili.

92. Hypoxilon rubiginosum.

Fries *S. V. S.* p. 384. — Fckl. *Exs.* n. 1051. — Berk. *Outl.* p. 387. — Sph. rubiginosum. Fries *S. M.* II, p 340. — Fries *Exs.* n. 142. — *Engl. Flor.* V, p. 239.

Hab. Sul legno secco sulle sponde del lago d'Albano.

93. Hypoxilon atropurpureum.

S. atropurpurea. Fries *S. M.* II, p. 340. — Fries *Exs.* n. 75. — *Engl. Fl.* V, p. 239. — Currey *Linn. Trans.* XXII, t. 45, f. 44.

Hab. Su tronchi d'albero secchi a Monte Cavo.

94. Sphaeria sancta.

(Rehm. et Thümen, nov. spec. *Mycotheca universalis*).

S. peritheciis dense gregariis, epiphyllis, raro amphygenis, parvis, liberis; emersis, atris; sporis obtusoellipticis, hyalinis, unicellularibus 15 mm. long, 7 mm. crass. 8 distichis, in ascis cuneatis, crassis; paraphysibus crassis, ramosis, perpaucis, hyalinis.

Hab. Sulle foglie aride di *Arundo Donax* nei canneti di Monte Mario — Canneti di Valle d' Inferno.

95. Sphaerella Rusci.

De Not. *Schaem.* p. 63; *Erb. Crittog. ital.* n. 886. — *Sferiacei ital.* pl. 95. Sphaeria rusci. Wallr. *Fl. German.* p. 776. — Ber. et Broom. *Ann. nat. hyst.* n. 639. — Fckl. *Exs.* n. 838. — Berk. *Exs.* n. 86. — Currey *Linn. Transac.* XXII, pl. LIX, f. 120. — Sphaeria atrovirens δ. Rusci. *Engl. Fl.* V, p. 272. — Desm. *Exs.* n. 1281. — Sphaeria glauco-punctata. Curr. *Linn. Trans.* XXII, pl. LIX, f. 144. — Cook. *Exs.* n. 166.

Hab. Sulle foglie aride di *Ruscus aculeatus* nelle boscaglie di s. Onofrio (Monte Mario) — Macchia Mattei.

96. Sphaerella Buxi.

DC. *Fl. Franc.* VI, p. 146. — Rabh. *Fung. Eur.* n. 940. — Rabh. *Exs.* n. 531. — Currey *Linn. Trans.* XXII, p. 283, t. 49, f. 186. — Sp. atrovirens var. Buxi. — *Engl. Fl.* V, p. 272.

Hab. Sulle foglie di *Buxus sempervirens* nel R. Orto Botanico Romano — Frascati — Marino.

97. Sphaerella Pteridis.

Cook. *Scen. Journ.* t. 50, f. 32. — Cook. *Exs.* n. 175. — Sphaeria Pteridis — Desm. *Exs.* n. 1295. — Berk. et Broom. *Ann. nat. hyst.* n. 656. — Sphaeria litum. Berk. *Myc.* 55. — Sphaeria punctiformis. β. Pteridis. — Fries *Exs.* — n. 86. — Sphaerella Pteridis. De Not. *Sfer. Ital.* tab. 99.

Hab. Sulla *Pteris aquilina* secca, nei boschi di Monte Mario. — Ponte Molle. — Acqua traversa.

98. Amphisphaeria Sellae.

(Bagnis, nov. spec.).

A. peritheciis gregariis, epiphyllis, epidemide tectis, demum perforantibus, atris, pyriformibus; ascis cylindraceis, rectis, apice subacutis, hyalinis 120 mm. long. 10 mm. crass. — Sporis ovatis utrinque acuminatis bicellularibus in dimidio constrictis — 2 nucleatis, uniseriatis 15 mm. long. 4-5 mm. crass.: paraphysibus elongatis tenuibus, hyalino lutescentibus apice clavato-spheroidalibus.

Hab. Sulle foglie aride di *Ilex paraguayensis* nel R. Orto Botanico Romano — Villa Pamfili. (Dintorni di Roma).

99. Pleospora Gymnocladii.

(Bagnis, nov. spec. *Mycotheca Universalis* Cent. VI. n. 563). Pyrenia hypodermica, sparsa, matura parte superiore epidermide per fossa emergentia, globoso depressa, atra, ostiolo, conico, breve, cellulae pyreniorum exiguae, angulosae, fusco ochraceae, nucleus gelatinosus: asci magni, oblongo clavati, 37 mm. long. 9 mm. crass. — Sporidia juniora lutescentia, ruditer lobata, matura oblonga vel fusoidea, vel laeviter in dimidio constricta, plurilocularia 8 mm. long. 5 mm. crass. — paraphyses filiformes laeviter ad apicem clavatae.

Hab. Sui pezioli di *Gymnocladium Canadense* nel R. Orto Botanico Romano.

100. Ozonium Romanum.

(Thümen, nov. spec. *Mycotheca Universalis*). Flocci gregarii, cespitulosi, perpaucorum filamentorum composita. Filamenta non ramosa, glabra, lutescentia, articulata, longissima in apice aculeata.

Hab. Su tronchi di alberi putrefatti a Villa Borghese (dintorni di Roma).

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.ª

1. *a.* Ramo di *Araucaria Brasiliana* affetta da Hendersonia Araucariae (grandezza uaturale).
   b. Peritecii di Hendersonia Araucariae. Ingr. $^{60}/_{1}$ circa.
   c. Cellule del peritecio. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   d. Sporidii di Hendersonia Araucariae. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

2. *a.* Ramo di *Spartium junceum* affetto da Fusarium Bagnisianum (grandezza naturale).
   b. Taglio di un peritecio verticalm. di Fus. Bagnisianum. Ingr. $^{60}/_{1}$ circa.
   c. Sporidii con ifi. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   d. Sporidii. Ingr. $^{800}/_{1}$ circa.

3. *a.* Peziza (Sarcoscypha) virido-rubescens (grandezza naturale).
   b. Peziza virido-rubescens tagliata verticalmente (grandezza naturale).
   c. Asci con spore, e pārafisi di Peziza virido-rubescens. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   d. Parafise di P. virido-rubescens. Ingr. $^{400}/_{1}$.
   e. Peli di P. virido-rubescens. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

4. *a.* Peziza (Sarcoscypha) Notarisiana (grandezza naturale).
   b. Asci con spore, e parafisi di Peziza Notarisiana. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   c. Parafise di P. Notarisiana. $^{400}/_{1}$ Ingr.

5. *a.* Mitrula Saccardoa (grandezza naturale).
   b. Asci con spore di Mitrula Saccardoa. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

6. *a.* *Ilex paraguayensis* affetto da Amphisphaeria Sellae (grandezza naturale).
   b. Peritecii di Amphisphaeria Sellae. Ingr. $^{60}/_{1}$ circa.
   c. Taglio verticale di un peritecio. Ingr. $^{80}/_{1}$ circa.
   d. Cellule del peritecio. Ingr. $^{400}/_{1}$.
   e. Sezione di peritecio in tutto il suo spessore $^{400}/_{1}$ circa.
   f. Asci con spore, e parafisi di Amph. $^{400}/_{1}$ circa.
   g. Spora di Amph. $^{800}/_{1}$ circa.
   h. Estremità superiore di parafisi di Amph. $^{800}/_{1}$ circa.

Tavola II.ª

1. *a.* Pezzo di foglia secca di *Arundo Donax* coperta da Sphaeria sancta (grandezza naturale).
   b. Peritecio di Sphaeria sancta. Ingr. $^{80}/_{1}$ circa.
   c. Taglio verticale di peritecio. Ingr. $^{100}/_{1}$ circa.
   d. Cellule del peritecio. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   e. Spore di Sphaeria sancta. Ingr. $^{600}/_{1}$ circa.
   f. Gruppo di parafisi. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   g. Asci con spore, e parafisi di Sphaeria sancta. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

2. *a.* Peziolo di *Gymnocladium Canadense* affetto da Pleospora Gymnocladii (grandezza nat.)
   b. Pirenio di Pleosp. Gymnocladii. Ingr. $^{60}/_{1}$ circa.
   c. Lo stesso tagliato verticalmente. Ingr. $^{100}/_{1}$ circa.
   d. Cellule del pirenio. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.
   e. Spore di Pleospora Gymnocladii Ingr. $^{600}/_{1}$ circa.
   f. Asco giovane, parafise, e asco vecchio, rotto nel mezzo, e in cui si vede la membrana interna dell'asco. $^{400}/_{1}$ circa.
   g. Asco con spore, parafisi, ed asco con spore abortite di Pleosp. Gymnocladii. $^{400}/_{1}$.

3. *a.* Ozonium Romanum, di grandezza naturale, sopra un pezzo di corteccia.
   b. Cespitulo di Ozonium Romanum. Ingr. $^{80}/_{1}$ circa.
   c. Filamenti di Ozonium Romanum. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

4. Puccinia minima. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

5. *a.* Ramo di *Smirnium Olusatrum* affetto da Aecidium Smirnii (grandezza naturale).
   b. Spore di Aecidium Smirnii. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

6. Puccinia Asphodeli. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

7. Puccinia mammillata. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

8. *a.* Foglia di *Crocus biflorus* affetta da Uromyces Croci (grandezza naturale).
   b. Uromyces Croci. Ingr. $^{400}/_{1}$ circa.

C. Bagnis disegnò.

Cromolit. Bruno e Salomone, Roma

Sopra due nuovi nervi arrestatori.

Nota del prof. MAURIZIO SCHIFF, presentata al Presidente dal Socio PIETRO BLASERNA

nel settembre 1877.

I. Se ammettiamo colla maggioranza dei fisiologi, che certi organi del corpo animale possiedono nervi arrestatori, cioè nervi di cui l'azione diminuisce o fa cessare il movimento, si deve domandare in quale modo e sopra quale tessuto agiscono questi nervi.

In queste ricerche si deve prendere come tipo il nervo arrestatore meglio conosciuto, il *vago,* di cui una irritazione moderata o forte rallenta o fa cessare i movimenti del cuore.

Una serie di sperimenti, che ho incominciato già da lungo tempo nel laboratorio di Firenze e che mi propongo di continuare nel corso dell'inverno prossimo, mi hanno suggerito l'ipotesi, che un nervo arrestatore non si oppone direttamente al movimento del muscolo, non affievolisce o impedisce l'azione delle ultime ramificazioni nervose motrici nel e sul muscolo, ma impedisce il movimento in un modo molto meno diretto. Pare che l'irritazione del nervo arrestatore trasmette alle terminazioni inframuscolari dei nervi motori una influenza, che mantiene le molecole di queste terminazioni in uno stato, che si oppone al cambiamento, che nello stato normale è prodotto da certi agenti irritanti, fra i quali si trovano gli irritanti fisiologici, che producono il movimento abituale di questo apparecchio muscolare.

In questa comunicazione non voglio esporre le osservazioni e gli sperimenti che mi hanno condotto a questo modo di vedere, non voglio fare rivelare la grande analogia, ed il grado di parentela, che questa teoria stabilisce fra i nervi arrestatori ed i nervi motori, che tutti possono, in certe condizioni e per certi irritanti, diventare nervi arrestatori.

Io voglio soltanto indicare alcuni fatti che mi si sono svelati come conseguenze della teoria qui accennata.

Se l'azione arrestatrice si riferisce non al movimento, ma all'agente irritante che provoca il movimento, l'analogia coll'azione arrestatrice, che si osserva per l'irritazione dei nervi motori, rende probabile che l'effetto dell'irritazione di un nervo arrestatore non possa opporsi a tutti gli irritanti, ma ad un numero ristretto fra di loro.

Se l'irritazione del nervo vago ferma o rallenta i battiti del cuore, questa irritazione deve neutralizzare l'azione dell'irritante normale, che produce il movimento del cuore. Già da lungo tempo abbiamo cercato di provare con nuovi sperimenti, che

Haller aveva ragione riguardando il *sangue* come l'irritante del cuore, anche se questo organo non si trova più in continuità coi vasi.

Ma se senza alterare il nervo, cioè senza dare una sostanza velenosa, che potrebbe agire sopra questo ultimo, noi facessimo agire sul cuore un altro irritante, mentre che si eccita il vago, sarebbero o no fermati o rallentati i movimenti nati sotto l'influenza di questo nuovo irritante?

Gli sperimenti dimostrano che quando si rimpiazza il sangue nel cuore della rana col sangue freddo di mammiferi o soltanto col siero sanguineo di questi, il vago mantiene la sua azione arrestatrice.

Nel giornale di Moleschott del 1866 abbiamo già descritti alcuni sperimenti che provano, che anche l'irritante elettrico, quando agisce sulla sostanza del cuore, non impedisce l'azione arrestatrice dei vaghi, e sono questi gli sperimenti che ci hanno allora servito per provare, che i gangli microscopici, che si trovano nel cuore, non possono avere quella ingerenza nell'azione arrestatrice, che fino a questa epoca loro è stata generalmente attribuita. Questi fatti si riferiscono alla corrente indotta, ma anche la corrente della pila agisce nel medesimo modo, se la sua azione non viene complicata da alcuni disturbi provenienti dall' elettrolisi (1).

Ma si sa che un cuore, di cui i movimenti sono interrotti per una irritazione dei vaghi, mostra una contrazione tutte le volte che viene sottomesso ad una eccitazione *meccanica,* per es. pel contatto colla punta di un ago. Una irritazione meccanica che si ripete in brevi intervalli impedisce il riposo durante l'eccitazione anche molto forte dei nervi detti arrestatori.

In una quantità di rane, immediatamente dopo la morte per distruzione dei centri nervosi, abbiamo preparato il cuore ed i nervi vaghi. Si apre la vena cava per introdurvi un tubo e si fa il taglio di un arco aortico. In queste condizioni l'irritazione del vago ferma il cuore, e lo rende immobile per un certo tempo. Si injetta poi nel cuore per il tubo della vena cava una soluzione di cloruro di sodio a 0,6 per cent., o di 0,7 per cent., finchè non rimane più sangue nelle cavità cardiache. Come è da aspettarsi (si sa che una tale soluzione di sale non altera i tessuti della rana) il cuore continua i suoi movimenti. Il sale in questa concentrazione può rimpiazzare il sangue come irritante del cuore. Si irritano poi i vaghi colla medesima forza come prima, ma non vi è più arresto del cuore, che continua, anzi accelera i suoi movimenti. Per fare uno sperimento *a fortiori,* si irrita il seno venoso del cuore, ed il movimento si accelera di più. Soltanto quando il sale è rimasto per lungo tempo nella circolazione, e quando per endosmosi il liquido è divenuto in parte coagulabile si può mostrare un rallentamento delle pulsazioni per l'irritazione dei vaghi.

Il medesimo sperimento riesce quando si rimpiazza il sangue con una soluzione a $5^1/_2$ *pro mille* di fosfato di soda. Quando il cuore non si ferma più per l'irritazione forte dei vaghi, si può rimpiazzare la soluzione salina con siero di sangue (ho

(1) In questo momento ricevo i « Studies from the physiological Laboratory of Cambridge III 1877 » che contiene una interessante Memoria di Foster and Dew-Smith in cui gli autori (pag. 33) arrivano per i medesimi fatti (da loro ritrovati) alle medesime conclusioni. Io aveva ripetute e spiegate le mie conclusioni nel giornale di Moleschott XI, 2 e 3 (1873) pag. 201.

preso sangue canino), che si injetta nel medesimo modo, e presto i vaghi ridiventano nervi arrestatori, e se poi si cambia il siero nuovamente introducendo del sale, la proprietà arrestatrice si perde.

Avrei potuto ripetere questi sperimenti con molte altre sostanze disciolte nell'acqua o nel siero, ma non ho voluto introdurre delle sostanze che possono o irritare il cuore, o agire come veleni sul vago. Queste sostanze avrebbero potuto impedire l'arresto del cuore secondo il medesimo meccanismo per cui lo fa l'atropina o l'aconitina. Quanto ai sali di soda nella concentrazione indicata, nessuno potrebbe loro attribuire una influenza diretta sull'eccitabilità del nervo o del muscolo.

Questi sperimenti sono fatti in estate e verso la fine della primavera, e se non mi hanno mai fallito, è però possibile che in altre condizioni atmosferiche diano un altro risultato. Ma se anche questo risultato cambiasse colla temperatura e colla stagione, io non esiterei a vedere nei fatti ora riferiti l'indizio, che l'arresto del cuore, che si ottiene per l'irritazione dei vaghi, dipende, non tanto da una azione del nervo sul muscolo, quanto da una modificazione dell'influenza dell'agente irritante.

Anche nei mammiferi, in cui si ottiene così facilmente l'arresto del cuore per l'irritazione dei vaghi (gatti e conigli), io ho rimpiazzato in grandissima parte il sangue nel cuore con una soluzione salina di 7 *pro mille* di cloruro di sodio, e non ho più potuto produrre, anche con correnti troppo forti, un arresto del cuore, ma bensì rimase spesso, dopo l'irritazione dei vaghi, un leggiero rallentamento. L'autopsia dimostrava, che nel cuore non era mai scomparso *tutto* il sangue. Il liquido era rimasto rosso e più o meno coagulabile.

Nei cani in cui la vena porta è legata da 30 a 90 minuti primi, l'irritazione elettrica dei vaghi non produce più arresto del cuore, ma rimane ancora nelle forti irritazioni un rallentamento. Dopo una compressione dell'aorta addominale di 7 a 10 minuti, si vede pure un affievolimento molto forte dell'effetto dell'irritazione dei vaghi sul cuore, affievolimento che dura anche nel primo tempo dopo la riapertura dell'arteria. Quando la compressione dell'aorta (fatta sempre immediatamente al disotto del diaframma) durava meno di sette minuti, l'affievolimento dell'azione arrestatrice non mancava, ma era bene pronunziato soltanto dopo la riapertura del vaso. Un effetto analogo si vede dopo la legatura e la riapertura della vena cava inferiore al disopra del diaframma.

Per dimostrare che questi effetti non dipendono dall'atto operatorio ma bensì da una alterazione del sangue, si prendono due cani ben curarizzati e cloralizzati o soltanto cloralizzati. Al cane *A* si apre la cavità toracica dopo avere istituita la respirazione artificiale regolare, e si lega l'aorta o la vena cava in vicinanza del diaframma. Il cane *B* scrive il polso e la pressione del sangue sopra un cilindro girante con carta senza fine. Si esamina nel cane *B* l'influenza dell'irritazione induzione dei nervi vaghi e si determina la forza della corrente, che produce infallibilmente l'arresto del cuore. Si fa nel cane *B* una apertura nella vena giugulare. Dopo 7 a 10 minuti un ajuto ritira dalla vena giugulare con una siringa graduata circa 60 c. c. di sangue, mentre che nel cane *A* si introduce una siringa nella parte periferica della vena cava inferiore. Si apre la legatura e si ritira dalla vena circa 60 c. c. di sangue, che si injettano nella vena giugulare del cane *B*. Immediatamente o pochissimo tempo dopo l'injezione,

l'azione del vago sul cuore è affievolita, non si produce più arresto per irritazione induzione non troppo forte. Quest' affievolimento scompare dopo 1 a 5 minuti. Una injezione di sangue normale non produce un tale effetto, anche se l'animale che dà il sangue era cloralizzato.

L'alterazione del sangue che produce questo effetto nel cane *B*, che si può dire normale e non operato, è la medesima, che produce l'elevazione secondaria della pressione, e l'aumento della frequenza del polso dopo la riapertura dei grandi vasi. Io proverò in un'altra Memoria che qui sta la vera causa di questo fenomeno, che è stato tanto discusso negli ultimi tempi e che tutti gli sperimentatori credevano di dovere cercare in una alterazione meccanica.

Avevamo indicato già da lungo tempo, ed è stato confermato pochi anni fa nel laboratorio di Heidelberga, che il sangue vivo sottratto alla circolazione per poco tempo, mentre che rimane nei vasi sviluppa un fermento diastatico, che trasforma la desterina e l' inulina (amido cotto).

Dopo le ricerche sulla nuova funzione del fegato, divenne molto probabile che nel sangue, che è in stagnazione od in circolazione imperfetta nel corpo, si debba accumulare questa sostanza tossica, che si produce nella circolazione normale, e che si distrugge nel fegato.

È perciò gli sperimenti ora indicati non mi parevano soddisfacenti per provare che il potere arrestatore del vago è legato alla natura dell' irritante nel cuore. Se vi esiste azione tossica qualunque, è possibile che pure il nervo abbia sofferto nella sua eccitabilità, e non soltanto nella sua eccitazione.

Alcuni sperimenti meno equivoci mi sono stati suggeriti da una osservazione che già per sè offre un grande interesse riguardo alla quistione che ci occupa. Delle rane (R. esculenta) prese nella primavera sono state conservate durante l'estate in una gabbia, di cui il fondo era pieno di acqua, che fu rinnovata due volte al giorno. Queste rane avevano l'aspetto sempre sano, ma verso la fine di giugno tutte quelle che si esaminarono non offrivano più l' arresto del cuore per l'irritazione galvanica dei vaghi, ma bensì si poteva avere un aumento del polso per una tale irritazione. Devo aggiungere che anche le irritazioni di altre parti, che generalmente si riflettono sul vago, non valevano più per rallentare la frequenza del polso. Anche l' irritazione del seno venoso con forti correnti non fece altro che aumentare il polso. Le fibre arrestatrici del vago erano come non esistenti, e ho conservato di queste rane fin al principio di settembre, senza che fosse ritornato il potere arrestatore del vago, ma devo far osservare che un gran numero delle rane è morto di tetano (1).

Questa apparenza di piena salute insieme alla mancanza di un fenomeno, che alcuni hanno supposto molto importante per la conservazione della vita, mi fece supporre che il sistema nervoso non abbia direttamente sofferto, ma che probabilmente il caldo umido abbia prodotto una alterazione nella nutrizione del sangue, la quale fa sì, che il sangue rimane ancora irritante per il cuore, ma un irritante di cui

(1) Ad una di queste rane, in cui nel principio di settembre il vago arrestatore era ancora senza traccia visibile di azione, ho injettato nel cuore siero di sangue di cane estratto da 18 ore dalla vena, senza provocare una influenza dell'irritazione induzione del vago o del seno venoso sul cuore.

l' effetto non può essere neutralizzato per l' irritazione dei vaghi. Voleva vedere, se il caldo umido produce un effetto analogo nei mammiferi. Presi dunque cinque piccoli conigli, che misi per quattro a cinque ore in una grande gabbia costruita da Hipp per conservare la temperatura dell'aria. L'aria della gabbia in cui si trovava un vaso con acqua, era riscaldata a 34 e la temperatura oscillava fra 34,0 a 34,6. Dopo cinque ore, i conigli, che si erano tenuti immobilmente stesi sul suolo, son ritirati, uccisi rapidamente per il taglio del bulbo; si apre la cavità toracica e si preparano rapidamente i vaghi, si sottomettono ambedue alla corrente d' induzione; ma anche con una corrente di una intensità doppia di quella che generalmente nei conigli produce l'arresto del cuore, non si poteva avere altro che un leggierissimo rallentamento, il quale in due di loro era tale, da non poter essere riconosciuto altrimenti che contando coll'orologio: l' irritazione del seno venoso del cuore dava il medesimo risultato.

Il vago in questi casi non era ancora capace di produrre l'arresto, quando la temperatura nel torace aperto era già caduta molto al disotto della normale.

Il movimento del cuore si può riguardare come il tipo dei movimenti prodotti per l' irritazione del sangue. Se questo movimento nello stato normale può essere così facilmente sospeso per l' irritazione di un nervo che entra nel muscolo, si domanda se l' irritazione di certi nervi non possa fare lo stesso, per altri movimenti provocati dalle medesime proprietà eccitanti del sangue.

Sono più di venti anni che ho trovato, che quando si ha tagliato da 4 giorni il nervo motore della lingua, vengono nei musculi linguali movimenti ritmici fibrillari, che aumentano di intensità fino quasi al 12.^{mo} giorno, e che si mantengono per lunghissimo tempo. Sono molto visibili alla superficie inferiore della lingua, che appare qualche volta come un campo di avena agitato dal vento.

Alla medesima epoca io ho descritto il movimento ritmico dei baffi dei conigli, che si mostra dal 4.^{to} giorno dopo il taglio del nervo facciale, che innerva i piccoli muscoli di questi peli.

Studiando la natura di questi movimenti, ho trovato che sono prodotti per l'irritazione che il sangue esercita sopra le ramificazioni ultime intramuscolari dei nervi motori, di cui l' eccitabilità aumenta di molto dopo il taglio e la degenerazione del tronco e delle sue ramificazioni mieliniche.

Ci siamo indirizzati a questi due organi.

II. La parte anteriore della lingua ha il suo nervo motore nel nervo ipoglosso ed il nervo sensibile nel nervo linguale. Vulpian ha trovato il fatto sorprendente, che quando il nervo ipoglosso è tagliato da qualche tempo, l'irritazione meccanica o elettrica del nervo linguale produce movimenti nei muscoli della lingua. Questa proprietà del nervo linguale, come vedremo, esiste realmente ed è dovuta, come lo stesso Vulpian fa osservare, e come l'abbiamo confermato, non propriamente ai fili del nervo linguale, ma ai filamenti del nervo corda del timpano, che si immedesima col linguale prima che questo entri nella lingua.

Abbiamo potuto in prima linea confermare ripetutamente ciò, che quasi tutti ammettono, che nello stato normale nel cane cloralizzato o eterizzato l' irritazione del nervo linguale bene isolato non ha nessuna influenza sui movimenti della lingua. Non mostra neppure una tale influenza quando si irrita nel medesimo tempo il nervo

ipoglosso, o immediatamente dopo che questo ultimo è stato tagliato. I fatti singolari che ho da esporre spiegheranno perchè io ho dovuto ancora ripetere più volte e con grande cura questi sperimenti che non ci insegnano nulla di nuovo.

Sette o otto giorni dopo il taglio del nervo ipoglosso di un lato, quando i movimenti fibrillari nella lingua sono già molto pronunziati, si cloralizza profondamente un cane, e si fissa sopra la tavola colla bocca tenuta aperta, così che si vede bene la faccia inferiore della lingua ed i suoi movimenti. Si prepara il nervo linguale del lato paralitico e lo si taglia abbastanza alto, perchè la ferita sia al disopra del ramo che va alla ghiandola sottomascellare. Si fissa il nervo sopra elettrodi isolati. Il movimento fibrillare dura sempre.

Ma nel momento in cui si fa entrare nella parte periferica del nervo linguale una corrente indotta moderata o forte, la lingua, che diviene rossa, rimane immobile, il movimento fibrillare cessa completamente. Si può continuare l'azione della corrente per qualche tempo; il movimento fibrillare rimane sospeso, e non ritorna neppure immediatamente dopo la cessazione della corrente, ma qualche tempo più tardi. Lo stesso sperimento si puo fare col medesimo effetto anche 12, 14, spesso 15 giorni dopo il taglio dell'ipoglosso; il nervo linguale si mostra sempre arrestatore dei movimenti fibrillari. Quando la corrente è troppo debole, l'arresto è incompleto. Infine si vede spesso che l'arresto viene già prima del rossore dopo il principio dell'irritazione, ciò che prova, che l'arresto non dipende dalla dilatazione attiva dei vasi, ma propriamente dall'irritazione del nervo.

Dopo 15 a 18 giorni (dopo il taglio dell'ipoglosso) l'irritazione del nervo linguale fatta nel medesimo modo dà un effetto differente. Il terzo anteriore del bordo esterno della lingua non rimane più immobile, ma mentre che cessa il movimento fibrillare, questa parte del bordo entra in rapida contrazione, ripiegandosi e facendo una specie di orlo rilevato verso la punta della lingua.

Uno o due giorni più tardi si possono osservare i medesimi fenomeni al bordo, ma il movimento fibrillare in vicinanza di questo bordo non cessa durante l'irritazione, ma al contrario aumenta di energia, diviene più forte.

Io ho dovuto fare molti sperimenti per essere sicuro di non essere caduto in qualche errore e di avere bene isolata la corrente galvanica. Al principio era tanto sorpreso di questo risultato, che non poteva non circondarmi delle più minuziose precauzioni.

Un poco più tardi il nervo linguale non è più arrestatore, ma la sua irritazione aumenta in tutta la lingua il movimento fibrillare; nel medesimo tempo cresce il movimento totale prodotto per l'irritazione, e si estende dal bordo sopra tutta la lingua, la quale però si piega soltanto al bordo; il resto dell'organo fa rapidi movimenti in alto ed in basso, il nervo arrestatore è divenuto motore. Anche l'irritazione meccanica del moncone nervoso aumenta allora il tremolìo fibrillare e muove tutta la lingua in alto ed in basso.

Siamo ancora lontani da comprendere tutti questi fatti singolari, che mostrano però la stretta parentela che esiste fra un nervo arrestatore e un nervo motore. La mancanza e la degenerazione del vero nervo motore deve modificare poco a poco le proprietà del nervo sensitivo. Ma si può provare che tutte le singolari trasformazioni

qui descritte non riguardano propriamente le fibre sensibili, ma la corda del timpano che si trova nel nervo linguale, e che deriva da un nervo motore, dal faciale. Producendo prima dello sperimento una atrofia adiposa della corda del timpano, il nervo linguale non diviene nè arrestatore nè motore.

L'arresto non è soltanto apparente, non è prodotto da una debole contrazione nascosta delle fibre, che impedisce il tremolìo. Questo si prova facilmente, perchè l'effetto motore cessa immediatamente colla irritazione galvanica, ma l'arresto dura per un certo tempo dopo di essa. Così che quando nel periodo di transizione l'arresto coesiste col principio delle contrazioni, il primo si riconosce ancora dopo la cessazione delle ultime.

Ho detto che finalmente il nervo linguale diviene motore. Questo è vero in quanto alle sue proprietà, ma non in riguardo alle sue funzioni. Il nervo linguale non può rimpiazzare il nervo ipoglosso e non compensa in nessun modo la sua paralisi. La metà della lingua coll'ipoglosso tagliato, anche se il linguale è divenuto motore, non mostra nè movimenti riflessi nè volontarî e rimane paralitica come al primo giorno dopo il taglio del nervo motore.

III. Rapp ha dimostrato che nei mammiferi il ramo infraorbitale del nervo quinto, dunque un nervo sensibile, dà fortissime ramificazioni ai grandi peli delle labbra superiori e dell'angolo della bocca. Ho voluto vedere se in questo nervo infraorbitale vi siano fibre arrestatrici per il movimento fibrillare di questi peli, che abbiamo prodotto pel taglio del nervo facciale. Per potere fare e ripetere lo sperimento per il corso di molte settimane nel medesimo animale non ci siamo serviti dell'irritazione elettrica e non abbiamo, almeno nel più grande numero degli sperimenti, scoperto il nervo. Basta comprimerlo strisciando sopra il suo punto di emergenza colle ugne del dito. L'animale, spiacevolmente sorpreso, fa un salto e poi quando sta quieto si vede che il tremolìo dei peli cessa ancora per qualche tempo.

Se l'irritazione è troppo debole non cessa il tremolìo, ma si affievolisce notevolmente.

Io so che tutti i fatti contenuti in questa comunicazione, e che mi hanno occupato per molto tempo, non contengono una prova diretta della teoria che propongo per i nervi arrestatori. Ma non si può negare che costituiscano un valido appoggio per quella mia ipotesi.

Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal.

Memoria del Socio L. CREMONA

letta nella seduta dell'8 aprile 1877.

Un egregio giovane, sig. Giuseppe Veronese, già allievo del Politecnico di Zurigo ed ora studente all'Università romana, mi pregò, tempo fa, di leggere un manoscritto nel quale egli aveva raccolto e dimostrato, per mezzo di semplici considerazioni di triangoli omologici, tutte le proprietà conosciute dell'esagrammo di Pascal e molti altri teoremi di sua propria invenzione. La lettura di quella Memoria, che poi meritò d'essere inserita negli Atti della nostra Accademia, mi fu occasione a cercare una via per la quale si potesse ottenere ed abbracciare una così grande quantità di proposizioni. Credo averla trovata, poichè m'è riuscito di ridurre ogni cosa a poche proprietà intuitive del sistema di quindici rette nello spazio, situate tre a tre in quindici piani: dove si scopre un esaedro, che è quasi il nocciolo della figura. Nel presente lavoro, d'indole affatto elementare, sono contenuti i risultati delle mie ricerche su quest'argomento.

1. Sia f una superficie di terz'ordine dotata di un punto doppio (conico) O. Oltre alle sei rette, che indicherò con 1, 2, 3, 4, 5, 6, concorrenti in O e situate in un cono quàdrico, la superficie f ha altre quindici rette r, rispettivamente situate ne' quindici piani determinati dalle prime sei prese due a due. Chiaminsi 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 queste quindici rette r; in modo che le rette 1, 2, 12 sono in uno stesso piano, ecc. (1). Le quindici rette r sono poi situate tre a tre in altri quindici piani τ, che sono i piani tritangenti (propriamente detti) della superficie: quelli cioè pei quali nessun punto di contatto cade in O. I quindici piani tritangenti sono:

(12. 34. 56),	(12. 35. 46),	(12. 36. 45),
(13. 24. 56),	(13. 25. 46),	(13. 26. 45),
(14. 23. 56),	(14. 25. 36),	(14. 26. 35),
(15. 23. 46),	(15. 24. 36),	(15. 26. 34),
(16. 23. 45),	(16. 24. 35),	(16. 25. 34).

Per ciascuna delle rette $r \equiv 12, 13, \ldots$ passano tre de' quindici piani τ.

(1) Secondo questa notazione, che è la consueta, una delle rette 1, 2, . . . ed una delle rette 12, 13, . . . s'incontrano se i loro simboli hanno un indice comune; invece due delle rette 12, 13, . . . sono in uno stesso piano se i loro simboli non hanno alcun indice comune. Per questa notazione e per le proprietà qui richiamate del sistema delle rette e de' piani tritangenti d'una superficie di terz' ordine, veggasi per es. il mio *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (G. di Borchardt, t. 68) Berlin, 1868.

arbitrario k, essi hanno proprietà analoghe a quelle de' pentaedri del n.° *11*, sebbene i nuovi pentaedri non abbiano in generale due a due una faccia comune. L'insieme de' loro spigoli e de' loro vertici è analogo al sistema delle sessanta rette di Pascal e de' sessanta punti di Kirkman.

47. Uno spigolo qualunque, come

$$X + kY = 0, \quad X + kZ = 0$$

passa per un punto di Steiner (vertice dell'esaedro)

$$X = Y = Z = 0,$$

e viceversa, per uno qualunque

$$X = Y = Z = 0$$

de' punti di Steiner passano tre spigoli

$$X + kY = 0, \quad X + kZ = 0,$$
$$Y + kX = 0, \quad Y + kZ = 0,$$
$$Z + kX = 0, \quad Z + kY = 0,$$

che appartengono a tre diversi pentaedri — 1°, 2°, 3° — e determinano un triedro le cui facce sono

$$(k-1)X + Y + Z = 0,$$
$$(k-1)Y + Z + X = 0,$$
$$(k-1)Z + X + Y = 0.$$

Per i detti spigoli passano risp. i tre piani di Plücker

$$Y - Z = 0, \quad Z - X = 0, \quad X - Y = 0,$$

che si segano lungo la retta di Cayley

$$X = Y = Z.$$

Agli spigoli medesimi si oppongono, ne' rispettivi pentaedri, tre vertici

$$X + kW = 0, \quad X + kT = 0, \quad X + kU = 0,$$
$$Y + kW = 0, \quad Y + kT = 0, \quad Y + kU = 0,$$
$$Z + kW = 0, \quad Z + kT = 0, \quad Z + kU = 0,$$

allineati nella retta di Cayley $W = T = U$ che corrisponde al punto di Steiner $X = Y = Z = 0$ donde escono i tre spigoli (cfr. *22*).

48. Nei quattro punti di Steiner allineati in uno spigolo $X = Y = 0$ dell'esaedro concorrono dodici spigoli de' nuovi pentaedri, vale a dire: quattro del 1° pentaedro, situati nella faccia $X + kY = 0$; quattro del 2°, situati nella faccia $Y + kX = 0$; e quattro che appartengono risp. agli altri pentaedri e giacciono insieme nel piano di Plücker $X - Y = 0$ (cfr. *18*).

49. Se da due pentaedri, 1° e 2°, si tolgono le facce $X + kY = 0$, $Y + kX = 0$ che passano per una stessa retta di Steiner, le facce rimanenti formano due tetraedri prospettivi, aventi per piano d'omologia il piano $X - Y = 0$ di Plücker, ed i cui vertici corrispondenti sono nelle rette di Cayley che concorrono nel punto di Salmon $Z = W = T = U$. Queste rette contengono inoltre, ciascuna, un vertice d'uno de' rimanenti pentaedri; per es. la retta $Z = W = T$ contiene i vertici

$X + kZ = X + kW = X + kT = 0$ del 1° pentaedro,
$Y + kZ = Y + kW = Y + kT = 0$ del 2°
$U + kZ = U + kW = U + kT = 0$ del 3° (cfr. 25).

50. Pei quattro punti di Steiner conjugati ai quattro situati nella retta $X = Y = 0$ passano dodici spigoli de' quattro pentaedri 3°, 4°, 5° e 6°; i quali spigoli tre a tre passano pei quattro punti

$$\begin{aligned} Z + kW = Z + kT = Z + kU = 0 &\quad \text{vertice del } 3^\circ \text{ pentaedro} \\ W + kZ = W + kT = W + kU = 0 &\quad \text{» } 4^\circ \\ T + kZ = T + kW = T + kU = 0 &\quad \text{» } 5^\circ \\ U + kZ = U + kW = U + kT = 0 &\quad \text{» } 6^\circ, \end{aligned}$$

i quali sono uniti ai quattro di Steiner mediante i predetti dodici spigoli e le quattro rette di Cayley concorrenti nel punto $Z = W = T = U$ di Salmon (cfr. *33*).

Le medesime dodici rette concorrono due a due in sei punti, che dirò *V*:

$$\begin{aligned} Z = W = -kT = -kU, \quad T = U = -kZ = -kW, \\ W = T = -kZ = -kU, \quad Z = U = -kW = -kT, \\ T = Z = -kW = -kU, \quad W = U = -kT = -kZ, \end{aligned}$$

situati due a due nelle tre rette

$$\begin{aligned} Z = W, \quad T = U, \\ W = T, \quad Z = U, \\ T = Z, \quad W = U, \end{aligned}$$

che sono gli spigoli diagonali del quadrispigolo formato dalle rette di Cayley concorrenti nel nominato punto di Salmon.

Il numero de' punti *V* è novanta, corrispondendone sei a ciascun punto di Salmon. Essi giacciono tre a tre in sessanta rette, che sono gli spigoli di sei nuovi pentaedri, le equazioni delle cui facce si deducono da quelle del n.° *46* cambiando k in $\frac{1}{k}$. Per es. i tre punti *V*

$$\begin{aligned} X = Y = -kZ = -kW, \\ X = Y = -kZ = -kT, \\ X = Y = -kZ = -kU \end{aligned}$$

sono situati nella retta $X = Y = -kZ$, spigolo del pentaedro che è 3° nella nuova serie.

51. Tornando ai pentaedri del n° *46*, un piano di Plücker, per es. $X - Y = 0$, contiene dodici vertici de' pentaedri 3°, 4°, 5° e 6°, allineati tre a tre in quattro spigoli de' pentaedri stessi e in quattro rette di Cayley (cfr. *33*).

Gli stessi dodici punti sono situati due a due nelle sei rette, che dirò *v*, e che sono rappresentate da $X - Y = 0$ insieme con

$$\begin{aligned} (k-1)(X+Y) + 2(Z+W) = 0, \quad (k-1)(X+Y) + 2(T+U) = 0, \\ (k-1)(X+Y) + 2(Z+T) = 0, \quad (k-1)(X+Y) + 2(U+W) = 0, \\ (k-1)(X+Y) + 2(Z+U) = 0, \quad (k-1)(X+Y) + 2(W+T) = 0. \end{aligned}$$

Queste sei rette *v* concorrono due a due ne' tre punti

$$\left.\begin{aligned} X+Y=0, \quad Z+W=0, \quad T+U=0 \\ X+Y=0, \quad Z+T=0, \quad U+W=0 \\ X+Y=0, \quad Z+U=0, \quad W+T=0 \end{aligned}\right\} \; X - Y = 0$$

allineati nella retta di Steiner $X = Y = 0$. Questi punti e gli analoghi (in tutto quarantacinque) sono quelli in cui gli spigoli dell'esaedro sono incontrati da quindici rette della superficie $\mathfrak{F}$.

$$(Y+Z)(Z+X)(X+Y) + (W+T)(T+U)(U+W) = 0,$$

ossia dalle rette r in cui si segano tre a tre i quindici piani che insieme coi piani di Plücker dividono armonicamente gli angoli diedri dell'esaedro. Ogni spigolo dell'esaedro (come $X = Y = 0$) è incontrato da tre rette r situate in un piano $(X + Y = 0)$; e viceversa ogni retta r (come $X + Y = 0$, $Z + W = 0$, $T + U = 0$) incontra tre spigoli dell'esaedro ($X = Y = 0$, $Z = W = 0$, $T = U = 0$) che due a due non si segano.

Le rette v sono novanta; situate sei a sei nei piani di Plücker, concorrenti tre a tre in sessanta punti che sono i vertici di sei nuovi pentaedri. Le equazioni delle facce di questi pentaedri si deducono da quelle del n.° *46* cambiando k in $4 - k$. Per es. le tre rette v

$$(k-1)\ (Y + Z) + 2\,(W + T) = 0\,,\ Y - Z = 0\,,$$
$$(k-1)\ (Z + X) + 2\,(W + T) = 0\,,\ Z - X = 0\,,$$
$$(k-1)\ (X + Y) + 2\,(W + T) = 0\,,\ X - Y = 0\,,$$

concorrono nel punto rappresentato dalle equazioni

$$W + T = (1 - k)\,X = (1 - k)\,Y = (1 - k)\,Z,$$

ossia dalle

$$-U = (4 - k)\,X = (4 - k)\,Y = (4 - k)\,Z\,,$$

avuto riguardo all'identità del n.° *46*. Questo punto è un vertice del pentaedro che è 6° nella nuova serie.

52. Ogni valore del parametro k individua un sistema di sei pentaedri (*46*), aventi le proprietà suesposte, cioè aventi in comune l'esaedro e i piani di Plücker (e per conseguenza le rette di Steiner e di Cayley, i punti di Steiner e di Salmon). Mediante i punti V il sistema è conjugato ad un altro (*50*), formato cogli stessi piani presi in ordine differente. Due sistemi conjugati corrispondono a valori reciproci del parametro; epperò tutte le coppie analoghe formano un'involuzione i cui elementi doppî sono: 1° il sistema dei piani di Plücker $(k = -1)$; 2° il sistema dei piani che con quelli di Plücker dividono armonicamente gli angoli diedri dell'esaedro $(k = 1)$.

53. Così pure, mediante le rette v, un sistema qualunque di pentaedri (*46*) è conjugato ad un altro (*51*); e i due sistemi conjugati corrispondono a valori di k che dànno la somma costante 4. Dunque anche queste coppie costituiscono un'involuzione, i cui elementi doppî sono: 1° il sistema de' sei pentaedri che si possono formare colle sei facce dell'esaedro, prese cinque a cinque $(k = \infty)$; 2° il sistema corrispondente a $k = 2$.

54. Ogni retta v contiene due vertici del sistema k e due del sistema $4 - k$: infatti, le due rette v

$$(k-1)\ (X + Y) + 2(Z + W) = 0\,,\ X - Y = 0,$$
$$(k-1)\ (X + Y) + 2\,(T + U) = 0\,,\ X - Y = 0,$$

avuto riguardo all'identità del n.° *46*, si scambiano fra loro se a k si sostituisce $4 - k$.

Analogamente si scambiano fra loro i due punti V

$$Z = W = -k\,T = -k\,U,$$
$$T = U = -k\,Z = -k\,W,$$

mutando k in $\frac{1}{k}$; vale a dire, in ogni punto V concorrono due spigoli del sistema k e due del sistema $\frac{1}{k}$.

55. Le rette v e i punti V coincidono con quelli indicati dagli stessi simboli della Memoria del sig. Veronese. I suoi punti Z e le sue rette z sono i vertici e gli spigoli de'successivi sistemi di pentaedri. Per ottenere precisamente le figure π', π''... considerate dal giovane geometra ne' suoi teoremi XXXIV, XLVIII, XLIX, basta partire dal sistema di pentaedri $k = 1$, dedurre da esso il conjugato nell'involuzione $k + k' = 4$, poi da questo il conjugato nell'involuzione $k' k'' = 1$, indi da quest' ultimo il conjugato nell'involuzione $k'' + k''' = 4$, e così via di seguito, alternando le due involuzioni indefinitamente.

La Tuscia Romana e la Tolfa.

Memoria del Socio PONZI

letta nelle sedute del 4 marzo, 8 aprile, 6 maggio e 3 giugno 1877.

INTRODUZIONE

Sulla estensione dei continenti come sulle isole, che interrompono la continuità dei mari, s'incontrano sovente certe regioni, le quali, sia per accidentalità di terreno, sia per discordante fisionomia col circostante paese, sia per la diversa natura del suolo, presentano un carattere tutto particolare, che richiama l'attenzione del geologo, sempre diretta alla ricerca dei grandi fenomeni di natura. Tali sono quei punti verso i quali le forze concentrate del pianeta si diressero, e li fecero teatro dei più sorprendenti avvenimenti, lasciandovi le traccie indelebili del loro tremendo passaggio. Una di queste contrade presso di noi è la Tolfa; paese formato da un gruppo di monti che lungo il littorale tirreno sovrastano i paraggi di Civitavecchia, e che sebbene poco rilevati, pure dànno a scorgere essere stati prodotti da maravigliose e straordinarie operazioni cosmiche. La svariata quantità di minerali, la magnificenza delle loro cristallizzazioni resero celebre quel paese, e perciò nei passati tempi non solo fu visitato dai curiosi della natura, ma altresì da speculatori industriali. Al finire del passato secolo, ed al principio del nostro, scrissero sulla Tolfa, Arduino, Fortis, Breislak, Brocchi; ma la geologia in quei tempi trovandosi ancor minorenne, navigava in acque basse, nè peranche si era lanciata a veleggiare in alto mare, come ha potuto fare dopo di loro. Laonde gli studî da essi publicati si ridussero a semplici osservazioni locali, e sulle roccie raccolte. Non mancarono però in appresso a peregrinarvi geologi stranieri di bella fama, a fine di conoscere i prodotti utilizzabili: ma nessuno fin qui spese parole che potessero soddisfare i desiderî della scienza. Cosicchè si può dire che quella interessante contrada attende ancora una illustrazione capace di farla giustamente apprezzare.

È vero che la curiosità di conoscere i monti della Tolfa presto si destò anche in me, e per iscoprirne la natura e l'origine vi passai molti anni in ricerche ed osservazioni. È vero anche che in quelle peregrinazioni raccolsi molto materiale scientifico, ma ciò non tolse che avvenisse a me quel che suole accadere anche ad altri, cioè, che per avere il meglio si trascura il buono, e perciò nell'intenzione di accrescere il numero delle nuove cognizioni, tenni in serbo le già acquistate, nè ho mai messo fuori un resoconto del mio operato. Ma ora, per ragione di età, non essendomi più permesso

trascorrere alpestri contrade, non v'ha più ragione d'indugio, nè posso più in coscienza defraudare la scienza, col correre rischio di mandare all' oblìo ciò che le spetta. Così raccolgo le reti, e metto fuori il raccolto, qualunque sia, per farlo di pubblica ragione.

Dovendo dunque tener parola di ciò che feci, mi conviene avvertire il lettore che in una impresa di tal natura, per quanto abbia lavorato, il risultato ottenuto non è tale che non lasci ancora molto a desiderare. Imperocchè lo studio della natura è inesauribile, e ad ogni passo sorgono nuove manifestazioni, nuovi portenti. Tuttavia mi faccio coraggio, e affronto l'impresa con una esposizione geologica di quella interessante regione, rimettendo lo studio speciale dei minerali ad un altro lavoro, o a chi verrà dopo di me. Prima però di porre mano a questa qualunque siasi opera devo premettere che le operazioni di natura che sto per trattare furono così grandi, svariate e ripetute, che non si limitarono soltanto ai monti tolfetani, ma, diffuse in un'area vastissima, che comprende quasi tutta la Tuscia romana, misero a soqquadro un gran tratto del suolo subapennino. Cosicchè per conoscere la Tolfa conviene abbozzare un quadro generale di tutto il paese che dovetti percorrere, onde completare per quanto mi è stato possibile il concetto che dobbiamo farci di quella contrada italiana. Ciò posto, ecco il mio programma.

Divido il lavoro in quattro sezioni: nella prima parlerò di geografia; però solo di quelle parti che conferiscono al fine proposto, cioè della orografia, della idrografia, e delle perenni alterazioni a cui vanno soggette le prominenze: nella seconda della geologia per far conoscere i diversi terreni che costituiscono quella contrada e la sua storia fisica: nella terza, meglio tratterò e con maggior dettaglio delle operazioni di natura nella produzione dei monti della Tolfa: nella quarta in fine darò un cenno di ciò che fece l'umana industria dei suoi minerarî prodotti.

I. GEOGRAFIA

L'area che forma il soggetto di questo lavoro scientifico è quella parte della zona subapennina, che nell' Italia centrale intercorre fra la catena dei monti Sabini e il littorale tirreno. Essa è compresa fra il corso del fiume Fiora e l'ultimo tronco del Tevere: vale a dire si distende in lunghezza da Roma al confine toscano e in larghezza dalle radici apennine al mare. Questa regione, sede una volta della dominazione etrusca, fu conquistata per essere assorbita nel gran mondo romano, e perciò nel medio evo ebbe il nome di Tuscia romana. Passata poi a far parte delle provincie del patrimonio di s. Pietro, restò governata dai pontefici fino a che venne riunita al Regno d'Italia, e tuttora compresa nella provincia di Roma. Noi stimiamo meglio in questo lavoro lasciarle il nome medioevale di Tuscia romana, perchè ci sembra il più esclusivo degli altri che ha portato, come anche perchè rammenta la sua primitiva origine.

L'area etrusca, come l'abbiamo circoscritta, può essere distinta nella sua lunghezza in due zone: una esterna o littorale che comprende i monti tolfetani, l'altra interna, depressa intercorrente fra questa e gli Apennini. Però convien dire che, se si eccettuino i monti di Tolfa per la loro sporgenza, tutto il restante paese è basso e gibboso qual

si conviene ad un fondo di mare messo in secco. Per questa forma geografica generale il gruppo tolfetano sorge come un antemurale di fronte alle catene apennine da cui dista per la zona interna. La posizione poi di questi monti e la stessa loro natura portano a considerarli come un brano distaccato della catena littorale tirrena, o una continuazione della metallifera di Toscana, di cui dà prova l' intercorrente Monte di Canino, che fa pensare ad una segreta o sotterranea continuità.

Dati questi generali cenni, dovendo ora scendere ad una più minuta descrizione delle parti costituenti la Tuscia romana, credo pregio dell'opera pregare il lettore che, a maggior intelligenza di ciò che siamo per dire, sarebbe bene avesse sotto gli occhi la carta di tutto il paese preso ad esame, perchè in astratto e senza il soccorso della vista ne sarebbe difficile l'intelligenza. Una grafica esposizione fa meglio risaltare la mutua relazione delle parti, da cui deriva la forma generale del suolo.

Disposte in tal modo le cose, salta subito agli occhi, non solo un apparente disordine nel gruppo dei monti tolfetani; ma altresì la loro separazione e isolamenti a distanze diverse, da dare l'idea di un piccolo arcipelago. E sì che tale dev'essere stato quando ancora le bassure subapennine erano sott'acqua, la quale poi scolata per lenta e generale emersione, tutti quei colli si fusero insieme da risultarne un gruppo rilevato sulle spianate subapennine. Però è da notare che il fiume Mignone coi suoi serpeggiamenti, nell'attraversare quelle giogaje in epoche etrusche segnò il confine fra due lucumonie, separando a destra quella di Tarquinia, corrispondente al moderno Corneto, a sinistra quella di Cere, rappresentata oggi dalla città di Cerveteri o *Cere vetus*, e per tale ragione i primi sono appellati Tarquiniensi, gli altri Ceriti o Ceretani. Questi costituiscono la massa maggiore, o i monti della Tolfa propriamente detti, che potrebbero essere altresì distinti in due parti dal corso del Rio-fiume diretto a separare le colline del Sasso; ma di questa distinzione non terremo conto perchè in verità non è molto marcata.

Ora per servire meglio alla chiarezza fa d'uopo procedere con ordine, e tracciare i maggiori rilievi tenendo dietro alla linea dello spartiacque della massa tolfetana, per passare poi alle parti più depresse o alle valli percorse e segnate dal corso delle acque. Quella linea adunque di cui teniamo parola s'incomincia a scorgere sui monti di Cerveteri, dai quali s'innalza per raggiungere il castello del Sasso, alto sul livello del mare m. 429. Da questo punto i monti si dilatano declinando a ponente verso la spiaggia, e risalendo a levante per formare quella specie d'anfiteatro che dicesi la Vallascetta sul piovente nella Lenta. Dalla parte più rilevata di questo cerchio si spiccano due bracci: uno va a formare il Monte Castagno, l'altro Montisolo, che camminando fra ponente e tramontana finiscono col riunirsi e scendere a quella punta sulla quale venne eretto il casale di Rota, a cavaliere del Mignone sotto la Tolfa.

Le altitudini dette della Sconfitta, dalle quali ha origine il Rio-fiume, legano la massa del Sasso con quella della Tolfa, e il Monte Ghiande, che n'è la continuazione, serve di contrafforte per sostenere le due eccelse punte delle Spiaggie e della Tolfaccia o Tolfa vecchia, alta m. 591,5.

Da quelle sommità si precipitano nel bacino di Tolfa altri contrafforti, mentre sull'opposto piovente scendono i monti di s. Caterina fino al mare col Monte Rosso e Prato Rotatore.

Dalle altitudini della Tolfaccia lo spartiacque si abbassa fra ponente e tramontana per raggiungere il Poggio Ombricolo alto m. 544. Da quì si spicca un braccio che facendo argine al corso del Marangone, declina verso il lido, spingendosi entro mare con quella punta sporgente che dai naviganti vien detta Capo Linaro, fra la foce del Tevere e il porto di Civitavecchia. Altri speroni sorreggono il procedimento di quei monti parallelamente alla spiaggia, producendo al di là di Civitavecchia il Monte Rotondo e il Poggio Turco.

Dal lato interno di Poggio Ombricolo si trovano i Poggi della Stella, dai quali si stacca quella depressa catena di piccoli colli che ne conservano il nome, e che in linea retta vanno a metter capo al Monte della Tolficciola fra la Tolfa e la Tolfaccia. Lo stesso Poggio Ombricolo poi, avanzando verso la Croce di Bura, risale per formare la più elevata parte delle prominenze tolfetane cioè i monti delle Allumiere. Fra essi fa mostra maestosa il Monte delle Grazie alto m. 615, così detto da una cappella dedicata alla Vergine, che sovrasta il villaggio delle Allumiere, visibile da tutti i lati, specialmente dal mare. Però non è questo il punto culminante, perchè vien soverchiato dalla catena dell'Elceto, che gli sorge di fronte, e che s'innalza fino al Monte Urbano, detto anche di Cibona da un convento posto a mezza costa, il cui cuspide trovasi a m. 622 sul livello del mare. Da questo punto la cresta declina fino all'ultima prominenza, ossia al Pico della Tolfa propriamente detto, appellato Monte della Rocca dai ruderi di un antico castello che sovrasta la città, alto m. 563,8. È un mammellone di forma conica isolato avanzato a dominare tutto il sottostante bacino tolfetano.

Dal Monte delle Grazie si continuano altre giogaje lungo le vecchie cave dell'allume, che camminando col Monte Fischio verso la punta della Chiesaccia formano una costa dirupata sulla quale si nota il Monte Casalavio. La cresta si dilata in un largo altipiano che degrada verso settentrione fino a raggiungere il corso del Mignone, o le selvose prominenze di Palano, sulle quali sono i ruderi dell'antica Leopoli, oggi Cencelli, città del medio evo che ha servito di rifugio agli abitanti di Centocelle, o Civitavecchia nelle incursioni dei Saraceni. Tutta quella distesa si compone di gibbosità più o meno depresse e svariate, che dànno al suolo un aspetto particolare.

Nel centro di questi monti è aperto il bacino della Tolfa, ossia una vasta cavità, che sarebbe del tutto chiusa, se nel suo fondo non avesse due aperture attraversate dal Mignone per portar via gli scoli. Il vasto catino è fiancheggiato a destra dal Monte Casalavio e le coste del Marano, a sinistra dal Monte Castagno, e di fronte dal mammellone della Rocca. Tutto il fondo è ricoperto di terreno subapennino, introdotto per le suddette aperture, su cui è disteso tutto il sistema idraulico del Verginiese che ne raccoglie le acque per versarle nel Mignone stesso sotto Rota.

Una strada provinciale che da Civitavecchia conduce a Bracciano scavalca nella parte più rilevata tutte quelle prominenze etrusche. Essa risale serpeggiante fra aspre giogaje fino a che, superato lo spartiacque delle Allumiere, scende attraverso la città della Tolfa, e così guadagna l'interno del suo bacino. Poi descrivendo una gran curva ne raggiunge il fondo e per la sponda sinistra del Mignone esce dallo stretto di Rota, e si dirige a Bracciano passando per Montanciano e Manziana.

Tale è la massa dei monti Ceriti sulla sponda sinistra del Mignone. Quelli di

destra, o i tarquiniensi, si compongono di giogaje di minor conto, però divise e isolate fra loro per distanze ineguali, la maggiore delle quali occupa tutto lo spazio compreso nella curva che fa il Mignone girandogli attorno da Viano a Rota. Questa bassa congerie di rilievi calcarei non si alza più di m. 550, e si avanza verso Montisola per lasciare quell'angusto e tortuoso canale, che abbiamo già detto, percorso dal fiume Mignone per introdursi nel bacino della Tolfa. Passaggio reso tanto più angusto da varî brani di scogliere distaccate, fra le quali il fiume è obligato a descrivere un movimento serpentino.

Un altro di questi lacerti rocciosi, chiamato Pian Cisterno, vedesi altresì avanzato nel fondo dello stesso bacino, e sovra di esso si rinvengono le vestigia di una antica città etrusca di cui non si conosce il nome. All' estremità settentrionale di questo corpo di prominenze tarquiniensi si trovano erette Viano e Civitella Cesi.

Altri monti spettanti a quella lucumonia si vedono sparsi come tante isole più o meno grandi e distanti. Tali sono le altitudini di Monte Romano scavalcate dalla strada che conduce a Viterbo: quelle poste a fianco di Barbarano, e le prossime a s. Giovanni di Bieda: il Monte s. Elia fra Barbarano e Capranica: un' altra isola vicino Vetralla, e l'ultima che sorge presso Sutri. Con queste terminano le maggiori prominenze che dànno un aspetto speciale alla zona littorale.

Però non si deve credere con ciò, che la zona interna della Tuscia romana manchi dei suoi rilievi. È vero che chi si aggira per quelle campagne altro non vede che leggiere gibbosità, o una ondulazione che indica un fondo di mare messo in secco. Ma se si fissi l'attenzione al portamento delle acque, sarà facile comprendere che tutto il suolo di quella zona si risolve in tre larghissime prominenze o coni depressi, perchè i torrenti scendono sulle loro circolari pendenze. Tali rilievi sono contigui e allineati nella generale direzione della penisola, ossia scorrono paralleli agli Apennini, come fanno tutte le altre parti componenti l'Italia. Ciascheduno di quei coni nella sua sommità sostiene un bacino contenente acque lacustri, conosciuto coi nomi di Bolsena o Vulsinio, di Vico o Cimino, Sabatino o di Bracciano.

Da questa configurazione del suolo si crede comunemente che quei crateri rappresentino tre vecchi vulcani estinti; ma le osservazioni lo negano in gran parte, imperocchè ci avvertono che solo quello di Vico o il Cimino ne presenta i caratteri: gli altri non sono che sprofondamenti prodotti da sventramenti vulcanici, a fianco dei quali si rinvengono i veri crateri eruttivi.

Il primo di quei bacini lacustri, o il Vulsinio è il più vasto, e presenta una figura irregolare che si approssima alquanto alla trapezoidale. Il suo ciglio verso mezzogiorno è depresso per dar transito alle acque; però vedesi che da questa bassura i monti si rialzano all'intorno per formare il ciglio del gran catino fino ad una prominenza conica che ne segna il punto culminante. Questa è il Monte Falisco o Montefiascone, alto m. 613,75. Le interne pendenze del bacino sono rapide e scoscese, e perciò in taluni siti rendono le sponde del lago aspre e scogliose. In seno al lago sorgono due isolette una detta Bisentina, l'altra Martana perchè dirimpetto ai paesi omonimi. Sulla sommità di questo gran cono Vulsinio, prima che precipitasse, sembra che esistessero veri crateri di eruzione; imperocchè l'isola Bisentina, che sembra un brano di quella demolizione, mostra avanzi di correnti di lave scaturite da qualche prossima bocca eruttiva.

A ponente e sul ciglio del gran bacino trovasi il cratere di Mezzano, forse il più considerevole di tutti gli altri ora esistenti. Fu una vera bocca di eruzione, di convenienti dimensioni, nel cui seno sorge un altro monte denominato il Montione, legato al Monte Rosso, aperto a settentrione in una cavità semicircolare che sembra risultare dal disfacimento di due geminati crateri. In seno di essi si raccoglie il piccolo lago di Mezzano da cui prende origine il fiumicello Olpita, che girato attorno le radici del Montione, e trovata una uscita corre a scaricarsi nel Fiora sul confine toscano. Altri crateri s'incontrano sulla periferia del gran bacino: come sono il Monte Rado presso Bagnorea, Capo di Monte, il Laguccione fra Marta e Valentano, lo stesso Monte Jugo sulla via di Viterbo, ed altri, taluni dei quali non peranco ben determinati. Da tali bocche di soccorso furono vomitate tutte le lave che ad ogni passo s'incontrano nel percorrere quelle contrade, fra le quali si distingue quella corrente basaltina, prismatica fra Montefiascone e Bolsena, detta delle pietre lanciate, e troncata dallo sprofondamento.

Le esterne pendenze del gran cono Vulsinio hanno sempre una dolce inclinazione, assumendo la fisionomia dei subapennini, tanto verso il Tevere, quanto dal lato che insensibilmente degrada verso la spiaggia.

Il secondo cono, che succede al Vulsinio, è il Cimino, nome tratto dal monte che s'innalza alla sua prossimità. Sebbene più piccolo degli altri, nondimeno è aperto in un vero cratere di eruzione la cui cresta circolare si è meglio conservata degli altri. Il punto culminante di questo cerchio è il Monte di Fogliano alto m. 975; e la sua profondità si rende tanto più sensibile per le sue gronde interne dirupate e scoscese sul lago contenuto. Nel centro di questo cratere sorge un monte conico isolato detto Monte Venere, elevato fino a m. 883, e più alto del ciglio della cavità che lo comprende. Le osservazioni però ci fanno sospettare, che questo monte abbia fatto parte della divisione fra due crateri geminati demoliti e ridotti dall'abrasione.

Gli esterni pioventi al solito poco inclinati formano il dorso e i fianchi del cono. Però è da notarsi che sull'alto della sua gronda settentrionale s'innalza il Monte Cimino o di Soriano, di forma conica isolata, il cui cuspide è alto m. 1056,57. Questo segna il punto culminante di tutta la Tuscia romana, perciò da tutti i lati si vede rivestito di densa foresta. Un prolungamento di tale prominenza va a connettersi col ciglio del cratere, mediante un istmo detto la Montagna di Viterbo, attraverso il quale passando la via Cassia vi trova la Posta e l'Osteria della Montagna. Del resto il terreno scende uniforme, leggiero e declive senza alcun indizio di bocche ausiliarie o crateri di soccorso. Questo vulcano probabilmente ebbe una vita più breve ed è il più giovane degli altri.

Passando ora al terzo cono, che prende il nome dell'antica *Sabatia* sostituita dall'attuale Bracciano, come il primo o il Vulsinio, ha la sommità sprofondata da cui risultò il bacino lacustre. Offre una forma quasi circolare, a pareti in qualche luogo dirupate sul sottostante lago. Il rilievo che gira attorno, e che ne forma il ciglio, risale a settentrione colla Rocca Romana alta m. 615, per poi discendere e continuare fino alla sgolatura che a fianco del paese di Anguillara, l'antica *Angularia,* dà passaggio all'emissario del lago.

Anche in questo le pendenze esterne offrono i caratteri degli altri due coni:

Senonchè a ponente e prossimo al ciglio del gran catino sorge il cospicuo Monte Virginio, detto anche della Manziana per una città eretta al suo fianco, alto m. 540, sulla cui punta venne eretto un eremo denominato il Calvario, che fa parte del famoso convento dei Teresiani detti di Monte Virginio.

Come sul cono Vulsinio, sulla periferia dello sprofondamento che costituisce il bacino Sabatino, si trovano i veri crateri di eruzione, dei quali il lato settentrionale è il meglio fornito. Quivi una serie di bocche eruttive si spiegano in catena lungo il corso di una fenditura terrestre rappresentate dalla Valle di Polline, dal laghetto quasi asciutto di Stracciacappe, corrispondente all'antico *Papirianus,* dal lago Alseatino, oggi di Martignano, dalla valle di Baccano, e dalla grande conca che si apre sotto Scrofano. Oltre questi, altri crateri si notano in varie direzioni. Alle radici di Rocca romana trovasi il piccolo cratere di Trevignano, l'antico *Trebonianum*, aperto perchè le acque del gran lago Sabatino vi entrino per formarvi un seno. Dietro quello stesso monte un altro cratere porta il nome di Valle-rotonda, e fra Bracciano e Anguillara s'innalzano le vestigia di un altro ingente cratere detto di Vigna di Valle, troncato come quello di Trevignano, forse dallo stesso sprofondamento. Fra tramontana e levante del lago Sabatino sorge distinto il Monterosi alto m. 364, per far contrasto alla Rocca Romana, alle cui radici un piccolo cratere contiene le *Aquae Janulae,* detto oggi laghetto di Monterosi, a fianco della via Cassia. Finalmente altri rilievi formati da crateri disfatti si trovano attorno il lago Sabatino, i quali aggiunti agli spandimenti di numerose lave scaturite da tutti quei crateri, accennano ad una vita vulcanica prolungata per secoli.

A compiere il novero delle prominenze che rendono aspra la Tuscia romana, occorre indicare due altri monti isolati, e posti alle due estremità di quella contrada, quasi due termini. Uno di questi a settentrione è il Monte di Canino, distaccato dai monti toscani, per indicare una combinazione sotterranea fra questi e il gruppo dei monti della Tolfa. È alto m. 432, e si compone delle stesse roccie alle quali fa seguito. L'altro a mezzo giorno è il Monte di s. Oreste, corrispondente al Soratte degli antichi; prominenza isolata alta m. 681, e di forma allungata come una piccola catena, indicata dalle roccie costituenti, come un brano distaccato, dagli Apennini che gli sono di fronte.

Esaminate le prominenze, ragion vuole che abbiansi ad esaminare le depressioni del suolo o le valli che insieme ai monti contribuiscono a dare il carattere geografico alla Tuscia romana. Tutti sanno che le acque tendono costantemente a fluire nei luoghi sempre più bassi per trovarsi una strada più breve al loro cammino. Da ciò avviene che i fiumi segnano le maggiori profondità di una contrada o le valli, che fanno contrasto alla sporgenza dei monti; laonde fa d'uopo rivolgersi alla idrografia siccome quella che meglio e più chiaramente traccia le parti più depresse di quell'interessante paese.

Il posto dalla natura assegnato alle acque è il mare contenuto in distinti bacini, dalla superficie dei quali l'acqua esala continuamente in vapori, che raccolti nell'atmosfera sotto forma di nubi, sono spinti dai venti sulle terre messe in secco, dove attratti dai cuspidi montani ad una bassa temperie si risolvono in pioggie che cadono per inaffiare il suolo, provvedendo così al mantenimento della vita terrestre. Dalle altitudini

dei monti pertanto si precipitano nelle convalli sotto forma di torrenti, e ripartit in ragione della forma del suolo che trascorrono, si riuniscono per costituire i sistemi idraulici dei fiumi. Incontrato un bacino lo riempiono e, colmatolo, ne escono con un fosso emissario che associato agli altri convogliano alla fine tutte le acque fino a versarle nel mare, il quale col suo moto ondoso non cessa mai di flagellare le coste. Sotto queste diverse forme: cioè di laghi, di fiumi, e di mare fa d'uopo considerare le acque che bagnano il suolo della nostra Tuscia.

Uno sguardo lanciato sulla carta di questa provincia farà tosto conoscere che oltre i tre maggiori laghi di sopra menzionati, altri di minor conto ve ne sono, contenuti in crateri vulcanici. Al maggiore di questi ossia al Vulsinio o lago di Bolsena, si riferisce il laghetto di Mezzano: al secondo ovvero al Cimino nessun lago secondario si annette; ma al terzo cioè al lago di Bracciano o Sabatino sono attinenti i minori laghi di Montignano, Stracciacappe, Monterosi, con la valle di Baccano.

Il lago di Bolsena non misura meno di 54 chilometri di circonferenza: alto sul livello del mare m. 311,22, offre una figura, che come si disse, si ravvicina ad un trapezio irregolare. Contiene nel suo seno due isolette: una detta Bisentina perchè dirimpetto al paese di Bisento; l'altra è un nudo scoglio prossimo al villaggio di Marta da dove prende origine l'emissario, o il fiume scaricatore che parimenti porta con sè l'istesso nome. Il lago di Mezzano a ponente del Vulsinio, più elevato di questo, è contenuto in un vero cratere vulcanico, ed è una piccola raccolta di acque alimentata dalle circostanti sorgive il cui sopravanzo dà origine al fiumicello Olpita tributario del Fiora.

Il lago di Vico, così detto dal villaggio di Vico posto sulla sua sponda e corrispondente all'antico *Vicus Elvii*, trovasi in un vero cratere vulcanico, e fu detto Cimino dagli antichi per la prossimità del monte di questo nome. Ha una figura irregolare perchè modellato sulle radici del Monte Venere, e il suo antico e naturale livello venne abbassato da un emissario scavato attraverso le pareti del catino che conduce le acque per via sotterranea nel Rio-Ricano per versarle nel Treja.

Il Sabatino ebbe nome dalla città di *Sabatia* oggi Bracciano. Come il Vulsinio è contenuto in una fossa di sprofondamento: la sua figura è irregolarmente circolare con circa 37 chilometri di circonferenza e la sua superficie è alta sul mare m. 164. Sulla sponda orientale sopra uno scoglio sporgente come già abbiamo accennato sorge il castello di Anguillara sotto il quale in una sgolatura sono le chiuse dell'emissario da cui prende principio il fiume Arone. Però non tutta l'acqua vi corre, essendo una parte di essa ricevuta dall'acquedotto Paolino per essere condotta a Roma, destinata ad usi economici. Prossimo a questo lato è il lago Alseatino o di Martignano, così detto da un piccolo castello diruto posto sulla sua sponda. Contenuto in un piccolo cratere eruttivo di sei o sette chilometri di perimetro, trovasi a m. 209 sul livello del mare. Anche le acque di questo laghetto sono ricevute nell'acquedotto Paolino. Similmente quello di Stracciacappe o il *Papirianus* da qualche Papirio che lo possedette, trovasi in un vero cratere vulcanico, contiguo al precedente. Ebbe nei tempi passati varî chilometri di giro, ma dappoichè fu messo in comunicazione per via sotterranea col Martignano, il suo fondo è ridotto ad una vera piscina.

Il laghetto di Monterosi contenente le *aquae Janulae* degli antichi, è posto nella biforcatura delle due strade di Ronciglione e Civita Castellana: arriva appena ad un

chilometro di circonferenza ed è alto circa m. 220 sul mare. Finalmente conviene pur fare parola della valle di Baccano, riempita in altri tempi di acqua lacustre poi scolata dai Romani nel fiume Cremera. Ebbe otto o nove chilometri di circonferenza; oggi è una valle crateriforme chiusa ad anfiteatro, attraversata dalla via Cassia colla stazione *ad Baccanos* da cui prese il nome.

Molti sono i fiumi della Tuscia romana che meritano maggior considerazione, però il loro primato devesi al Tevere, che coll'ultimo suo corso, percorrendo le radici appennine circoscrive quasi la Tuscia romana come in una cornice alla quale concorre eziandio anche il Paglia suo tributario. Questo fiume, presa origine dai monti di s. Fiora, prima di raggiungere il Tevere scende verso Acquapendente e ingrossato dalle acque della Chiana, raggiunge la base del cono Vulsinio, sulla quale piega a sinistra per seguirne le traccie coi suoi serpeggiamenti. Giunto ad Orvieto riceve la Chiana, e poco dopo si scarica nel Tevere presso Tor di Monte. Arricchito di queste acque, il Tevere seguita a disegnare le basi dei due successivi coni Cimino e Sabatino, con un movimento quasi festonato e serpentino. Così arriva al Soratte, e giratogli attorno come ad una meta, prende la direzione del mare, passando attraverso Roma, e segnando il confine fra il territorio etrusco e latino.

In tutto il tratto che corre dall'incontro del Paglia al mare, il Tevere riceve a sinistra il tributo delle acque apennine che piovono su lui, condottegli specialmente da tre principali affluenti. Il primo di questi è il fiume Nera (*Nar* degli antichi) che convoglia le acque dai più distanti recessi del centro italiano, per mezzo dei fiumi secondarî Turano, Salto e Velino: il secondo è il Farfa che conduce gli scoli delle montagne sabine: il terzo è l'Aniene (*Anio*) che trae le sue origini dai due bacini acquiferi di Vallepietra e Filettino posti al fianco del Cantaro, uno dei più alti cuspidi apennini.

Da questa disposizione ben si comprende che tutti gli affluenti di destra, tanto del Paglia che del Tevere, devono scendere dai pioventi esterni dei tre coni vulcanici, sulle cui basi quei maggiori fiumi trascorrono. Cosicchè tutta la gronda orientale del Vulsinio coi suoi raggianti torrenti si versa in parte nel Paglia in parte nel Tevere. Ma le contrarie pendenze dei contigui coni, Vulsinio e Cimino, incontrandosi conducono le acque a raccogliersi insieme e fondersi per dare origine al Vezza, che passando sotto Vitorchiano raggiunge il Tevere presso Attigliano. Similmente avviene del Treja, raccolto fra i coni Cimino e Sabatino, nel quale immettono altresì le acque dell'emissario del lago di Vico, condottegli dal Rio-Ricano, passando per Civita Castellana. Finalmente tutto il lato orientale del cono Sabatino, è in comunicazione diretta coll'ultimo tratto del corso tiberino.

Il lato settentrionale della Tuscia romana non circoscritto dal Paglia e dal Tevere, viene segnato dal corso del fiume Fiora, che radendo le radici della catena metallifera si getta nel mare sotto Montalto: e perciò in questo fiume confluiscono le acque occidentali del cono Vulsinio.

Tutto il littorale etrusco lungo il mare Tirreno può essere distinto in tre parti: una settentrionale, corrispondente allo spazio fra il corso del Fiora e i monti della Tolfa: la seconda viene costituita da queste prominenze: la terza si riferisce alla distanza fra esse e il Tevere. Le acque esterne che scendono fra le due contrarie

pendenze dei coni Vulsinio e Cimino, in senso contrario al sistema del Vezza, per portarsi direttamente al mare, si raccolgono dando origine al Vela, che giunto presso Rocca Rispampani si getta nell'emissario del lago di Bolsena, ossia nel Marta, il quale raccogliendo nel suo cammino i laterali affluenti, per Ancarano va al mare sotto Corneto.

La seconda parte, o la corrispondente ai monti Tolfetani, trovasi in condizioni ben diverse. Conciossiachè il rilievo di quelli formando barriera, obliga le acque a raccogliersi in un fiume di maggior calibro a fine di superare l'ostacolo. Questo è il Mignone che risponde all'antico *Minio*, il quale, tratta la sua origine dalla chinata occidentale del cono Sabatino, scende a Viano, ove piegasi a sinistra per lambire le radici dei monti tarquiniensi, che gli sorgono a destra fino al diruto paese di Monterano. Quivi s'impegna fra masse scogliose, che sotto Rota gli rendono tanto più angusto l'ingresso nel bacino della Tolfa onde raccoglierne gli scoli. Tenendosi sempre fra scogliere, esce da quello a riguadagnare il largo, girando attorno la costa del Marano. Quindi passando fra le altitudini tolfetane e di Monte Romano, declina a destra e corre al mare in prossimità delle saline di Corneto. Varî affluenti concorrono ad ingrossare questo fiume; cioè la Lenta che, preso nascimento sulla gronda occidentale del Monte Virginio e dai torrenti della Vallascetta, lungo le radici dei monti, per i bagni di Stigliano e Radicata arriva al Mignone prima di Rota. Un altro considerevole tributario è il Verginiese il cui sistema è tutto compreso nel bacino della Tolfa per raccogliersi nel fondo e versarsi nel Mignone sotto Rota. Potrebbe essere considerato come un terzo tributario un grosso fosso che derivato da Civitella Cesi si versa nel detto fiume appena uscito dal bacino tolfetano.

Dietro la piccola catena dei monti del Sasso, le acque della Manziana e di s. Vito dànno origine ad altro piccolo sistema denominato del fosso Vaccino, scorrente in senso contrario alla Lenta per superare i monti e ripiegarsi verso il mare nel quale si versa fra Palo e Torre Flavia.

Dall'esterno piovente dei monti Ceriti precipitano direttamente nel sottoposto mare, molti torrenti di diversa portata fra i quali si notano come maggiori, il Rio Fiume e il Marangone. Il primo viene dalla sommità della Tolfaccia e della Sconfitta, e retto cade nel comune recipiente fra s. Severa e s. Marinella. L'altro dalla Croce di Bura, vien giù fra dirupi, e fra Capo Linaro e Civitavecchia entra nel mare. Tutti questi torrenti non sono inalveati perchè di rapina, e perciò nelle pioggie dirotte si fanno gonfi e veloci da recar danni gravissimi, per la quantità di materiali che trasportano.

La terza parte della costa fra i monti del Sasso e il Tevere, vien egualmente solcata da numerosi scoli che scendono dal declivio meridionale del cono Sabatino per iscaricarsi direttamente nel mare. Fra questi è notevole l'Arone, che conduce il sopravanzo del lago di Bracciano prendendo origine, come si disse, presso il paese di Anguillara e terminando sotto Maccarese. Un altro di questi piccoli sistemi è il Rio Galera, che da s. Maria di Galera, prossima alle ruine della città di Galera sulla via Clodia, raggiunge il Tevere ove fu la foce alluvionale di questo principale fiume.

Tutto il decorso della costa marittima, che trovasi dalla foce della Fiora a quella del moderno Tevere, sarebbe costituita da spiaggia sottile e arenosa se, come abbiamo

veduto, la parte media non fosse occupata dai monti del Sasso e della Tolfa, che, avanzando col Capo Linaro, rendono quel tratto eminentemente scoglioso. Da s. Marinella a Civitavecchia la costa, resa aspra da rupi, è battuta in breccia dalle onde tempestose, che stritolandole le consumano, e i detriti sono portati via, e dati in preda al moto ondoso. Così sono ridotti in sabbie e breccie, e nella direzione dei venti regnanti, rigettati sulle rive per accrescere le spiaggie sottili. E difatti le due coste fra s. Marinella e il Tevere come quella fra Civitavecchia e lo sbocco del Fiora sono sempre in via di avanzamento, specialmente la prima dove pel prolungamento del delta tiberino l'insabbiamento è maggiore.

Ma non basta avere esaminate le acque dei laghi e dei fiumi, conviene eziandio rivolgere lo sguardo alle sorgive che bagnano la Tuscia romana. Tante sono le acque che pullulano in tutta la sua superficie, che ovunque se ne rinvengono svariatissime e di diversa portata, tanto calde che fredde, tanto dolci che minerali. Gli studî idrologici hanno dimostrato che nella sola parte dell' Agro romano che spetta all'Etruria, non v'ha tenimento che non sia dotato di uno o due fontanili per uso campestre. Le acque minerali poi sono tante e così diverse nella loro composizione da rendersi preziose per gli usi terapeutici ai quali vengono destinate. Gli avanzi delle antiche terme che restano in molti luoghi di quell'ampio territorio sono una prova del conto che ne fecero gli antichi, come vengono oggi adoperate nei moderni stabilimenti.

Se si prenda a percorrere il paese per notare, se non tutte, almeno le principali acque minerali, si osserverà che sulla estensione della sponda destra del Tevere, ossia sulla parte etrusca della campagna romana, nessuna di quelle acque minerali si fa vedere; ma se s'imprenda a percorrere la via Aurelia lungo il littorale tirreno, giunti nelle vicinanze di Palo s'incomincieranno a trovare polle di acque acidule, e più oltre alle radici dei monti di Cerveteri zolfi ed acque solfuree; come sotto il Sasso una gessaja derivata dalle stesse emanazioni. Oltrepassata Civitavecchia, sulla via che conduce a Corneto, nelle vicinanze della Torre detta di Orlando v'ha un'altra gessaja, e prossima ad essa, una sorgente acidula detta della Castagnoletta. Sotto Corneto nella valle del Marta esiste un' altra piccola sorgente la cui acqua vien bevuta come salutare.

Se per la via Clodia ci portiamo a Bracciano, sulla sponda settentrionale del lago Sabatino, e al piede del monte di Rocca Romana sono i famosi bagni di Vicarello. Di queste acque acidule termali, si fece tanto uso sì negli antichi tempi come al presente in uno stabilimento terapeutico. Sotto Anguillara, prossima all'Arone, da una ingente massa di lava scaturisce un'acqua mussante per eccesso di acido carbonico, la quale però è rifiutata in medicina per la calce che contiene. Da Bracciano giunti al bosco di Manziana si attraversa una larga solfatara con sorgenti solfuree, ed a s. Vito non molto lungi da questo luogo vedesi una pozza a modo di laghetto, detta la caldaja di s. Vito, nel mezzo della quale erompe con impeto un grosso getto di acqua parimenti solfurea, che poi va a scaricarsi nel Rio Vaccino. Scorrendo sulle radici del Monte Virginio, sotto Canale, al fosso del Biscione, in seno ad una larga solfatara scaturisce un'altra grossa polla solfurea, che vien subito portata via dalle acque dolci del fosso. Ai bagni di Stigliano sul margine della Lenta sono le acque *Stigianae*, o le *Apollinares* degli antichi, rappresentate da un gruppo di sorgenti diverse, acidule,

termali, ferruginose, e solforose, destinate ad usi terapeutici, e così accreditate da richiamarvi un gran numero di bagnanti. Seguitando la via, all'approssimarsi a Rota attraverso la Conca, l'odore d'idrogeno solforato annunzia ancora acque solfuree, ed entrati nel bacino della Tolfa, a fianco del mammellone trachitico che lo domina, ecco un altr'acqua termale acida detta della Caduta, che serve ad un piccolo stabilimento chiamato il Bagnarello della Tolfa. Di qui, saliti i monti di Allumiere e presa la via di Corneto, scesi verso la Mola farnesiana entro un'angusta valle scaturisce l'acqua acidulo-ferruginosa detta del Campaccio, rinomata per le sue virtù deostruenti. Declinando poi per la strada di Civitavecchia, non ancora terminata la discesa dei monti, a circa quattro miglia da quella città si incontrano le vestigia delle sontuose terme Taurine erette da Trajano a causa delle vaste scaturigini di acque acidule, e prossima a queste un'altra analoga detta Sferracavalli. Nè molto lontano da questi ruderi si manifesta l'acqua termale della Ficoncella, che insieme alle precedenti viene usata in medicina.

Per seguitare una ordinata enumerazione delle acque minerali della Tuscia romana, conviene oltrepassare Monterosi e portarsi ove dalla via Cassia si diparte quella di Sutri. Quivi fra Bassano e Caprarola bagnano il terreno altre sorgenti acidule e ferruginose, delle quali si fa poco conto. Ma se si proceda più oltre, ove si biforca la strada di Nepi e Civita Castellana si troverà l'osteria detta di Pucciaga sopra una vasta solfatura, che una impresa industriale dovette abbandonare a causa delle copiose scaturigini di acque solforose. Dopo Nepi la strada conduce a Civita Castellana, presso la quale si trova l'acqua marziale di Falleri, così detta dall'antica Faleria, i cui avanzi si ammirano ancora su quella scaturigine. Da quì ci conviene saltare a Viterbo, città rinomata per la ricchezza delle sue sorgive minerali, per le quali vede ogni anno molti concorrenti. Sono acque diverse, e forse le meglio conosciute di tutta la Tuscia romana, attesochè ebbero autori di gran riputazione, che presero ad esaminarle e illustrarle. Tali sono: l'*acqua della Grotta,* subacida, ferruginosa e termale: l'*acqua della Crociata,* parimenti termale di sapore subacido e odore di gas idrogeno solforato: l'*acqua del Bagnolo,* intermedia fra le precedenti: l'*acqua del Bulicame*, vasta sorgente solforosa, termale che sembra bollire per lo sprigionamento del gas idrogeno solforato, entro un piccolo cratere formato da concrezioni calcari, dal quale l'acqua trabocca per essere impiegata alla macerazione della canape: finalmente chiude la serie un'acqua acidula, ferruginosa, mussante per la quantità di acido carbonico. Al di là di Viterbo nei contorni di Montefiascone pullulano dal suolo altre sorgenti minerali acide delle quali fin quì poca cura si prese. Finalmente citiamo il paese di Latera sul ciglio del cratere vulsinico ove un'altra solfatara somministra acque solforose.

Le emissioni di acque che abbiamo accennate nella Tuscia romana sono quelle di cui abbiamo fin quì più certa notizia. Tuttavia dobbiamo ritenere non essere le sole che si versano per inaffiare il suolo di quella regione. Molte altre ve ne devono essere non peranco scoperte o notate. Sarebbe cosa ottima istituire ricerche scientifiche a tale fine. Però conviene contentarci per ora di ciò che sappiamo, conciossiachè sono sufficienti a far conoscere quanto sia estesa l'idrologia della Tuscia romana.

Esposti i rilievi, che rendono aspra quella contrada del globo, e le valli disegnate

dal corso dei fiumi, conviene vedere se queste parti conservano ancora le forme geografiche che ebbero nella loro primitiva origine. A tal domanda conviene rispondere negativamente: imperocchè l'instancabile natura, anche nel riposo dopo le sue grandi operazioni, lavora nel silenzio per distruggere senza posa ciò che fece per raccogliere i materiali della distruzione, e impiegarli a nuove formazioni. Gli agenti atmosferici, i fiumi, i mari, le piante che aderiscono al suolo, e perfino l'uomo istesso colla sua operosità congiurano a sfigurare la superficie terrestre, e a variarne incessantemente l'aspetto geografico.

I più rilevati cuspidi dei monti sono a preferenza investiti dalla folgore, dalle alternative di temperatura, dalle pioggie, dai geli, e dagli stessi raggî solari che penetrando le roccie ne guastano la tessitura, le disfanno, le stritolano e le fanno cadere in detriti. Le piante erbacee rivestendo di un denso tappeto la superficie del suolo, lo difendono in certo modo da quei nemici; ma non così gli alberi che penetrando colle loro radici nelle fenditure delle roccie, ne sconnettono i massi e li rendono mobili. I torrenti portano via i frammenti, li logorano coll'attrito del trasporto e li convertono in ciottoli nel loro cammino. Giunti al mare e consegnati all'incessante moto ondoso sono assottigliati e ridotti in breccie e sabbie, poi rigettati sulle stesse spiaggie che gli stessi flutti tempestosi logorano nelle loro sporgenze, perchè niente sia sottratto alla gran legge dello sfiguramento di tutta la superficie terrestre. Questi tanti lavori, incominciati fin dal momento in cui emersero i continenti e le isole, non avranno fine se non quando saranno spianati tutti i monti, colmate le valli, e tutto convertito in pianure. Ma non basta ancora, giacchè il ferro dell'agricoltore nel passare tante volte sul terreno, lo rimuove perchè le acque lo sciolgano e lo portino via. L'escavazione delle miniere abbatte estese scogliere, o apre su di esse squarcî immensi alla ricerca delle materie prime, per essere impiegate ai comodi della vita. Cosicchè la trasformazione è incessante su tutta la superficie delle terre emerse.

Nella regione da noi presa ad illustrare questi maravigliosi fenomeni si compiono sotto i nostri occhi, come in tutte le altre contrade della terra. Basta salire sulle altitudini da noi descritte per essere testimonî delle immense ruine a cui sono in preda, e prova ne siano le materie trasportate dai torrenti, e la medesima spiaggia del mare Tirreno, costituita dai detriti dei monti soprastanti condotti dalle acque in movimento traslatorio. Se non che conviene pure avvertire che sui monti della Tuscia romana tutto si dovrebbe compiere in una scala alquanto minore in confronto degli Apennini, attesa la minore altezza; ma la quantità della distruzione è compensata dalla maggior facilità alla decomposizione che offrono le roccie; cosicchè i risultati devono essere presso a poco eguali. Dirò di più che i monti di Allumiere dimostrano a preferenza qual fu l'umana potenza, e cosa l'uomo seppe operare nel decorso dei tempi. Gli enormi squarcî che s'incontrano su quelle giogaje praticati dai minatori per la estrazione del sasso alluminoso, o del minerale ferreo, sono mirabili per la loro estensione, e le materie dei loro rifiuti sono tali che elevarono nuovi monti, che a loro posta vengono altresì distrutti dall'azione generale degli agenti della natura.

Per queste cause inesorabili tutto il suolo etrusco ora è ben diverso da quello che fu nei passati tempi, e lo sarà eziandio nel decorrere dei secoli avvenire, col lento modificarsi della sua esterna configurazione.

II. GEOLOGIA

Dopo una breve esposizione della esterna fisionomia che presenta la Tuscia romana, conviene rivolgere l'attenzione alla sua geologica costituzione, per argomentare da quali cosmiche operazioni ebbe origine. A raggiungere un tal fine, e a maggiore intelligenza di ciò che sto per dire, giova premettere una speciale analisi dei terreni costituenti quella interessante regione, siccome risultati delle formazioni successivamente compiute nel decorso dei fasti della terra.

E primieramente convien rammentare che i geologi fanno tre grandi divisioni di tutti i terreni componenti la superficie terrestre, comprendendo nella prima quelli che furono depositati dalle acque: nella seconda gli elaborati dal fuoco: nella terza quelli modificati e ridotti da un'azione metamorfica sopraggiunta.

Le incessanti sedimentazioni acquee comprese nella prima divisione, costituiscono la scala stratigrafica, e sono quelle che accennano a tutti i tempi trascorsi, o a tutte le epoche che costituiscono la storia geologica del pianeta. Queste in origine furon tutte depositate nella orizzontalità propria delle acque tanto salse che dolci: che se oggi non tutte si trovano mantenere quella loro originaria giacitura, ma talune sollevate e rotte in tanti modi, altre meno spostate, o semplicemente fratturate, altre in fine restate inalterate, ciò dipese da sconvolgimenti di natura avvenuti dopo la loro deposizione.

Alla seconda sezione spettano quelle roccie, che, essendo elaborate dall'interno fuoco terrestre, vennero spinte all'esterno, sbucando in certi distretti per rovesciarsi sulla superficie del globo. Queste tengon la forma di masse ingenti non stratificate o di filoni injettati attraverso le assise nettuniane, ovvero rilevate in cupole o mammelloni sul loro trabocco, come anche trascorse sul suolo in correnti più o meno vaste.

La terza finalmente comprende quelle assise, che subirono cambiamenti metamorfici, per azione del fuoco e dell'acqua, e perciò fatte diverse da quelle di origine.

I. Roccie nettuniane o stratificate.

A) *che subirono maggiori spostamenti.*

Nella Tuscia romana le roccie che dopo la loro sedimentazione marina sperimentarono i più gravi disordini sono le seguenti:

1. Calcarie argillose, compatte, a frattura concoide o scagliosa, in letti da 40-60 centimetri di potenza, biancastri o attraversati da linee e macchie ferruginose di varî colori da risultarne marmi teneri del genere delle paesine.

2. Calcarie similmente argillose, a frattura scagliosa, incerta ovvero concoide a strati sottili corrispondenti all'alberese dei Toscani, di color bigio palombino, qualche volta arrossati dal manganese, ovvero neri dal carbonio. Costituiscono le roccie più numerose e dominanti della Tolfa.

Negli strati palombini rinvenni impressioni di grosse Nemertiliti, e da un pozzo aperto sotto il Monte Castagno nel bacino tolfetano sulla sponda del fosso Cupo, vennero estratte numerose reliquie di varie specie di pesci cicloidi insieme ad una

quantità di piante carbonizzate, terrestri e marine: Muse, Dracene, varie Leguminose, miste ad una quantità di fucoidi, di cui conservo i saggî nel gabinetto della R. Università di Roma.

3. Schisti argillosi, più o meno bigi analoghi ai galestri, sostenuti dalle suddette calcari che presto passano ad un'alternanza di arenarie o macigni, dando principio ad una lunga serie di letti, che scendono sulla esterna pendenza dei monti tolfetani, come si vede lungo la strada da Civitavecchia alle Allumiere. Anche questi letti schistosi e arenosi sono privi di fossili, per quante ricerche siano state fatte.

Le enumerate roccie, sebbene non abbiano ancora somministrati avanzi organici rigorosamente caratteristici, nondimeno per analogia con quelle di altre contrade prossime, non dubiterei considerarle quali rappresentanti l'epoca eocenica. Di esse si compongono i monti maggiori, e sporgenti sulle pianure subapennine, quali sono quelli del gruppo tolfetano, i colli tarquiniensi e tutte quelle altre prominenze sparse nella estensione dell'area etrusca, come le prominenze di Monte Romano, di Barbarano, s. Gio. di Bieda ecc.

B) *Roccie meno sollevate delle precedenti e semplicemente attraversate da fratture.*

4. Marne subapennine inferiori di color bigio-turchino, compatte, depositate in potenti banchi sulle radici dei monti trachitici, e rialzate al disopra del loro ordinario livello.

Sebbene non si conoscano fin quì i loro fossili nella Tuscia romana, nondimeno per la loro giacitura ci sembrano doversi riportare alle marne vaticane ossia al terreno Tortoniano, ovvero al miocene superiore. Ove questi banchi non furono alterati dal metamorfismo mostrano i loro caratteri di origine, come alle falde del Monte Virginio, dalle quali sono estratte per fabbricar laterizî.

5. Calcarie grossolane, che presso di noi sono denominate Macco, o compatte e lapidee, ovvero poco coerenti e farinose: bianche, o giallastre e ferruginose in istrati potenti, alcuno dei quali pieno zeppo di Amfistegine. Contengono altresì una ricca fauna pliocenica composta di fossili che si distinguono per la loro gigantesca statura, come il *Pecten latissimus* Broc. il *Balanus tintinnabulum* Lin. grossissime ostriche e molte foraminifere, riferibili alle assise zancleane, o al terreno Messiniano del Seguenza, vale a dire al pliocene inferiore.

Queste calcarie che mancano nella scala stratigrafica del Monte Mario, si mostrano invece lungo il lido del mare Tirreno sotto forma di leggere prominenze, emergenti per innalzamento, da cui risulta il Capo d'Anzio, i paraggî di Palo e Civitavecchia e specialmente la collina di Corneto, ove si vedono succedere alle marne precedenti cangiate in gesso.

6. Marne turchine superiori alle calcarie del Macco, alternate con letti di sabbione giallastro, a giacitura orizzontale, attraversate da fenditure e salti indicanti più leggeri spostamenti. Sono ricche in fossili identici a quelli della Farnesina presso Roma, e perciò le riteniamo come un pliocene medio.

Poca quantità di queste marne si rinviene nel fondo del bacino di Tolfa; ma in maggior potenza si distendono sulle prominenze Cornetane sovraincombenti al Macco.

Pareto vi osservò i fossili al ponte del Mignone sulla via di Civitavecchia, ed io ebbi il vantaggio di esaminarne la fauna sulla strada da Corneto alle Allumiere.

Le marne, che si estraggono per far mattoni nella strada che da Civitavecchia sale alle Allumiere, appartengono a questo piano.

7. Sabbie gialle di Brocchi, tanto cognite come rappresentanti il pliocene superiore, succedono nella serie ascendente. Fin quì poche ricerche sono state fatte dei loro fossili nella Tuscia romana, però non si erra nel giudicarle analoghe a quelle del Monte Mario, o riferibili al piano Astiano.

Lungo il littorale si distendono in una larga zona per eguagliare la scabrosità delle roccie sollevate sulle quali furono depositate, come si vede al Capo Linaro. Sulla strada da Civitavecchia alla Tolfa si salgono delle terrazze o gradini, indicanti il ritiro delle acque nella lenta e intermittente emersione di questa zona, quali sono quella dei Cappuccini e quella delle terme Taurine.

8. Ghiaje e breccie risultanti dal detrito delle roccie dei monti maggiori, logorate dall'attrito del trasporto marino. Meglio apparenti in prossimità dei monti da cui ebbero origine, sono sempre superiori alle sabbie gialle. In queste breccie non s'incontrano mai ciottoli vulcanici, perchè anteriori alla loro comparsa, come ancora in generale non contengono fossili.

Rappresentano il diluvio apennino, analogo all'alpino dei geologi lombardi, accennano cioè che il periodo terziario è finito, ed ha avuto principio il quaternario coll'epoca diluviale. Qualche raro fossile raccolto in queste breccie appartiene a resti di elefanti o piante terrestri.

Nella Tuscia romana, questi strati sono in genere molto leggeri e sovente mancano.

9. Tufi vulcanici o conglomerati più o meno compatti e lapidei di scorie, lapilli e ceneri eruttati dai tre vulcani sottomarini Vulsinio, Cimino e Sabatino, e impastati dalle onde tempestose allorchè si spandevano su tutto il fondo marino. Si presentano in potenti banchi, che sormontando le precedenti breccie dànno termine alla scala delle assise nettuniane.

I fossili dei tufi vulcanici si riducono a impressioni di foglie o tronchi di piante terrestri e qualche reliquia di elefanti. Questi invero non sono indizî sicuri del tempo a cui riferire i tufi vulcanici, però dal posto che occupano nella scala stratigrafica facilmente si argomenta che le assise vulcaniche spettano all'epoca glaciale, occupando il posto delle morene, e dei massi erratici di Lombardia e del Piemonte, che mancano in Italia ove arsero i vulcani.

Essendo le ultime assise della scala nettuniana, è chiara l'emersione dopo la loro sedimentazione, e perciò formano tutto il soprasuolo etrusco, meno l'arcipelago tolfetano e la collina di Corneto.

C) *Roccie orizzontali inalterate.*

10 Sabbie rosse, ferruginose, di sedimento marino, distese in banchi lungo il lido, ad un livello superiore alle acque moderne: perciò furono dette da Risso delle spiaggie emerse. I fossili contenuti, quasi tutti identici a quelli che ora vivono nel mare Tirreno, e la giacitura di queste sabbie, accennano all'epoca alluvionale succeduta alla glaciale, colla quale termina il periodo quaternario.

11. Sabbie, breccie di trasporto fluviale, risultanti dagli stessi elementi delle diluviali marine, a cui si aggiungono i vulcanici, perchè di formazione posteriore alla comparsa dei crateri eruttivi.

Anche queste sono alluvionali, coeve cioè alle precedenti marine, perchè trasportate dalle grandi correnti che caratterizzano quell'epoca, e perciò sono contenute nei grandi alvei dei fiumi.

I fossili di queste breccie sono numerosi e contengono due faune distinte: una terziaria pliocenica di secondo trasporto, composta di ossa frantumate, logorate e disperse di grossi pachidermi, molti dei quali perduti; la seconda di animali contemporanei di fisionomia moderna, intatte o ben conservate per la mancanza dell'attrito di trasporto.

La grande vallata nella quale serpeggia il moderno Tevere, quelle dei suoi principali affluenti, e di tutti gli altri fiumi ne dànno prove evidenti.

12. Travertini e tartari prodotti da sorgenti calcarifere parimenti alluvionali, compatti e litoidi, sovente ferruginosi. Formano depositi enormi da usarne in vaste proporzioni nell'edilizia, e fra questi si notano i travertini di Civitavecchia a tinte variegate, impiegati anche come marmi decorativi col nome di alabastri. Nel bacino di Tolfa un' altra specie di questi viene adoperata e conosciuta col nome di alabastro del Bagnarello. I fossili di queste roccie sono numerosissimi, spettanti ad animali e piante di acqua dolce e terrestri la maggior parte dei quali vivono tuttora sui luoghi. Vasti depositi di travertino si trovano a Fiano, e ad Orte sulla sponda etrusca del Tevere, quelli di Civita Castellana come quelli già citati in Civitavecchia ai bagni di Trajano, e della Tolfa, o di altre località sono compresi nel territorio etrusco.

13. Depositi moderni, ultimi nella serie dei terreni di sedimento, tanto marini che delle acque dolci, si trovano in quantità più ristretta, sotto forma di tartari, attorno le sorgenti, ovvero costituiti da sabbie e ghiaje sono trasportati dai fiumi, e dati in balìa delle onde marine per essere gettati sulle spiaggie sottili. Contengono vestigia di animali e piante che vivono ancora nel paese, associate ad opere manufatte dall'uomo, caratteristiche di una formazione assolutamente moderna.

II. Roccie ignee o eruttive.

14. Trachite, in masse non stratificate, costituita da sostanza feldspatica, ruvida al tatto, bigia, in cui sono sparsi cristalli di riacolite, quarzo ed altri minerali avventizî che gli dànno aspetto granitico o porfiroide. La forma esterna che assume questa roccia è quella propria delle materie dense e vischiose, cioè di mammelloni, o cupole rilevate e isolate, ovvero trascorsa per il proprio peso sulla superficie del suolo. Le trachiti sono molto variabili non solo negli elementi costitutivi, ma altresì nel colore, trovandosene spesso di quelle che dal bigio passano al verde, al rosso, al giallo, al bruno e perfino al nero a causa del ferro contenuto.

La Tuscia romana comprende un sistema ordinato di sbocchi eruttivi di questa roccia, diffusi ad occupare un' area ben vasta o un distretto trachitico, in ciascuno dei quali la trachite si presenta sotto aspetti diversi. Sui monti di Allumiere, nella contrada del Lume-morto, trovasi una trachite bigia con grossi cristalli di riacolite vetrosa, e condita di minutissimi cristallini brillanti di quarzo che si cava come pietra

refrattaria. Alle cave vecchie gli elementi sono così esili da comparire omogenea, e qualche volta il quarzo si raccoglie in grandi masse cristalline bianche, altre volte adoperato per uso di vetrerie come quello delle Trincere o della cava Ballotta. Al Monte Rovello sotto le Allumiere si trovano geodi rivestite di agate fasciate di bianco e ceruleo, ovvero sotto forma di calcedonie. I così detti diamanti della Tolfa sono cristalli isolati di quarzo, talvolta limpidissimi, seminati specialmente in certi luoghi dell'area trachitica, come sui Poggi della Stella o alle Spiaggie. Prende anche l'aspetto di retinite gialla o nera sulle prominenze della Chiesaccia, o le coste del Marano. Brocchi trovò la trachite passata in ossidiana al Pian del Gallo, con qualche indizio di scorificazione; sulla strada di Mola farnesiana un' ossidiana nera sparsa di bianchi cristalli simile ad una variolite fu rinvenuta in prossimità dell'Elce-mercato.

Altre varietà vengono offerte dai mammelloni propagati a distanze. Al Sasso si vede una trachite omogenea e verdastra: al Monte Virginio la pietra detta di Manziana, che si estrae come refrattaria, è una trachite biancastra ruvida con cristalli vetrosi di riacolite; ha un aspetto semi-decomposto. Al Cimino, Brocchi notò che nella parte inferiore della montagna i cristalli sono più minuti dei superiori, a causa della pressione della massa sovraincombente.

Queste trachiti mammellonari sorsero nella prima e maggiore eruzione, per la quale si sollevarono le roccie stratificate eoceniche che costituiscono i monti più rilevati su tutta l'area etrusca.

15. Ferro, in grossi e ramificati filoni di eruzione, injettati nelle roccie di origine nettuniana, molto diffusi attorno, e in contatto colle masse trachitiche, alle quali sembrano attinenti. Sono di varia potenza, da dicchi di molti metri di spessore, alla sottigliezza capillare penetrata nelle più minute screpolature, da risultarne reti complicatissime. Questo ferro eruttivo si presenta sotto tre diverse specie, cioè la limonite, la magnetite e l'oligisto.

Il ferro limonitico o il sesquiossido di ferro idrato è il più diffuso di tutti nella Tuscia romana. Si presenta amorfo, compatto, talvolta scoriaceo, e di color variabile fra il rosso, il giallo, il bruno. Al Pian Ceraso se ne vedono due enormi dicchi, sui quali vennero aperte ampie escavazioni, dalle quali si diramano i grossi filoni che attraversano le Sbroccate, fino a quelli del Monte Crocifisso sui Poggi della Stella. Al Monte della Roccaccia, similmente altre cave misero a giorno un intralcio di grossi filoni, e al Campaccio sotto le Allumiere, ne dovrebbero ricorrere anche potenti penetrazioni, a giudicare dalle antiche lavorazioni ivi praticate.

Necessario poi si rende notare che questo minerale non è libero dallo zolfo e dal fosforo, che lo ridussero in solfuro e in fosfato. Conciossiachè si vede serpeggiare la pirite entro la massa limonitica, o sulla sua superficie, e in varie escavazioni dei minatori, si sono appalesate materie tinte di turchino dovute al bleu di Prussia naturale, o alla vivianite. Nel ferro di Pian Ceraso si contengono minutissime raccolte di cristalli verdastri di ferro fosfato. Ma questi elementi, che guastano la limonite, e fanno ostacolo alla fabricazione della ghisa nel forno fusorio sotto Cibona, non sono costanti perchè qualche volta scompariscono, e specialmente nelle escavazioni profonde.

Queste osservazioni porterebbero a credere che il fosforo e lo zolfo siano sostanze acquisite dopo la eruzione del ferro, ovvero un metamorfismo di questo.

Le calcarie contenenti i filoni di ferro ne sono imbevute, e perciò sempre brune ed ocracee. A tali penetrazioni devonsi attribuire le colorazioni, che rendono pregevoli le pietre paesine dei monti di Tolfa attraversate da linee rette ad angoli determinati da risultarne figure triangolari e variopinte.

La magnetite in minor quantità sui monti di Tolfa, trovasi sempre associata alla limonite. Essa è parimenti amorfa, e dotata più o meno di forza magnetica fino a rendersi polare. Tale unione mi faceva pensare che sia lo stesso ferro limonitico, meno ossidato e non alterato dalle sopraggiunte sostanze straniere.

Il ferro oligisto ha lo stesso aspetto di quello dell'Elba, e si rinviene alla Vallascetta in numerose masse erratiche sparse sulla superficie del suolo, e diffuse sul monte Perazzeto, Lasco della Capra, e fosso Ferrone. La distanza dal centro eruttivo di Tolfa, e la prossimità del Sasso, mi fanno credere quelle masse attinenti piuttosto alle vaste eruzioni trachitiche di questo luogo. Però non si fa uso di questo minerale, non essendo stato mai rinvenuto nella sua giacitura naturale entro le roccie che lo contengono.

E qui fa d'uopo avvertire che alle predette roccie elaborate dal fuoco terrestre si dovrebbe altresì aggiungere l'allumite. Ma siccome questa sostanza, sebbene in origine sia stata una trachite eruttiva, trovasi ora trasformata per metamorfismo; così credo abbiasi a riferire alla terza sezione che segue, siccome una roccia cangiata di natura.

16. Lave basaltine, pietrose, bigie, spesso ribollite, o scoriacee, sotto forma di filoni, ovvero traboccate dai crateri, e corse in correnti più o meno distese in ragione della loro densità. Contengono varî minerali in cristalli disseminati nella loro massa, come i feldspati, gli amfigeni, i pirosseni, i peridoti, le melaniti ecc.

Nella Tuscia romana queste lave si trovano all'intorno dei crateri sottomarini, dei centri eruttivi Vulsinio, Cimino, e Sabatino distese in correnti, in genere di molta potenza e poca estensione, per accusare la loro vischiosa densità.

Sono parimenti di sostanza lavica le scorie, i lapilli, le pomici, le ceneri lanciate dai vulcani atmosferici o sottomarini; ma questi materiali diffusi sul suolo circostante, assumendo i caratteri dei depositi, vanno a far parte delle roccie stratificate, e perciò li abbiamo compresi nella prima sezione, col nome di tufi o conglomerati vulcanici.

17. Zolfo. Anche questa sostanza, quando sotto forma di vapore emana dall'interno della terra, e si solidifica alla sua superficie, dev'essere compresa fra le materie eruttive. Il vapore solfureo penetrato nelle roccie di sedimento vi si sublima per raffreddamento; però a condizione che queste non contengano calce, altrimenti le converte in gesso. Accompagna le eruzioni vulcaniche, e dopo che queste sono estinte resta come testimonio delle passate eruzioni; perciò si trova nei distretti vulcanici raccolto nei conglomerati, e spesso in così gran quantità da costituire più o meno vaste solfatare da lusingare l'industria.

Nella Tuscia romana si possono citare i zolfi di Canale sotto il Monte Virginio, quelli sul ciglio del cratere di Sèrofano; la solfatara di Nemi sulla via Cassia; di Latera sulla sponda del gran bacino Vulsinio, e in altri luoghi di diversa portata.

18. Acido carbonico. Dalle sostanze emanate dalla terra nemmeno si può escludere la esalazione di acido carbonico, che come lo zolfo resta in memoria delle antiche conflagrazioni vulcaniche. Il trasudamento di acido carbonico nella Tuscia è generale e lento, perchè si fa da tutta la superficie del suolo vulcanico, ed è causa della sua fertilità.

III. Roccie metamorfiche.

A) *Roccie ignee alterate o cangiate.*

19. Caolino: argilla plastica a porcellana e refrattaria. È il risultato della semplice decomposizione della trachite operata dagli agenti esterni coi quali è messa in contatto. È finissima, bianca candida, di plasticità diversa secondo il grado di più o meno avanzata decomposizione; spesso è tinta in rosso, in giallo, o variegata dal ferro che contiene.

Derivando dalla trachite si trova ristretta ai monti di Tolfa. Alla cava Gangalandi quella roccia si trova in tutti i gradi di disfacimento, da dura e compatta, ad una sostanza farinosa, resa quasi insolubile. Il villaggio detto La Bianca viene così appellato perchè posto sulla fiancata meridionale del Monte dell'Elceto tutta convertita in candido caolino, sul quale vennero aperte le cave per metterlo in commercio.

20. Ocre. Le terre a colori sono ancora esse dovute al disfacimento dei minerali di ferro, operato dagli agenti atmosferici, e specialmente dall'acqua. Il diverso grado d'ossidazione del ferro, e della sua idratazione, non che l'aggiunta di qualche sostanza avventizia, hanno dato per risultato tante specie di ocre, rosse, gialle, brune ecc. Perciò si trovano sempre associate alle masse di ferro eruttivo.

Sui monti di Tolfa ve ne sono in gran numero, specialmente ove le escavazioni le misero allo scoperto.

21. Allumite. È un solfato doppio di allumina e potassa allo stato pietroso, compatto, bianco ovvero tinto dal ferro in giallastro, rosso o violetto, cristallino e sovente anche cristallizzato. Contiene cristallini di pirite marziale, e ferro idrato. Trovasi in filoni più o meno potenti e serpeggianti nel seno della gran massa trachitica dei monti tolfetani, dalla quale si estrae per far l'allume del commercio.

È un minerale che ha avuto una origine eruttiva, e i massi di trachite semi-decomposta contenuti negli stessi filoni portano a credere che quest'allumite della Tolfa sia stata egualmente una trachite injettata nella prima per una seconda eruzione, poi metamorfosata in allumite per reazioni chimiche. Sembra che questo cangiamento sia derivato dallo stesso solfuro di ferro contenuto, il quale passato in solfato abbia somministrato l'acido solforico alla potassa e all'allumina, lasciando fuori di combinazione il ferro idrato.

Numerose cave sui monti di Allumiere dimostrano questi filoni.

B) *Roccie sedimentarie metamorfiche.*

22. Calcarie cristalline, bianche candide, a grana fina come il marmo statuario, ovvero grossa e luccicante, per le faccie dei cristalli di carbonato di calce compenetrati fra loro, che spesso nelle cavità vedi sorgere in grosse romboidi, ovvero si vedono convertite in masse bianche e traslucide le quali si frazionano in romboedri. Il trovarsi questa riduzione in contatto colle roccie eruttive bastantemente accennano alla causa della loro conversione. La diffusione poi di tale riduzione, l'intensità del metamorfismo, e la estensione per via di vene serpeggianti nelle assise sollevate che si assottigliano e scompariscono a notevoli distanze, dimostrano l'entità di tanta operazione.

Sui monti di Tolfa sembra che questo metamorfismo abbia avuto un centro in quello spazio che intercorre fra il picco della Tolfa e quello della Tolfaccia; imperocchè

quivi in seno alle calcarie cristalline si contiene sparsa e mescolata senz'alcun ordine una quantità di sostanze metalliche, specialmente sotto forma di solfuri, o di carbonati, accompagnati da fluorina, feldspati ecc. da far credere essere stato un grande laboratorio chimico della natura. Ma di questi prodotti torneremo a parlare in seguito.

23. Gessi. Finalmente fra le sostanze metamorfosate si deve annoverare il gesso, risultante dalla conversione delle marne subapennine in solfato di calce per una emanazione solforosa sopraggiunta, la quale cacciò di combinazione l'acido carbonico per impadronirsi della calce. Da questo metamorfismo ebbero origine le gessaje, quando si presentano in estesi depositi.

Sui monti di Tolfa tali ammassi di gesso si trovano alla base dei monti trachitici, sulla quale riposano i letti marnosi. Così si hanno entro il bacino tolfetano, all'Ara vecchia, alle Spinare, a Pian dei Santi; sotto il castello del Sasso, a Frassineto in prossimità dalle trachiti di Monterano e del Monte Virginio, i gessi di Civitavecchia vicino alla Torre d'Orlando, e quelli di Corneto, sulla sponda del Marta. Sono queste tante gessaje usate per la edilizia.

Il seguente quadro sinottico farà meglio conoscere le roccie ora enumerate.

I. Roccie stratificate

A. *sollevate*

Eocene	1. Calcarie argillose compatte, e pietre paesine	
	2. Calcarie argillose palombine: alberese. . .	Nemertiliti
	3. Schisti galestrini e macigni	Pesci e piante

B. *fratturate o mosse*

Miocene sup.e	4. Marne subapennine inferiori	Ricca fauna
Pliocene inf.e	5. Calcarie del Macco.	id.
id. medio	6. Marne turchine	id.
id. sup.e	7. Sabbie gialle	id.
Diluviale	8. Ghiaje e sabbie marine	Resti elefantini
Glaciale	9. Tufi vulcanici.	Vegetabili

C. *orizzontali*

Alluvionale	10. Sabbie ferruginose marine.	Fossili quaternarî
	11. Breccie fluviali	Numerose ossa
	12. Travertini	Fossili d'acqua dolce
Moderna	13. Depositi in via di formazione	Fossili viventi

II. Roccie ignee

14. Trachite
15. Ferro, limonite, magnetite, oligisto
16. Lave vulcaniche
17. Zolfo
18. Acido carbonico

III. Roccie metamorfiche

A. *eruttive*

19. Caolino
20. Ocre
21. Allumite

B. *sedimentarie*

22. Calcarie cristalline
23. Gessi

Se sopra una carta geologica si osservi la distribuzione dei colori indicanti i diversi terreni che compongono la Tuscia romana, sembra che questi siano irregolarmente sparsi e disordinati. Ma, se si presti attenzione alla natura, giacitura, elevazione, e alle scambievoli relazioni di quei stessi terreni, facilmente si vedranno ordinati in ragione delle cause che ne determinarono l'esistenza. Essi sono il risultato

di grandi avvenimenti cosmici, o d'imponenti manifestazioni della possanza di natura, di cui fu teatro quella regione dell'Italia centrale. L'abbozzo di un quadro di tali fenomeni darà una prova di tale verità, e farà meglio conoscere ciò che è la Tuscia romana, rispetto alla storia fisica del globo.

Durante lo svolgimento dell'epoca eocenica correvano secoli tranquilli, i quali permettevano al mare compiere regolarmente quella lunga serie di sedimentazioni che oggi vediamo rappresentate dalle calcari, argille e macigni, sollevate dalla loro naturale orizzontalità per costituire le più rilevate prominenze della Tuscia romana. La regolarità di tali assise chiaramente si accorda colla calma nella natura: ma la scarsezza dei loro fossili, ci concede appena argomentare sotto quale aspetto si trovasse la vita nelle acque terziarie di quella regione. Nondimeno si può dire che il mare eocenico veniva animato da pesci cicloidi, da nemertiliti serpeggianti sopra un fondo tappezzato di fuchi, e da altri prodotti marini. Però è da osservare che fra i fossili delle calcarie alberesi si notano altresì reliquie di piante terrestri come sono le muse, le dracene, le leguminose, le quali accennano a qualche prossima isola, a meno che non vi fossero trasportate da maggiori distanze, ossia dagli Apennini già esistenti. In qualunque modo però possiamo ritenere che nell'epoca eocenica, nella Tuscia romana ancora tutta sommersa, regnava calma e serenità nell'ordine di natura.

Ma non dovette essere così al declinare di quell'epoca, quando non lievi turbamenti dovettero per gradi manifestarsi come precursori di un gran cataclisma, già pronto a mettere a soqquadro tutta intera l'Italia centrale. Una quantità di trachite dall'interno della terra fu spinta ad attraversare la crosta terrestre trascinando seco i brani delle roccie investite, fino ad emergere sul livello di un tempestoso mare. Può ognuno immaginare da quali sconvolgimenti fosse accompagnata un'operazione di tanta entità, quali tremendi terremoti ne fossero i precursori, e come venisse manomesso il paese fatto centro di una emanazione planetaria. Però il fatto è, che il risultato di tanta catastrofe fu la comparsa dei monti tolfetani colle impronte del sollevamento delle loro masse. E difatti un gran corpo di trachite ne forma nocciolo, circondata dalle roccie eoceniche raddrizzate all'intorno, metamorfosate dal contatto e attraversate da filoni di ferro, che accompagnò l'eruzione medesima.

Ma non fu solo quello lo sbocco della materia eruttiva, giacchè allo stato di fusione nell'attraversare le fratture delle roccie di sedimento vi si diffuse, e spandendovisi corse ad occupare un vasto spazio, procurandosi altre uscite ausiliarie, e raggianti dal punto centrale. Il più cospicuo di tali sbocchi secondarî è quello del Sasso, per la quantità di trachite traboccata, e sollevata a notevole altezza sotto forma mammellonare. A questo succedono il Monte Cimino, che segna il punto più prominente di tutta la Tuscia romana; il Monte Virginio; quello della Tolfaccia; della Torre d'Orlando ecc. A tali isolate prominenze, che rendono aspro e ineguale il suolo etrusco, si devono altresì aggiungere quei frapposti rilievi, costituiti dai brani delle roccie eoceniche spinti ad emergere lungo il cammino sotterraneo dalla materia eruttiva, come sono le colline di Monte Romano, i monti tarquiniensi, gl'isolati rilievi di Barbarano, s. Giovanni di Bieda ecc. Così veniamo a comprendere come sulla superficie del mare etrusco, al finire dell'epoca eocenica, comparisse un piccolo arcipelago per rappresentare i rudimenti della Tuscia romana.

Tuttavia una operazione così vasta, per la quale natura spiegò forze straordinarie, venne a poco a poco a declinare e compiere la sua parabola di svolgimento. Imperocchè, dato sfogo ad una pletora planetaria colla emissione di una determinata quantità di materia eruttiva, l'equilibrio fu ristabilito e la contrada riguadagnò la sua prisca tranquillità. Però la superficie del mare non fu più libera; ma interrotta da prominenze emerse o da isole di svariata grandezza.

Allora le nuove prominenze si rivestirono per la prima volta di uno strato di vegetazione terrestre, per servire di nutrimento e ricetto agli animali polmonati che concorsero a prenderne possesso e abitarla. Frattanto nel mare si riordinavano le sedimentazioni mioceniche, che si depositavano sulle radici dei monti emersi, e con esse si restaurava la vita marina, perchè nuove generazioni si venivano svolgendo colla diffusione di nuovi esseri sotto l'influsso climatologico di un' epoca diversa. Nel bacino tolfetano non ci è dato studiare quei fossili, perchè i sedimenti miocenici, furono alterati e guasti da fatti cosmici a cui andarono soggetti dopo la loro deposizione. Ma se quegli stessi strati si esaminino a qualche distanza, ove l'azione metamorfosante non giunse, si vedranno quelle medesime assise piene di conchiglie e zoofiti relativi a quell'epoca indicatori di calma.

Così passavano quei tempi che possiam dire di riposo o di tregua, corsi per preparare segretamente una nuova fase eruttiva che non tardò a comparire sul finire della stessa epoca miocenica. Fu una seconda emissione di trachite quella che venne di nuovo spinta attraverso le fratture della stessa massa centrale, prodotte dal suo raffreddamento, senza traboccare all'esterno come fece la prima. Le osservazioni ci dànno tutto il motivo a credere, che questa seconda emissione di trachite fosse accompagnata da una emissione solfurea, indicata dalla conversione delle marne mioceniche in gesso, e dalle tante sostanze metalliche che sotto forma di solfuri si rinvengono nel seno delle calcarie cristalline in contatto colle masse eruttive, delle quali terremo parola nella terza parte di questo discorso. Che poi una esalazione solfurea accompagnasse la seconda eruzione di trachite, si può facilmente argomentare dagli stessi filoni di questa sostanza che per chimiche reazioni vennero cangiati in allumite, come le marne in gessi. Sebbene dagli effetti di questa seconda eruzione si dimostri essere stata impiegata minor forza della prima, nondimeno fu bastevole ad imprimere ai monti un movimento ascensivo generale, per il quale alcuni di essi si saldarono insieme, e le deposizioni superiori del miocene ridotte in selenite furono messe a giorno sulle radici dei monti. Questo scoprimento si rende apparentissimo presso le Allumiere e nello stesso bacino della Tolfa all'Ara vecchia, alle Spinare, a Pian dei Santi ecc.

Ma anche questa seconda operazione cosmica ebbe il suo fine al principiare dell'epoca pliocenica. I tempi tornarono normali assumendo quella fisionomia che le nuove condizioni dei tempi imprimevano tanto alle stratificazioni sedimentarie quanto alla vita degli esseri. Nella scala dei sedimenti, figurano come primi depositi del pliocene, potenti banchi di una calcaria grossolana, compatta o farinosa, bianca ovvero inquinata di ferro, con amfistegine, che si conosce col nome volgare di Macco, corrispondente al terreno Zancleano o Messiniano di Seguenza. Questi sono pieni di fossili fra i quali trionfano, o si fanno caratteristici sotto forme gigantesche, il *Pecten latissimus* Broc., il *Pecten flabelliformis* Lk., l'*Hinnites Cortesi* Defr., il *Balanus*

tintinnabulum Lin. Però presso di noi queste calcari sono ristrette alla costa tirrena, dove a luogo a luogo si fanno scorgere più o meno rilevate e prominenti. Esse formano il Capo d'Anzio; poi ricompariscono sfiorando sulla spiaggia di Palo e Civitavecchia, infine s'innalzano per formare la collina sulla quale è posta la città di Corneto.

Ovunque poi vogliansi esaminare queste assise, si troveranno sempre rotte e spostate per effetto di commozioni telluriche, specialmente nella prominenza cornetana, ove la giacitura gravemente alterata più che in qualunque altro luogo fa sospettare essere stato questo un centro sismico, dal quale le ondulazioni si diffusero a grandi distanze. Di modo che crediamo non errare nel ritenere che la Tuscia romana, dopo la deposizione del pliocene inferiore, fu per la terza volta agitata e manomessa da un periodo di tremendi terremoti. Ma non basta, perchè un confronto fra le calcarie cornetane, che rappresentano le prime sedimentazioni dell' epoca pliocenica sollevate insieme alle marne gessose del miocene superiore, e le assise del pliocene medio restate orizzontali ad un livello più basso, fa argomentare altresì che a quell'epoca tali calcarie furono sollevate fino ad emergere sul livello del mare e comparire sotto la forma di una nuova isola per essere aggiunta all'arcipelago etrusco.

In questo stato di cose anche il periodo sismico venne a declinare gradatamente per lasciar finalmente libera l'Italia centrale in tutto il restante dell'epoca pliocenica. Le marne e le sabbie che succedono alle calcarie cornetane, non solo si mostrano orizzontali ed intatte, ma altresì con faune così ricche da non errare nel giudicarle parallele alle marne della Farnesina presso Roma, rappresentanti il pliocene medio, e alle sabbie gialle del Monte Mario già tanto cognite, come spettanti al pliocene superiore. Laonde ne viene la conseguenza che il periodo sismico a quei tempi era già finito, e che in tutto il restante dei tempi terziarî nessun turbamento verificossi nell'ordine di natura.

Se non che dallo studio di quei fossili risulta che dopo i terremoti, un lento e graduale abbassamento di temperatura faceva cangiar fisionomia alle successive faune fino al declinare del periodo terziario, quando la serenità del cielo tornò a turbarsi, per divenire fosca e tempestosa. Difatti nell'ascendere la scala delle roccie sedimentarie, le stesse sabbie gialle fossilifere si vedono ingrossare e convertirsi in ghiaje e breccie, indicanti trasporto torrenziale, e mare agitato. Così finisce il periodo terziario ed esordisce il quaternario. Il Monte Mario sulla costa etrusca della gran valle tiberina, mostra scoperta tutta la scala subapennina, da cui si argomenta che alla calma pliocenica succedettero nuovi turbamenti cosmici. Imperocchè se le fine sabbie gialle accennano ad un mare in bonaccia, le sovraincombenti breccie prive di fossili marini accusano un movimento nelle acque, capace di rimuovere e trasportare materiali più grossi per distenderli sulle precedenti sabbie. La causa di tali cangiamenti devesi ricercare sui monti, conciossiachè le burrascose pioggie cadute sulle loro altitudini, dando origine a precipitosi torrenti, trascinarono giù una enorme quantità di ciottoli, che consegnati all'attrito di un mare in tempesta, vennero logorati e ridotti in breccie. Tale è il carattere che assume la prima epoca del periodo quaternario, di cui si trovano le traccie anche nella Tuscia romana, e che perciò prese il nome di epoca diluviale.

La comparsa di tante pioggie fu certamente l'effetto di una esterna depressione del calorico, per cui i vapori acquosi condensandosi nel seno dell'atmosfera si convertirono in acqua. Ma questa causa immediata, sempre più avanzando, rese quei

tempi così disgraziati e climaterici, che non poco ebbe a soffrire la vita degli esseri assoggettati ai più duri trattamenti dalla stessa natura. Se si ricercassero i fossili nelle breccie diluviali si vedrebbe che la fauna, tanto ricca nelle precedenti sabbie gialle, è totalmente scomparsa. Conciossiachè le fragili conchiglie, i delicati zoofiti e tutti gli altri animali e piante marine non reggendo al perenne attrito furono tutti uccisi e distrutti. Che se qualche fossile pur vi si rinviene, questo si riferisce a quei grossi pachidermi che vivendo ancora sugli Apennini furono rapiti e dispersi dalle correnti. Laonde qualche volta vi si osservano ossa elefantine, con tutti i segni di un lungo trasporto, o di altri animali spettanti alla fauna pliocenica manomessa dalle tremende burrasche diluviali.

Ma la depressione del calorico, che fu capace di tanti disastri, lungi dall'arrestarsi, sempre più avanzava, fino a che giunse il punto in cui le acque si convertirono in nevi. Ed ecco un gran cangiamento di scena sul teatro del mondo: ecco il principio dell'epoca glaciale, che succede alla diluviale: ecco i più alti cuspidi montani che incominciano a rivestirsi di nevi perpetue: ecco i ghiacciai che ne discendono: ecco i massi erratici, colla formazione delle morene.

Ora sorge un altro quesito: se, cioè, in tanto disordine di superficie poteva il pianeta terrestre restare impassibile? No certamente, perchè la sua vitale attività tanto sensibile al mantenimento dell'equilibrio dovea rispondere e reagire. Le osservazioni dicono che a quell'epoca un generale e sfrenato vulcanismo irrompendo in ogni direzione si manifestò su tutta la terra, in guisa che, mentre questa era rivestita di ghiacci, trasudava fuoco per tutti i suoi pori. Avvenimento salutare per la vita degli esseri di quei tempi; chè nella grande distruzione della fauna pliocenica l'irraggiamento del calorico terrestre concesse a taluni di loro poter superare il periodo glaciale e così figurare nella fauna moderna. Tali sono gli elefanti, gl'ippopotami, i rinoceronti, i cervi, le jene ed altri, che vivono ancora presso di noi.

Da tali fatti si ricava che il cataclisma vulcanico-glaciale fu il più vasto dei tempi più vicini a noi, e fu quello che, avendo messo a soqquadro tutta intera la faccia del globo, diede l'ultima mano alla figura geografica che tuttora manifesta.

Queste dottrine non sono nuove, essendo state altra volta da me esposte (1), però ho creduto rammentarle per farne più chiaramente l'applicazione alla Tuscia romana, di cui sto trattando. Le indagini e i confronti pertanto, fatti sulle assise della nostra scala stratigrafica, ci portano a stabilire con piena sicurezza, che i conglomerati vulcanici o i tufi sovrastanti alle ghiaje diluviali, rappresentano netta l'epoca glaciale, e sul piovente tirreno dell'Italia centrale tengono il posto del terreno morenico delle regioni subalpine, mancanti dei sedimenti vulcanici.

La zona dei tufi vulcanici è potente ed estesa, e le materie costituenti sono scorie, lapilli, ceneri, pezzi di lave, e roccie erratiche, evidentemente eruttate da quelle medesime bocche che coronano la sommità dei tre coni di dejezione, Vulsinio, Cimino e Sabatino, compresi in tutta l'estensione della Tuscia romana. Questi furono vulcani sottomarini, e perciò le loro materie eruttate, date in preda alle onde, vennero diffuse sul fondo di un gran golfo, sulla normale del quale sono schierati i tre

(1) Ponzi, *Cronaca subapennina*. Atti dell'XI Congresso degli scenziati italiani. Roma, 1873.

accennati crateri, sostenuti dai loro rispettivi coni di dejezione, parallelamente al corso del Tevere. Di modo che se si eccettui la parte occupata dai monti trachitici, tutto il resto della Tuscia romana, ancora sommersa, venne ricoperta dai tufi vulcanici distesi fino alle più lontane spiaggie.

La violenza spiegata, ovvero la intensità delle forze impiegate in quel periodo di terrestre vulcanicità, deve essere stata sorprendente. Imperocchè i numerosi crateri aggruppati sulle prominenze dei coni, dai quali traboccò tanta quantità di materie, e gli stessi sprofondamenti dei bacini Vulsinio e Sabatino, prodotti da sventramento di materie sottratte, non solo accennano alle più gagliarde eruzioni, ma altresì alle numerose intermittenze ripetute per secoli. E in verità, se il vulcanismo etrusco fu suscitato dal freddo glaciale, la sua vita deve aver durato finchè si mantenne la causa produttrice; cioè tutto il tempo dello svolgimento dei ghiacciai, fino al loro più avanzato ritiro.

Se poi si rivolga l'attenzione alle condizioni climatologiche che regnarono in questa parte dell'Italia centrale nel decorrere del gran periodo vulcanico, non sarà difficile argomentare dalla stessa giacitura dei banchi delle materie eruttate, o dei tufi, che il mare sotto il quale esplodevano i fuochi terrestri dovette trovarsi in continua tempesta specialmente nelle più violente emissioni. Questo stato di tremende agitazioni portò la distruzione di tutti i suoi abitatori, o la scomparsa della vita marina. Avvegnachè gli scarsi fossili che fin qui sono stati notati nei tufi vulcanici si riducono a reliquie elefantine, e di vegetabili terrestri, che come nelle sottostanti breccie diluviali scesero dai monti convogliate dai torrenti.

Mentre queste scene di sconvolgimento accadevano nel mare, la sovrastante atmosfera, ove irregolarmente irraggiava tanto calorico insieme ad enorme quantità di vapori, non potea certamente restare tranquilla. Laonde fatta sede delle più intense burrasche dovette scaricare sulle terre emerse, agitate dalle più intense oscillazioni sismiche, rovesci d'acqua tremendi, dai quali venivano generati impetuosi torrenti, capaci di mettere a soqquadro tutto ciò che incontravano per via. In questo modo l'intera natura sdegnata dava le prove più ampie della sua illimitata possanza, nello svolgimento parabolico del gran cataclisma vulcanico-glaciale.

Giova poi far notare che, le assise dei tufi vulcanici sono le ultime nella scala delle deposizioni marine, e perciò si deduce, come conseguenza necessaria, che tali e tante furono le violenze esercitate nell'ascensione delle lave attraverso i cunicoli vulcanici, che il suolo dovette lentamente sollevarsi, tutto intiero e senza alterare la sua forma. Laonde prime a comparire sulla superficie di quel mar tempestoso dovettero essere le sommità dei coni di dejezione sotto l'aspetto d' isole vulcaniche eruttanti, le cui basi sempre più dilatandosi finirono col mettere in secco tutto intero il paese.

Ma tanta catastrofe, che per la quarta volta giunse a manomettere la Tuscia romana, condotta dalla depressione della temperatura terrestre, al rallentarsi di questa dovette eziandio declinare, ed insieme a quella arrestarsi. Imperocchè al rielevarsi della temperie, dato sfogo alle interne congestioni, dovea il pianeta riprendere il suo stato normale. Ed ecco incominciare un' epoca nuova, caratterizzata da fatti ben diversi da quelli fino allora avvenuti: ecco cangiata scena. Il fuoco terrestre dopo aver tanto scorazzato nella Tuscia romana, scomparve lasciando in quella regione lente e

tranquille emanazioni di acido carbonico, e di vapori solfurei, quali reminiscenze del suo lungo soggiorno. Ma non per questo si arrestò l'attività vulcanica della terra, giacchè trasferita nel Lazio, diede principio ad un altro distinto periodo di vita eruttiva, durante il quale per ben quattro volte rianimata, si protrasse per secoli fino a raggiungere i tempi storici.

Col ritorno del calorico incomincia la fusione dei ghiacci, che dal basso in alto si ritirano sulle chinate dei monti, cosicchè si generano immense fiumane scorrenti sopra un suolo di recente emerso. Tale è il carattere che assume l'epoca alluvionale succeduta alla vulcanico-glaciale. Per tali immani correnti trascorse sulle pianure sono scavati quei grandi alvei proporzionati alla loro portata, nel fondo dei quali oggi serpeggiano i fiumi moderni, e dentro i quali vennero convogliati e rimaneggiati tutti i materiali mobili, trascinati giù dai monti, o incontrati per via, e distesi lungo quelle ampie fosse.

I depositi di breccie alluvionali sono enormi, indicando così la lunghezza dei tempi trascorsi per la loro formazione. Però potrebbero in certo modo confondersi con quelli della preceduta epoca diluviale, a causa della identica origine. Ma se voglia farsene un confronto, presto se ne scorgerà la differenza. La limitazione entro l'alveo dei fiumi, la stratificazione propria delle correnti d'acqua dolce, il posto che occupano nella scala stratigrafica, e perfino gli stessi elementi di cui si compongono, somministrano il criterio per giudicarle. Le prime, più antiche, furono depositate dal mare avanti l'apparizione dei vulcani: le seconde fluviali, più recenti, depositate dopo che quelli si estinsero. Ma un altro carattere differenziale viene tratto dai fossili contenuti, giacchè nelle breccie diluviali non si rinvennero che poche ossa elefantine, al contrario nelle alluvionali sono chiare e patenti due faune diverse. Una più vecchia scesa dagli Apennini per la fusione delle nevi; l'altra contemporanea e propria della pianura.

La più vecchia di queste faune viene costituita dai resti di quegli esseri che menarono i loro giorni sui monti, quando ancora le sottostanti pianure erano ricoperte dal mare, e restati lassù compresi nei ghiacci fino alla loro fusione. La fisionomia di questa fauna è pliocenica, comprendendo i maggiori pachidermi, grandi carnivori, ruminanti, solipedi, uccelli ecc. molti dei quali perduti, e le cui ossa avendo subìto un più lungo trasporto si trovano separate, sparse senz'ordine, e logorate dall'attrito. Quelli invece della fauna più giovane spettano quasi tutti ad animali viventi ancora nel paese, come il cane, il porco, il tasso ecc., riunite in scheletri intieri con le lore apofisi non logorate indicanti non avere subìto il trasporto, o almeno a poca distanza. Queste osservazioni vennero fatte a preferenza nei depositi alluvionali del Tevere e dei suoi affluenti, lungo il corso che circoscrive la Tuscia romana, nei quali tanta è la copia delle ossa fossili da considerarli come tanti cimiteri. Le cave di breccie di ponte Molle, di Tor di Quinto presso Roma, aperte sulla costa etrusca della gran valle Tiberina, ne dànno esempio luminoso.

L'epoca alluvionale si distingue altresì per i suoi enormi banchi di travertino, compatto e litoide, depositati in grande quantità da acque calcarifere, e di cui facciamo tanto uso come pietre da costruzione. Questa è una formazione che dura ancora, ma così indebolita, da non somministrare altro che tartari e stalattiti. Ordinariamente sono pieni di resti di animali e piante proprî di quei tempi, tanto terrestri, quanto di acqua dolce, dandoci ampia dimostrazione della fauna alluvionale per la maggior parte

risultante di specie che vivono tuttora presso di noi. Vi si comprendono conferve, alghe, ed altre piante lacustri e fluviali, miste a foglie e tronchi di alberi terrestri, gusci di molluschi di acqua dolce e terrestri, sovente in quantità mirabile, faune di un grande interesse scientifico perchè dimostrano la restaurazione della vita sulla terra, con assumere la fisionomia moderna. I travertini di Orte, Civitacastellana e di altre località della Tuscia romana possono essere studiati come dimostrazioni dell'operosità della natura nel riordinamento della vita nell'epoca alluvionale.

Ma finalmente quell'epoca venne a compiersi coll'arresto del rialzamento di temperatura dove fu raggiunto il punto di equilibrio fra il pianeta e lo spazio. Allora cessò la fusione delle nevi e si fissò la loro linea di fusione sulle chinate dei monti al punto in cui oggi la vediamo. Ed ecco scomparse le grandi fiumane: ecco le acque ridotte ai corsi attuali: ecco la superficie terrestre allo stato moderno in cui si vedono stampate le vestigia delle passate vicende cosmiche.

L'epoca moderna è raggiunta; epoca di serenità, e di libero esercizio della vita degli esseri che popolano la terra, e perciò sembrerebbe interamente passato il gran cataclisma vulcanico-glaciale, che ci ha preceduto. Eppure non è così; giacchè non possiamo credere estinta o assopita quella operosità planetaria, sempre attiva per compiere le funzioni necessarie al mantenimento dell'equilibrio di natura. La vulcanicità non è spenta, e, se presso di noi scomparvero le esterne conflagrazioni, nella parte estrema dell'Italia sono sempre aperte le sue comunicazioni fra l'interno e la circostante atmosfera. I perenni trasudamenti del suolo, e le sue trepidazioni bastantemente accennano che il gran vulcanismo spiegato nella Tuscia romana durante l'epoca glaciale non è del tutto spento, ma conserva ancora sotto di noi un'attività che potrebbe rianimarsi.

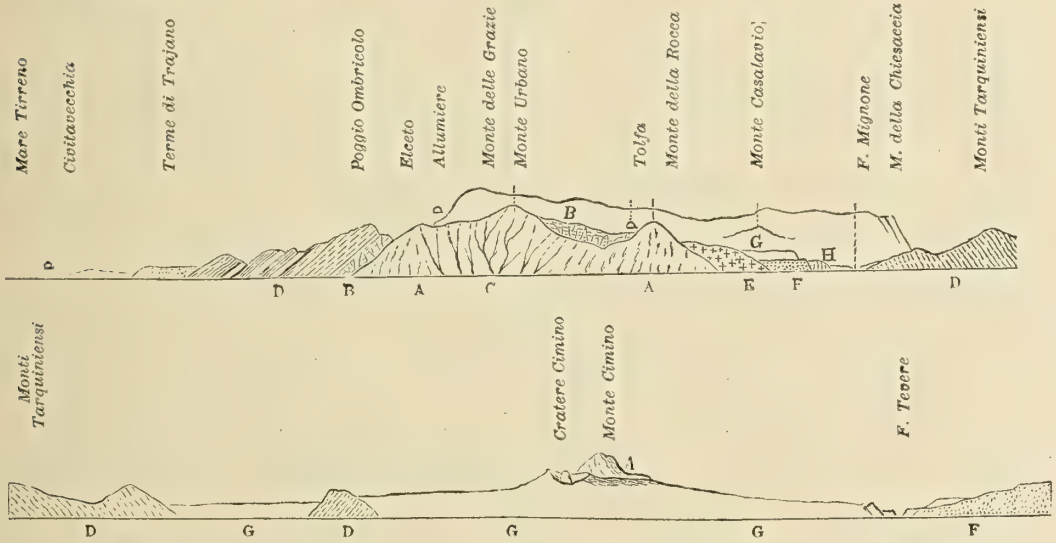
Le moderne emanazioni sul suolo etrusco si manifestano sotto forma vaporosa, da cui si generano le acque minerali e termali. I vapori che esalano dalle interne materie incandescenti filtrano attraverso i meati della crosta terrestre per ispandersi e dissiparsi nell'aria ambiente. In un paese fatto preda del vulcanismo, allo spegnersi dei fuochi, resta un generale trasudamento di acido carbonico, che concentrato in certi punti costituisce le mofete, o sorgenti di quel gas più o meno copiose. A questo si aggiunge il vapore idro-solforoso, altro residuo di vulcanismo, che localizzato dà origine alle solfatare e alle gessaje. Le acque esterne penetrate e circolanti nelle fenditure della crosta terrestre, incontrandosi con quei gas sotto l'influsso della pressione, si acidificano, e acquistate nuove facoltà solventi, dànno motivo ad una lunga serie di chimiche combinazioni. Perciò nell' attraversare le roccie ne sciolgono i principî solubili per ricomparire all' esterno colla qualifica di sorgenti minerali o termali in ragione della profondità da cui derivano. Ed ecco perchè le acque si trovano ricche di tante sostanze avventizie, sì che può dirsi ciascuna godere di una composizione propria e distinta.

Fin qui non conosciamo mofete nella Tuscia romana; però è necessario avvertire che un generale trasudamento su tutta la superficie vulcanica si esercita lento e quasi insensibile, da farla considerare come una immensa mofeta alla quale in gran parte si deve attribuire la sua fertilità. Ma se mancano concentramenti di acido carbonico non difettano i solfurei. Questi vapori emanati dall'interno si trovano sublimati nelle assise dei tufi vulcanici, per cui risultano gravidi di quell'elemento per costituire le

nostre solfatare: ovvero nelle marne subapennine combinati colla calce sotto forma di selenite o gesso idrato, di cui si hanno molti esempî nell'estensione del territorio etrusco.

Altro residuo di vulcanicità terrestre sono i terremoti, a cui vanno soggetti i paesi abbandonati dal fuoco; sebbene ancor essi in via di lentissima estinzione. A questi fenomeni sismici crediamo eziandio riferire quelle lentissime oscillazioni del suolo che si rendono sensibili solo dopo il corso di anni. Conviene dire che la scorza solida della terra, considerata in una grande estensione, sia pieghevole come il cuoio di un animale, altrimenti non potrebbe compiere quelle larghe ondulazioni che contribuiscono a deformare l'aspetto dei continenti, e ad alterare le loro relazioni col mare. Tali fatti oramai ben constatati nella Svezia e nel Groenland, si osservano anche in Italia, per dare ragione di certi avanzamenti della costa, ovvero di scoprimento di fondo che non potrebbero spiegarsi col solo insabbiamento marino. Nella mia Memoria *sul Tevere e il suo Delta* (1) procurai dimostrare, l'avanzamento della foce di quel fiume così pronunciato, doversi in molta parte al lento innalzamento della costa tirrena, come nelle spiaggie venete si rimarca invece una depressione. Nè mancano prove di questo fenomeno sul lido etrusco; imperocchè sulle scogliere che corrono dal Capo Linaro a Civitavecchia s'incontra qualche zona di litodomi, o altri animali marini terebranti correre orizzontale ad un'altezza, a cui il moderno livello del mare non arriva neppure nelle più violenti tempeste. Però su questi fatti si desiderano ancora più minute indagini.

Quello che abbiamo detto fin qui, tanto della forma geografica, quanto della natura geologica della Tuscia romana, altro non è che il prospetto di un quadro, per averne un concetto preventivo, e per preparare il campo a ciò che vado a dire della Tolfa. E poichè meglio e con maggiore intelligenza questa semplice esposizione consegua il suo scopo, aggiungo il seguente spaccato geologico da N-E a S-O per conoscere graficamente l'ordine e la distribuzione dei terreni.



A. Trachite
B. Roccie metamorfiche
C. Filoni di allumite
D. Macigni e alberese. *Eocene*
E. Gessi . . . . . *Miocene*
F. Sabbie e marne . . . . . *Pliocene*
G. Tufi vulcanici . . . . . *Glaciale*
H. Travertini . . . . . *Alluvionale*

(1) Ponzi, *Il Tevere e il suo Delta*. Rivista marittima giugno-luglio 1876.

III. TOLFA

Al miglior conseguimento del proposto fine, dopo aver sparsa qualche poco di luce, e condotto il lettore sul campo geografico e geologico della Tuscia romana, fa d'uopo risalire alla Tolfa per farvi ulteriori considerazioni scientifiche, e apprezzare nel miglior modo possibile le opere di natura dalle quali ebbero origine quei monti.

Abbiamo fatto conoscere che il gruppo delle prominenze tolfetane si compone di un gran nocciolo di trachite cinto dalle assise nettuniane dei tempi eocenici, raddrizzate e fatte prominenti dal sollevamento di quella stessa massa. Abbiamo altresì riferito, che quello non fu il solo sbocco delle materie emanate dalla terra, ma che altri di minor conto compariscono sotto forma di mammelloni isolati a distanze diverse, per indicare che la eruzione non si limitò al centro tolfetano, ma si diffuse ad occupare una gran parte della Tuscia romana. Questa distribuzione di parti, che a prima vista si direbbe casuale, trovasi invece ordinata dalla stessa legge di natura che presiede a tutte le sue grandi operazioni, solamente modificata per isvariate circostanze che su di essa influirono. Se ciò è vero, chi non vede nella distribuzione stessa delle parti, rappresentanti nella Tuscia romana il sistema trachitico, una certa analogia cogli apparecchi vulcanici? Tutti sanno che in questi un grande cratere posto nel centro è cinto da una ghirlanda di sbocchi minori che gli prestan l'ufficio di ausiliarî, in numero e proporzioni determinate dall'afflusso lavico, e dalla quantità della forza eruttiva spiegata. Se questo costituisce un sistema vulcanico, io non saprei trovare una differenza essenziale nella forma che presentano quei due prodotti di cosmiche operazioni. Però non si può negare che una più minuta investigazione non mancherebbe di farvi conoscere delle discrepanze secondarie per le quali i due apparecchi pur si distinguono.

E primieramente farò rilevare le dimensioni, che nel sistema trachitico sono così vaste da occupare un' area estesissima, che non si osserva mai nei vulcanici, per quanto si vogliano sviluppati nella più grande scala. In secondo luogo dirò che io nato e vissuto sempre in mezzo ai vecchi vulcani d'Italia, non seppi mai scorgere in essi quel cratere di sollevamento proclamato dalla teorica del celebre De Buch, tanto contrastata nella scienza, poi definitivamente abbandonata. Eppure per la verità devo confessare che nel gruppo dei monti di Tolfa se ne ha un esempio chiaro e lampante.

Nei veri vulcani il principale sbocco o il cratere centrale trovasi sulla sommità di un cono di dejezione rilevato per sovrapposizione di materie scaraventate dall'impeto eruttivo. Nel sistema tolfetano al contrario, viene circondato dalle più vecchie roccie nettuniane spostate e sollevate dall'innalzamento della stessa massa che racchiudono. Nè vi mancano i barancos o le fenditure raggianti delle roccie spostate per effetto dell'innalzamento, come vennero dimostrate dall'illustre autore nei crateri di sollevamento, e come meglio vedremo in seguito.

La terza differenza consiste nelle materie eruttate: avvegnachè le trachiti dense, vischiose e meno scorrevoli delle lave non si vedono mai distese in lunghe correnti come queste, ma rilevate e solidificate in cupole o in isolati mammelloni.

Una quarta distinzione si ha nel vedere le eruzioni trachitiche mai accompagnate

da quella enorme quantità di gas, che emettono i veri vulcani, per i quali si vedono le lave ribollite e scoriacee, e si producono i lapilli e le scorie dei coni di dejezione mancanti assolutamente nel sistema tolfetano.

Se fossi chiamato a dar giudizio su queste esposte differenze, per quanto permettono le mie facoltà, io direi che l'apparecchio trachitico etrusco rappresenta un passaggio della forma plutonica alla vulcanica propriamente detta. Imperocchè, se consideriamo l'epoca a cui convien riferirlo, abbiamo tutto il motivo a sospettare che i pregressi plutonismi, dopo aver sollevate tante catene di montagne, scemate le forze planetarie o resa più difficile a spezzarsi la crosta terrestre, dovettero restringersi e localizzarsi, dove questa opponeva loro minor resistenza. Cosicchè, profittando delle vecchie fratture, l'emanazione potè comparire all'esterno sotto una forma ridotta, che per gradi assumeva il carattere vulcanico. Io non saprei dar migliore spiegazione al fatto; però non intendo stabilire un canone di scienza. È questa un'opinione suggerita dal mio modo di vedere. L'accetti chi vuole.

Abbiamo notata l'epoca eocenica corsa tranquilla avanti la catastrofe tolfetana. Ma Dio sa da quanto tempo si preparava in segreto nelle viscere terrestri una operazione di tanto momento. Una immensa quantità di materia trachitica raccolta e addensata sotto l'oppressione della crosta terrestre gravitante su di essa, e portata alla massima tensione, attendeva il momento di esplodere per ispandersi e guadagnare spazio, non altrimenti che nelle caldaje, allorchè si determina l'apertura delle valvole di sicurezza, rappresentate nel caso nostro dalle stesse soluzioni di continuità delle roccie sovraincombenti. Così in certo modo ci facciamo ragione, come un cataclisma di tanta entità sia derivato da una interna reazione della materia fusa, suscitata contro la crosta solida della terra gravitante su di essa, fino a superarne l'opposizione.

Data come probabile questa ipotesi, ben si comprende che, giunto l'istante opportuno, fosse spinta la materia eruttiva a penetrare nelle numerose fenditure della crosta terrestre, con tale violenza non solo da farla ascendere contro la legge di gravitazione, ma altresì da superare tutti gli ostacoli incontrati fino a comparire su diversi punti dell'esterna superficie. Così ne dovette risultare una rete complicatissima di filoni trachitici diffusa entro uno spazio proporzionato alla quantità della materia, e della forza eruttiva impiegata.

Nè è a dire che in una operazione di quella fatta, non ne risentisse tutto intero il paese investito. Imperocchè terremoti tremendi e sempre crescenti, dovettero accompagnare l'ascendente e stentato cammino della materia eruttiva attraverso le scabrosità fratturali. Nè il mare sotto cui si esercitavano tali violenze potea restare esente dal risentirne gli effetti. Esso parimenti dovea essere in preda a continui maremoti, e a perenni tempeste, alle quali la sovrastante atmosfera dovea rispondere con tremenda bufera.

Ma l'eruzione incominciata non potea arrestarsi, dovea correre al suo completo svolgimento. La materia trachitica, superati i sedimenti cretacei, sembra si arrestasse per mancanza di continuità di fratture, e perciò costretta a spandersi fra quelle roccie, vi si raccolse in tanta quantità da raddoppiare lo sforzo eruttivo per vincere l'ostacolo che le opponevano le sovrastanti assise eoceniche. Ed ecco sorgere una intumescenza

ove oggi sono i monti di Tolfa fino ad emergere dalle acque marine, e comparire, siccome un' isola nel seno di un vasto mare. E qui non è difficile immaginare quali devono essere stati gli effetti di questo sollevamento sulle assise stratificate. Una lastra di vetro colpita da una palla, si frattura a modo di una stella o di un irraggiamento attorno il colpo ricevuto. Similmente dovette avvenire sulla intumescenza tolfetana; imperocchè concentrata la spinta sollevatrice alla sommità della intumescenza, questa si dovette rompere irraggiando all'intorno, e le soluzioni di continuità divaricarsi nell'ascensione. Così ebbero origine i barancos notati dal De Buch nei crateri di sollevamento, che nel caso nostro vediamo rappresentati dal corso del Marangone, dal Rio-fiume, dal canale di Rota ecc.

Peraltro alla sommità di quella prominenza la fratturazione dovea essere maggiore, atteso che la forza ascensiva era in essa concentrata. Cosicchè di mano in mano che le soluzioni di continuità si propagavano, la materia fusa vi s'introduceva producendo una rete complicatissima di filoncelli, e recando nella roccia penetrata notevoli alterazioni metamorfiche.

Nè si deve credere che questo racconto sia il risultato di una fervida immaginazione. Esso invece è suggerito da osservazioni che ognuno può ripetere sui monti della Tolfa. Le roccie che fiancheggiano la salita della Madonna della Sughera ne sono una prova.

La collina è un addossamento delle roccie sedimentarie alla trachite del Monte della Rocca, e perciò si vede tutta attraversata da filoni di quella sostanza, che si incrociano a modo di una grossa rete entro una roccia alterata, che indica ancora le sue primitive stratificazioni. Ma più chiara dimostrazione si ha alla cava Gangalandi aperta fra Tolfa e Allumiere. È questo un lunghissimo taglio fatto per l'estrazione del sasso alluminoso, e così approfondato nelle viscere del monte da raggiungere la gran massa eruttiva che si vede sfiorare nel fondo del gran cavo. Laonde le sue pareti tagliate a picco mostrano evidentemente il lavoro compito dalla natura in quella grande impresa.

Dalla sommità della gran massa eruttiva si vede spiccare un numero prodigioso di filoncelli, che diramandosi in tutti i sensi vi formano un intralcio complicatissimo, o piuttosto un infiltramento diffuso in tutta la roccia, ridotto in bianco caolino, e perciò apparentissimo sopra il fondo scuro e terroso delle assise sollevate, e cotte. Dalla quale disposizione si può facilmente argomentare qual forza immane spiegasse la densa materia a penetrare le più minute fenditure e assottigliarvisi a quel modo.

Peraltro questo infiltramento non è eguale su tutta la superficie di quell' area eruttiva; giacchè ove la sottoposta trachite potè aprirsi più ampia via, e sbucar fuori dall' indumento per più vasti meati, vi si sollevò sotto forma di cupole o mammelloni in grazia della sua densità vischiosa, e del rapido raffreddamento in contatto della fredda atmosfera. Moltissimi sono tali rilievi, di varia grandezza ed elevazione; però non tutti compariscono, perchè i più bassi furono in seguito ricoperti e nascosti dalle deposizioni subapennine di più recente data. Quelli che ci sono dati a citare nell'area eruttiva centrale, sono i seguenti: Il Monte dell'Elceto; del Fageto; di Cibona. — La rocca della Tolfa. — La Tolficciola. — Il Poggio della Capanna. — Il Monte del Ragano. — Il Monte Casalavio. — La Parentina. — Il Monte delle Grazie; Monte

Rovello; Poggio delle Buffale; Monte del Castelletto; Monte Cozzone; Monte di s. Angelo, e forse altri sfuggiti alle osservazioni.

Nel citare questi picchi eruttivi, devo qui richiamare l'attenzione a quell'altipiano trachitico che abbiamo detto scendere fra tramontana e ponente dalla cresta del Monte delle Grazie, del Monte Fischio e della Chiesaccia. Non senza qualche dubbio o incertezza mi è sembrato quella chinata prodotta da una quantità enorme di materia traboccata da un grande squarcio che, cedendo al proprio peso ad onta della sua densità, trascorresse sul suolo fino a raggiungere le sottostanti pianure subapennine: quivi giunta si distese in larghi festoni, come fanno le lave, sopra piani orizzontali o poco inclinati. Le allungate prominenze di Cencelli e di Palano non rappresenterebbero che la culatta di una di quelle nappe. A questo giudizio fui condotto da due osservazioni: una è l'aspetto che presenta il profilo di quel declivio veduto dal Poggio Ombricolo: l'altra è la sovrapposizione della trachite trascorsa, alle roccie nettuniane visibile, sulla via che dalle Allumiere conduce alla Mola farnesiana nel fondo della valle del Campaccio. Del resto la superficie di quella colata, è in genere alquanto ondeggiante, ma interrotta da certe prominenze che potrebbero essere considerate come sommità di altri mammelloni compresi nella corrente medesima, ed emergenti sulla sua superficie. Tale è la spiegazione che credo per ora dare a quel fatto, però confesso che alla completa soluzione del problema occorrono ancora ulteriori osservazioni.

L'ingente quantità di ferro che si rinviene sui monti della Tolfa, sarei di opinione, abbiasi a riferire siccome attinente alla grande eruzione trachitica che sollevò quel gruppo di prominenze. Esso si presenta sotto forma eruttiva associata e compresa nel seno di calcarie cristalline, che circondano la gran massa eruttiva centrale, e dove si dirama in grossi filoni di contatto. Non avendo mai osservato tali dicchi penetrati nelle masse trachitiche, mi sembra logico che l'emanazione ferrea fu posteriore a quella, o immediatamente susseguente, come non trovando mai le masse ferree penetrate dalla sostanza delle roccie incassanti, fa credere che il metamorfismo fu posteriore alla eruzione medesima.

Abbiamo già detto che il minerale di tali filoni è la limonite, che in certi punti assume il carattere di magnetite. È compatto, amorfo, e varia nei colori fra il rosso, il giallo, il bruno. Però questo minerale contiene eziandio il fosforo in proporzioni diverse, come anche lo zolfo sotto la forma di piriti. Ma, siccome le osservazioni portano a credere, che tali elementi nemici dell'industria metallurgica non siano di origine, ma sopraggiunti alla loro formazione, così di questo fenomeno terremo meglio parola allorchè dovremo parlare di una seconda eruzione trachitica avvenuta su quei monti.

Una vasta area circoscritta da Fontana Inversa, la Tolfaccia, la Tolficciola, e dalle prominenze che corrono fra la Tolfa e le Allumiere, comprendente i Poggi della Stella, richiama a preferenza l'attenzione del geologo non meno che del mineralogo, siccome un centro di vasto metamorfismo o di un immenso laboratorio chimico della natura da cui uscirono maravigliosi prodotti. Quivi le roccie eoceniche furono rese cristalline e saccaroidi, lasciando qua e là le traccie dei loro originarî caratteri, per cui si riconoscono per calcarie alberesi e macigni. Da quest'area si diparte una gran rete di venature spatiche che si diffonde, diramandosi e assottigliandosi fino a notevoli

distanze, a modo di un vasto irraggiamento. In quell'area trovansi comprese le più grandi masse di ferro limonitico, e fra esse si trovano sparsi e sublimati in gruppi cristallini tanti altri metalli in forma di solfuri, associati a diverse sostanze non metalliche, delle quali daremo conto in seguito, e perciò venne distinta col nome di bacino metallifero: un vero gabinetto mineralogico.

Peraltro i filoni di ferro non sono esclusivamente compresi in quell'area; imperocchè si trovano anche fuori di essa, sempre in vicinanza delle trachiti, e in certe località prendono proporzioni gigantesche da costituire dei distretti ferriferi o addensamenti, da indicare centri di emanazione. Quivi intralci complicatissimi dànno origine a diramazioni secondarie successivamente minori, che col propagarsi si riducono in filetti capillari, o in delicatissime reti, scorrenti colle vene spatiche fino a notevoli distanze. Al Pian Ceraso, in fondo alla valle che separa i Poggi della Stella dalle prominenze della Tolfaccia, due enormi dicchi di ferro limonitico messi allo scoperto dai minatori si vedono attraversare, dai quali si propagano tutti quei grossi filoni che trascorrono lo Scopeto, e le Sbroccate sotto Cibona, in mezzo ai quali fu collocato il forno fusorio. Al Poggio della Capanna sotto la Tolfa si osservano addossate alla roccia trachitica le assise sedimentarie, con filoni di ferro sui quali si riconoscono ancora le passate lavorazioni. Al Monte Castagno, le roccie imbevute di carbonio sono penetrate da una sottile rete di ferro convertita in grafite o piombaggine. Alla Roccaccia, entro il baranco del Marangone, potenti filoni di ferro limonitico furono fatti soggetto di escavazione, e perciò la contrada fu detta la cava del ferro. Al Campaccio sotto le Allumiere, vecchie escavazioni fecero manifesti altri grossi filoni di ferro, come in molti altri luoghi estese roccie ferruginose accennano a giacimenti di quel metallo sotto di loro.

Nè manca sui monti della Tolfa il ferro oligisto. Allorchè con il sig. Angelo Bonizi, distinto proprietario della Tolfa, il quale oltrechè mi prestava alloggio, mi accompagnava somministrando tutti i mezzi alle mie peregrinazioni, ci furono presentati da contadini pezzi di ferro oligisto, che dissero raccolti alla Vallascetta sul confine del territorio tolfetano con quello del Sasso, essi mi sembrarono così simili a quelli dell'isola d'Elba, che non credetti, anzi li giudicai derivati dal disperdimento di un qualche deposito di minerale elbano, abbandonato sulla via, allorchè veniva trasportato ad alcuno di quei piccoli forni di cui si vedono le vestigia lungo il corso della Lenta. Però ad accertarmi del fatto, mi recai sulla faccia del luogo, ove dovetti convincermi che quella quantità erratica di ferro oligisto era propria del luogo e derivata forse dallo sfioramento di scarsi filoni nascosti fra le macerie. Osservazione di non minore interesse, perchè fa sospettare una analogia fra le eruzioni dell'Elba e le tolfetane.

Ma perchè quella differenza di minerale in luoghi così prossimi fra loro? A questo problema sarà più facile dare una qualche risposta dopo aver tenuta parola degli sbocchi secondarî o ausiliarî.

Mentre sui monti della Tolfa si compiva il gran fenomeno del sollevamento di una gran massa di trachite fusa, un' altra parte di questa sostanza correva per la continuità delle fratture della crosta terrestre ad occupare spazio fino all' esaurimento delle forze impellenti. Ma questo irraggiamento sotterraneo non potea farsi

liberamente, attesa la scabrosità delle pareti fratturali, e soprattutto la loro irregolare tortuosità dovea rendere il cammino molto stentato. Ed ecco ripetuti urti sismici: ecco tutto il paese messo a soqquadro da gagliardi terremoti. In questo trascorrimento, dove per complicazione di fratture la vischiosità della materia si trovò compresa in cavità di difficile uscita, vi si arrestò e vi si raccolse stipata. Così si formarono delle specie di gangli, o nodi vitali, che come centri secondarî di azione eruttiva furono capaci di ripetere in una scala minore gli stessi fenomeni spiegati nel centro tolfetano. Laonde su varî punti della Tuscia romana si sollevarono le roccie stratificate loro sopraincombenti, fino a comparire colla loro intumescenza sul livello del mare subapennino.

Ben si comprende come queste violenze secondarie dovettero aprire nuove fratture nelle roccie investite, e dilatare le vecchie per le quali la materia scorrente potè deviare e spandersi senza sbucare all'esterno. In questo caso sembrano trovarsi i colli tarquiniensi, rappresentanti una protuberanza, nel ventre della quale si dovrebbe celare una massa trachitica; similmente dovrebbero essere le prominenze di Monte Romano, e quegli altri isolotti calcarei sparsi sulle pianure etrusche.

Che se poi la materia trachitica scorrente sotterra riuscì a sbucar fuori dalla sommità della intumescenza, in ragione della quantità di forze impiegate, o si aprì un'ampia via per traboccare in gran copia, ovvero vi si sollevò per la sua vischiosa densità e sollecito raffreddamento, in un rilievo o mammellone isolato. Il primo caso si verifica sui monti del Sasso prossimi al centro tolfetano, gli altri a distanze più o meno grandi da esso.

Lo sbocco eruttivo del Sasso o il maggiore di tutti gli altri ausiliarî, sia per la vastità dei meati aperti, sia per la copia della materia che vi fu spinta, occupa un'area notevole, e perciò non deve far meraviglia se in essa si ripeterono gli stessi fenomeni della eruzione centrale, sempre però in una scala proporzionale. Quivi si vede la massa trachitica rilevata in varî punti sotto forma di mammelloni, sopra uno dei quali venne eretto il castello del Sasso che dà nome alla contrada. Le roccie metamorfiche egualmente la circondano, e le masse ferree vi si addensano come sui monti della Tolfa. Se non che si deve avvertire che le formazioni del Sasso, mostrano una differenza nella loro natura mineralogica per cui si distinguono dalle tolfetane. Quivi sembra che una causa modificatrice presiedette a quelle operazioni cosmiche da cui derivarono prodotti differenti. Sovente le trachiti si trovano disseminate di piccoli prismetti neri, forse di amfibolo, ovvero si mostrano omogenee di vario colore e come rifuse. Le calcarie cristalline contengono altri minerali, e il ferro oligisto della prossima Vallascetta e dei fossi Ferrone e del Ficaro, sostituisce il limonitico del centro tolfetano.

Ad eccezione del Sasso tutti gli altri trabocchi trachitici si presentano rilevati in cupole su vaste gibbosità, o emergenti da sedimenti posteriori che ne ammantarono le basi. La Tolfaccia viene costituita da un picco eruttivo conico, fiancheggiato dal Monte delle Spiaggie, ossia da un brano di roccie eoceniche da quello innalzate. Alle Rocchette un altro di tali sbocchi si trova fra roccie sedimentarie alterate e tormentate dal movimento sofferto. Sotto i monti di s. Severa spuntano dalla pianura le sommità di due cupolette eruttive: alla Torre d'Orlando ne sorge un'altra parimenti accompagnata da brani di roccie metamorfosate, e il Monte Sassetto non è

che la sommità emergente di un piccolo mammellone sui sedimenti subapennini, per segnare un confine alle trachiti della Tolfa.

Abbiamo fatto notare che tutte queste propagini sono distribuite attorno la massa centrale, come i crateri ausiliarî in un vero apparecchio vulcanico. Però esistono certi sbocchi che per la loro grande distanza, grandezza ed elevazione fanno dubitare se veramente spettino al sistema trachitico tolfetano o piuttosto ne siano indipendenti. Tali sono i Monti di Soriano o Cimino e il Virginio, che abbiamo veduto sorti in prossimità dei laghi Cimino e Sabatino. Problema in vero difficile a sciogliersi, non conoscendo altro che le loro sommità emergenti dalle dejezioni vulcaniche, che ricuoprendoli ne celarono le basi. Essi realmente furono spinti in alto da forze prodigiose, per le quali la trachite traboccò in gran copia, a notevole distanza dal centro tolfetano. Però considerando i numerosi sfioramenti di trachite fra le roccie eoceniche che si diffondono su di una grande estensione della Tuscia romana, che accennano ad un legame sotterraneo fra gli sbocchi secondarî, io sarei inclinato a ritenere quei maggiori mammelloni, ancor essi come propagini del centro tolfetano, e come indicatori della sua grande diffusione entro un'area vastissima.

Per questa ragione potrebbe scendere in campo un altro quesito di non minore interesse per la geologia italiana, vale a dire: se lo spazio occupato dal sistema trachitico della Tolfa si estenda fino a comprendervi il Monte Amiata, parimenti costituito di trachite e posto sul confine della prossima Toscana. Il distinto geologo Lorenzo Pareto ve lo annoverò, e gl'illustri professori Savi e Meneghini osservarono che per le riacoliti dell'Amiata furono sollevate le assise eoceniche. Osservazione certamente di gran valore, giacchè porta a credere che quel mammellone, insieme alle altre trachiti del Volterrano e di s. Fiora eruttassero simultaneamente a quelle che fecero sorgere i monti della Tolfa. Io però confesso che non mi sentirei inclinato ad annoverare quegli sbocchi trachitici nel sistema tolfetano; imperocchè mi sembra opporvisi l'eccessiva distanza, e la mancanza totale degl'indizî suggeriti dagli sfioramenti trachitici, da Ferento a quel monte, che pur avrebbero dovuto essere come altrove, per accennare la via percorsa. Laonde direi che gli sbocchi toscani sono stati contemporanei; ma riferibili ad un centro diverso e distante dal nostro. Differenza altresì manifestata dalla natura stessa delle roccie eruttive costituenti quegli sbocchi, cioè dalla presenza della mica nelle toscane e dalla mancanza di questo minerale nelle tolfetane.

Ma comunque si voglia anche escluso l'Amiata, la vastità dell'area occupata dalle trachiti nella Tuscia romana è ben notevole, e fors'anche molto maggiore di quello che comparisce all'esterno. Se tale estensione venisse messa in rapporto collo spessore della crosta terrestre tutta penetrata da filoni, ne verrebbe la conseguenza, che la quantità della materia emanata dall'interno del pianeta in quel cataclisma fu enorme e sorprendente. Se poi volgiamo il pensiero alla forza richiesta per ispingerla contro la legge di gravitazione, e a superare tutte le resistenze incontrate fino a farsi giorno, ed innalzarsi sulla superficie del suolo, non resteremo meno maravigliati della potenza spiegata dal nostro pianeta in quella occasione. Chi non è educato dalla geologia nell'apprezzare tali mezzi, facilmente si smarrisce e si perde. Eppure se si rifletta quali forze vennero impiegate nel sollevamento delle catene apennine,

ovvero delle Alpi e delle Cordigliere, portate a migliaia di metri sopra il livello del mare, il fenomeno della emissione delle nostre trachiti si ridurrà ad una operazione di così poco momento, che appena fu capace di sollevare un piccolo gruppo di leggiere prominenze.

Nondimeno è da riflettere che sebbene questa eruzione agli occhi del geologo non sia stato un fenomeno della maggiore entità, fu pure il più grande avvenimento nella Tuscia romana, o la più grande operazione cosmica, al compimento della quale dovette passare una lunga serie di secoli, durante i quali tutta l'Italia centrale venne gravemente agitata. Ma questi finalmente passarono, e tutto intero il paese dovette per gradi ricuperare la sua naturale tranquillità.

Se si ha adunque per dimostrato che l'eruzione trachitica della Tolfa sollevò le sedimentazioni eoceniche, ragion vuole che passato il cataclisma, e ritornati i tempi normali, le deposizioni mioceniche, che succedettero, si dovettero depositare regolari e tranquille sulle radici dei monti emersi. Ma non per questa diminuzione di lavoro, l'operosità della natura era caduta nella inerzia: imperocchè fin dal momento in cui la emersione mise i monti in contatto coll'atmosfera, si diede principio a quell'incessante lavoro, che anche in tempo di pace si compie, e che dura tuttora. Io voglio alludere a quella perenne demolizione che si fa sulle altitudini dei monti, per la quale questi sono sfigurati e depressi. In questo modo l'azione decomponente degli agenti atmosferici preparava il terreno alla vita, la quale non tardò a prendere possesso delle terre emerse, perchè rivestite di giovani foreste, dessero asilo e stanza a numerosi stuoli di animali caratteristici di quell'epoca. Di modo che possiamo ritenere che, dopo il primo cataclisma tolfetano, il suolo lentamente cangiava di forma, mentre che interpolatamente veniva scosso da urti sismici derivati dagli assestamenti interni delle materie eruttive, o dalle stesse forze cosmiche, sempre pronte a risuscitarsi per qualunque minima causa.

Allorchè nel mio tirocinio ogni osservazione che faceva sui monti di Allumiere e di Tolfa mi chiamava alla meditazione, arrestato sui filoni di allumite scavati per la estrazione dell'allume di commercio, ne esaminava i caratteri e la giacitura; in quel minerale pietroso rimarcava tutti i segni di una sostanza eruttiva, che sotto forma liquida o pastosa era stata spinta a penetrare nelle fessure della precedente trachite. Nè potea persuadermi che una sostanza di tal natura, decomponibile ad un discreto grado di calore, avesse potuto essere fusa, e spinta, nei meati di un' altra roccia. Il problema invero mi parve di difficile soluzione: ma dopo molto tempo passato in ricerche ed osservazioni, cangiò d'aspetto, e le gravi difficoltà scomparvero. Conciossiachè entro la stessa allumite rinveniva masse più o meno grandi di una trachite semi-decomposta, che vennero considerate come erratiche, cioè come frammenti della roccia continente distaccati e portati via dalla corrente injettiva, e perciò non ne tenni conto. Ma in seguito avendo osservato che nella medesima allumite trovansi altresì disseminati piccoli gruppi di cristalli di pirite di ferro, che non si rinvengono mai nella trachite matrice, mi venne il sospetto che quel solfuro potesse avere avuta un' azione sulla sostanza che li contiene. Difatti, dopo aver meditato su tale azione, e sugli elementi in concorso, mi si affacciò l'idea che l'allumite fosse il risultato di una reazione chimica spiegata per via umida, ovvero una sostanza metamorfica.

Ma quale può essere stata in origine questa roccia pietrosa? Considerando gli elementi componenti, identici presso a poco a quelli delle stesse trachiti, la conseguenza fu, che l'allumite può essere stata una trachite di seconda eruzione penetrata nelle fenditure della prima, poi cangiata in grazia del solfuro di ferro contenuto, o sopraggiunto; laonde le masse trachitiche, che avea giudicate erratiche, altro non essere che le parti a cui non giunse la trasformazione, e perciò restate quali testimonî della primitiva origine. La teoria adunque di questo fenomeno mi sembra potersi enunciare: che il solfuro di ferro cangiato in solfato, cedette l'acido solforico alla potassa e all'allumina, da cui risultò un solfato doppio di quelle due sostanze, restando fuori di combinazione il quarzo e il ferro che vi si trova in piccole masse, e che serve a colorarla. A provare questo processo naturale, farei osservare che questo risultato non si ha nella decomposizione naturale della prima trachite, perchè mancando il solfuro di ferro, dà per risultato il caolino e non l'allumite.

Al cospetto della grande diffusione dei filoni alluminosi nel seno della trachite primitiva, sorge un altro problema: come la seconda eruzione potè penetrare in quel modo nella massa della prima? Anche questo fu argomento di ricerche e investigazioni. I filoni di allumite non si osservano mai penetrati nelle roccie sedimentarie laterali, ma solo in quelle che ricuoprono la massa primitiva, perchè in direzione continuata del cammino ascensivo della materia scorrente. Una massa di vetro fuso estratta dalla fornace ed esposta in un ambiente freddo, perde rapidamente il suo calorico, e solidificandosi, per contrazione si disgrega e si screpola in superficie, producendo una rete di fenditure, che si prolungano di mano in mano che la solidificazione avanza nell'interno. Giunta ad un certo punto, ben si comprende che, mentre la faccia esterna è rivestita di una crosta solida così screpolata, l'interno è ancora fluido e mobile. Ora se s' immagini una forza che faccia impeto su questa, è chiaro che la materia sarà spinta a penetrare nelle fenditure della parte solidificata, e forse anche uscire dalla massa se l'impeto fu bastantemente gagliardo. Non altrimenti crediamo essere avvenuto in grande scala nella massa della trachite tolfetana, allorchè al finire della tranquilla epoca miocenica sopraggiunse una seconda emissione della stessa trachite. Però si argomenta eziandio che le forze spiegate in questo secondo cataclisma, per quanto si vogliano minori della prima, nondimeno furono tali che concentrate sotto la massa primitiva, ebbero la potenza d'innalzare tutto il gruppo dei monti, e così mettere allo scoperto sul livello del mare le ultime assise depositate, e rappresentanti il miocene superiore.

Io non so se queste mie dottrine saranno accettate dai geologi; tuttavia le ho volute metter fuori, quali mi furono suggerite dalle osservazioni, se non altro per richiamare l'attenzione a quella interessante contrada. Ma in qualunque modo si voglia, egli è certo che lo scuoprimento degli strati miocenici accenna ad un secondo sollevamento avvenuto al terminare di quella epoca, ferace ancor esso di gravissime agitazioni sismiche, che misero a soqquadro tutta l'Etruria sino ad un nuovo ristabilimento dell'equilibrio cosmico.

Quanta sia stata la materia emanata dalla terra in quel secondo parossismo, può essere argomentata dalle numerose escavazioni dirette allo scoprimento del sasso alluminoso. Mirabili sono i lavori praticati a tal fine: opere immense che

oggi l'arte mineraria riputerebbe inutili e ruinose in una impresa industriale. D'altronde quei grandi squarci aperti nelle roccie trachitiche pur riescono utili alla scienza, facendo conoscere il portamento dei filoni alluminosi, le loro ramificazioni, e i rapporti colla massa matrice. Se dal villaggio di Allumiere si prenda la via delle vecchie cave, una serie di gigantesche aperture a pareti verticali si vedranno succedere, sulle quali si notano molti e grossi filoni di pietra alluminosa. Tali sono la cava delle Grazie, quella della Paura, la Cavetta, la Cavagrande, la Gregoriana ecc. Dall'altra parte, ossia sulle prominenze che sovrastano la strada che conduce alla Tolfa, tante altre cave si rinvengono dirette al medesimo scopo. Fra queste è la Gangalandi o Cavaccia, famosa per la sua ampiezza, lungo la quale quattro grossi filoni per molti anni alimentarono la lavorazione, dai quali si diramano bracci minori, che si sieguono oltre la trachite attraverso le roccie metamorfiche sopraincombenti. Se si pensi che queste cave alimentarono per secoli l'estrazione dell'allume di Tolfa, e quanta allumite vi sarebbe ancora a cavare, ben si comprenderà che quella sostanza sollevata nella seconda eruzione fu immensa, sebbene non comparisca all'esterno.

Abbiamo già parlato del bacino metallifero disteso fra le prominenze della Tolfa e quelle della Tolfa vecchia o Tolfaccia, comprendente i Poggi della Stella. Ora fa d'uopo ritornare a quella contrada per conoscere meglio gli accennati solfuri metallici che vi si contengono oltre i filoni di ferro limonitico che l'attraversano. Abbiamo detto altresì che quella vasta area risulta costituita dalle assise eoceniche più o meno metamorfosate in calcarie saccaroidi, ordinariamente a grana grossa, bianche candide, alle quali si associa altresì il quarzo, ora in cristalli limpidi e jalini detti diamanti della Tolfa, ora di un bianco ametistino, ovvero in masse colorate dal ferro. È appunto in queste roccie che si trovano disseminati i suddetti solfuri, sovente raccolti in gruppi di cristalli mescolati fra loro, in guisa che non è raro vederne tre o quattro in un medesimo saggio. Tali combinazioni di tante diverse sostanze dànno un carattere speciale a quella contrada, da farla considerare come una grande raccolta mineralogica.

I metalli che vi fanno comparsa sono il ferro, il piombo, lo zinco, l'antimonio, il mercurio, il rame, l'argento, e forse altri fin qui incogniti.

Il solfuro di ferro o la pirite marziale è il più abbondante di tutti. Offre al solito il suo colore giallo d'ottone, e la sua cristallizzazione in piccoli cubetti o in dodecaedri pentagonali, riuniti o sparsi nelle roccie. Qualche volta stretti fra loro in masse tenaci, tal altra così disgregabili che cadono al più leggiero tocco. Vi si vedono anche piriti bianche per indicare che contengono argento, o arsenico, delle quali l'analisi chimica può meglio dare contezza. Nè manca la calcopirite colle sue cristallizzazioni iridate. Però in molti luoghi le piriti si decompongono per azione dell'aria e dell'acqua, e convertite in solfati cadono in polvere grigia spargendo ingrato odore. Non è raro trovare tale decomposizione associata a cristalli di selenite, per modo da far credere ad una reazione chimica fra quella sostanza e le calcari. Alcune osservazioni mi hanno condotto a credere, che il solfuro di ferro possa essere una riduzione del ferro limonitico, prodotta da vapori sopraggiunti; imperocchè nelle roccie del Monte Castagno attraversate da una sottilissima rete di ferro idrato, ho trovato questo in parte cangiato in solfuro in parte no, come se il vapore solfureo

gli fosse camminato dietro per convertirlo in pirite. Osservazione che farebbe credere posteriore l'emanazione solfurea.

Il solfuro di piombo o galena è molto frequente nelle roccie metamorfiche della Tolfa in masse spesso avviluppate da sostanza argillosa e ferruginosa. La struttura è laminare e lucente; ma si rinviene altresì in minuti cristalli argentiferi. Qualche volta vi è unita la fluorina ottaedra verde, bianca o violetta, in cristalli aggruppati o sparsi. Sulla volta di una vecchia galleria in vicinanza dell' edificio del piombo, entro la calcaria saccaroide rinvenni grossi cristalli di riacolite in decomposizione, selenite, galena, parte della quale passata in fosfato, e blenda tutti frammisti da grossa fluorina verde e conditi da cristallini di solfuro di ferro o pirite. Al Poggio Ombricolo, come al Zanfone osservai cristalli di galena annidati in un quarzo cellulare, e ai Grottini lungo il corso del Marangone, cristalli cubici di quel minerale sparsi in una calcare bianca e traslucida a frattura romboedra.

Lo zinco solforato o la blenda si trova nella medesima giacitura degli altri solfuri; però è raro cristallizzata, trovandosi più ordinariamente sotto forma laminare, e del suo solito colore grigio giallastro che spesso risalta entro di una calcare candida, come si vede alle Pozzarelle, nelle escavazioni della galena.

Il solfuro d'antimonio o stibina si presenta in prismi allungati, splendenti, argentini e non iridescenti; qualche volta raggianti, più spesso sciolti nella roccia calcare, tendenti a farsi paralleli; forse argentiferi. Sono compresi spesso in una sostanza biancastra amorfa, che sembra antimonio bianco o ossido di antimonio.

Il mercurio solforato o cinabro nativo, trovasi in compagnia dei sopraindicati. Fu da me rinvenuto per la prima volta in una frana invernale entro un fosso dello Scopeto, nelle cui macerie si presentò in minutissimi cristallini rossi di rubino, insieme ai prismi di stibina. Fattone esperimento furono presto verificati per mercurio solforato o cinabro. Erano riuniti in grappoli lungo le traccie delle antiche stratificazioni, ovvero sparsi insieme a piriti, che tingevano in bruno. L'acqua distacca quei cristallini, li trascina nel fondo del fosso, ove per la loro gravità specifica si raccolgono qua e là, dando indizio della presenza di quel minerale.

L'argento solforato o argirosio, a rigore non potrebbe essere accusato che per semplici traccie, o macchie rosse proprie di tal minerale osservate nelle calcarie dei Poggi della Stella: indizî che dànno la probabilità di rinvenirlo decisamente, considerando che l'argento è spesso unito agli altri solfuri.

Dalle sostanze combinate allo zolfo non possiamo escludere la selenite o solfato di calce, siccome quella che fa la sua grande figura nel bacino tolfetano, e dove lo zolfo si dichiara principio metamorfosante. Le marne mioceniche che emersero nella seconda eruzione trachitica sono cangiate in gessi, dando origine a ingenti masse capaci di alimentare una industria. Però su diversi punti si notano degli spazî a cui non giunse la riduzione, e nei quali si vede la roccia coi suoi naturali caratteri. Il prisma obliquo romboidale è la forma che presenta nei cristalli, mai geminati, spesso mostruosi quando sono di maggior volume: sempre però facili a sfogliarsi in lamine a Specchio d' asino. L' Ara vecchia sotto la Tolfa, sulla via che conduce a Rota, è tutta seminata di quei cristalli, e di ogni grandezza. Alle Spinare, alla Cava dell'Oro, a Pian dei Santi si vedono grandi formazioni di gesso a tessitura saccaroide,

come il marmo statuario, e a Pian Cisterno il suolo brilla di punti lucenti dovuti al riflesso delle faccie delle lamine di quel minerale.

Fa d'uopo avvertire che varî dei sopraccennati solfuri si trovano associati, sebbene in più discreta quantità, a carbonati e a fosfati. E qui potrebbe richiedersi, se questi siano il prodotto di una formazione speciale, ovvero una riduzione di quegli stessi solfuri per ispeciali combinazioni. In verità io inclinerei per questa seconda opinione, poichè quelle due sostanze non si trovano mai scompagnate, ma di più in quantità ristrette. Il solo rame, come più facile a passare in carbonato, è più raro sotto la forma di pirite; ordinariamente si rinviene ridotto. In vicinanza dell'edificio del piombo è facile imbattersi nella malachite o nell'azzurrite, e negli stessi depositi delle antiche lavorazioni di quello stabilimento, si vede molto rame carbonato che in origine dev'essere stato piritoso. La cerussa e la calamina sono meno frequenti del carbonato di rame. I fosfati sembrano essere nelle medesime condizioni, come sono quelli di piombo e di zinco. Però abbiamo veduto che il ferro limonitico, il più copioso di tutti entro il bacino metallifero, quasi sempre contiene fosforo in dose diversa. In qualche luogo si è veduto che l'elemento fosforoso scomparisce colla profondità: fatto, che come abbiamo detto, sembra accennare il fosforo essere un elemento sopraggiunto. Vicino al forno fusorio sotto il convento di Cibona, nella escavazione dei pozzi aperti per l'estrazione del minerale ferreo, si vide venir fuori una quantità di roccia disfatta tinta in turchino dal bleu di Prussia naturale, e nel minerale di Pian Ceraso si rinvengono piccole cristallizzazioni verdastre di ferro fosfato.

Ma l'area metallifera entro la quale si contengono tante svariate sostanze, non è solo circoscritta dagli accennati confini; ma bensì prolungata sul cammino dei grandi dislocamenti, riferibili al sollevamento delle roccie nella prima eruzione trachitica. Laonde vediamo scorrere il metamorfismo fra la Tolfa e il Monte Virginio, lungo una linea tracciata dalle sorgenti solfuree in vicinanza di Rota, e dalle acque di Stigliano per terminare colle solfatare di Canale. Così si può seguire un altro prolungamento col corso del Marangone, ove le roccie metamorfiche per gradi si dileguano e scompariscono.

Gli altri sbocchi ausiliarî del sistema trachitico della Tuscia romana, sono egualmente accompagnati da formazioni solfuree, però in proporzioni convenienti alla loro entità. Al piccolo mammellone della Torre d'Orlando, sono contigue masse selenitose, che dànno il nome alla salita del Gesso sulla via cornetana. Sotto le prominenze del Sasso, costituito da ingenti masse trachitiche, le marne subapennine convertite in gessi si distendono sulle radici delle roccie eruttive, come nel bacino della Tolfa. Nè mancano i solfuri riferibili con ogni probabilità a quel centro di emanazione. La scoperta di questi minerali è recentissima. Imperocchè il sig. Tommaso Tittoni, distinto giovine dilettante di studî geologici, perlustrando quella littorale contrada, rinvenne nel fosso detto della Legarella nel comune di Cerveteri un masso erratico di macigno eocenico, diroccato dalle sovrastanti altitudini, e attraversato da grosse venature di calcare spatico. In queste erano disseminate piccole masse cristalline del solfuro d' arsenico Realgar, insieme ad Orpimento, che col rosso ranciato del primo, e giallo cedrino dell'altro, facevano un risalto sul candore del calcare, e sul grigio del macigno. Tali

minerali furono dottamente illustrati dal comm. Quintino Sella (1), e perciò conviene registrare il fatto come un acquisto della scienza. Dei solfuri d'arsenico io non avea mai avuto esempio nel bacino metallifero della Tolfa; perciò la scoperta mi riuscì nuova, e così interessante da somministrare una prova ulteriore a ciò che io asseriva sulla diversità dei prodotti metamorfici del Sasso. Sono ben cognite le vaste solfatare e gessaje, che al piede del Monte Virginio si distendono fra Canale e il diruto paese di Monterano, come fra la Manziana e s. Vito. La giacitura di esse sembra dichiarare altamente la loro attinenza a quel cospicuo mammellone trachitico. Degli altri monti eruttivi, che spettano a questo sistema, poco o niente possiamo dire, trovandosi le loro basi ricoperte e nascoste da sedimenti posteriori. Nondimeno ci sembra logico ritenere, che anche in questi abbiansi a rinvenire gli stessi metamorfismi, che osserviamo negli altri.

Al cospetto adunque di tanti prodotti solfurei associati alle trachiti della Tolfa, qual criterio dobbiamo farci della loro origine? Che il fatto accenni ad una emanazione solforosa della terra, mi sembra non possa mettersi in dubbio. Ma a quale epoca ascriverla? Se portiamo attenzione ai cristalli di ferro piritoso contenuti sulla pietra alluminosa, che probabilmente fu prima una trachite di seconda emissione, poi convertita in allumite, e se consideriamo le marne mioceniche da quella sollevate e cangiate in gesso, mi sembra giusta la conseguenza che alla seconda eruzione trachitica abbiasi a riferire il fenomeno. Laonde direi per tale ragione, che quella fosse accompagnata da una vasta emanazione solfurea, come alla prima tenne dietro l'eruzione ferrea. Tale per ora sarebbe il mio modo di vedere il fenomeno. Ma siccome per un giudizio definitivo di tal natura non sono mai troppe le osservazioni, così a raggiungere questo fine conviene sia rimesso ai miei successori.

Se il cataclisma prodotto dalla seconda eruzione delle trachiti tolfetane fu di minore intensità del primo, ragion vuole che anche fosse di più breve durata. Nondimeno fu tale che gli effetti non solo furono sperimentati nella Tuscia romana, ma anche nelle più distanti contrade. Le fenditure che presentano le marne vaticane e del Monte Mario, dimostrate dai loro fossili come piano superiore del miocene, e perciò contemporanee con quelle gessose del bacino tolfetano, sono a mio parere prodotte dalle oscillazioni del suolo concomitanti il secondo parossismo trachitico. Cosicchè possiamo dire, che tutto il suolo subapennino ancora sommerso, dovette andar soggetto a gravissimi perturbamenti, accompagnati da tremende burrasche atmosferiche. Laonde il mare fu quello che a preferenza dovette risentirne immensi danni. Disturbata la vita gli esseri suoi abitatori, sbaragliati e dispersi vennero estinti; altri balzati in regioni diverse, mentre i terrestri sulle isole del piccolo arcipelago tolfetano, scomparivano per azione diretta delle forze telluriche.

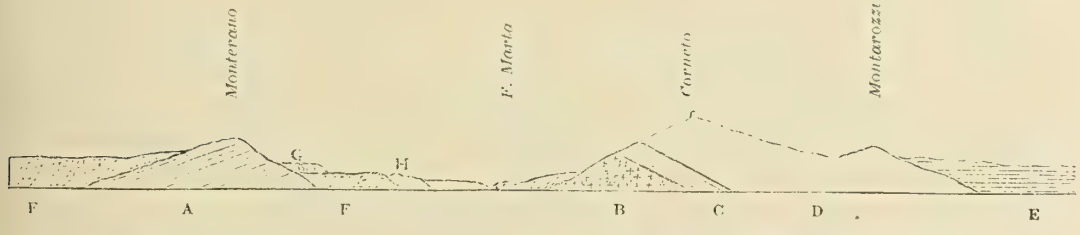
Ma questi effetti dovettero lentamente cessare col declinare delle cause produttrici, ossia col compimento del secondo periodo eruttivo. Dimodochè al principiare dell'epoca pliocenica la calma era già ristabilita nella natura. Le assise zancleane o le calcarie del Macco, che rappresentano quell'epoca, si mostrano regolarmente depositate, e il

(1) *Sulla esistenza del Realgar e dell'orpimento nei monti di Santa Severa, provincia di Roma.* Atti della R. Accad. dei Lincei vol. I.° serie 3.ª Transunti febbraio 1877.

numero e sviluppo dei loro fossili, annunziano condizioni favorevoli alla vita dopo la seconda eruzione trachitica. Però conviene avvertire che quella calma servì di riposo alla natura, per prepararsi a nuova impresa. Imperocchè la Tuscia romana dovette andar soggetta anche ad un terzo periodo di azioni cosmiche, capaci di alterare altresì la sua forma geografica. Tuttavia questa volta non si tratta più di trachite comparsa alla superficie del suolo, ma di azioni puramente dinamiche, o di un periodo di tremendi terremoti ritornati ad agitare quella contrada.

Dalla scala stratigrafica possiamo argomentare il tempo in cui l'Etruria andò soggetta a tanto parossismo. Fra le assise del pliocene inferiore e quelle del medio notasi una discordanza di giacitura che chiaramente accenna a nuove oscillazioni del suolo, o ad un terzo perturbamento nell'ordine di natura. Questa osservazione non è facile farsi sulle colline tolfetane, a causa del gran disordine prodotto nelle loro stratificazioni del secondo cataclisma: ma se ci portiamo a poca distanza, sulla collina di Corneto avremo una prova evidente di un fatto di tanta importanza geologica.

Il fiume Marta, o l'emissario del lago Vulsinio, sotto quella città trascorre la linea fratturale di un salto, come il Tevere attraverso Roma. La differenza fra l'una e l'altra sponda è evidente; imperocchè la destra risulta di un brano di calcarie alberesi eoceniche a letti inclinati all'esterno, e ricoperti di un sabbione pliocenico orizzontale, disteso a formare la rispettiva pianura: la sinistra, sulla quale è posta la città, al contrario si compone in basso di quelle medesime marne mioceniche cambiate in gesso per metamorfismo, alle quali succedono a giacitura concordante potenti banchi della calcaria del Macco, pieni di amfistegine e grossi fossili del pliocene inferiore, o del terreno Zancleano del Seguenza. Questi letti sono inclinati ad angolo anticlinale, o contrarî a quelli della opposta sponda. Essi, componendo essenzialmente la massa della collina, si vedono emergere per il loro sollevamento, agli strati orizzontali che loro succedono, o alle marne che i loro numerosi fossili accusano come pliocene medio, e che costituiscono il suolo circostante. Nel fondo della valle e a più basso livello si trovano le assise di più recente data, depositate dopo l'innalzamento di quella collina. L'annessa sezione servirà a dimostrare tali giaciture.



A. Alberese. *Eocene*
B. Gessi. *Miocene*
C. Marne } *Pliocene inferiore*
D. Macco }
E. Marne. *Pliocene medio*
F. Sabbie gialle. *Pliocene superiore*
G. Tufi vulcanici. *Glaciale*
H. Breccie. *Alluvionale*

In questo taglio pertanto si legge, che dopo la deposizione del pliocene inferiore, le roccie subirono un innalzamento con emersione, da comparire sotto forma di una isola nuova sulle acque subapennine, e addizionale al piccolo arcipelago tolfetano; fenomeno che non potrebbe essere attribuito ad altro che a gravissimi terremoti per

la mancanza assoluta di roccie d'injezione, e dei loro metamorfismi. Non avendo altro esempio in tutta la Tuscia romana del fatto avvenuto a Corneto, mi fa credere, che dopo la deposizione del pliocene inferiore ivi si determinasse un centro sismico, da cui irraggiarono le ondulazioni fino a notevoli distanze. L'intensità poi degli effetti stampati sulle roccie investite, e il loro spostamento fino ad uscire sulle onde marine, mi portano a credere che quella operazione di natura non sia stata istantanea, ma ripetuta o intermittente, come ordinariamente si osserva nei periodi sismici.

Che se poi taluno volesse portare indagini sulla causa prossima della oscillazione cornetana, io sarei d'avviso non allontanarmi da quella medesima da cui derivarono i precedenti parossismi. Giacchè la trachite stessa può essere stata spinta anche una terza volta contro la crosta terrestre con forze gradatamente minori delle prime. Se al terminare dell'epoca eocenica la trachite della prima eruzione fu tale e tanta da sollevare un gruppo di monti, e spingere le sue propagini a notevoli distanze; se al finire dell'epoca miocenica una seconda emissione di quella sostanza fu solo spinta a penetrare nelle fenditure della prima, e innalzare di un tratto i monti preesistenti; mi sembra logico che le oscillazioni del suolo avvenute dopo la deposizione del pliocene inferiore possano ripetersi dagli urti esercitati da una terza spinta trachitica più debole delle precedenti. In questo caso la minor quantità di sostanza eruttiva, nel disperdersi attraverso i dislocamenti della crosta terrestre, non ebbe altro potere che di produrre all'esterno gravissimi terremoti, e spostamenti dei brani rocciosi. Così mi sembra spiegato tutto lo svolgimento di un periodo eruttivo compito nella Tuscia romana, e distinto in tre tempi, impiegando forze successivamente minori fino alla estinzione. Questa operazione cosmica è precisamente analoga a quelle che si osservano nei processi vulcanici, di cui abbiamo un chiaro esempio nella storia dei vulcani del Lazio, da me dimostrata, e distinta in quattro periodi eruttivi successivamente minori (1).

Quanto poi al trasferimento del punto d'irraggiamento sismico sotto la collina di Corneto, io direi, che avendo trovati chiusi ed ostrutti i passaggi nel centro tolfetano, la materia eruttiva fu costretta a deviare, e, trovata minor resistenza nella fenditura martana, ivi concentrò le sue spinte e fece emergere un brano spostato.

Dato così tutto lo sfogo necessario al terzo periodo d'azione cosmica, mi sembra naturale che i terremoti cessassero, e i tempi ritornassero allo stato normale. Difatti i letti marnosi e sabbiosi riferibili al resto dell'epoca pliocenica, oltrechè mantengono intatta la loro originaria giacitura, sono così pieni di reliquie organiche, da indicare che in tutto quel tempo l'Italia centrale restò tranquilla da qualunque perturbazione cosmica.

Così ebbe intero sviluppo il periodo trachitico che fece emergere i monti della Tolfa, e così mi sembra avere anche io soddisfatto al tema che mi era proposto. Se non che la narrazione e l'esame fatto di quei tanti maravigliosi fenomeni non mi sembrano completi senza aggiungere qualche parola sulle imprese industriali tentate in quella contrada a fine di mettere a profitto le loro minerarie ricchezze.

(1) Ponzi, *Storia dei vulcani laziali.* Atti della R. Accad. dei Lincei. Tomo II.° serie 2.ª 1875.

IV. INDUSTRIE MINERARIE

Ci mancano i mezzi a conoscere l'epoca in cui l'uomo per la prima volta comparve sui monti della Tolfa; ma se facciamo attenzione alla storia geologica della Tuscia romana, mi sembra che quella comparsa non possa essere avvenuta se non dopo che il suolo etrusco fu messo in secco per lento sollevamento vulcanico; vale a dire quando, scomparso il piccolo arcipelago per ritiro delle acque, le comunicazioni vennero aperte ad una libera circolazione. Ma pur ci conviene scendere a tempi anche più recenti, e forse ai primitivi etruschi, per argomentare che l'uomo per la prima volta rivolse la sua attenzione ai prodotti minerali della Tolfa. Sembra che le più antiche escavazioni di cui abbiamo notato le vestigia siano state dirette alla ricerca dei metalli piombo e ferro, però conviene avvertire che nessuno degli antichi scrittori fa menzione di ciò, e tutto si riduce a congetture alimentate da poche osservazioni. In tale stato d'incertezza volli intraprendere delle ricerche per sapere almeno in qual tempo incomincino le più positive notizie sopra un tale argomento. A questo fine ho frugato negli archivî pubblici e privati, nelle biblioteche, e perfino ho interrogato persone competenti per avere notizie di tal genere. Ma anche da queste poco o niente ho potuto ricavare di ciò che venne operato nelle epoche più antiche. Conviene scendere al medio evo, per incominciare ad avere cognizioni meno vaghe ed incerte, sulla escavazione dei minerali tolfetani. Peraltro devo far conoscere che praticando tali indagini mi fu dato a leggere un libro conservato dalla distinta famiglia Buttaoni di Tolfa, manoscritto da uno dei suoi antenati, dal quale appresi molte notizie di cose tolfetane, e fra le altre quelle che si riferiscono ad imprese minerarie fatte in quel territorio. Vi si rinvengono memorie diverse, una delle quali scritta in latino *De inventione alluminis,* le altre in italiano sul ferro, piombo, quarzo ecc. Le notizie sono circostanziate, e di esatta apparenza, perciò dànno ai racconti il credito storico conveniente. Laonde, sia per le notizie ricavate da quel manoscritto, sia per quelle raccolte altrove, sia per i fatti in cui ho avuto parte, credo poter in qualche modo azzardare la narrativa delle cose avvenute, perchè non cadano nell'oblio.

Le sostanze minerarie pertanto di cui l'umana industria ha tentato profittare sono: l'allume, il ferro, il piombo, il mercurio, le ocre, il quarzo, le argille, le ligniti, la pietra litografica, delle quali imprendo a parlare.

Allume. — La più vasta impresa che siasi fatta sui monti della Tolfa è quella dell'allume, a causa degl'immensi guadagni recati al governo pontificio in altri tempi; prova ne sia l'istesso paese delle Allumiere, e lo stabilimento erettovi, surti da quelle lavorazioni. Si crede da quei terrazzani che gli Etruschi o i Romani conoscessero il loro allume, in seguito dimenticato, e lo argomentano da un vasto cavo aperto sotto il Monte delle Grazie, ora ricoperto di densa foresta, e da un'altra cava di allumite che porta il nome dei Romani. Ma questa credenza, come non è contradetta da alcuna ragione, così non ne ammette alcuna, perciò resta senza valore. Altri narrano che l'agrifoglio desse a Giovanni di Castro il primo indizio del sasso alluminoso; ma quest'assertiva neppure è vera, perchè quell'arboscello si rinviene altresì sui monti calcari, che non contengono affatto allumite. Della scoperta

dell'allume parlano i commentari di Gobellino, ossia Pio II, sotto il cui pontificato nell'anno 1462 fu fatta la scoperta. Il manoscritto tolfetano parla dei luoghi e delle persone che ebbero parte in quell'avventura, non che di altri fatti relativi alla storia della Tolfa dei quali non conviene ora tener conto.

Giovanni di Castro, figlio del celebre giureconsulto Paolo di Castro, fu tintore e negoziante di panni a Costantinopoli ove perdette tutti i suoi averi allorchè quella città venne presa dai Turchi. Abbandonata Costantinopoli tornò in Italia, quindi andò al concilio di Costanza in qualità di depositario del papa Eugenio IV, ove contrasse amicizia col cardinale Enea Silvio Piccolomini. Succeduto questi al pontificato col nome di Pio II, ritenne il detto Giovanni di Castro come commissario generale delle rendite dello stato ecclesiastico.

Trovandosi in Corneto e inclinato alla ricerca delle curiosità naturali, gli venne riferito che sui monti della Tolfa ne avrebbe rinvenute. Interrogato un tal Domenico da Padova astronomo che avea seco, questi, consultata la scienza, rispose che su quei monti avrebbe avuta fortuna. Pensò tosto a spedire sui luoghi il suo maestro di casa per nome Teodoro, alias Federico di Westfalia, per raccogliere pietre ed altri minerali. Difatti questi vi andò e vicino al fontanile superiore raccolse una pietra che portò a Civitavetula (Civitavecchia) in casa di un tal Bonifacio, vicino la porta che guarda mezzogiorno. Quivi venne per la prima volta fabbricato l'allume estraendolo dalle pietre raccolte. Allora il Di Castro, credendo che la Tolfa fosse della comunità di Corneto e dei Vitelleschi, capitolò con quel comune, ma poi avvedutosi dell'errore, capitolò di nuovo coi signori della Tolfa, Ludovico e Pietro.

Recatosi quindi in Roma ne fece relazione al Papa, riportata dal Gobellino, il quale insieme ai cardinali riputò la scoperta un sogno, nè credette al relatore. Però questi insistendo e dichiarando vero il fatto, per l'amicizia che avea col Pontefice ottenne che, usate le debite diligenze ed esperimenti, si verificasse il fatto. Il Papa, conosciuta l'utilità della scoperta, potendo recare alla Camera più di 3000 ducati all'anno, ne diede la concessione al detto Giovanni di Castro per 25 anni, col terzo degli utili e colla condizione di poter la Camera istessa affittare la detta miniera col compenso al detto Giovanni delle decime.

Nel primo anno la Camera toccò di pretto guadagno 95,000 fiorini d'oro, quasi 2,000,000 di lire moderne, e questo nuovo reddito fu destinato dai cardinali con giuramento in conclave a continuare la guerra contro i Turchi. Nei 25 anni della concessione data a Giovanni di Castro, fabbricarono l'allume, prima lo stesso concessionario con Bartolomeo Fransusa *Sannensis*, quindi vi si associarono Carlo Gaetani, poi Pietro di Cosmo dei Medici fiorentino, legato in società con Giovanni di Tornabuoni, e successivamente fu anche socio Pietro Rucellai, rappresentato da Nicola di Castiglione. L'allumiera inferiore (forse la contrada oggi detta la Concia), si chiamava quella ove abitarono Carlo ed Alfonso fratelli Gaetani, ai quali succedettero Giulio degli Albertoni e Ludovico Morgani. Si riportano nel manoscritto tolfetano altre notizie che tralascio essendo estranee al nostro assunto.

Nel 1835 il cardinal Mertel di Allumiere pubblicò un opuscolo col titolo: *Cenni storici delle miniere delle Allumiere* in cui si scorge che il pontefice Paolo II acquistò dai baroni della Tolfa il loro fondo e le loro ragioni, pagando 1700 scudi

d'oro, e da quel momento la lucrosissima impresa dell'allume fu del governo, il quale seguitò a farne appalti, ma poi stimò meglio condurre quello stabilimento per proprio conto.

Il metodo che si teneva allora per la estrazione dell'allume era quello medesimo che si è mantenuto fino a' giorni nostri. Il trattamento del minerale si faceva per operazioni successive, cioè: l'escavazione a cielo aperto entro immensi squarci per seguire l'andamento dei filoni di un qualche metro di potenza: la torrefazione in apposite fornaci con consumo esuberante di combustibile vegetale: la macerazione sulle piazze per mezzo di quotidiana inaffiatura: la lesciviazione in caldaje, e la cristallizzazione per raffreddamento in vaste tine, dalle quali le acque madri si riportavano nelle caldaje per essere di nuovo riscaldate. Basta visitare le vecchie cave, e le piazze di scarico per giudicare quanto dev'essere costata quella immensa quantità di rifiuti. Nondimeno l'allume della Tolfa correva in commercio, e lo smercio manteneva attiva l'impresa.

Però coll'andare dei tempi la cosa non potea durare così, giacchè la poca intelligenza nella direzione dei lavori, la scoperta all'estero di altre allumiti, il progresso nell'arte delle miniere, e i più facili trasporti fecero declinare quella industria rendendola sempre meno lucrosa. Abbandonata la direzione delle cave ai lavoranti, questi, cercando sempre i proprî vantaggi, introdussero abusi e quindi la demoralizzazione. Si sfruttarono le cave rendendole impraticabili per ingombro di macerie, vennero aperte cave nuove, di poca durata, si tornò alle cave vecchie per ruspare allumite, si fecero ingenti spese inutili, per modo che quella impresa per gradi divenne remissiva. Allora i Camerali, credendo di supplire alle grandi perdite, mantenendo l'uso delle miniere, convertirono le allumiere ad una impresa di campagna. Ma anche questa divenne un interesse degli allumieraschi, i quali lusingavano il governo con nuovi progetti speculativi, fino ad introdurre la raccolta della manna che presto si dovette abbandonare.

A tale pessimo stato era ridotto lo stabilimento quando il cardinal Tosti tesoriere generale vendette al Monte di Pietà i possedimenti di Allumiere, lasciando quella quantità di selve, occorrenti alle lavorazioni minerarie. Frattanto incominciava a correre in commercio l'allume artificiale a prezzi così tenui da far fronte al nostro naturale. Questa fu l'ultima rovina dello stabilimento della Tolfa, giacchè, mantenendosi sempre i soprusi, la remissione del governo crebbe fino agli 8 o 10 mila scudi all'anno.

Così erano le cose quando nel 1854 insorse questione fra l'amministratore e i lavoranti per aver bruciata e perduta una quantità di minerale. A rimuovere tali inconvenienti insieme all'architetto del luogo Filippo Navone e Paolino Masi, già possessore di una cava di zolfo in Romagna, fui spedito in commissione alle Allumiere per prendere la direzione dei lavori, e portarvi le riforme che credevamo convenienti. Si cercò di allettare i lavoranti colla promessa di un avvenire migliore, onde si prestassero alle nuove disposizioni. Si prese la direzione della parte tecnica. Si cercò correggere molti abusi, e in 8 mesi di quello stesso anno, anche senza cangiar metodo di lavorazione, si venne a pareggiare il disavanzo. S'istituì l'escavazione per gallerie, ma gli allumieraschi vedendo una diminuzione di lavoranti, si misero in

allarme, e incominciarono a osteggiare il nuovo esercizio, e insieme qualunque riforma veniva progettata, per via d'intrighi burocratici; in guisa che al terminare di quello stesso anno la commissione fu costretta a dimettersi, restando il Masi come direttore tecnico, il quale, dopo aver tentato altre modificazioni inutilmente, anch' esso fu costretto a ritirarsi.

Così ritornarono i vecchi abusi e il nuovo metodo d'escavazione fu abbandonato. In seguito si propose la vendita dello stabilimento, e sebbene pur si trovassero offerte vantaggiose, tuttavia anche questo progetto non potè sortire buon fine, perchè svanito dalle mene burocratiche. Dopo ciò quelle allumiere, che un dì furono tanto lucrose pel governo pontificio, ripresero il loro stato di sempre crescente passività.

Finalmente nel 1870 cangiò governo, e con esso mutarono le sorti di quella intrapresa. Giacchè il Demanio per effetto di aggiudicazione avvenuta il 22 settembre 1873, cedette alla Società finanziaria di Parigi lo stabilimento dell'allume e tutti gli annessi situati nei comuni di Tolfa e Allumiere, per la somma di L. 360,647. 41, Questa società, riformati i metodi di trattamento, e ridotte le cose in buon ordine, coltiva tuttora quella miniera traendone più convenienti profitti.

Ferro. — Relativamente al ferro abbiamo rinvenuto che nell'anno 1497, allo stesso Giovanni di Castro inventore dell'allume fu concesso di edificare un molino, e un forno fusorio per la estrazione del ferro nelle ruine di s. Severella presso Cencelle, oggi Mola farnesiana, tuttora in esercizio e dove si scorgono altresì gli avanzi del forno. Dopo quel tempo non abbiamo altre notizie fino al pontificato di Pio V, conservandosi negli archivî di Bracciano un rogito notarile in data 26 maggio 1565, in cui si legge, che un tal Clemente Buccileni bresciano, abitante nel castello di Monterano, ora diruto, padrone del forno posto in quel territorio, nella contrada le Perazzete, ove si cola la vena del ferro della Tolfa, inaugurò la lavorazione alla presenza di un gran concorso di gente, con una messa solenne e un gran pranzo, di cui tutti gl'invitati restarono soddisfatti.

Una lapide commemorativa rinvenuta in una vigna sotto quello stesso paese ci fa inoltre conoscere che nel 1612, sotto il pontificato di Paolo V, un tal Pietro Camporio commendatore di s. Spirito costruì una officina ferraria, e un edificio a distendino, nella medesima contrada di Monterano.

Nel 1650, un tal Francesco Boschi della Tolfa, trovata la miniera del ferro, eresse una ferriera alla caduta del Callano sotto lo stesso paese, traendo probabilmente il minerale dal Poggio della Capanna, ove si vedono ancora traccie di una escavazione.

Era in quel tempo un tal Grifone governatore delle allumiere, il quale vedendo la prosperità della impresa, richiese al Boschi di far parte in tale industria, ma essendo stato ricusato, accusò il Boschi alla Camera come usurpatore dei diritti del governo, per cui il detto Boschi fu carcerato e condotto in Roma, ove ebbe la città per carcere, e dove morì nel 1654. Così non si parlò più della cava del ferro.

Nel 1739 ad Alessio Mattioli di Camerino fu concessa la privativa di fabbricare ogni sorta di acciaî, e di cavare metalli nei monti di Narni, della Tolfa e Guarcino, sotto certe condizioni, in virtù di un chirografo emanato dal papa Clemente XII li 3 ottobre 1739, e con istromento stipulato dal card. Bolognetti già Tesoriere li 4 decembre del detto anno. La concessione fu per anni 60, dando alla Camera il 5 per cento

di lucro. Il detto Mattioli, fatta società con altri intraprendenti, si assicurò prima del ferro, poi del piombo della Tolfa; ma avendo atteso più a questo che a quello, niente fece del ferro. La Camera allora venuta in cognizione che prossimi alle cave del piombo delle Pozzarelle si trovavano grosse vene di ferro, che sono quelle del Pian Ceraso, ne ordinò una piccola prova nel forno di Conca, la quale essendo riuscita bene, la volle ripetere in grande in quello di Bracciano. Ma il ferro estratto non avendo resistito al maglio, fece venire dalla Sassonia 4 minatori, che giunsero alla Tolfa nel 1748, perchè due di essi attendessero alla miniera del ferro, gli altri a quella del piombo. Ma dopo 2 anni, i primi non avendo dato alcun buon risultato, furono rimandati, nè più si parlò del ferro.

Peraltro convien dire che ad onta di tali avvenimenti la quantità del ferro, che si presenta sui monti tolfetani, abbia sempre lusingato gli speculatori a tentarne l'impresa. Imperocchè lungo il corso della Lenta si trova una serie di piccoli forni, dei quali non ho trovata notizia, ma che sembrano avere avuto vita nel passato secolo. Sembra che quelle industrie dovettero cessare, non potendo reggere alla concorrenza delle grandi imprese straniere.

Altro non possiamo dire delle miniere del ferro della Tolfa fino al 1841 in cui ai 26 marzo fu data la concessione a Clemente Lovatti di usare delle dette miniere, che poi cedette alla Società romana delle miniere del ferro, quando questa ottenne sotto il pontificato di Gregorio XVI la facoltà di scavare il ferro a Monte Cucco (Gubbio), a Stifone (Narni), e Pupagi (Sellano), dietro un canone di scudi 20 all'anno pari a L. 107, 50 e parte degli utili. La suddetta Società romana fabbricò alla Tolfa un alto forno sotto il convento di Cibona con uno stabilimento di fusione e una fornace per mattoni refrattarî per uso proprio, servendosi del caolino del paese. La detta Società condusse la sua impresa con poco buona fortuna, però si mantenne fino al 15 decembre 1875 in cui cedette per contratto alla ditta Trentin e compagni in Roma per anni 30 i suoi diritti sui possedimenti di Tolfa e Allumiere, collo scavo del minerale, l'uso del forno fusorio e fonderia, insieme a tutti i locali annessi per la fabbricazione dei mattoni refrattarî, e tutto questo per un canone di L. 0, 60 per tonnellata di minerale, e L. 9000 a titolo di fitto per il forno fusorio, fonderia e fabbrica dei mattoni, ecc.

Questa società si propone di far commercio del minerale in natura, erigere altri tre forni di fusione, ampliare l'opificio di fonderia, e costruire una strada ferrata a vapore per essere in comunicazione col porto di Civitavecchia.

Piombo. — Quantunque siamo avvertiti dalle osservazioni che il piombo della Tolfa sia stato conosciuto da tempi remotissimi, pure non abbiamo positive notizie del suo trattamento che nei tempi moderni. Il citato manoscritto tolfetano, e la relazione di un Padre Audifredi dei Predicatori incaricato a dar giudizio sulla miniera del piombo di Tolfa, c'informano che nel secolo passato furono intrapresi quei lavori di miniera, e che in tale impresa nella contrada detta le Pozzarelle prossima al Pian Ceraso furono scoperti dei pozzi, dai quali prese il nome la contrada stessa, i quali dànno accesso a vaste gallerie sotterranee aperte per la estrazione di quel minerale. Certi avanzi di lavorazione da me adocchiati alla mola del Monte Casalavio, mi hanno fatto credere che il minerale fosse colà condotto per la estrazione del

metallo. Sembra che la miniera sia stata da quei tempi dimenticata fino alla sopracitata concessione data al Mattioli nel 1739, per la quale venne fatta la scoperta dei pozzi.

Ottenuta, come si disse, in quell'anno la concessione, Alessio Mattioli associò all'impresa il commend. Ricci, il cav. Sagripanti, e Nicola Pierantoni, i quali tutti insieme si portarono alla Tolfa, e assicurata la vena del ferro si rivolsero a quella del piombo sopra Fontana-Inversa presso la Tolfa, di faccia a Cibona, nel monte detto le Pozzarelle; quivi estratta l'acqua dalle antiche gallerie, fu portata fuori una quantità di galena. Ma trattata dallo stesso Mattioli non riuscì ad ottenere il metallo. Laonde venne dissenzione fra i socî, e fu deciso di fare altri tasti, e tentare una sorte migliore. Questo avvenimento di non avere avuto alcun risultato, fu causa che, ad istanza del cardinale Annibale Albani Camerlengo di s. Chiesa, fossero chiamati dal papa Benedetto XIV dalla Sassonia i 4 minatori, perchè due di essi attendessero alla cava del piombo, gli altri del ferro. I due primi subito misero mano all'opera, e in breve si fecero padroni della lavorazione escludendo il Mattioli con gravissimo suo danno, e conducendo l'impresa a conto di Camera. Allora si fabbricò l'edificio del piombo con tutti gli annessi necessarî per una più vasta e stabile lavorazione. Dopo 2 anni i sassoni si fecero cattolici, e furono messi a salario fisso. Ma questi dopo aver manomesse le cave per ridurle all'usanza loro, non ebbero copia maggiore di minerale, nè migliorarono la lavorazione. In due anni non estrassero che 30 pani di piombo sciupando una quantità di minerale. Allora furono ordinate visite di periti del paese per giudicare della impresa. Accedettero alla Tolfa prima un tale Giardoni, poi un altro di cui non si conosce il nome. Dietro i rapporti di costoro nel maggio 1750 fu sospesa la lavorazione, e la miniera fu messa all'incanto, coll'obligo di ritenere i lavoranti stranieri. Ma la condizione essendo riuscita troppo gravosa, non si trovò alcun offerente, laonde per non pagare nell'ozio i lavoranti si dovette riaprire l'esercizio.

In questa seconda fase, i sassoni non si portarono meglio di prima, perchè avendo bruciato più di 50,000 libbre di minerale non ottennero che 25 o 30 pani di piombo con una spesa di 60,000 scudi romani. Allora nel mese di settembre 1751, fu mandato il cav. Giulio Contini, che si trattenne quattro mesi alla direzione dell'impresa. Ma i quattro sassoni essendo venuti in rissa fra loro la Camera ordinò che si cessasse e licenziò tutti i lavoranti.

Nel 1773 monsignor Braschi Tesoriere, che fu poi papa Pio VI, dietro gli sperimenti fatti alla zecca dal direttore Giacomo Mazio, ottenne da Clemente XIV la riapertura della miniera, affidando l'impresa ai fratelli Girodetti fonditori piemontesi; i quali alla fusione del minerale facevano precedere la torrefazione, e per mezzo del ferro liberavano il metallo dallo zolfo. Con questo processo non solo ebbero il piombo, ma anche rame e vetriolo verde. E siccome quei piemontesi non erano capaci di condurre le cave, dal Tesoriere Pallotta, successore del Braschi, ne fu data la direzione ad un tal Carlo Battista Presbitero, che fu meno fortunato degli altri. Ad onta di tuttociò l'impresa del piombo della Tolfa non diede mai l'utile che compensasse le spese. Laonde nel 1778 fu mandato più volte sul luogo un certo Padre Audifredi dell'ordine dei Predicatori, perchè esaminasse se la miniera era in istato da continuare. Ma questi dopo tante ispezioni praticate sui luoghi, fece una estesa relazione

nella quale venne dimostrata la povertà della miniera, cosicchè fu decisa la chiusura immediata dello stabilimento, nè più si parlò del piombo della Tolfa.

Sotto il pontificato di Leone XII si risuscitarono nuove indagini, ma queste non sortirono alcun effetto per una speculazione mineraria.

Dalle esposte notizie si ricava che le escavazioni delle miniere del piombo fatte sui monti della Tolfa non furono mai condotte da uomini intelligenti e pratici del luogo, nè le operazioni metallurgiche ebbero una direzione veramente scientifica. Prova ne siano le ispezioni fatte sui residui delle vecchie lavorazioni abbandonati, e che tuttora giacciono prossimi all' edificio del piombo, in cui rinvenni molti prodotti che si sarebbero potuti utilizzare, specialmente il rame.

Il giorno 11 settembre 1860, Giuseppe Bonizi della Tolfa ottenne la concessione dei solfuri di mercurio, antimonio, zinco e rame, valevole per anni 50, con un canone di scudi 10 romani all'anno, pari a lire 53,75, con partecipazione del Governo agli utili, limitata entro un circolo di due chilometri di raggio. Appresso di questa il giorno 6 aprile 1861, lo stesso Bonizi aggiunse a quella concessione anche il solfuro di piombo, alle medesime condizioni, e col solo aumento del canone di scudi romani 5, pari a lire 26,87. Fatta una società, si fecero di questo esperimenti, e si ricavò piombo argentifero in proporzioni convenienti; ma poi la medesima società non avendo forza ad accingersi ad una più vasta impresa, si arrestò nella inerzia nella quale si trova tuttora.

Mercurio. — Correva l' inverno del 1860 allorchè una frana, entro un fosso dello Scopeto, fece scendere molto materiale, nel quale si raccolsero varî minerali, che mi vennero portati ad esaminare. Vi trovai ciottoli di calcare cristallino misti a blenda, galena, e specialmente a piriti di ferro in decomposizione, e tinti di un bruno ocraceo. A prima vista non mi parvero contenere altro: ma poi un esame più scrupoloso mi fece scorgere un gruppetto di cristallini rossi di rubino, che giudicai per cinabro nativo. Essendo la prima volta che mi si offriva tal minerale, volli farne esperimento, e raccoltane poca, ma sufficiente quantità, la posi in una piccola storta con calce viva. Il mercurio sublimato, nel di lei collo fu raccolto, e dimostrato all' evidenza. Dietro questo risultato si praticarono scavi sulla frana e scopertane la parete si videro due venuzze di cinabro nativo serpeggiare nella roccia, costituite da quei medesimi cristallini, che cadendo al più leggiero tocco si perdevano nella terra. Si trovarono poi lungo il fosso quei medesimi cristallini, raccolti nelle piccole pozze trascinativi dalle acque correnti. Tale fu la scoperta del cinabro nativo fra i solfuri metallici della Tolfa.

Nella citata concessione dei solfuri metallici della Tolfa vi si comprese anche il mercurio; ma tutti subirono la stessa sorte, vale a dire ne furono estratti campioni, senza alcun profitto.

Ocre. — Nelle mie escursioni scientifiche sui monti della Tolfa avendo adocchiata la quantità delle ocre che si formano per la decomposizione spontanea del ferro limonitico, e le loro svariate e brillanti tinte, volli farle sperimentare, come terre a colori. Adoperate da varî amici pittori, riuscirono eccellenti e molto fruttifere. Però la società romana, avendo il diritto su tutti i minerali di ferro, tentò farne speculazione per metterle in commercio. Ma non essendo questo lo scopo della sua istituzione, desistette, e le ocre tolfetane non furono più curate.

Quarzo. — Nel 1724 un uomo che si diceva intendente di mineralogia, andò alla Tolfa, e fatta una perquisizione su quei monti, disse che vi erano molti minerali, e fra questi, quello che serve alla fabbricazione del cristallo poteva costituire una miniera più facile e di poca spesa. Predicato in Roma l'utile che avrebbe dato, a fine di trovare socî, un tale abate Fabroni fiorentino, nel 1731, ottenne dal Papa la privativa di quel minerale e dalla Camera la prestazione di scudi romani 2000, per intraprenderne i lavori, colla sicurtà del cavalier Franceschi parimente fiorentino. Ma essendo mal riuscito alle prove, perchè il vetro ottenuto risultò alquanto oscuro, l'impresa fallì e la sicurtà fu pagata. Peraltro l'abate Fabroni non desistette, e ravvicinato quello stesso Alessio Mattioli, di cui abbiamo di sopra parlato, questi intraprese nuove e più diligenti indagini. Mentre si facevano queste pratiche morì l'abate Fabroni e la privativa decadde, tornando la Camera in possesso delle miniere. Così nessuno parlò più del quarzo della Tolfa. Ancor io volli a questo fine sperimentare il quarzo della Tolfa, raccolto nella cava del sasso alluminoso detta la Ballotta, e alle Trincere presso le Allumiere. Fu lavorato in Roma in una fornace del Trastevere, che allora esisteva in via del Mattonato, e nella fusione si ebbe molto sviluppo di gas, il quale cessato, il vetro risultante riuscì di buona qualità, e perciò ne furono fatte bottiglie, bicchieri ed altri lavori ordinarî.

Caolino. — Due fratelli israeliti per nome Bondi, avendo inteso da una vecchia tradizione che alla Tolfa si trova l'oro, si mossero a farne ricerca, e rinvenuta una certa argilla contenente piriti credettero aver fatto il loro affare. Segretamente le fecero sperimentare; ma non vi trovarono che poca quantità di argento. Ciò bastò loro per domandare subito la concessione dell'argilla plastica, senza parlare delle piriti o dello scopo a cui miravano. Di fatti l'ottennero a nome di Crescenzo Bondi per anni 50, in data 16 febbraio 1857, coll'annuo canone di oncie 10 d'argento pari a lire 53,75, circoscritta in un'area di 16 miglia quadrate.

Formata una società d'Israeliti, costrussero nel villaggio della Bianca delle vasche per separare il metallo dall'argilla, che misero in commercio per uso figulinario, e che venne dai lavoranti rifiutata come pessima e vetriolica. Nondimeno seguitarono a separare le piriti che spedivano fuori di Roma, per ricavarvi il metallo prezioso.

In questo tempo, dietro la richiesta fatta loro di una partita di caolino, vennero a sapere che questo minerale poteva essere impiegato come argilla refrattaria, e a fabricar porcellane. Vedendo in seguito la società di non poter ricavare grandi profitti dalle piriti, come avea creduto, risolvette di abbandonare il loro trattamento, e rivolgersi a negoziare del caolino. A tale scopo ne fu aperta una cava sopra il villaggio della Bianca, e se ne fece deposito per essere messo in commercio come veniva cavato.

La società romana delle miniere del ferro avendo eretta una fabbricazione di mattoni refrattarî per uso dei suoi stabilimenti, conoscendo le buone qualità di tale sostanza, fece un contratto cogli Ebrei per la quantità occorrente, e questo fu il solo impiego che di quel caolino fu fatto sui monti della Tolfa. Finalmente la società israelitica cedette i suoi diritti per contratto in data 18 aprile 1876 ad un'altra società Marchand e compagni, che tuttora ne ritengono l'impresa.

Derivato questo materiale dalla decomposizione delle trachiti, numerose varietà di esso si trovano associate a quelle roccie, e sperimentato in Francia e in Italia ha dato sempre per risultato eccellenti porcellane.

Oltre il caolino, sui monti della Tolfa si trovano anche le marne subapennine per usi figulinarî, come sono quelle della Concia sotto il paese di Tolfa, adoperate per la fabbricazione di mattoni e tegole, onde sopperire ai bisogni del paese.

Lignite. — Al principiare di questo secolo un proprietario della Tolfa, avendo fatta attenzione che le roccie del Monte Castagno e del sottostante fosso Cupo ardevano, disse che fra gli altri prodotti di quei monti v' era anche il carbon fossile che si sarebbe potuto mettere a profitto. Ma il paese essendo provvisto ad esuberanza di carbone vegetale, nessuno vi prese interesse, e le osservazioni di colui restarono lettera morta. Nondimeno fin d'allora si diceva che alla Tolfa v'era anche il combustibile minerale. Così restarono le cose quando, sia perchè la distruzione delle selve sempre più avanzava, sia per spirito d'intrapresa, sia anche per ambedue quelle cause, i fratelli Angelo e Giuseppe Bonizi della Tolfa tornarono a far esame di quelle roccie, e fattone esperimento le credettero indizio sicuro di un deposito di carbone, ovvero anche di una lignite, capace di essere messa a profitto, specialmente in una contrada che richiama ad imprese minerarie.

Domandata pertanto la concessione al governo pontificio, il giorno 18 dicembre 1857 la ottennero a nome di Giuseppe Bonizi per anni 50, col canone annuo di scudi romani 15, pari a lire 80,62, circoscritta entro un' area circolare di 2 chilometri di raggio. Ottenuta la concessione fecero appello ad una società in partecipazione che presto si compose. Furono rinnovati esperimenti su quelle roccie contenenti carbonio, applicandole in un forno a riverbero alla cottura dell' allumite e della calce, ed essendo bene riuscite, se ne intraprese l'escavazione coll'apertura di pozzi, tanto a mezza costa del Monte Castagno, quanto sulla sponda del fosso Cupo. Fu scoperta una lunga serie di stratificazioni della formazione Alberese, costituita da un' alternanza di calcarie argillose, e di schisti più o meno carichi di carbonio, pieni d'impressioni di piante specialmente fucoidi, e di più al fosso Cupo un banco contenente grossi pesci disfatti. I lavori si protrassero per alcun tempo, ma non avendo mai raggiunti i desiderati depositi di combustibile, i fondi immessi terminarono, e la società scoraggiata sospese le escavazioni di ricerca, nè altro fu fatto in seguito per il fine che si era proposto.

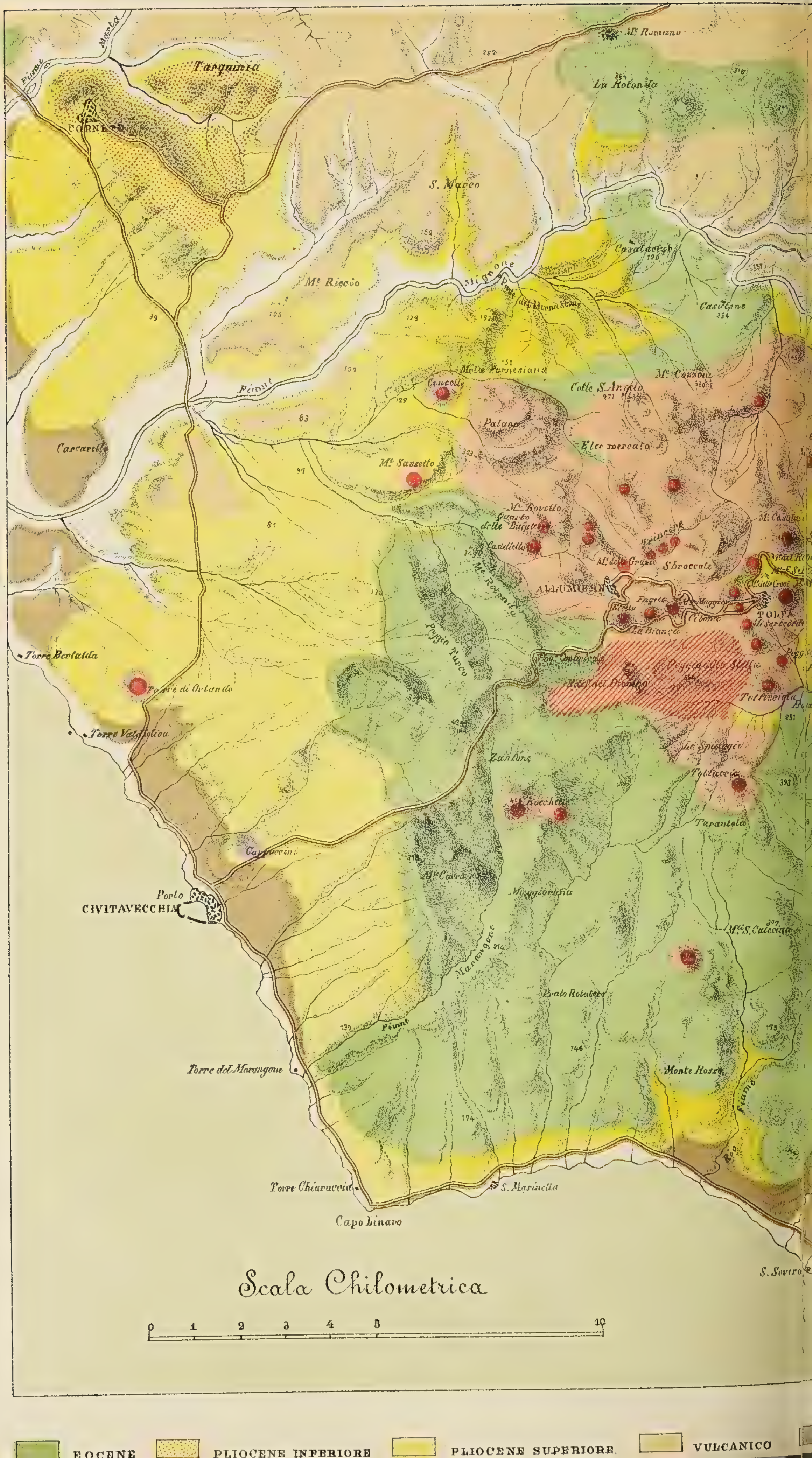
Pietra litografica. — Le roccie dell'Alberese costituite da calcarie argillose a fina tessitura, e di un bigio turchiniccio, possono essere adoperate come pietre litografiche. La Società romana delle miniere del ferro, volle far prova di quelle della Tolfa e riuscita nell'esperimento, fece ricerca delle migliori, e ne estrasse una certa quantità per essere messe in commercio. La speculazione forse avrebbe potuto dare un buon risultato, ma siccome anche questa era fuori dello scopo sociale, dovette desistere, lasciando memoria di questo prodotto tolfetano.

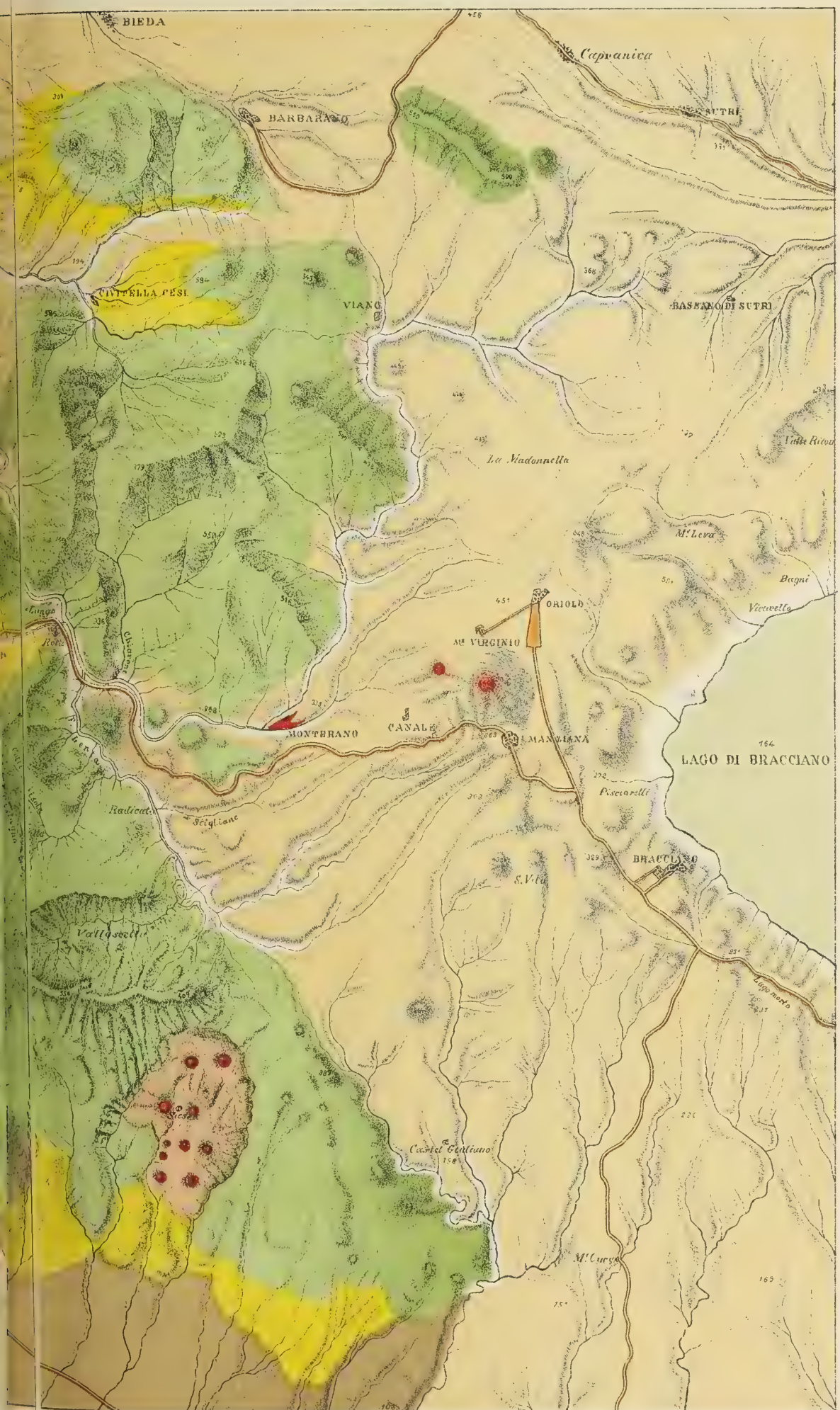
Dopo queste notizie lo scopo della mia narrazione è interamente soddisfatto; ma non per questo è completa l'esposizione geologica della Tuscia romana; conciossiachè io non ho parlato che della Tolfa o di una parte di essa. Per dare intera ragione di tale interessante contrada mancano ancora gli studî necessarî, e che si richiedono a conoscere meglio che si può il periodo vulcanico che succedette al trachitico durante lo svolgimento del gran cataclisma vulcanico-glaciale a cui fu sottoposta l'Italia centrale nei tempi quaternarî.

Abbiamo veduto nella seconda parte di questa Memoria che allora la Tuscia romana fu fatta teatro di quelle scene sovversive, per le quali non solo sorsero i grandi apparecchi vulcanici che ne occupano la più grande parte; ma altresì furono la causa della grande emersione subapennina, o della riduzione dell' Italia allo stato attuale.

Nella mia carriera scientifica solo e senza soccorsi mi sono gettato in un pelago immenso e sconosciuto, vi ho navigato fin dove le mie forze mi spinsero; però non ho potuto raggiungere tutto ciò che avrei voluto. Il tempo è mancato, nè mi ha permesso intraprendere lo studio speciale dei vulcani etruschi, come ho potuto fare della Tolfa e del Lazio. Laonde resta un vuoto che attende un generoso naturalista che voglia impegnarsi a completare lo studio di quella interessante contrada. Lo stesso mio amor proprio mi spinge a far voti perchè ciò avvenga, nella lusinga che i miei tralasciati lavori siano portati a compimento, e la geologia italiana arricchita di ulteriori e stupende cognizioni.

Lago di Bolsena
Lago di Bracciano
MARE MEDITERRANEO
CIVITAVECCHIA
ROMA
VITERBO
MONTEFIASCONE
BAGNOREA
ORVIETO
TOSCANELLA
CORNETO
CIVITÀ CASTELLANA
NARNI
AMELIA
TERNI
Giurese
Eocenico
Trachitico
Pliocenico
Vulcanico
Travertino


Tarquinia
Corneto
S. Marco
Mt Riccio
Mt Romano
La Rotonda
Casalacci
Castiglione
Carcarello
Mt Sassetto
Colle S. Angelo
Mt Cozzoni
Palano
Elce mercato
Mt Rovello
Castelluzzo
Allumiere
Tolfa
Poggio Turco
Torre Bertalda
Torre di Orlando
Zanfone
Rocchetta
Cappuccini
Porto
CIVITAVECCHIA
Mt Cavallo
Moggio
Prato Rotalare
Monte Rosso
Mt S. Caterina
Tarantola
Torre del Marangone
Torre Chiaruccia
S. Marinella
Capo Linaro
S. Severa
Scala Chilometrica
0 1 2 3 4 5 10
EOCENE
PLIOCENE INFERIORE
PLIOCENE SUPERIORE
VULCANICO



TRAVERTINI · TRACHITI · METAMORFISMI · BACINO METALLIFERO

Tarquinia
Corneto
S. Marco
La Rotonda
Mt. Riccio
Cencelle
Mt. Sassetto
Colle S. Angelo
Elce mozzato
ALLUMIERE
TOLFA
Torre Bertalda
Torre di Orlando
Zanfone
Porto
CIVITAVECCHIA
Torre del Marangone
Torre Chiaruccia
Capo Linaro
S. Marinella
Monte Rosso
S. Severa
Scala Chilometrica
0 1 2 3 4 5 10
BIEDA
Capranica
BARBARANO
SUTRI
CIVITELLA CESI
VIANO
BASSANO DI SUTRI
La Madonnella
ORIOLO
Mt. VIRGINIO
MONTERANO
CANALE
MANZIANA
LAGO DI BRACCIANO
BRACCIANO
Castel Giuliano
EOCENE
PLIOCENE INFERIORE
PLIOCENE SUPERIORE
VULCANICO
TRAVERTINI
TRACHITI
METAMORFISMI
BACINO METALLIFERO

Le funzioni metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante.

Memoria del prof. ENRICO D'OVIDIO presentata dal Socio CREMONA

nella seduta dell'8 aprile 1877.

PROEMIO.

In alcuni miei precedenti lavori sulla Geometria metrico-projettiva (1) si trova in sostanza esposta la teoria delle funzioni metriche negli spazî di tre e cinque dimensioni e di curvatura costante, e in alcuni spazî di quattro, otto e nove dimensioni originati da quelli di tre e cinque dimensioni. Ma la teoria è in quei lavori applicata esclusivamente a de'casi nei quali essa è capace di ricevere una rappresentazione geometrica mediante l'ordinario spazio di tre dimensioni e i complessi *Plückeriani*. Ora nella presente Memoria io mi propongo di estendere i risultati ottenuti negli accennati casi particolari, in modo da formare una teoria delle funzioni metriche in uno spazio di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. Una simile teoria non mi sembra sia stata data sino ad oggi (2), e d'altra parte essa costituisce il fondamento più naturale di ogni ulteriore ricerca intorno a un argomento così importante com'è quello degli spazî di più dimensioni.

Oso sperare che questi miei studî saranno benignamente accolti da' geometri; tanto più che io ho cercato di mettermi alla portata anche di chi sia nuovo all'argomento, senza tuttavia molto insistere sui particolari, e senza entrare nella parte storica che mi avrebbe menato troppo lontano.

Accenno in brevi tratti il contenuto de' singoli paragrafi:

Ne' §§ I a V sono date le definizioni di uno spazio o varietà di un numero qualunque di dimensioni, e dei punti e multipunti, piani e multipiani ad esso subordinati, cioè delle forme fondamentali di uno spazio di più dimensioni. Indi sono

(1) Cfr. *Studio sulla Geometria projettiva* (Annali di Matematica, serie II t. VI). — *I complessi e le congruenze lineari in Geometria projettiva* (ibid. t. VII). — *Alcune proprietà metriche de'complessi* ecc. (Atti della Reale Accademia dei Lincei, serie II t. III). — *Le reti di complessi lineari nella Geometria metrico-projettiva* (ibid.). — *Le serie triple e quadruple di complessi* ecc. (ibid.). — *Le projezioni ortogonali nella Geometria metrico-projettiva* (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Vol. IX). — *Alcuni luoghi e inviluppi* ecc. (Rendiconto dell'Accademia delle Scienze di Napoli, 1875).

(2) La pregevole Memoria del sig. C. Jordan: *Essai sur la Géométrie à n dimensions* (Bulletin de la Société math. de France, t. III 1875) non si riferisce a uno spazio qualunque, ma solo a quello che potrebbe dirsi *euclideo*. Oltreacciò essa differisce essenzialmente dal presente scritto anche nel metodo di ricerca, avendo io posto a base della determinazione delle funzioni metriche, così in questa come nelle precedenti pubblicazioni, i concetti della dualità e della projettività, de' quali non si riscontra alcuna traccia nella Memoria del sig. Jordan.

esaminati i casi in cui due multipunti hanno punti comuni ovvero appartengono a uno stesso multipunto, e sono trattate delle quistioni relative alla intersezione de' multipunti. È altresì determinato l'ordine d'infinità del numero di punti, bipunti, ecc. contenuti nel proposto spazio; come pure di quei punti, bipunti, ecc. che son contenuti in un dato multipunto o passano per esso. Le stesse considerazioni sono applicate con legge di dualità a' multipiani.

Nel § VI son definite le coordinate omogenee de' multipunti, de' multipiani e de' piani; e nel § VII sono esposte le relazioni (quadratiche ed omogenee) che passano fra le coordinate di uno stesso multipunto o multipiano. Nel medesimo § VII si trovano le relazioni che devono passare fra le coordinate di due multipunti o multipiani, perchè essi abbiano un punto o multipunto, ovvero un piano o multipiano, comune.

Nel § VIII apparisce per la prima volta quella forma quadratica che servirà a definire la distanza fra due punti, e che per brevità chiamiamo coll' illustre Cayley l'assoluto de' punti. Ivi è altresì considerata la sua forma reciproca, non che due sistemi di forme quadratiche reciproche ciascuna a ciascuna, le quali adempiono un rilevante ufficio nelle relazioni metriche fra multipunti e multipiani. Nel § IX poi, oltre a molte relazioni fra tali forme, è introdotta la nozione di multipunti conjugati fra loro rispetto all'assoluto.

Il § X tratta di quella funzione delle coordinate di due punti (e de'coefficienti dell'assoluto) che riceve il nome di distanza fra due punti. Ivi è pure definita la mutua ortogonalità possibile fra due punti.

Nel § XI è fatto cenno dell'ortogonalità semplice, doppia, ... perfetta fra due multipunti; ed è mostrato quanti gruppi di due o più punti mutuamente ortogonali esistano in un dato multipunto, e quanti gruppi di n punti siffatti esistano nel proposto spazio di n—1 dimensioni.

Ne' §§ XII e XIII si definisce la perpendicolarità semplice, doppia, ... di due multipunti, e si determina accuratamente il numero e le proprietà delle rette (bipunti) perpendicolari simultaneamente a due dati multipunti. Nel seguente § XIV si tratta della projezione di un punto o multipunto sopra un multipunto.

Nel § XV è stabilita la nozione importante delle varie distanze fra due multipunti. I §§ XVI e XVII contengono la ricerca delle espressioni del momento e del comomento di due multipunti, i quali non sono altro che il prodotto de' seni e il prodotto de' coseni delle varie distanze fra due multipunti. I seguenti § XVIII e XIX forniscono le espressioni di altre funzioni delle dette distanze, funzioni che posson chiamarsi momenti e comomenti de'diversi ordini (il momento e il comomento propriamente detti sono quelli dell'ordine più alto). Dopo questo è facile formare le equazioni che hanno per radici i seni o i coseni delle varie distanze fra due multipunti.

Lo studio de'momenti e comomenti è poi ripreso nel § XXII, dove essi sono espressi mediante le coordinate de' due multipunti, mentre prima erano espressi solo mediante le coordinate de' punti che individuano i multipunti medesimi.

Nei §§ XX, XXI e XXIII è posta maggiormente in luce la perfetta dualità che sussiste fra le proprietà de' punti e de' piani, de' multipunti e de' multipiani. Ivi è spiegata la nozione di angolo fra due piani e quella de' varî angoli fra due multipiani; ed è mostrato come questi angoli non differiscano dalle distanze prima considerate.

Oltreacciò sono definiti e studiati partitamente l'assoluto de' piani e gli assoluti delle varie classi di multipunti e di multipiani.

Nel § XXIV è definita l'ampiezza di un gruppo di punti o di piani (in estensione de' comuni concetti di area, volume ecc.); e vi sono raccolti non pochi teoremi relativi alle ampiezze, i quali costituiscono la generalizzazione delle più note e importanti proposizioni della comune trigonometria piana e sferica e della comune tetraedrometria. Col sussidio di questi teoremi si rende possibile di usare talvolta, nello studio degli spazî di molte dimensioni, un processo di deduzione che fa riscontro a quello che governa il cosidetto metodo sintetico della Geometria ordinaria. Nello stesso § trova luogo la relazione fra l'ampiezza di un dato gruppo di punti e quella della sua projezione sopra un altro dato multipunto.

Nel § XXV è accennata una interpretazione metrica delle coordinate di punti e piani, multipunti e multipiani; il che conduce a nuove forme delle espressioni de' momenti e comomenti, e ad una relazione quadratica ma non omogenea fra le coordinate di un multipunto. Sono poi date le formole per la trasformazione delle coordinate; ed è fatta menzione del caso che, invece di un dato gruppo di punti, si assuma come fondamentale quello individuato da' piani rispettivamente conjugati a' detti punti. È notevole il caso che il secondo gruppo coincida col primitivo.

Nel § XXVI sono definiti i parallelismi dei diversi ordini, possibili fra due multipunti; ed è mostrato quali e quante delle distanze fra due multipunti svaniscano in tal caso, e come si determinino le distanze che rimangono. Accanto a' multipunti paralleli sono poi considerati quelli ai quali non disdice la denominazione di antiparalleli. Le medesime cose sono applicate con piena dualità ai multipiani.

Nei §§ XXVII e XXVIII è discusso il caso in cui il discriminante dell'assoluto de' punti sia supposto nullo; caso notevolissimo, poichè concorda, mutati i nomi, con quello dell'ordinario spazio euclideo quando $n=4$. Allora la dualità, che sussisteva in generale fra gli elementi punto e piano, viene in parte a mancare; e l'angolo di due piani riesce sempre nullo. Ma si può all'angolo sostituire un'altra funzione non evanescente, alla quale è lecito attribuire lo stesso nome di angolo. Una cosa simile può dirsi dell'ampiezza di un gruppo di piani.

Inoltre, l'assoluto de' punti attualmente risulta composto di tante rette uscenti da un medesimo punto, detto principale, che è ortogonale a tutti i punti dello spazio. E l'assoluto de' piani consta di due volte l'insieme de' piani che passano pel punto principale.

Delle distanze fra due multipunti una in certi casi si annulla, ma può esser supplita dall'angolo (nel senso testè additato) fra due piani determinati; ed è facile trovare il valore così di questo angolo come delle rimanenti distanze.

Finalmente è fatto cenno del caso di due multipiani paralleli, ossia di due multipunti antiparalleli. Allora una delle distanze si annulla, ma ad essa sottentra un angolo; al modo stesso come nell'ordinaria Geometria due rette convergenti o due piani ammettono generalmente un angolo, il quale nel caso del parallelismo si annulla, ma è supplito dalla distanza fra le due rette o i due piani.

Dopo aver applicato la teoria generale delle funzioni metriche al caso che il discriminante dell'assoluto de' punti sia nullo, sarebbe stato naturale di applicarla

anche al caso più generale che siano nulli tutti i determinanti minori di un ordine assegnato nell'assoluto medesimo. Ma un tale studio ho preferito di riserbarlo ad altra occasione, per non render troppo lungo il presente scritto, e per non fargli perdere il carattere di generalità al quale s' informa.

Pongo termine a questo breve sommario con un' avvertenza. Trattando delle funzioni metriche in uno spazio *qualunque* di curvatura costante, io non mi son creduto in obbligo di far rilevare la stretta e continua analogia fra i concetti, i procedimenti e i calcoli che occorrono nella teoria generale e quelli che formano il corredo della ordinaria Geometria. D' altra parte tale analogia spicca così evidente per se stessa, che l' intelligente lettore non potrà non ravvisarla ad ogni pie' sospinto, senza bisogno della mia assistenza.

---

§ I. Spazî di quante si vogliano dimensioni.

Date n variabili, ciascuna delle quali possa ricevere tutti gl' infiniti (∞ o ∞^1) valori reali positivi e negativi, ogni gruppo di valori particolari di tali variabili può esser ritenuto come un *elemento* in una *varietà* (*Mannigfaltigkeit*) di ∞^n elementi. Così i punti dello spazio di tre dimensioni che ci circonda corrispondono univocamente agli elementi di una varietà di ∞^3 elementi, ciascuno individuato da' valori particolari di tre variabili, quali sarebbero le coordinate *Cartesiane* de'punti. Usando le parole: *spazio*, *punto*, *dimensione*, *coordinata* in un senso più lato di quello comunemente adottato, ma (quel che importa) non contraddittorio ad esso, noi potremo dire che ciascun gruppo di valori delle n variabili considerate in principio individua un *punto* (*elemento*) in uno *spazio* (*varietà*) di n *dimensioni*, del quale punto quei valori sono le *coordinate*. Anche altre locuzioni prenderemo in prestito dalla Geometria ordinaria, allargandone, senza tuttavia snaturarlo, il significato.

Per maggior comodità, da questo momento in poi denoteremo con $n-1$ il numero delle dimensioni dello spazio; e, per introdurre simmetria ed omogeneità perfetta nella esposizione e nelle formole, adopreremo n anzichè $n-1$ variabili, intendendo che ciascun punto sia individuato da' valori de' rapporti di $n-1$ fra le n variabili alla rimanente; e queste n variabili chiameremo *coordinate omogenee* de'punti dello spazio. È chiaro che le coordinate di uno stesso punto possono allora esser moltiplicate o divise per un medesimo numero arbitrario.

Per maggior semplicità indicheremo con

$$x, x', \ldots, \mathrm{X}, \ldots, y, \ldots$$

i punti di coordinate

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (x'_1, \ldots, x'_n), \ldots, (\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n), \ldots, (y_1, \ldots, y_n), \ldots$$

rispettivamente.

Da ultimo notiamo che in seguito ammetteremo per le coordinate anche valori imaginarî, e diremo *imaginario* un punto il quale abbia qualche coordinata imaginaria.

§ II. Multipunti e multipiani.

Dati r punti

$$x, x', \ldots, x^{(r-1)}$$

(ove $r < n$), tutti i punti

$$\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)}$$

vale a dire i punti di coordinate

$$(\lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \ldots, \ldots, \lambda x_n + \lambda' x'_n + \ldots),$$

ove $\lambda : \lambda' : \ldots : \lambda^{(r-1)}$ sono $r - 1$ parametri arbitrarî, sono in numero di ∞^{r-1}, e costituiscono uno spazio di $r - 1$ dimensioni *parziale* rispetto allo spazio proposto di $n - 1$ dimensioni. Un tale spazio chiameremo un *r-punto*, *luogo* degli r punti dati $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ e di tutti gli altri indicati da $\lambda x + \lambda' x' + \ldots$

Un punto X *appartiene all' r-punto* $xx' \ldots x^{(r-1)}$ *se esiste un sistema di valori delle* $\lambda, \lambda', \ldots, \lambda^{(r-1)}$ *soddisfacente alle n equazioni*

$$(1) \qquad X_1 + \lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \ldots + \lambda^{(r-1)} x_1^{(r-1)} = 0, \ldots,$$

vale a dire se son nulli i determinanti della matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & \ldots & X_n \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ x_1^{(r-1)} & \ldots & x_n^{(r-1)} \end{matrix} \right\|;$$

il che dà $\binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{1.2 \ldots (r+1)}$ *condizioni, riducibili a sole* $n - r$. Esse si possono scrivere succintamente così:

$$(2) \qquad \sum X_b (\Sigma \pm x_c x'_d \ldots x_e^{(r-1)}) = 0$$

indicando con $bcd \ldots e$ una qualunque permutazione *pari* di $r + 1$ assegnati fra gl' indici $1, 2, \ldots, n$ (1).

In conseguenza, un $r$punto è individuato da r punti, purchè questi non si trovino in un $(r-1)$punto, ovvero purchè non sieno nulli i determinanti della matrice delle loro coordinate, il che darebbe $\binom{n}{r}$ condizioni riducibili a $n - r + 1$. *A fortiori*, gli r punti non devono trovarsi in uno stesso $(r-k)$punto $(k > 1)$, vale a dire non devono esser nulli tutti i determinanti d'ordine $r - k$ della suddetta matrice, il che darebbe $\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k-1}$ condizioni riducibili a $(n - r + 1)k$.

È manifesto che, *in luogo degli r punti* $x, x', \ldots$ *dati dapprima, è lecito scegliere, per individuare l'r-punto, altri r qualunque dei suoi punti, purchè non stiano in uno stesso* $(r-k)$*punto* $(k = 1, 2, \ldots)$. Starebbero in uno stesso $(r-1)$punto r punti qualunque

$$\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)}, \quad \mu x + \mu' x' + \ldots + \mu^{(r-1)} x^{(r-1)}, \ldots.$$

(1) Basta prender quelle permutazioni pari in cui gli elementi $cd \ldots e$ presentano il minor numero possibile d'inversioni.

dell'$r$punto, se fosse nullo il determinante dei rispettivi parametri $\Sigma \pm \lambda\mu' \ldots$. E starebbero in uno stesso $(r-k)$punto se fossero nulli i minori d'ordine $r-k+1$ del detto determinante, il che darebbe $\binom{r}{k-1}^2$ condizioni riducibili a k.

In un $r$punto si trovano infiniti $(r-1)$punti, $(r-2)$punti, ..., 2punti: l'ordine d'infinità per ciascuna serie sarà determinato fra poco.

Fra i multipunti va annoverato l'1punto o punto semplice; il 2punto o bipunto, che chiameremo anche *retta*; ...; l'$(n-1)$punto, che diremo anche *piano*. L'$n$punto non è altro che tutto lo spazio proposto.

È importante osservare che *le coordinate di ciascun punto* X *di un dato r-punto soddisfanno a* $n-r$ *equazioni lineari omogenee distinte,* le quali si ottengono eliminando $\lambda, \lambda', \ldots$ dalle n equazioni (1), e posson chiamarsi *le equazioni dell'r-punto.* Siano tali equazioni

$$\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n = 0, \quad \xi'_1 X_1 + \ldots + \xi'_n X_n = 0, \ldots :$$

è chiaro che ad esse si potranno sostituire delle altre della forma

$$(\lambda\xi_1 + \lambda'\xi'_1 + \ldots) X_1 + \ldots + (\lambda\xi_n + \lambda'\xi'_n + \ldots) X_n = 0,$$
$$(\mu\xi_1 + \mu'\xi'_1 + \ldots) X_1 + \ldots + (\mu\xi_n + \mu'\xi'_n + \ldots) X_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

purchè il determinante $\Sigma \pm \lambda\mu' \ldots$ non sia nullo.

Viceversa, *i punti, le cui coordinate soddisfanno a un certo numero r di equazioni lineari omogenee distinte, costituiscono un* $(n-r)$*punto.*

Così, un piano o $(n-1)$punto ha una equazione; e, viceversa, una equazione rappresenta un piano.

Un $r$punto è dunque composto dei punti comuni agli $n-r$ piani corrispondenti alle sue equazioni, e quindi comuni a tutti gli ∞^{n-r-1} piani le cui equazioni si formano combinando linearmente le medesime come pocanzi. L'$r$punto, considerato come *intersezione* o *inviluppo* di tutti questi piani, sarà chiamato un $(n-r)$*piano.* P. es. una retta è un $(n-2)$piano; un punto un $(n-1)$piano. Quando n è pari vi sono gli $\frac{n}{2}$punti, che sono al tempo stesso $\frac{n}{2}$piani.

I multipunti e i multipiani costituiscono le due serie di forme fondamentali, corrispondenti per dualità ciascuna a ciascuna, nello spazio di cui ci occupiamo. Il bipunto (retta) e il bipiano sono di *prima specie*, il tripunto e il tripiano di *seconda specie*; e così di seguito (1).

§ III. Intersezioni di multipunti.

Consideriamo un $r$punto R e un r'punto R'. Se $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ e $y, y', \ldots, y^{(r'-1)}$ sono punti individuanti rispettivamente R e R', sarà $\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)}$ un punto qualunque di R e $\mu y + \mu' y' + \ldots + \mu^{(r'-1)} y^{(r'-1)}$ un punto qualunque di R'; e perchè coincidano questi due punti dovranno verificarsi le n equazioni

$$\lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \ldots + \mu y_1 + \mu' y'_1 + \ldots = 0, \ldots$$

(1) Cfr. Clebsch: *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. XVII-1872, § 1).

La nomenclatura del Clebsch è alquanto diversa dalla nostra: egli chiama il nostro $r$punto *forma fondamentale di classe* $(r, n-r)$, e il nostro piano *varietà lineare.* — La nostra nomenclatura concorda con quella del Jordan, il quale però non considera che multipiani.

Siccome i parametri $\lambda, \ldots \mu, \ldots$ sono in numero di $r + r'$ ed entrano omogeneamente nelle n equazioni, così: R *e* R′ *non avranno in generale alcun punto comune quando* $r + r' \leqq n$; *avranno un punto comune quando* $r + r' = n + 1$, *e un k-punto comune quando* $r + r' = n + k$.

Ma in casi particolari potranno R *e* R′ *avere un punto comune benchè sia* $r + r' < n + 1$, *o un kpunto comune benchè sia* $r + r' < n + k$. Perchè l'ultima circostanza abbia luogo, dalle n equazioni soprascritte devono potersi ricavare le $\lambda, \ldots, \mu, \ldots$ come funzioni lineari omogenee di k parametri, ossia le n equazioni devono ridursi a $r + r' - k (< n)$; e per conseguenza devono annullarsi tutti i determinanti d'ordine $r + r' - k + 1 (\leqq n)$ ricavati dalla matrice composta con le coordinate de'punti $x, \ldots$ e $y, \ldots$ individuanti R e R′. Si hanno così $\binom{r+r'}{k-1}$ $\binom{n}{r+r'-k+1}$ condizioni; *le quali poi si riducono a* $(n + k - r - r')k$, poichè se dalle prime $r + r' - k$ equazioni si esprimono le $\lambda, \ldots, \mu, \ldots$ in funzione di k parametri e si sostituiscono nelle rimanenti $n+k-r-r'$ equazioni, basterà che ivi siano nulli i singoli coefficienti de' k parametri; onde appunto $(n + k - r - r')k$ condizioni.

Quando si supponga che R e R′ siano individuati come un $(n - r)$piano e un $(n - r')$piano mediante le rispettive $n - r$ e $n - r'$ equazioni, allora le condizioni perchè abbiano un $k$punto di comune si esprimono altrimenti. Vi sarà un $k$punto comune quando le dette $n - r + n - r'$ equazioni si riducano a sole $n - k$ distinte; e ciò accadrà sempre quando $r + r' = n + k$, ed anche quando, essendo $r + r' < n + k$, riescano nulli i determinanti d'ordine $n - k + 1$ ricavati dalla matrice composta co' coefficienti di quelle equazioni. Le $\binom{n}{k-1} \cdot \binom{2n-r-r'}{n-k+1}$ condizioni che così si ottengono, equivalgono invero a sole $k(n + k - r - r')$; poichè, aggruppando le prime $n - k$ equazioni con ciascuna delle rimanenti $n+k-r-r'$, si hanno $n + k - r - r'$ sistemi, ciascuno di $n - k + 1$ equazioni, e in ciascuno dei quali basterà che siano nulli i k determinanti formati dalle prime $n - k$ colonne di coefficienti con ciascuna delle rimanenti k.

È notevole intanto che il numero delle condizioni affinchè un $r$punto e un r'punto abbiano un $k$punto comune è lo stesso di quello affinchè un $(n - r)$punto e un $(n - r')$punto abbiano un $(n + k - r - r')$punto comune.

Si osservi altresì che quando, essendo $r + r' < n + k$, un $r$punto R e un r'punto R′ hanno un $k$punto comune, allora k punti di questo $k$punto, altri $r - k$ punti di R ed altri $r' - k$ punti di R′ individuano un $(r + r' - k)$punto, nel quale son contenuti R e R′. In altre parole, R *e* R′ *considerati come multipiani hanno un* $(n + k - r - r')$*piano comune.*

Come caso particolare della ricerca che precede, possiamo trovare *le condizioni perchè un dato r'punto* R′ *sia tutto contenuto in un dato r-punto* R, essendo $r \geqq r'$. Dovranno allora annullarsi i determinanti d'ordine $r + 1$ della matrice delle coordinate de' punti individuanti R e R′, ovvero i determinanti d'ordine $n - r' + 1$ della matrice de'coefficienti delle equazioni di R e R′; e *il numero delle condizioni distinte sarà* $(n - r)r'$.

Altrettante condizioni occorrono perchè un $(n-r)$punto sia contenuto in un $(n-r')$-punto.

Quando $r=r'$ si ottengono col processo indicato le *condizioni per la coincidenza di due r-punti o* $(n-r)$*punti: esse sono in numero di*

$$(n-r)\,r\ (^1).$$

Qui sembra oppurtuno determinare l'ordine d'infinità del numero di r'punti contenuti in un $r$punto R, essendo $r>r'$. Sia

$$\lambda x+\lambda' x'+\ldots+\lambda^{(r-1)}x^{(r-1)}$$

un punto di R: affinchè esso appartenga a un certo r'punto devono le sue coordinate, e per esse le $\lambda, \lambda', \ldots$, esprimersi come funzioni lineari omogenee di r' parametri, il che equivale a stabilire fra $\lambda, \lambda', \ldots r-r'$ arbitrarie equazioni lineari. Ma non si detrae alla generalità di tali equazioni attribuendo a $r-r'$ coefficienti di ciascuna valori assegnati (del resto scelti comunque); sicchè in ciascuna delle $r-r'$ equazioni restano r' coefficienti disponibili, e fra tutte $(r-r')r'$ coefficienti. Dunque *in ciascuno r-punto esistono* $\infty^{(r-r')r'}$ r'*punti. Altrettanti sono gli* $(r-r')$*punti nell' r-punto.*

Allo stesso risultato si perviene osservando che le coordinate di ciascun punto di un r'punto verificano $n-r'$ equazioni, fra le quali attualmente si trovano le $n-r$ equazioni di R. Per individuare il punto bisognerebbe aggiungere alle $n-r'$ altre $r'-1$ equazioni, (le quali possono assegnarsi del resto ad arbitrio). Si hanno così $(n-r)+(r'-1)$ equazioni assegnate fra le n coordinate del punto, e però restano $r-r'$ coordinate disponibili. E ciò bastando si dica per r' punti, quanti bastano a individuare un r'punto, concludiamo di nuovo essere $\infty^{(r-r')r'}$ il numero domandato.

P. es. *nel proposto spazio di* $n-1$ *dimensioni esistono*

∞^{n-1} *punti ed altrettanti piani,*

$\infty^{2(n-2)}$ *rette » » bipiani,*

. . . . . .

$\infty^{k(n-k)}$ *k-punti » » k-piani.*

Ancora, in un piano esistono ∞^{n-2} punti e bipiani, $\infty^{2(n-3)}$ rette e tripiani, ecc.

§ IV. Rette secanti più multipunti.

Quante e quali rette hanno un punto comune con uno o più multipunti assegnati? Accenneremo un modo di risolvere questo problema, il quale è importante pe' nostri studî, ed è poi un caso particolare del seguente; quanti e quali $k$punti hanno in comune un $s$punto, un s'punto,... rispettivamente con un $r$punto, un r'punto,.. dati?

1. Risulta dal § III (in fine) che una retta è individuata da $2(n-2)$ parametri, p. es. si possono assumere come parametri $n-2$ coordinate di un suo punto ed $n-2$ coordinate di un altro suo punto. Ne risulta anche che le condizioni perchè una retta abbia un punto comune con un dato $r$punto sono in numero di $n-r+1$ e sono di primo grado in que' parametri. Dunque di rette che sechino un dato $r$punto ve

(1) Clebsch (l. c. § 11) chiama questo numero il *peso* dell' $r$punto o $(n-r)$piano.

ne ha ∞^{n+r-3} (poichè $n + r > 3$). E in generale, di rette che *sechino un r-punto, un r'punto ,... e un* $r^{(h-1)}$*punto dati, i quali non abbiano punti comuni, ve ne ha*

$$\infty^{r+r'+\cdots-(h-2)\,n-1)-2}$$

se l'esponente è positivo, un numero finito se è nullo, nessuna se è negativo.

2. In particolare, *di rette passanti per un punto dato e secanti un r-punto e un r'punto dati* R *e* R′ *in punti distinti, non ve ne ha alcuna se* $r + r' < n$ *e i due multipunti non hanno punti comuni.* Ora proveremo che *non ne esiste alcuna anche quando, essendo* $r + r' < n + k$, *i due multipunti abbiano un k-punto comune; ma ne esiste una se* $r + r' = n$ *e i due multipunti non hanno punti comuni, e ne esistono* ∞^k se $r + r' = n + k$ *e i due multipunti hanno un k-punto comune.*

Infatti, se $z', z'', \ldots, z^{(k)}$ sono punti del *k*punto comune ad R e R′ (ove $k = 0, 1, \ldots$), un punto di R e uno di R′ potranno indicarsi con

$$\lambda' z' + \ldots + \lambda^{(k)} z^{(k)} + \mu' x' + \ldots + \mu^{(r-k)} x^{(r-k)} \quad \text{e} \quad \lambda_1 z' + \ldots + \lambda_k z^{(k)} + \nu' y' + \ldots + \nu^{(r'-k)} y^{(r'-k)},$$

e questi saranno in linea retta col dato punto X quando coesisteranno le n equazioni

$$\lambda' z'_1 + \ldots + \mu' x'_1 + \ldots + \lambda_1 z'_1 + \ldots + \nu' y'_1 + \ldots + X_1 = 0, \ldots.$$

ovvero

$$(\lambda' + \lambda_1)\, z'_1 + \ldots + \mu' x'_1 + \ldots + \nu' y'_1 + \ldots + X_1 = 0, \ldots.$$

Ora queste equazioni contengono come incognite distinte $(\lambda' + \lambda_1), \ldots, \mu', \ldots, \nu', \ldots$, che sono in numero di $r + r' - k$; per conseguenza saranno incompatibili finchè $r + r' - k < n$ ossia $r + r' < n + k$. Se poi $r + r' - k = n$ ossia $r + r' = n + k$, esisterà un sistema di valori delle incognite, e sieno $\rho', \ldots$ i valori di $(\lambda' + \lambda_1), \ldots$ Con questo le coordinate de'due punti considerati in R e R′ diverranno

$$\lambda' z' + \ldots + X' \quad \text{e} \quad (\rho' - \lambda')\, z' + \ldots + Y = -\lambda' z' - \ldots + Y',$$

ove X′ e Y′ sono date e $\lambda', \ldots$ variabili. E di qui segue che, se $k = 0$ e $r + r' = n$, vi sarà una sola retta, la XX′Y′, che secherà R e R′ e passerà per X; mentre, se k non è zero, ve ne saranno ∞^k, una delle quali sarà la XX′Y′, e le altre secheranno le coppie di rette che uniscono X′ e Y′ a' singoli punti del *k*punto comune a R e R′.

E tuttavia da notare che: *quando, essendo* $r + r' < n$, R *e* R′ *non han punti comuni, ma il punto* X *cade nell'* $(r + r')$*punto individuato da* R *e* R′; *e quando, essendo* $r + r' < n + k$, R *e* R′ *hanno un k-punto comune, ma il punto* X *cade nell'* $(r + r' - k)$*punto individuato da* R *e* R′; *anche allora vi sarà una, e rispettivamente* ∞^k *rette passanti per* X *e secanti* R *e* R′ *in punti distinti.* Poichè allora fra le coordinate de' punti $z', \ldots, x', \ldots, y' \ldots$, X passano le relazioni accennate al § II, le quali riducono le n equazioni in esame a tante distinte quante sono le incognite $(\lambda' + \lambda_1), \ldots, \mu', \ldots, \nu', \ldots$

Ne' casi in cui vi sono una o più rette che passino per X e sechino R e R′ in punti distinti, *se* X *percorre una retta, anche* X′ *e* Y′ *percorrono rispettivamente una retta.*

3. Applicando la regola data in principio del presente paragrafo, si scorge che *di rette secanti un r-punto* R, *un r'punto* R′, *un* $(n - r)$*punto* R_0 *e un* $(n - r')$*-punto* R_1 *ve ne ha in generale un numero finito*; perchè l'esponente $r + r' + \ldots$

$-(h-2)(n-1)-2$ si riduce a zero. Per precisare questo numero, supponiamo che r sia il più piccolo fra i numeri $r, r', n-r, n-r'$, e quindi $n-r$ il più grande; sicchè in generale R, R′ e R_1 non avranno a due a due punti comuni. Un punto di R, uno di R′ e uno di R_1 potranno indicarsi con

$$\lambda x+\lambda' x'+\ldots+\lambda^{(r-1)}x^{(r-1)},\ \mu y+\mu' y'+\ldots+\mu^{(r'-1)}y^{(r'-1)},\ \nu z+\nu' z'+\ldots+\nu^{(n-r'-1)}z^{(n-r'-1)},$$

e questi tre punti saranno in una stessa retta quando fra gli $r+r'+(n-r')=n+r$ parametri $\lambda,\ldots,\mu,\ldots,\nu,\ldots$ sussisteranno le n equazioni omogenee

$$\lambda x_1+\lambda' x'_1+\ldots+\mu y_1+\mu' y'_1+\ldots+\nu z_1+\nu' z'_1+\ldots=0\ldots,$$

le quali permettono di esprimere le $\mu, \mu', \ldots \nu, \nu', \ldots$ come funzioni lineari omogenee delle $\lambda, \lambda', \ldots$; sicchè le coordinate de' tre punti in quistione potranno ricever la forma

$$\lambda x+\lambda' x'+\ldots+\lambda^{(r-1)}x^{(r-1)},\quad \lambda y+\lambda' y'+\ldots+\lambda^{(r-1)}y^{(r-1)},\quad \lambda z+\lambda' z'+\ldots+\lambda^{(r-1)}z^{(r-1)}$$

(ove però $y,\ldots$ e $z,\ldots$ non si riferiscono agli stessi punti di prima), e si potrà già concludere che per ogni punto di R passa una retta che seca anche R′ e R_1. Ciò posto, la retta che passa per i detti tre punti secherà anche R_0 in un certo punto di esso

$$\rho u+\rho' u'+\ldots+\rho^{(n-r-1)}u^{(n-r-1)}$$

quando esistano valori di $\lambda, \lambda', \ldots$, $\rho, \rho', \ldots$ e σ capaci di soddisfare alle n equazioni

$$\sigma(\lambda x_1+\lambda' x'_1+\ldots)+(\lambda y_1+\lambda' y'_1+\ldots)+(\rho u_1+\rho' u'_1+\ldots)=0,\ldots.$$

ovvero

$$(\sigma x_1+y_1)\lambda+(\sigma x'_1+y'_1)\lambda'+\ldots+\rho u_1+\rho' u'_1+\ldots=0,\ldots,$$

le quali sono rispetto a $\lambda, \lambda', \ldots, \rho, \rho', \ldots$ di primo grado ed omogenee, e devono esser soddisfatte da valori non tutti nulli di esse; onde la condizione

$$\begin{vmatrix} \sigma x_1+y_1 & \sigma x'_1+y'_1 & \ldots & u_1 & u'_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma x_n+y_n & \sigma x'_n+y'_n & \ldots & u_n & u'_n & \ldots \end{vmatrix}=0.$$

Questa equazione è di r.mo grado in σ, e porge per σ r valori, a ciascuno de' quali corrisponde un sistema di valori per $\lambda, \lambda', \ldots, \rho, \rho', \ldots$; e quindi una retta secante R, R′, R_0 e R_1. Per conseguenza *esistono in generale tante rette secanti simultaneamente* R, R′, R_0 *e* R_1 *per quante sono le unità contenute nel più piccolo fra i quattro numeri* $r, r', n-r, n-r'$.

Va osservato che, essendo $r'+(n-r)=n+(r'-r)$, R′ ha un $(r'-r)$punto comune con R_0; ma pure delle rette secanti R, R′, R_0 e R_1 niuna seca R′ e R_0 in uno de' punti comuni, ossia niuna seca l'$(r'-r)$punto oltre R e R_1; poichè l'esponente $r+r'+\ldots-(h-2)(n-1)-2$ riducesi a $(r'-r)+r+(n-r')-(n-1)-2=-1$, che è negativo. Similmente, R_0 e R_1 hanno un $(n-r-r')$punto comune, ma niuna retta seca questo oltre R e R′.

Non entriamo nella discussione de' casi in cui due de'quattro multipunti avessero di comune più di quello che i numeri $r, r', n-r, n-r'$ in generale comportano. Alcuni di tali casi ci si presenteranno in seguito, ed allora li esamineremo specialmente.

§ V. Multipunti associati.

Siano

$$\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n = 0, \quad \xi'_1 X_1 + \ldots + \xi'_n X_n = 0, \ldots .$$

le $n - r$ equazioni di un $r$punto, e quindi

$$(\lambda\xi_1 + \lambda'\xi'_1 + \ldots) X_1 + (\lambda\xi_2 + \lambda'\xi'_2 + \ldots) X_2 + \ldots = 0$$

l'equazione di un piano qualunque passante per l'$r$punto. I punti di coordinate

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots), \quad (\xi'_1, \xi'_2, \ldots), \ldots .$$

individuano un $(n - r)$punto, luogo de' punti di coordinate $(\lambda\xi_1 + \lambda'\xi'_1 + \ldots, \ldots)$; ed è chiaro che tra le coordinate di un punto qualunque Ξ di questo $(n - r)$punto e quelle di un punto qualunque X dell'$r$punto passa la relazione bilineare

$$\Xi_1 X_1 + \ldots + \Xi_n X_n = 0.$$

Dunque *ad ogni r-punto dello spazio proposto corrisponde univocamente ciascuno* $(n - r)$*punto*, e la simmetria dell'ultima equazione prova che tale corrispondenza è reciproca. Diremo *associati* un $r$punto e un $(n - r)$punto corrispondenti secondo la legge ora esposta.

Siccome poi le $(\xi_1, \ldots)$, $(\xi'_1, \ldots), \ldots$ che abbiamo considerate come coordinate di punti dell'$(n - r)$punto, sono in pari tempo coefficienti delle equazioni de' piani dell'$r$punto dato; così concludiamo che *ad ogni piano dell'* r*-punto corrisponde univocamente un punto dell'* $(n - r)$*punto associato, e viceversa.*

Se dunque due multipiani hanno un multipiano comune, i loro multipunti associati hanno comune il multipunto associato a quello, e viceversa. Onde segue che le condizioni affinchè un $r$punto e un r'punto stiano in uno stesso $k$punto, ossia affinchè un $(n - r)$piano e un $(n - r')$piano abbiano un $(n - k)$piano comune, coincidono con le condizioni affinchè l'$(n - r)$punto e l'$(n - r')$punto associati ad essi abbiano un $(n - k)$punto comune. Così la questione è ricondotta ad una già trattata (§ II), e possiamo subito affermare quanto segue:

1. *Un* r*-punto* R *e un* r'*punto* R' *in generale non stanno in uno stesso multipunto se* $r + r' > n - 1$, *stanno in uno stesso piano se* $r + r' = n - 1$, *e in uno stesso* k*-punto se* $r + r' = k$.

2. *Anche quando sia* $r + r' > k$, R *e* R' *possono stare in uno stesso* k*-punto*, purchè siano nulli i determinanti d'ordine $n + k - r - r'$ $(< n - 1)$ della matrice de' coefficienti delle equazioni di R e R', od anche purchè siano nulli i determinanti d'ordine $k + 1$ della matrice delle coordinate de'punti individuanti i due multipunti; e *il numero delle condizioni distinte è* $(r + r' - k)(n - k)$.

Questo numero vale anche perchè un $(n - r)$punto e un $(n - r')$punto stiano in un $(n + k - r - r')$punto.

Ed è opportuno riflettere che se, essendo $r + r' > k$, R e R' sono in uno stesso $k$punto, essi avranno in comune un $(r + r' - k)$punto; ovvero, considerati come multipiani, staranno in uno stesso $(n + k - r - r')$piano.

3. Se un r'punto passa per un dato $r$punto, ossia contiene questo, l'$(n - r')$punto associato al primo sarà contenuto nell'$(n - r)$punto associato al secondo, e però (§ III in fine) *pel dato* r*-punto passano* $\infty^{(r'-r)(n-r')}$ r'*punti.*

Altrettanti $(n+r-r')$punti passano per l'$r$punto.
Per es. *per un dato punto passano*:

∞^{n-2} *rette e altrettanti piani,*
$\infty^{2(n-3)}$ *tripunti* » *bipiani,*
. . . . . .

§ VI. Coordinate di multipunti e multipiani.

Siano $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ r punti individuanti un $r$punto R, e

$$\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n = 0, \qquad \xi'_1 X_1 + \ldots + \xi'_n X_n = 0, \ldots.$$

le $n-r$ equazioni di R. Queste equazioni saranno soddisfatte da ciascuno di quelli r punti, onde si può dedurre che risulteranno proporzionali i determinanti delle due matrici (1)

$$\left\{\begin{matrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(r-1)} & \ldots & x_n^{(r-1)} \end{matrix}\right\}, \qquad \left\{\begin{matrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^{(n-r-1)} & \ldots & \xi_n^{(n-r-1)} \end{matrix}\right\},$$

e precisamente: se il gruppo di r indici $b \ldots c$ e quello di $n-r$ indici $d \ldots e$ compongono una permutazione pari $b..cd..e$ degli indici $1, 2, .., n$, saranno eguali i rapporti analoghi a

$$\Sigma \pm x_b \ldots x_c^{(r-1)} : \quad \Sigma \pm \xi_d \ldots \xi_e^{(n-r-1)}.$$

Porremo per brevità,

$$\Sigma \pm x_b \ldots x_c^{(r-1)} = x_{b..c}, \quad \Sigma \pm \xi_d \ldots \xi_e^{(n-r-1)} = \xi_{d..e}.$$

Nelle $x_{b..c}$ gl'indici formano una disposizione di classe r de' numeri $1, .., n$, e però le $x_{b..c}$ sono in numero di $n(n-1)\ldots(n-r+1)$; e similmente le $\xi_{d..e}$ sono in numero di $n(n-1)..(r+1)$. Ma due delle $x_{b..c}$ che differiscano solo per l'ordine degl' indici hanno lo stesso valore assoluto, e così pure due delle $\xi_{d..e}$ che differiscano solo per l'ordine degl' indici; sicchè le $x_{b..c}$ distinte in valore assoluto sono in generale $\binom{n}{r}$, e le $\xi_{d..e}$ sono $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$; onde i rapporti di tutte meno una alla rimanente sono $\binom{n}{r} - 1$.

È essenziale osservare che, se agli r punti scelti per individuare R se ne sostituiscono altri

$$\lambda x + \lambda' x' + \ldots, \qquad \mu x + \mu' x' + \ldots, \ldots,$$

e quindi si suppone che il determinante $\Sigma \pm \lambda \mu' \ldots$ non sia nullo, allora le $x_{b..c}$ non fanno che acquistare per fattor comune questo determinante, il che non altera i loro mutui rapporti; e lo stesso avviene per le $\xi_{d..e}$ se a' piani scelti per individuare R se ne sostituiscono degli altri

$$(\lambda \xi_1 + \lambda' \xi'_1 + \ldots) X_1 + \ldots = 0, \qquad (\mu \xi_1 + \mu' \xi'_1 + \ldots) X_1 + \ldots = 0, \ldots.$$

(1) Una dimostrazione di questo teorema si trova nel § II della mia Nota: *Ricerche su' sistemi indeterminati di equazioni lineari* (Atti dell'Accademia di Torino, vol. XII, 1877), della quale Nota è qui riprodotto in parte il contenuto. Un' altra dimostrazione fu data dal Clebsch nel § 2 della citata sua Memoria.

Inoltre è chiaro che, dato l'$r$punto, son note le $x_{b..c}$, o meglio i loro mutui rapporti; come pure le $\xi_{d..e}$, o meglio i loro mutui rapporti. Ora mostriamo come e quando viceversa, dati i mutui rapporti delle $x_{b..c}$ ovvero delle $\xi_{d..e}$, si possa determinare l'$r$punto in corrispondenza. Infatti la (2) del § II prova che, se denotiamo con $bcd..e$ le permutazioni pari di $r+1$ assegnati fra gl'indici $1, \dots, n$, le equazioni del tipo

$$\Sigma X_b x_{cd..e} = 0$$

rappresentano de' piani, i quali avranno in comune un $r$punto quando fra le $x_{cd..e}$ passino alcune relazioni.

Troveremo fra poco tali relazioni per altra via. Possiamo intanto sin da ora osservare che, essendo $\infty^{(n-r)r}$ gli $r$punti possibili, *il numero delle relazioni distinte fra le* $x_{b..c}$ *o le* $\xi_{d..e}$ *deve ridursi a* $\binom{n}{r} - (n-r)r - 1$.

Da tutte le precedenti considerazioni apparisce che le $\binom{n}{r}$ quantità $x_{b..c}$ si possono assumere come *coordinate omogenee di un r-punto*, quando fra esse passino alcune relazioni. Lo stesso vale per le $\xi_{d..e}$, le quali tuttavia chiameremo *coordinate omogenee di un* $(n-r)$*piano* per accennare alla loro composizione.

In particolare, *se l'equazione di un piano è*

$$\xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n = 0,$$

possiamo assumere come coordinate del piano i coefficienti $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Ne segue che la precedente equazione rappresenta *un piano in coordinate di punti* quando $\xi_1, \dots$ son date e $X_1, \dots$ variabili, e rappresenta *un punto in coordinate di piani* quando $X_1, \dots$ son date e $\xi_1, \dots$ variabili; vale a dire nel primo caso rappresenta un piano come luogo di punti, e nel secondo un punto come inviluppo di piani. E in generale, come $n-r$ equazioni lineari omogenee fra le coordinate di un punto variabile X rappresentano un $r$punto in coordinate di punti (cioè come luogo di punti), così $n-r$ *equazioni lineari omogenee fra le coordinate di un piano variabile* ξ *rappresentano un r-piano in coordinate di piani* (*cioè come inviluppo di piani*).

§ VII. Relazioni fra le coordinate di un multipunto o di due che si sechino.

Le condizioni affinchè un $r$punto R e un r'punto R' abbiano un $k$punto K comune, benchè sia $r + r' < n + k$, furon già trovate (§ III); ma ora vogliamo esprimerle in funzione delle coordinate di R e R':

$$x_{1..r}, \dots \quad \text{e} \quad y_{1..r'}, \dots$$

A tale uopo si prendano $k-1$ fra gl'indici $1, \dots, n$, e sia $b..c$ uno di questi gruppi; indi si prendano $r-k+1$ fra' rimanenti $n-k+1$ indici e siano $d..e$; e da ultimo si prendano $r'-k+1$ fra i rimanenti $n-r$ indici e siano $f..g$. *Si avrà allora la relazione bilineare tipica*

$$(1) \qquad \sum_{d..ef..g} (-1)^{\omega} x_{b..cd..e} y_{b..cf..g} = 0;$$

intendendo che nei singoli termini della somma il gruppo b..c rimanga costante, mentre d..e ed f..g variano in modo che d..ef..g coincida successivamente con tutte le disposizioni di $r + r' - 2(k-1)$ *assegnati fra i rimanenti indici; e* ω *esprime il numero d'inversioni nelle singole disposizioni* (1).

Infatti, se $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ e $y, y', \ldots, y^{(r'-1)}$ sono punti individuanti rispettivamente R e R', si possono supporre k de' primi coincidenti con k de' secondi. Ora la soprascritta somma è proporzionale alla seguente

$$\sum_{d..ef..g}(-1)^{\omega}(\Sigma\pm x_b..x_c^{(k-2)}x_d^{(k-1)}..x_e^{(r-1)})\ (\Sigma\pm y_b..y_c^{(k-2)}y_f^{(k-1)}..y_g^{(r'-1)})$$

ovvero, scomponendo ciascun determinante, alla

$$\sum_{d....g}(-1)^{\omega}\sum_{\substack{\alpha..\beta\gamma..\delta\\ \varepsilon..\zeta\eta..\vartheta}}(\Sigma\pm x_b^{(\alpha)}..x_c^{(\beta)})\,(\Sigma\pm x_d^{(\gamma)}..x_e^{(\delta)}).(\Sigma\pm y_b^{(\varepsilon)}..y_c^{(\zeta)})\,(\Sigma\pm y_f^{(\eta)}..y_g^{(\vartheta)}),$$

ove $x^{(\alpha)}..x^{(\beta)}x^{(\gamma)}..x^{(\delta)}$ e $y^{(\varepsilon)}..y^{(\zeta)}y^{(\eta)}..y^{(\vartheta)}$ sono le permutazioni pari di $xx'..x^{(r-1)}$ e $yy'..y^{(r'-1)}$. Questa poi si trasforma nella

$$\sum_{\substack{\alpha..\delta\\ \varepsilon..\vartheta}}(\Sigma\pm x_b^{(\alpha)}..x_c^{(\beta)})\,(\Sigma\pm y_b^{(\varepsilon)}..y_c^{(\zeta)})\sum_{d\cdots g}(-1)^{\omega}(\Sigma\pm x_d^{(\gamma)}..x_e^{(\delta)})\,(\Sigma\pm y_f^{(\eta)}..y_g^{(\vartheta)})$$

ovvero

$$\sum_{\substack{\alpha..\delta\\ \varepsilon..\vartheta}}(\Sigma\pm x_b^{(\alpha)}..x_c^{(\beta)})\,(\Sigma\pm y_b^{(\varepsilon)}..y_c^{(\zeta)})\Big(\sum\pm x_d^{(\gamma)}..x_e^{(\delta)}y_f^{(\eta)}..y_g^{(\vartheta)}\Big),$$

ove l'ultimo determinante è nullo, poichè almeno uno de' punti $x^{(\gamma)}, \ldots, x^{(\delta)}$ coincide con uno de' punti $y^{(\eta)}, \ldots y^{(\vartheta)}$ in virtù dell'ipotesi. Dunque la relazione (1) è dimostrata.

La (1) fornisce $\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{n+k-r-r'+1}$ condizioni, che si ottengono particolarizzando i gruppi *b..c* e *d..ef..g*. Ma esse devono infine ridursi a sole $(n+k-r-r')\,k$, come fu provato al § III.

In particolare, due *r*punti coincidono se si verificano fra le loro coordinate le relazioni del tipo $x_{b..cd}\,y_{b..cf} + x_{b..ce}\,y_{b..cd} = 0$,

onde $x_{b..cd} : y_{b..cd} =$ costante,

com'era evidente *a priori*. Ma oltre a queste sussistono certamente anche le relazioni del tipo $\sum_{d....g}(-1)^{\omega}x_{b..cde}\ y_{b..cfg} = 0$,

ove *b..c* è un gruppo di $r-2$ fra gl'indici $1, .., n$ e *defg* sta per indicare permutazioni di quattro assegnati fra i rimanenti indici. Sviluppando si ha

$$x_{b..cde}y_{b..cfg} + x_{b..cdf}y_{b..cge} + x_{b..cdg}y_{b..cef} + x_{b..cfg}y_{b..cde} + x_{b..cge}y_{b..cdf} + x_{b..cef}y_{b..cdg} = 0.$$

Scambiando nell'ultima equazione la y nella x, si ottengono *le relazioni fra le coordinate di un multipunto sotto la forma tipica*

$$(2)\qquad \sum_{d\cdots g}(-1)^{\omega}x_{b..cde}\ x_{b..cfg} = 0,$$

ovvero

$$x_{b..cde}x_{b..cfg} + x_{b..cdf}x_{b..cge} + x_{b..cdg}x_{b..cef} = 0;$$

(1) Per non avere più volte la stessa relazione e per non avere in ciascuna termini ripetuti, basterà prendere i gruppi *b..c*, *d..e*, *f..g* in modo che ciascuno di essi non presenti mai inversioni. — Così ω sarà sempre il più piccolo possibile.

ove gl'indici obbediscono alla regola testè accennata (¹). Il numero delle distinte fra tali relazioni sarà $\binom{n}{r} - (n-r)r - 1$, come fu già osservato (§ VI).

Dalle cose esposte s'inferisce che *gli r-punti subordinati allo spazio proposto di* $n-1$ *dimensioni sono gli elementi di uno spazio di* $(n-r)r$ *dimensioni, parziale rispetto ad uno spazio di* $\binom{n}{r} - 1$ *dimensioni, e contraddistinto dalle notate* $\binom{n}{r} - (n-r)r - 1$ *relazioni quadratiche e omogenee fra le* $\binom{n}{r}$ *coordinate omogenee di ciascun suo elemento.*

Nella (1) e nella (2) figurano le coordinate di multipunti, ma è facile introdurvi invece le coordinate di multipiani, bastando sostituire alle $x_{1..r}, \ldots$ le quantità proporzionali $\xi_{(r+1)..n}, \ldots$ Anzi nella (2) è lecito mutare addirittura la lettera x nella lettera ξ senza mutare gl'indici, e si ottengono così le relazioni fra le coordinate di un multipiano. Che se la medesima operazione si eseguisse nella (1), si troverebbero le condizioni perchè un $r$piano e un r'piano abbiano un $k$piano comune, sotto la forma tipica

$$\Sigma\,(-1)^{\omega}\xi_{b..cd..e}\ \eta_{b..cf..g} = 0\,,$$

ove gl'indici sono distribuiti come nella (1).

§ VIII. L'assoluto de' punti.

Nella forma quadratica

$$A_{xx} \equiv A\,(x,x) \equiv \Sigma a_{ip}x_i x_p$$
$$(i,p = 1,\ldots,n, \qquad a_{ip} = a_{pi})$$

le $x_1, \ldots, x_n$ indichino le coordinate di un punto del proposto spazio di $n-1$ dimensioni. Gli ∞^{n-2} punti per i quali la detta forma si annulla costituiscono uno spazio di $n-2$ dimensioni (non un piano), parziale rispetto allo spazio proposto. A quei punti riferiremo in seguito tutti gli altri; e il loro insieme, contraddistinto dalla equazione $A_{xx} = 0$, lo chiameremo l'*assoluto* (²) dello spazio proposto di $n-1$ dimensioni.

Denotiamo con $\qquad a \equiv \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$

il discriminante della forma A_{xx}; e quanto a'minori di a, poniamo in generale

$$\alpha_{ip} \equiv \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial a}{\partial a_{ip}}.$$

Indi componiamo il determinante

$$\alpha \equiv \Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}\,,$$

il quale differirà dal reciproco di a pel divisore a^n; e poichè il reciproco di a vale a^{n-1}, sarà

$$(1) \qquad a\alpha = 1\,.$$

(¹) Si potrebbe a queste relazioni aggiungere quelle che si ottengono dalla (2) ponendo in $b..c$ meno di $r-2$ indici e quindi in $d..ef..g$ più di 4 indici. — Ma esse sarebbero conseguenze delle precedenti.

(²) Cayley. *Sixth Memoir upon Quantics.* Phil. Trans. 1859.

Del pari, un minore di ordine $n-1$ in α, p. es. $\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_{ij}}$, differisce pel divisore a^{n-1} dall'omologo minore nel reciproco di a; e poichè questo minore vale $a^{n-2}a_{ip}$ e la (1) dà $\alpha = \frac{1}{a}$, avremo

$$a_{ip} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_{ip}}.$$

Allo stesso modo si dimostrano le relazioni

$$\Sigma\pm\alpha_{ip}\alpha_{jq} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial a_{ip}\partial a_{jq}}, \qquad \Sigma\pm a_{ip}a_{jq} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_{ip}\partial\alpha_{jq}}.$$

e in generale

$$\Sigma\pm\alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots = \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial^\nu a}{\partial a_{ip}\partial a_{jq}\ldots}, \qquad \Sigma\pm a_{ip}a_{jq}\ldots = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^\nu\alpha}{\partial\alpha_{ip}\partial\alpha_{jq}\ldots},$$

ove $ij\ldots$ e $pq\ldots$ sono disposizioni (anche identiche) di classe ν degl'indici $1,..,n$.

E se si pone, per brevità,

$$a_{ij..,pq..} \equiv \Sigma\pm a_{ip}a_{jq}\ldots, \quad \alpha_{ij..,pq..} \equiv \Sigma\pm\alpha_{ip}\alpha_{jq}\ldots,$$

queste relazioni potranno scriversi così:

$$(2) \qquad \alpha_{ij..,pq..} = \frac{1}{a}\,a_{kl..,rs..} \quad \text{o} \quad a_{ij..,pq..} = \frac{1}{\alpha}\,\alpha_{kl..,rs..}$$

denotando con $ij..kl..$ e $pq..rs..$ permutazioni pari di $1,\ldots,n$.

Ciò premesso, indichiamo con $\overset{\nu}{x}$ le coordinate di un νpunto quando non vogliamo scrivere al piede della x i ν indici che le spettano, oppure quando non apparisce abbastanza il numero di essi. E costruiamo le forme quadratiche

$$A(\overset{\nu}{x},\overset{\nu}{x}) \equiv \Sigma a_{ij..,pq..}\overset{\nu}{x}_{ij..}\overset{\nu}{x}_{pq..}$$
$$(\nu = 2,\ldots,n-1);$$

ove $ij\ldots$ e $pq\ldots$ denotano le combinazioni di classe ν degl'indici $1,\ldots,n$ [1]; cosicchè il discriminante di $A(\overset{\nu}{x},\overset{\nu}{x})$ e quello di $A(\overset{n-\nu+1}{x},\overset{n-\nu+1}{x})$ valgono amendue $a^{\binom{n-1}{\nu-1}}$ ovvero $a^{\binom{n-1}{n-\nu}}$ [2]. Similmente, indichiamo con $\overset{\nu}{\xi}$ le coordinate di un νpiano, quando al piede della ξ non vogliamo scrivere ν indici, oppure quando il numero di questi non apparisce; e costruiamo le forme quadratiche

$$A(\overset{\nu}{\xi},\overset{\nu}{\xi}) \equiv \Sigma\alpha_{ij\ldots pq..}\overset{\nu}{\xi}_{ij..}\overset{\nu}{\xi}_{pq..}$$
$$(\nu = 1.\ldots,n-1);$$

sicchè il discriminante di $A(\overset{\nu}{\xi},\overset{\nu}{\xi})$ e quello di $A(\overset{n-\nu+1}{\xi},\overset{n-\nu+1}{\xi})$ valgono amendue $\alpha^{\binom{n-1}{\nu-1}}$ o $\alpha^{\binom{n-1}{n-\nu}}$.

[1] Non è necessario che in queste combinazioni gl' indici seguano l'ordine crescente; anzi è lecito permutarli a piacere in ogni singola combinazione, poichè ciò non può che produrre al più due cambiamenti di segno, i quali si elidono. — Ma ogni combinazione va presa una sola volta.

[2] « Dato un determinante d'ordine n, i due determinanti che hanno rispettivamente per elementi i suoi minori degli ordini ν e $n-\nu$ sono eguali alle potenze $\binom{n-1}{\nu-1}$ e $\binom{n-1}{\nu}$ del dato determinante ». Questo teorema trovasi dimostrato nella mia *Nota su' determinanti di determinanti* (Atti dell'Accademia di Torino v. XI, 1876). Veggasi anche Spottiswoode, *Elementary theorems relating to determinants* (Giorn. di Crelle v. 51).

Tra queste ultime forme merita attenzione speciale la prima

$$A_{\xi\xi} \equiv \Sigma \alpha_{ip} \xi_i \xi_p ,$$

il cui discriminante è α.

Fu già osservato (§ VI) che fra le coordinate di un νpunto e le coordinate dello stesso considerato come un $(n-\nu)$piano passano rapporti eguali; or nulla vieta di attribuire a tali rapporti costantemente il valore $\sqrt{\alpha}$ ossia $\frac{1}{\sqrt{a}}$; porre cioè

$$(*) \qquad \overset{\nu}{x}_{ij..} : \overset{n-\nu}{\xi}_{kl..} = \sqrt{\alpha} = 1 : \sqrt{a} ,$$

indicando con $ij..kl..$ una permutazione pari di $1, \dots, n$. Con questo risulterà, vista la (2),

$$(3) \qquad A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{x}) = A(\overset{n-\nu}{\xi}, \overset{n-\nu}{\xi}) ,$$

quando $\overset{\nu}{x}$ e $\overset{n-\nu}{\xi}$ si riferiscono ad un medesimo multipunto o multipiano. E più generalmente, se $\overset{\nu}{y}$ e $\overset{n-\nu}{\eta}$ si riferiscono ad un altro multipunto o multipiano, e si costruiscono le funzioni bilineari

$$A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{y}) \equiv \Sigma a_{ij\dots pq..} \overset{\nu}{x}_{ij..} \overset{\nu}{y}_{pq..} ,$$

$$A(\overset{n-\nu}{\xi}, \overset{n-\nu}{\eta}) \equiv \Sigma \alpha_{kl..,rs..} \overset{n-\nu}{\xi}_{kl..} \overset{n-\nu}{\eta}_{rs..} \ (^1),$$

si avrà

$$(4) \qquad A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{y}) = A(\overset{n-\nu}{\xi}, \overset{n-\nu}{\eta}) .$$

Si ha pure

$$\frac{\partial A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{x})}{\partial \overset{\nu}{x}_{ij..}} : \frac{\partial A(\overset{n-\nu}{\xi}, \overset{n-\nu}{\xi})}{\partial \overset{n-\nu}{\xi}_{kl..}} = \sqrt{a} = 1 : \sqrt{\alpha} .$$

§ IX. Multipunti conjugati.

Fra i coefficienti a_{ip} e α_{ip} delle due forme quadratiche A_{xx} e $A_{\xi\xi}$ passano le relazioni accennate nel § VIII:

$$\alpha_{ip} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial a}{\partial a_{ip}}, \quad a_{ip} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ip}}, \dots ;$$

le quali mostrano che le due forme sono *reciproche*, e si convertono l'una nell'altra mediante le sostituzioni reciproche

$$(1) \qquad x_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{\xi\xi}}{\partial \xi_i}, \quad \xi_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x_i} ;$$

onde si rileva che *ad ogni punto x corrisponde un piano ξ, e viceversa, per mezzo di una delle sostituzioni* (1). È tuttavia da avvertire che un punto e un piano corrispondenti in tal modo non sono di quelli che chiamammo già *associati* (§ V), tranne il caso in cui si supponga $A_{xx} \equiv \Sigma x^2_i$. Chiameremo *conjugati* un punto e un piano corrispondenti mediante le (1).

Se x' è un punto e ξ' il piano conjugato, sarà

$$\Sigma \xi'_i x_i = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad A_{xx'} = 0$$

(1) L'ordine degli indici in ciascuno de' gruppi *kl....rs...* è indifferente, purchè ciascun gruppo si prenda una sola volta. — Qui conviene supporre che *ij..kl..* e *pq..rs..* siano permutazioni pari di 1...*n*.

l'equazione del piano conjugato a x', e

$$\Sigma x'_i \xi_i = 0 \quad \text{ovvero} \quad A_{\xi\xi'} = 0$$

l'equazione del punto conjugato a ξ'.

Quando un punto x' appartiene all'assoluto, il piano conjugato passa pel punto; poichè allora $A_{x'x'} = 0$.

È facile scorgere dalle (1) che i piani conjugati ai punti di un νpunto formano un νpiano o $(n-\nu)$punto, e che i punti di questo hanno per conjugati i piani del primo νpunto o $(n-\nu)$piano. Chiameremo *conjugati* due cosiffatti multipunti.

Ed osserviamo fin da ora che, *se due multipunti hanno un multipunto comune, i multipunti conjugati a' due primi sono contenuti nel multipunto conjugato al terzo; e viceversa.*

Due multipunti conjugati non hanno in generale punti comuni. Esamineremo in seguito i casi in cui ne abbiano.

Per un punto x e un piano ξ conjugati si ha

$$A_{xx} = A_{\xi\xi} = \Sigma x_i \xi_i = -\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} x & \alpha \\ x & \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \xi & a \\ \xi & \end{pmatrix},$$

ove si ponga per compendio

$$\begin{pmatrix} x & \alpha \\ y & \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdot & \cdot \\ y_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot \\ y_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \ldots .$$

E più generalmente, per due punti x, y e i rispettivi piani conjugati ξ, η si ha

$$\begin{aligned} A_{xy} &= A_{\xi\eta} = \Sigma x_i \eta_i = \Sigma \xi_i y_i \\ &= -\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} x & \alpha \\ y & \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \xi & a \\ \eta & \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Siano ora $x, x', \ldots \nu$ punti individuanti un νpunto e $\xi, \xi', \ldots$ i rispettivi piani conjugati; e sieno $y, y', \ldots \nu$ punti individuanti un altro νpunto e $\eta, \eta', \ldots$ i rispettivi piani conjugati. Indichiamo con

$$\Sigma \pm A_{xy} A_{x'y'} \ldots \text{ il determinante } \begin{vmatrix} A_{xy} & A_{xy'} & \cdot & \cdot \\ A_{x'y} & A_{x'y'} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix};$$

il quale si trasforma, per la (2), in

$$\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot \\ x'_1 & x'_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdot & \cdot \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} x_i & x_j & \cdot & \cdot \\ x'_i & x'_j & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_i & \eta_j & \cdot & \cdot \\ \eta'_i & \eta'_j & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

e per la (1) in

$$\Sigma \begin{vmatrix} x_i & x_j & \cdot & \cdot \\ x'_i & x'_j & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \left(\begin{Bmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot \\ y'_1 & y'_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} x_i & x_j & \cdot & \cdot \\ x'_i & x'_j & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_p & y_q & \cdot & \cdot \\ y'_p & y'_q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} & \cdot & \cdot \\ a_{jp} & a_{jq} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

la quale somma può scriversi tanto sotto la forma

$$\Sigma a_{ij..,pq..}\, x_{ij..}\, y_{pq..} = \mathrm{A}(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{y}),$$

quanto sotto l'altra [cfr. § VIII (2)]

$$\frac{(-1)^{\nu}}{\alpha}\begin{vmatrix} 0 & . & 0 & x_1 & x_2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & x_1^{(\nu-1)} & x_2^{(\nu-1)} & . & . \\ y_1 & . & y_1^{(\nu-1)} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . \\ y_2 & . & y_2^{(\nu-1)} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

che denoteremo con l'abbreviatura

$$\frac{(-1)^{\nu}}{\alpha}\begin{pmatrix} x x' . . \\ y y' . . \end{pmatrix} \alpha .$$

Potendosi dire lo stesso sul determinante $\Sigma \pm \mathrm{A}_{\xi\eta}\mathrm{A}_{\xi'\eta'}\ldots$, i cui elementi sono poi eguali a quelli di $\Sigma \pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}\ldots$ in virtù della (2); avremo finalmente

$$\begin{aligned} \Sigma \pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}\ldots &= \frac{(-1)^{\nu}}{\alpha}\begin{pmatrix} x x' . . \\ y y' . . \end{pmatrix} \alpha = \mathrm{A}(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{y}) \\ = \Sigma \pm \mathrm{A}_{\xi\eta}\mathrm{A}_{\xi'\eta'}\ldots &= \frac{(-1)^{\nu}}{a}\begin{pmatrix} \xi \xi' . . \\ \eta \eta' . . \end{pmatrix} a = \mathrm{A}(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\nu}{\eta}). \end{aligned} \tag{3}$$

Per $\nu = n$ si ha

$$\begin{aligned} \Sigma \pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}..\mathrm{A}_{x^{(n-1)}y^{(n-1)}} &= \frac{1}{\alpha}\,\Sigma \pm x_1 x'_2 . x_n^{(n-1)} . \Sigma \pm y_1 y'_2 .. y_n^{(n-1)} \\ = \Sigma\, \mathrm{A}_{\xi\eta}\mathrm{A}_{\xi'\eta'}\ldots &= \frac{1}{\alpha}\,\Sigma \pm \xi_1 \xi'_2 \ldots . \Sigma \pm \eta_1 \eta'_2 \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Per $\nu > n$ si ha invece

$$\Sigma \pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}\ldots = \Sigma \pm \mathrm{A}_{\xi\eta}\mathrm{A}_{\xi'\eta'}\ldots = 0 . \tag{5}$$

Confrontando il procedimento ora tenuto con la (4) del § VIII, si trova che, se $x, x', \ldots$ individuano un νpunto e $\xi, \xi', \ldots$ individuano lo stesso come $(n-\nu)$piano, e se le medesime ipotesi si fanno per $y, \ldots$ e $\eta, \ldots$; allora sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} \Sigma \pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}\ldots &= \frac{(-1)^{\nu}}{\alpha}\begin{pmatrix} x x' . . \\ y y' . . \end{pmatrix} \alpha = \mathrm{A}(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{y}) \\ = \Sigma \pm \mathrm{A}_{\xi\eta}\mathrm{A}_{\xi'\eta'}\ldots &= \frac{(-1)^{n-\nu}}{\alpha}\begin{pmatrix} \xi \xi' . . \\ \eta \eta' . . \end{pmatrix} a = \mathrm{A}(\overset{n-\nu}{\xi}, \overset{n-\nu}{\eta}), \end{aligned} \tag{6}$$

invece delle (3).

I determinanti del tipo $\Sigma \pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}\ldots$ presentano l'importante proprietà: che, se a' gruppi di variabili

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad (x'_1, \ldots, x'_n), \ldots .$$

si sostituiscono altri composti linearmente da essi

$$(\lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \ldots, \ldots, \lambda x_n + \lambda' x'_n + \ldots), \quad (\mu x_1 + \mu' x'_1 + \ldots, \ldots, \mu x_n + \mu' x'_n + \ldots), \ldots .$$

vale a dire se ai ν punti $x, x', \ldots$ se ne sostituiscono altri ν individuanti lo stesso νpunto che quelli; allora $\Sigma \pm A_{xy} A_{x'y'} \ldots$ non fa che acquistare il fattore $\Sigma \pm \lambda\mu' \ldots$, cioè il determinante della sostituzione.

Lo stesso dicasi rispetto a' gruppi $(y_1, .., y_n)$, $(y'_1, .., y'_n), \ldots$

Di qui emerge che anche i determinanti come $\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots$ acquistano per fattore il quadrato del determinante della sostituzione. Chiameremo $\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots$ il *determinante* del νpunto $xx' \ldots$

È poi facile assicurarsi che i suddetti determinanti $\Sigma \pm A_{xy} A_{x'y'} \ldots$, $\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots$ sono nulli quando i ν punti $x, x', \ldots$ son contenuti in un medesimo $(\nu-1)$punto; ma non solo allora.

Le stesse proprietà sussistono pe' determinanti

$$\Sigma \pm A_{\xi\eta} A_{\xi'\eta'} \ldots \quad \text{e} \quad \Sigma \pm A_{\xi\xi} A_{\eta\eta} \ldots, \text{ ecc.}$$

Da ultimo bisogna osservare che le relazioni dianzi trovate fra i coefficienti delle due forme A_{xx} e $A_{\xi\xi}$ sussistono anche fra i coefficienti di due forme $A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{x})$ e $A(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\nu}{\xi})$, per $\nu = 2, .., n-1$. Infatti, indicando con i, j, k ciascuna combinazione di ν fra gl' indici $1, .., n$, si ha

$$A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{x}) = \Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad A(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\nu}{\xi}) = \Sigma \alpha_{ij} \xi_i \xi_j,$$

e per la definizione de' coefficienti

$$(7) \qquad \sum_m a_{im} \alpha_{im} = 1, \quad \sum_m a_{im} \alpha_{jm} = 0.$$

Queste relazioni sono lineari nelle a_{im} e nelle α_{im} e α_{jm}, e quindi può dedursene immediatamente, denotando con $\overset{\nu}{a}$ e $\overset{\nu}{\alpha}$ i discriminanti delle due forme di cui si tratta,

$$\alpha_{im} = \frac{1}{\overset{\nu}{a}} \cdot \frac{\partial(\overset{\nu}{a})}{\partial a_{im}}, \quad a_{im} = \frac{1}{\overset{\nu}{\alpha}} \cdot \frac{\partial(\overset{\nu}{\alpha})}{\partial \alpha_{jm}};$$

i quali risultati bastano per provare il nostro assunto (1).

In conseguenza le due forme $A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{x})$, $A(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\nu}{\xi})$ sono reciproche e convertibili l'una nell'altra per mezzo delle sostituzioni

$$(8) \qquad \overset{\nu}{x}_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\nu}{\xi})}{\partial \overset{\nu}{\xi}_i}, \qquad \overset{\nu}{\xi}_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A(\overset{\nu}{x}, \overset{\nu}{x})}{\partial \overset{\nu}{x}_i},$$

e ad esse si può applicare tutto quanto abbiam detto innanzi circa A_{xx} e $A_{\xi\xi}$.

È intanto da notare che le $\overset{\nu}{x}$ e $\overset{\nu}{\xi}$ le quali figurano nelle ultime sostituzioni non sono altro che le coordinate di un νpunto e di un νpiano conjugati, quali li abbiam definiti più su; poichè, se $x, x', \ldots$ sono punti del νpunto e $\xi, \xi', \ldots$ i loro piani conjugati, si ha

$$\overset{\nu}{x}_i = x_{ij\ldots} = \Sigma \pm x_i x'_j \ldots = \Sigma \pm \left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial A(\xi, \xi)}{\partial \xi_i} \right) \left(\tfrac{1}{2} \frac{\partial A(\xi', \xi')}{\partial \xi'_j} \right) \ldots$$

$$= \begin{Vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} = \sum_{pq\ldots} \alpha_{ij\ldots,pq\ldots} \xi_{pq\ldots},$$

ovvero

$$\overset{\nu}{x}_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\nu}{\xi})}{\partial \overset{\nu}{\xi}_i}.$$

(1) Ne segue anche $\overset{\nu}{a}\overset{\nu}{\alpha} = 1$; come del resto appariva dall'essere $\overset{\nu}{a} = a^{\binom{n-1}{\nu-1}}$, $\overset{\nu}{\alpha} = \alpha^{\binom{n-1}{\nu-1}}$ e $a\alpha = 1$.

§ X. Distanza fra due punti.

Siano dati due punti x, y: sarà $\lambda x + \mu y$ un punto della retta da essi individuata, ed apparterranno all'assoluto $A_{xx} = 0$ quei due punti della retta per i quali si verificherà l'equazione $A(\lambda x + \mu y,\ \lambda x + \mu y) = 0$, ovvero

$$A_{xx}\lambda^2 + 2A_{xy}\lambda\mu + A_{yy}\mu^2 = 0.$$

Questa fornisce per $\frac{\lambda}{\mu}$ due valori $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ e $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, il cui rapporto $\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ si dirà *rapporto anarmonico* della data coppia di punti x, y e della coppia di punti ove la retta xy seca l'assoluto. Il detto rapporto ha due valori:

$$\frac{A_{xy} \pm i\sqrt{A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}}}{A_{xy} \mp i\sqrt{A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}}},$$

posto $i = \sqrt{-1}$; ed a scanso di equivoci noi assumeremo sempre il valore corrispondente al segno superiore fra i due preposti a i. *Il logaritmo, diviso per* $2i$, *di tale rapporto anarmonico*, vale a dire

$$\frac{1}{2i} l \frac{A_{xy} + i\sqrt{A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}}}{A_{xy} - i\sqrt{A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}}},$$

è ciò che noi definiremo come *distanza fra' due punti dati* x *e* y, e che rappresenteremo con (xy). Sarà per conseguenza

$$(1) \qquad \cos^2(xy) = \frac{A^2_{xy}}{A_{xx}A_{yy}}, \qquad (2) \qquad \operatorname{sen}^2(xy) = \frac{A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}}{A_{xx}A_{yy}}.$$

Apparisce dalla definizione che la distanza fra due punti è una funzione a infiniti valori e di periodo $\pi = 3,141\ldots$; ma noi tra questi valori sceglieremo sempre quello compreso fra 0 e π.

È poi facile verificare che, se x, y, z sono tre punti di una stessa retta, si ha

$$(xy) + (yz) = (xz) \ (^1).$$

Sono *ortogonali*, cioè distanti per $\frac{\pi}{2}$, due punti x e y quando $A_{xy} = 0$; e però tutti gli ∞^{n-2} punti x ortogonali a un dato punto y sono nel piano di equazione $A_{xy} = 0$, che è (§ prec.) il piano conjugato al punto y. Adunque un punto e un piano conjugati possono anche chiamarsi *ortogonali* l'uno all'altro.

(1) Infatti se si chiamano u, v i due punti ove la xyz seca l'assoluto, si potrà supporre

$$x = \lambda u + \mu v, \qquad y = \lambda' u + \mu' v, \qquad z = \lambda'' u + \mu'' v,$$

e però sarà

$$(xy) = \frac{1}{2i} l\left(\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'}\right), \qquad (yz) = \frac{1}{2i} l\left(\frac{\lambda'}{\mu'} : \frac{\lambda''}{\mu''}\right), \qquad (xz) = \frac{1}{2i} l\left(\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda''}{\mu''}\right),$$

onde

$$(xy) + (yz) = \frac{1}{2i} l\left(\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda''}{\mu''}\right) = (xz).$$

Sono a distanza zero da un punto y tutti i punti x pe' quali si verifica l'equazione quadratica $A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy} = 0$, ovvero tutti i punti dello spazio di $n-2$ dimensioni costituito dalle ∞^{n-3} rette che uniscono y a' punti che il piano conjugato di y ha comuni con l'assoluto. E siccome l'ultima equazione è soddisfatta quando la retta xy ha comuni con l'assoluto due punti coincidenti, e quindi può dirsi *tangente* all'assoluto; così lo spazio in esame può dirsi il *cono circoscritto* all'assoluto dal punto y.

Sono a distanza infinita da un punto y tutti i punti x pe' quali $A_{xx} = 0$, ovvero tutti i punti dell'assoluto. Perciò l'assoluto può anche ricevere il nome di *infinito* o di *limite* dello spazio proposto di $n-1$ dimensioni. Il quale poi potrebbe chiamarsi uno spazio a *infinito quadratico*; ma suole comunemente chiamarsi uno spazio di *curvatura costante* per ragioni che non è necessario qui riferire.

Sono a una data distanza Δ da un punto y tutti i punti x pe' quali si verifica la equazione quadratica

$$\cos^2\Delta . A_{xr}A_{yy} - A^2_{xy} = 0,$$

ovvero tutti i punti di uno spazio di $n-2$ dimensioni, il quale ha comuni con l'assoluto gli ∞^{r-3} punti ove questo è secato dal piano conjugato di y, ciascun punto essendo contato due volte. Questo spazio, che si riduce al cono di cui sopra quando $\Delta = 0$, prende il nome di *sfera* di *centro* y e di *raggio* Δ. Ogni sfera è circoscritta all'assoluto.

Sono a distanza indeterminata da un punto y tutti i punti comuni all'assoluto e al piano conjugato di y; il che spiega come codesti punti abbiano figurato indifferentemente fra quelli posti a distanze $\frac{\pi}{2}$, $0, \infty, \Delta$ da y.

I punti dell'assoluto vanno anche riguardati come ortogonali a se stessi, poichè i piani loro conjugati passano per essi (§ IX).

Ogni multipunto è uno spazio parziale e di curvatura costante rispetto allo spazio proposto; poichè fra' punti $\lambda x + \lambda' x' + \ldots$ di un νpunto appartengono all'assoluto quegli $\infty^{\nu-2}$ per cui sussiste la equazione $A(\lambda x + \lambda' x' + \ldots, \lambda x + \lambda' x' + \ldots) = 0$ ovvero

$$A_{xx}\lambda^2 + \ldots + 2A_{xx'}\lambda\lambda' + \ldots = 0, \tag{3}$$

che è di secondo grado in $\lambda, \lambda', \ldots$

Il cono e la sfera dianzi definiti si possono anche ascrivere fra gli spazî di curvatura costante, avendo sull'assoluto soltanto punti esistenti nel piano conjugato di y. Ma in generale non è di curvatura costante uno spazio parziale che sia definito da equazioni in alcuna delle quali le coordinate del punto generatore non entrino a primo grado.

§ XI. Multipunti ortogonali.

In un dato r-punto R *esiste in generale un* $(r-1)$*punto di punti ortogonali a un dato punto*; poichè il piano conjugato di questo punto ha in generale un $(r-1)$punto comune con R, essendo (§ III) $r + (n-1) = n + (r-1)$. Ma se per caso in R esiste ancora un *altro* punto ortogonale al punto dato, allora R è tutto contenuto nel detto piano conjugato, sicchè il dato punto e l'$r$punto R potranno dirsi

ortogonali mutuamente. Adunque *un punto è ortogonale a un multipunto se è ortogonale a tanti punti di questo quanti bastano a individuarlo.*

Deriva dal primo teorema che *in un dato r-punto* R *esistono infiniti gruppi di s punti a due a due ortogonali*, posto $s \leq r$. Infatti a ogni punto di R corrisponde in R un $(r-1)$punto ortogonale, e ad un punto qualunque di questo $(r-1)$punto corrisponde nel medesimo un $(r-2)$punto ortogonale, e così via. Se poi si riflette che ciascun punto dell'$r$punto R è individuato da $r-1$ parametri e che le condizioni di ortogonalità fra s punti sono $\binom{s}{2}$, si vedrà che il numero de'gruppi in questione è

$$\infty^{s(r-1)-\binom{s}{2}} = \infty^{\frac{s(2r-s-1)}{2}},$$

e in particolare quello de'gruppi di r punti è $\infty^{\binom{r}{2}}$. Così, nello spazio proposto di $n-1$ dimensioni esistono $\infty^{\binom{n}{2}}$ gruppi di n punti a due a due ortogonali.

Tutti i punti ortogonali a un dato r-punto R *costituiscono l'*$(n-r)$*punto* R_0 *conjugato di* R, poichè devono trovarsi tutti in ciascuno de'piani conjugati ai punti di R.

In generale, dato un $r$punto R e un r'punto R', e supposto $r \geq r'$, in R' non esistono punti ortogonali a R [perchè $r' + (n-r) = n - (r-r')$], e in R esiste un $(r-r')$punto di punti ortogonali a R' [perchè $r + (n-r') = n + (r-r')$]. Or suppongasi, in particolare, che R' contenga l punti ortogonali a R i quali individuino un $l$punto L, di cui tutti i punti saranno ortogonali a R; vale a dire suppongasi che R' e R_0 abbiano comune un $l$punto L. Allora R' e R_0 staranno in uno stesso $[r'+(n-r)-l]$punto o $[n-(r-r'+l)]$punto; e per conseguenza R e l'$(n-r')$-punto R_1 conjugato di R' avranno in comune l'$(r-r'+l)$punto L' conjugato a quello in cui stanno R' e R_0, e tutti i punti di L' saranno ortogonali a R'. Il fatto, che in R' si trova un $l$punto L di punti ortogonali a R e in R si trova un $(r-r'+l)$ punto L' di punti ortogonali a R', si esprimerà dicendo che in tal caso R e R' sono *l volte ortogonali*, ovvero hanno una *ortogonalità l.pla.*

Per es. un punto e una retta non ponno essere che una volta, *semplicemente* ortogonali; una retta e un'altra retta, una retta e un tripunto, ponno essere anche doppiamente ortogonali; e così via. In generale, R e R' ponno essere al più r' volte ortogonali, e in tal caso tutti i punti dell'uno sono ortogonali a quelli dell'altro, e viceversa; in altri termini R è contenuto nel conjugato di R' e R' nel conjugato di R. Allora R e R' saranno *perfettamente ortogonali.*

Tali sono, fra gli altri, due multipunti conjugati.

Le condizioni affinchè R e R' abbiano una ortogonalità l.pla si esprimono agevolmente nelle coordinate di R e R', bastando scrivere le condizioni affinchè R' e R_0 abbiano un $l$punto comune con la scorta del § VII, e poi sostituire alle coordinate di R_0 le loro espressioni mediante quelle di [R cfr. § IX-(8)].

§ XII. Perpendicolari comuni a due multipunti qualunque.

Nel § precedente abbiamo definito una retta come *ortogonale* a un $r$punto R quando passa per un punto ortogonale a R, vale a dire quando seca l'$(n-r)$punto R_0 conjugato di R. Chiameremo poi la retta *perpendicolare* a R se oltre a ciò seca R

in un punto. Di tali rette ve ne ha ∞^{n-2} (§ IV-1), e ciascuna di esse è perpendicolare anche a R_0. In particolare, ogni retta ortogonale a un piano gli è anche perpendicolare.

Analogamente, un $r$punto e un r'punto che abbiano una ortogonalità l.pla, se hanno inoltre un $k$punto comune mentre $r + r' \leqq n$, si diranno *k volte perpendicolari*; e se hanno un $k$punto comune mentre $r + r' < n + k$, si diranno *perpendicolari* $(n + k - r - r' + 1)$ *volte*, oltre ad essere l volte ortogonali.

Cerchiamo ora *quante e quali rette sieno simultaneamente perpendicolari a un r-punto* R *e ad un r'punto* R', ovvero sechino simultaneamente R, R', l'$(n - r)$punto R_0 conjugato di R e l'$(n - r')$punto R_1 conjugato di R'; in altre parole sieno perpendicolari a R, R', R_0 e R_1.

Cominciamo dal supporre che due qualunque dei quattro multipunti non abbiano punti comuni, ovvero non ne abbian più di quello che la loro definizione comporta; vale a dire supponiamo: 1° che quando $r + r' \leqq n$ R e R' non abbian punti comuni, e che quando $r + r' = n + k$ non abbian più di un $k$punto comune (1); 2° che R e R' non presentino alcuna ortogonalità; 3° che quando $r + r' \geqq n$ R e R' non appartengano a uno stesso multipunto, e quando $r + r' < n$ non appartengano a uno stesso $(r + r' - 1)$punto.

In tali ipotesi, risulta dal § IV-3 che *le rette in questione sono tante quante unità contiene il più piccolo fra i quattro numeri* r, r', $n - r$, $n - r'$. *Questo numero è* r' *quando* $r \geqq r'$ *e* $r + r' < n$, *ed è* $r' - k$ $(= n - r)$ *quando* $r \geqq r'$ *e* $r + r' = n + k$.

La posizione poi di tali rette offre importanti particolarità:

1. *Ciascuna retta seca* R, R', R_0, R_1 *in punti distinti.*

2. Ciascuna contiene un punto ortogonale a R (in R_0), un punto ortogonale a R' (in R_1), e così via; e quindi contiene due punti ortogonali a tutto ciò che R e R', R_0 e R_1, ecc., hanno per avventura di comune; vale a dire che *ogni retta perpendicolare a* R, R', R_0, R_1 *è perfettamente ortogonale a' multipunti che due di essi possono avere di comune.* E per conseguenza seca ciascuno de' multipunti R, R', R_0, R_1 in punti ortogonali a' multipunti che esso può aver in comune con gli altri, e giace ne' multipunti conjugati a codesti multipunti comuni.

3. Due rette perpendicolari a R, R', R_0, R_1 sono tali anche rispetto alle rette che uniscono le coppie di punti ove esse secano ciascuno de' medesimi multipunti.

4. Quando R e R' hanno un $k$punto comune, l'$(n - k)$punto conjugato di questo seca R e R' rispettivamente lungo un $(r - k)$punto e un $(r' - k)$punto perfettamente ortogonali a quel $k$punto. Le rette perpendicolari a R e R' in punti distinti saranno tali anche all'$(r - k)$punto e all'$(r' - k)$punto suddetti, e viceversa (2).

5. Due rette ammettono due perpendicolari comuni; e si può dimostrare che i due punti ove le due perpendicolari secano ciascuna delle due rette sono ortogonali. Infatti, siano P e P' i punti ove la prima perpendicolare seca le due rette, e sia Q il punto ortogonale a P nella prima retta, Q' il punto ortogonale a P' nella seconda retta. Nella PP' vi è un punto ortogonale alla prima retta, e quindi a Q;

(1) In questo caso R_0 e R_1 non avranno punti comuni.

(2) Cfr. § seguente, 1.

e poichè è anche P ortogonale a Q, sarà Q ortogonale a tutta PP′; e lo stesso dicasi di Q′. Dunque la retta QQ′ è perfettamente ortogonale alla PP′. Inoltre il punto ortogonale a Q nella QQ′ è tale anche a P, e quindi alla prima retta PQ; sicchè la QQ′ è perpendicolare alla PQ. E similmente è perpendicolare alla seconda retta P′Q′.

6. Dalle proprietà precedenti (3 e 5) consegue che *le perpendicolari comuni a* R, R′, R_0, R_1 *sono a due a due perfettamente ortogonali*, e che *i punti ove esse secano ciascuno dei quattro multipunti sono a due a due ortogonali.*

§ XIII. Casi particolari.

Esaminiamo ora quali modificazioni soffrano i risultati ottenuti nel § precedente quando si rimuove una delle ipotesi generali fatte in principio.

1. Quando, benchè sia $r + r' < n + k$ (od anche $r + r' \leqq n$), R e R′ hanno un $k$punto K comune; allora R_0 e R_1 appartengono all'$(n-k)$punto K_0 conjugato a quel $k$punto K, e quindi hanno in comune un $(n + k - r - r')$punto K_1, il quale è conjugato all'$(r + r' - k)$punto K′ in cui si troveranno contenuti R e R′.

Vi saranno delle rette perpendicolari a R e R′ in un punto medesimo, cioè in un punto di K, e quindi perpendicolari anche a R_0 e R_1 in un punto comune (di K_1), e saranno (cfr. § IV-1) $\infty^{n+2k-r-r'-2}$ se l'esponente è positivo, in numero finito se è nullo.

Vi saranno inoltre delle rette perpendicolari a R e R′, e quindi a R_0 e R_1, in punti distinti. Esse, contenendo ciascuna un punto ortogonale a R, uno a R′, e così via, saranno perfettamente ortogonali al multipunto K (comune a R e R′) e a K_1 (comune a R_0 e R_1); e quindi giaceranno in K_0 (conjugato di K), e secheranno R e R′ in punti dell'$(r-k)$punto e dell'$(r'-k)$punto perfettamente ortogonali a K, che R e R′ hanno rispettivamente in comune con K_0; e per conseguenza saranno perpendicolari a questi $(r-k)$punto e $(r'-k)$punto. Viceversa, ogni perpendicolare a questi due, giacendo in K_0, è perfettamente ortogonale a K; e quindi è perpendicolare al $[k + (r-k)]$punto R e al $[k + (r'-k)]$punto R′. Intanto l'$(r-k)$-punto e l'$(r'-k)$punto non hanno punti comuni, e però (§ prec.) ammettono tante perpendicolari comuni quante ne segna il più piccolo fra' due numeri $r-k, r'-k$. Dunque: *se* R *e* R′ *hanno un k-punto comune, pure essendo* $r + r' < n + k$, *essi ammetteranno sempre* $r' - k$ *perpendicolari comuni in punti distinti,* posto $r \geqq r'$.

Queste rette godono tutte le proprietà di quelle studiate nel § precedente.

È superfluo notare che esse secano R_0 e R_1 in punti dell'$(r'-k)$punto e dell'$(r-k)$punto che R_0 e R_1 hanno in comune con K′, e sono perpendicolari a' medesimi.

2. *Quando* R *e* R′ *sono l volte ortogonali,* vale a dire quando R′ ha un $l$punto L comune con R_0 e R un l'punto L′ comune con R_1, posto $r - r' + l = l'$; allora basta applicare le cose esposte nel caso 1°, scambiando R con R_0, per concludere che *vi saranno tante rette perpendicolari a* R *e* R′ *in punti non ortogonali fra loro quante ne indica il più piccolo fra i due numeri* $r' - l$, $n - r - l$. Questo numero sarà $r' - l$ se R e R′ non si secano, visto che allora $r + r' \leqq n$ e quindi $(n-r) - l > r' - l$; e sarà $r' - k - l$ (ossia $n - r - l$) quando R e R′

hanno un $k$punto comune e al tempo stesso è $r + r' = n + k$, visto che allora $n - r - l < r' - l$. Le medesime rette saranno perpendicolari a R_0 e R_1 in punti non ortogonali, e godranno tutte le proprietà enumerate nel § precedente.

Esisteranno poi $\infty^{l+l'-2}$ rette perpendicolari a R e R', e anche a R_0 e R_1, in punti ortogonali.

3. Il caso in cui, essendo $r + r' > m$ (od anche $r + r' \geqq n$), R e R' appartengano ad uno stesso $m$punto, rientra altresì nel 1.° Infatti allora R e R' hanno un $(r + r' - m)$punto comune, e R_0 e R_1 hanno un $(n - m)$punto comune ed appartengono ad uno stesso $(n + m - r - r')$punto. Vi saranno dunque $m - r$ rette perpendicolari a R, R', R_0 e R_1 in punti distinti, oltre a $\infty^{n+r+r'-2m-2}$ rette perpendicolari a R e R' (e quindi a R_0 e R_1) in uno stesso punto.

4. Rimane a trattare il caso in cui *essendo* $r + r' < n + k$ (*od anche* $\leqq n$), R *e* R' *abbiano un k-punto comune* K *ed abbiano inoltre una ortogonalità l.pla*; vale a dire siano $(n + k - r - r')$ volte (od anche k volte) perpendicolari oltre ad essere l volte ortogonali. *Allora vi saranno delle rette perpendicolari a* R *e* R' *in punti distinti e non ortogonali*; e saranno le perpendicolari comuni a' due $(r'-k-l)$punti, secondo cui R' è secato dall' $(n - k - l)$punto conjugato di quello composto da K con L, e R è secato dall' $(n - k - l')$punto conjugato di quello composto da K con L'. *Il numero di tali rette sarà* $r' - k - l$ (§ XII). Esse sono anche perpendicolari a'due $(r' - k - l)$punti, secondo cui R_0 è secato dal conjugato del multipunto composto da K_1 con L, e R_1 è secato dal conjugato del multipunto composto da K_1 con L'. Esse godono le proprietà enumerate nel § precedente.

Oltre a queste, vi saranno delle perpendicolari a R e R' (e quindi a R_0 e R_1) in punti coincidenti od ortogonali.

§ XIV. Projezioni.

Le proprietà enunciate ne' due §§ precedenti porgono come immediata conseguenza che *per un punto dato si può in generale condurre una sola retta perpendicolare a un multipunto*. Il punto comune alla perpendicolare e al multipunto sarà denominato *projezione* del punto dato sul multipunto; e quindi denomineremo *projezione* di un $s$punto sopra un $r$punto, posto $r > s$, il luogo delle projezioni de' punti dell' $s$punto sull' $r$punto, il qual luogo è un $s$punto esistente nell' $r$punto. E si noti che una stessa retta projetta un punto su un multipunto e sul conjugato di questo.

Dato un punto O e un $r$piano R, in R esiste un $(r - 1)$punto ortogonale a O, e nello stesso R un punto O' ortogonale a questo $(r - 1)$punto: sarà O' la projezione di O su R. Del pari, dato un $s$punto S e un $r$punto R, in R esiste un $(r - s)$punto perfettamente ortogonale a S e un $s$punto S' perfettamente ortogonale a questo $(r - s)$punto: sarà S' projezione di S su R.

La projezione di un punto su un multipunto è il punto stesso se questo giace nel multipunto, ed è un punto qualunque del multipunto se il punto è ortogonale al multipunto. Quando due multipunti hanno una qualche ortogonalità, la projezione di parte dell'uno sull'altro riesce indeterminata.

Il luogo de' punti, che abbiano per projezione su un $r$punto R un medesimo

dato punto O', è un $(n - r + 1)$punto che passa per O'; cioè il conjugato dell'$(r-1)$-punto ortogonale a O' ed esistente in R.

Cerchiamo le coordinate della projezione di un dato punto y su un dato $r$punto R, individuato da r suoi punti $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$. Nella retta xx' esiste un punto $\lambda x + \lambda' x'$ ortogonale a y, ed è determinato dalla equazione

$$A(\lambda x + \lambda' x', y) = 0 \quad \text{ossia} \quad A_{xy}\lambda + A_{x'y}\lambda' = 0,$$

sicchè si può assumere

$$\lambda x + \lambda' x' = \frac{x}{A_{xy}} - \frac{x'}{A_{x'y}}.$$

Similmente, nelle rette $xx'', \ldots, xx^{(r-1)}$ esistono i punti

$$\frac{x}{A_{xy}} - \frac{x''}{A_{x''y}}, \ldots, \frac{x}{A_{xy}} - \frac{x^{(r-1)}}{A_{x^{(r-1)}y}}$$

ortogonali a y; e tutti questi $r - 1$ punti individuano l'$(r-1)$punto ortogonale a y ed esistente in R. Se dunque s'indica con $\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)}$ il punto ortogonale in R a questo $(r-1)$punto, cioè la projezione di y su R, sussisteranno le condizioni di ortogonalità

$$A\left(\lambda x + \lambda' x' + \ldots, \frac{x}{A_{xy}} - \frac{x'}{A_{x'y}}\right) = 0, \ldots.$$

ovvero

$$\frac{A_{xx}\lambda + A_{xx'}\lambda' + \ldots}{A_{xy}} = \frac{A_{x'x}\lambda + A_{x'x'}\lambda' + \ldots}{A_{x'y}} = \ldots.$$

Chiamando ε ciascuno di questi r rapporti eguali, avremo le r equazioni omogenee in $\lambda, \lambda', \ldots, \varepsilon$:

$$A_{xx}\lambda + A_{xx'}\lambda' + \ldots = A_{xy}\varepsilon, \quad A_{x'x}\lambda + A_{x'x'}\lambda' + \ldots = A_{x'y}\varepsilon, \ldots,$$

dalle quali risulteranno $-\varepsilon, \lambda, \lambda', \ldots$ proporzionali ai determinanti (co' debiti segni) della matrice

$$\begin{Bmatrix} A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{x'y} & A_{x'x} & A_{x'x'} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix};$$

sicchè potremo assumere

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x' & \ldots \\ A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{x'y} & A_{x'x} & A_{x'x'} & \ldots \end{vmatrix}$$

pel punto projezione di y su R.

È poi facile vedere che il punto ortogonale alla detta projezione di y ed esistente sulla retta projettante, è

$$\begin{vmatrix} y & x & x' & \ldots \\ A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{x'y} & A_{x'x} & A_{x'x'} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

§ XV. Le distanze fra due multipunti.

Ora ci proponiamo di cercare quale fra i punti di un $r$punto R individuato da r suoi punti $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ abbia la minima distanza da un dato punto y. Si cerca un punto

$$u \equiv \lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)}$$

pel quale riesca minima la espressione $\cos^2(uy) = \frac{A^2_{uy}}{A_{uu} A_{yy}}$, alla quale si può sostituire la più semplice $\frac{A^2_{uy}}{A_{uu}}$. Annullando le derivate parziali di questa rispetto a $\lambda, \lambda', \ldots$ abbiamo le equazioni

$$A_{uu} A_{xy} - A_{uy} A_{xu} = 0, \quad A_{uu} A_{x'y} - A_{uy} A_{x'u} = 0, \ldots,$$

ovvero

$$A_{xu} = \frac{A_{uu}}{A_{uy}} A_{xy}, \quad A_{x'u} = \frac{A_{uu}}{A_{uy}} A_{x'y}, \ldots;$$

o infine sviluppando e ponendo $\frac{A_{uu}}{A_{uy}} \equiv \varepsilon$,

$$A_{xx}\lambda + A_{xx'}\lambda' + \ldots = A_{xy}\varepsilon, \quad A_{x'x}\lambda + A_{x'x'}\lambda' + \ldots = A_{x'y}\varepsilon, \ldots.$$

Ma queste equazioni coincidono con quelle che ci han servito nel § precedente a determinare la projezione di y su R; dunque *la projezione di un punto su un multipunto è, tra' punti del multipunto, quello che ha dal punto la minima distanza.* Dalla quale proprietà siamo indotti a definire come *distanza fra un punto e un multipunto* la distanza fra il punto e la propria projezione sul multipunto.

Denotando con $(y\mathrm{R})$ la distanza fra y e R, si ha

$$\cos^2(y\mathrm{R}) = \cos^2(yu) = \frac{A^2_{yu}}{A_{yy} A_{uu}};$$

ma dall'espressione delle coordinate di u trovate nel § precedente risulta

$$A_{yu} = \begin{vmatrix} 0 & A_{yx} & A_{yx'} & \ldots \\ A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{x'y} & A_{x'x} & A_{x'x'} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \quad A_{xu} = \begin{vmatrix} 0 & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{x'y} & A_{x'x} & A_{x'x'} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = -A_{xy} \cdot \Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots, \ldots,$$

onde

$$A_{uu} = \begin{vmatrix} 0 & A_{xu} & A_{x'u} & \ldots \\ A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = -A_{yu} \cdot \Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots;$$

per conseguenza sarà

$$\cos^2(y\mathrm{R}) = -\frac{1}{A_{yy} \cdot \Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots} \begin{vmatrix} 0 & A_{yx} & A_{yx'} & \ldots \\ A_{xy} & A_{xx} & A_{xx'} & \ldots \\ A_{x'y} & A_{x'x} & A_{x'x'} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

e

$$\operatorname{sen}^2(y\mathrm{R}) = \frac{\Sigma \pm A_{yy} A_{xx} A_{x'x'} \ldots}{A_{yy} \cdot \Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots} = \alpha \frac{\begin{pmatrix} yxx' \ldots \alpha \\ yxx' \ldots \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \alpha \cdot \begin{pmatrix} xx' \ldots \\ xx' \ldots \end{pmatrix} \alpha}.$$

È bene osservare che la distanza fra un punto e un multipunto, e quella fra il punto e il conjugato del multipunto, sono contate sulla stessa retta e danno per somma $\frac{\pi}{2}$.

Si deduce facilmente dalla proposizione che precede che, dati un $r$punto R e un r'punto R′ e le loro comuni perpendicolari, le coppie di punti ove queste perpendicolari secano R e R′ sono quelle che presentano le minime distanze fra' punti di R e i punti di R′. Perciò definiremo tali distanze come *le distanze fra* R *e* R′.

Esse sono contate sulle stesse rette che le distanze fra R_0 conjugato di R e R_1 conjugato di R′, e sono eguali rispettivamente a queste ultime. Sono similmente contate sulle stesse rette che le distanze fra R e R_1 o fra R′ e R_0, ma sono complementari di queste.

Quando R e R′ non han punti comuni essendo $r+r'\leqq n$, ovvero hanno solo un $k$punto comune essendo $r+r'=n+k$, e inoltre non presentano alcuna ortogonalità; allora le distanze fra R e R′ sono in numero finito (§ XII) e tutte diverse da 0 e da $\frac{\pi}{2}$. Quando invece R e R′ hanno un $k$punto comune essendo $r+r'<n+k$ (od anche $r+r'\leqq n$), ovvero presentano una qualche ortogonalità; allora vi è un numero finito di distanze diverse da 0 e da $\frac{\pi}{2}$ (§ XIII), oltre a infinite distanze eguali a 0 e infinite eguali a $\frac{\pi}{2}$.

Denomineremo *momento* di due multipunti R e R′ il prodotto de'seni delle loro distanze $\left(\text{diverse da } 0 \text{ e} \frac{\pi}{2}\right)$, e *comomento* il prodotto de'coseni delle distanze medesime. Il comomento di R e R′ è il momento di R e R_1 oppure di R′ e R_0, e ciò giustifica la denominazione attribuitagli.

§ XVI. Momento di due multipunti.

È importante procurarci l'espressione del momento e del comomento di due multipunti. Cominciamo dal momento.

Siano dati un $r$punto R e r'punto R′, e sia $r\geqq r'$. Per metterci nelle condizioni più generali, supponiamo che essi abbiano in comune un $k$punto K essendo $r+r'\leqq n+k$; e che sieno inoltre l volte ortogonali, vale a dire che R′ contenga un $l$punto L perfettamente ortogonale a R, e R un l'punto L′ ($l'=r-r'+l$) perfettamente ortogonale a R′. Basterà porre $k=0$ o $l=0$ per i casi in cui R e R′ non abbian punti comuni o non sieno ortogonali.

Denotiamo con ρ il numero delle distanze diverse da 0 e $\frac{\pi}{2}$, numero che può essere r', $r'-k$, $r'-l$, $r'-k-l$, secondo i casi. Ma notiamo che in ogni caso sarà

$$r-k-\rho=l', \qquad r'-k-\rho=l.$$

Siano $z, z', \ldots, z^{(k-1)}$ k punti individuanti K; $x, x', \ldots, x^{(r-k-1)}$ altri $r'-k$ punti di R, tali che con $z, \ldots$ individuino R; e $y, y', \ldots, y^{(r'-k-1)}$ altri $r'-k$ punti di R′, tali che con $z, \ldots$ individuino R′.

Dico che si avrà pel momento di R e R′

$$(1) \qquad m^2(RR') = \frac{\Sigma \pm A_{zz} A_{z'z'} \ldots \Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{zz} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots} . \quad (^1)$$

Infatti, osserviamo in primo luogo che, quando a $z, \ldots$ si sostituiscono altri k punti

$$\lambda z + \lambda' z' + \ldots, \quad \mu z + \mu' z' + \ldots, \ldots$$

atti a individuare K, allora il determinante $\Sigma \pm A_{zz} \ldots$ non fa che acquistare il fattore $(\Sigma \pm \lambda\mu' \ldots)^2$, come fu osservato al § IX. E siccome questa sostituzione equivale a mutare rispettivamente

$$(x, \ldots) \text{ in } (1x + 0x' + \ldots + 0y + \ldots + 0z + \ldots)$$
$$(y, \ldots) \text{ in } (0x + \ldots + 1y + 0y' + \ldots + 0z + \ldots, \ldots)$$
$$(z, \ldots) \text{ in } (0x + \ldots + 0y + \ldots + 1z + 0z' + \ldots, \ldots);$$

così anche il determinante $\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots$ acquista lo stesso fattore. Analogamente, la sostituzione medesima equivale a mutare

$$(x, \ldots) \quad \text{e} \quad (z, \ldots)$$

in $$(1x + 0x' + \ldots + 0z + \ldots, \ldots) \quad \text{e} \quad (0x + \ldots + \lambda z + \ldots, \ldots);$$

onde $\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{zz} \ldots$ acquista lo stesso fattore. E lo stesso dicasi di $\Sigma \pm A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots$. Per conseguenza il secondo membro della (1) rimane inalterato per effetto della sostituzione suddetta.

Allo stesso modo si dimostra che il secondo membro della (1) non si altera quando a' punti $x, \ldots$ o $y, \ldots$ se ne sostituiscano altri, i quali soddisfacciano rispettivamente alle stesse condizioni imposte a quelli.

Potremo dunque, senza alterare il valore del secondo membro della (1), supporre *provvisoriamente*: che $z, z', \ldots$ siano mutuamente ortogonali in K; che x e y, x' e $y', \ldots, x^{(\rho-1)}$ e $y^{(\rho-1)}$ sieno i punti estremi delle ρ distanze fra R e R′; che $x^{(\rho)}, \ldots, x^{(r-k-1)}$ sieno $r - k - \rho = l'$ punti individuanti L′ (in R) e mutuamente ortogonali; e che $y^{(\rho)}, \ldots, y^{(r'-k-1)}$ siano $r' - k - \rho = l$ punti individuanti L (in R′) e mutuamente ortogonali. Con questo due qualunque de'punti $x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots$ saranno ortogonali fra loro, eccetto solo x e y, x' e $y', \ldots, x^{(\rho-1)}$ e $y^{(\rho-1)}$; e quindi tre de' quattro determinanti che figurano nella (1) si ridurranno a' proprî termini principali, mentre $\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots$ diverrà

$$(A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}) \ldots (A_{x^{(\rho-1)}x^{(\rho-1)}} A_{y^{(\rho-1)}y^{(\rho-1)}} - A^2_{x^{(\rho-1)}y^{(\rho-1)}}) A_{x^{(\rho)}x^{(\rho)}} \ldots A_{y^{(\rho)}y^{(\rho)}} \ldots A_{zz} \ldots ;$$

e il secondo membro della (1) si decomporrà in

$$\frac{A_{xx}A_{yy} - A^2_{xy}}{A_{xx}A_{yy}} \cdots \frac{A_{x^{(\rho-1)}x^{(\rho-1)}} A_{y^{(\rho-1)}y^{(\rho-1)}} - A^2_{x^{(\rho-1)}y^{(\rho-1)}}}{A_{x^{(\rho-1)}x^{(\rho-1)}} A_{y^{(\rho-1)}y^{(\rho-1)}}},$$

che equivale a

$$\operatorname{sen}^2(xy) \ldots \operatorname{sen}^2(x^{(\rho-1)}y^{(\rho-1)}),$$

vale a dire al momento quadrato di R e R′. Dunque la (1) è dimostrata.

(1) Il denominatore è il prodotto de' determinanti di R e R′; e il numeratore è il prodotto del determinante del $k$punto K secondo cui si secano R e R′, pel determinante dell' $(r + r' - k)$punto $K' \equiv x..y..z..$ in cui son contenuti R e R′.

La (1) può scriversi anche così:

$$(1)' \qquad m^2(\mathrm{RR}') = \frac{\binom{z\,..\,\alpha}{z\,..\,\alpha}\binom{x\,..\,y\,..\,z\,..\,\alpha}{x\,..\,y\,..\,z\,..\,\alpha}}{\binom{x\,..\,z\,..\,\alpha}{x\,..\,z\,..\,\alpha}\binom{y\,..\,z\,..\,\alpha}{y\,..\,z\,..\,\alpha}}.$$

Essa si semplifica quando R e R′ non han punti comuni: allora, se $x, x', \ldots$ e $y, y', \ldots$ sono punti individuanti R e R′, si ha

$$(2) \qquad m^2(\mathrm{RR}') = \frac{\Sigma\pm \mathrm{A}_{xx}\ldots\mathrm{A}_{yy}\ldots}{\Sigma\pm \mathrm{A}_{xx}\ldots\Sigma\pm \mathrm{A}_{yy}\ldots} = \alpha\,\frac{\binom{x\,..\,y\,..\,\alpha}{x\,..\,y\,..\,\alpha}}{\binom{x\,..\,\alpha}{x\,..\,\alpha}\binom{y\,..\,\alpha}{y\,..\,\alpha}};$$

ove il numeratore del secondo membro quando $r + r' = n$ si riduce al quadrato di $\Sigma\pm x_1 x'_2 \ldots y_{r+1} y'_{r+2}\ldots$, moltiplicato per a (§ IX-(4)).

Anche quando $r + r' = n + k$, nella (1) il determinante $\Sigma\pm \mathrm{A}_{xx}\ldots\mathrm{A}_{yy}\ldots\mathrm{A}_{zz}\ldots$ è di ordine n e si riduce a

$$a\left\{\Sigma\pm x_1\ldots y_{r-k+1}\ldots z_{n-k+1}\ldots z_n^{(k-1)}\right\}^2.$$

Si possono far scomparire dalla (1) i punti $z, z', \ldots$, supponendo che $x, \ldots$ appartengano all'$(r-k)$punto che è perfettamente ortogonale a K in R, e $y, \ldots$ appartengano all'$(r'-k)$punto perfettamente ortogonale a K in R′. Allora la (1) prende l'aspetto (2).

Si può anche abbassar l'ordine di tre determinanti nella (1), supponendo che l' de' punti $x, \ldots$ appartengano a L′, e l punti $y, \ldots$ a L. Allora si potranno escludere codesti punti dalla composizione de' determinanti in cui essi figuravano.

È notevole che nella (1) e nella (2) non arreca alcuna necessaria modificazione il fatto che R e R′ abbiano o no una certa ortogonalità. E infatti L e L′ non ci hanno servito che come semplice sussidio alla dimostrazione della (1).

§ XVII. Comomento di due multipunti.

Come nell'espressione del momento non apparisce l'influenza del fatto che i due multipunti abbiano o no qualche ortogonalità, mentre vi apparisce l'influenza del fatto che essi abbiano o no punti comuni; così nella espressione del comomento avverrà l'opposto.

Siano $u, u', \ldots, u^{(l'-1)}$ l' punti individuanti L′, e $x\ x', \ldots, x^{(r-l'-1)}$ altri $r-l'$ punti che con $u, \ldots$ individuino R; similmente siano $v, v', \ldots, v^{l-1}$ l punti individuanti L, e $y, y', \ldots, y^{(r'-l-1)}$ altri $r'-l$ punti che con $v, \ldots$ individuino R′; e ricordiamo che $r-l' = r'-l = \rho + k$. Dico che sarà

$$(1) \quad \mathrm{cm}^2(\mathrm{RR}') = \frac{\Sigma\pm \mathrm{A}_{uu}\ldots\Sigma\pm \mathrm{A}_{vv}\ldots}{\Sigma\pm \mathrm{A}_{xx}\ldots\mathrm{A}_{uu}\ldots\Sigma\pm \mathrm{A}_{yy}\ldots\mathrm{A}_{vv}\ldots}\left\{\Sigma\pm \mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_{x'y'}\ldots\mathrm{A}_{x^{(r-l'-1)}y^{(r'-l-1)}}\right\}^2.$$

Infatti, cominciamo dall'osservare che i determinanti ove entrano $u, \ldots$ o $v, \ldots$ non fanno che acquistare uno stesso fattore quando a quei punti si sostituiscono altri che individuino L′ o L; e quindi il secondo membro della (1) rimane immutato.

Quando poi a $x, \ldots$ si sostituiscano altri punti nelle stesse condizioni di essi, per es. i punti

$$\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \beta u + \beta' u' + \ldots, \quad \mu x + \mu' x' + \ldots + \gamma u + \gamma' u' + \ldots, \ldots;$$

allora $\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{uu} \ldots$ acquista il fattore $\left\{ \Sigma \pm \lambda \mu' \ldots \right\}^2$ in cui non entrano $\beta, \ldots, \gamma, \ldots, \ldots$; e $\Sigma \pm A_{xy} A_{x'y'} \ldots$ acquista il fattore $\Sigma \pm \lambda \mu' \ldots$, visto che A_{uy} e simili son nulli; sicchè per effetto della sostituzione di cui è parola il secondo membro della (1) neanche si altera.

Lo stesso accade quando a $y, \ldots$ si sostituiscono altri punti nelle medesime condizioni

$$\lambda y + \ldots + \beta v + \ldots, \quad \mu y + \ldots + \gamma v + \ldots, \ldots .$$

Potremo dunque supporre provvisoriamente: che $u, \ldots$ siano ortogonali fra loro in L′ e $v, \ldots$ ortogonali fra loro in L; che x e y, x' e $y', \ldots, x^{(\rho-1)}$ e $y^{(\rho-1)}$ siano i punti estremi delle ρ distanze fra R e R′; che $x^{(\rho)}, \ldots, x^{(r-l'-1)}$ siano k punti individuanti K e ortogonali fra loro; e che $y^{(\rho)}, \ldots, y^{(r'-l-1)}$ coincidano rispettivamente con essi. Con questo i cinque determinanti della (1) si riducono a' rispettivi termini principali, e il secondo membro della (1) diviene

$$\frac{A^2_{xy}}{A_{xx} A_{yy}} \cdot \frac{A^2_{x'y'}}{A_{x'x'} A_{y'y'}} \cdots \frac{A^2_{x^{(\rho-1)} y^{(\rho-1)}}}{A_{x^{(\rho-1)} x^{(\rho-1)}} A_{y^{(\rho-1)} y^{(\rho-1)}}}$$

ovvero

$$\cos^2 (xy) \cos^2 (x'y') \ldots \cos^2 (x^{(\rho-1)} y^{(\rho-1)}),$$

o da ultimo

$$\mathrm{cm}^2 (\mathrm{RR}').$$

La (1) si semplifica alquanto se R e R′ non hanno alcuna ortogonalità, onde $l = 0$ e $l' = r - r'$; e diventa

$$(2) \qquad \mathrm{cm}^2 (\mathrm{RR}') = \frac{\Sigma \pm A_{uu} \ldots A_u{}^{(r-r'-1)}{}_u{}^{(r-r'-1)}}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{uu} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots} \left\{ \Sigma \pm A_{xy} \ldots A_x{}^{(r'-1)}{}_y{}^{(r'-1)} \right\}^2 .$$

E se inoltre è $r = r'$, sarà

$$(3) \qquad \mathrm{cm}^2 (\mathrm{RR}') = \frac{\left\{ \Sigma \pm A_{xy} \ldots A_x{}^{(r-1)}{}_y{}^{(r-1)} \right\}^2}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots},$$

posto $\mathrm{R} \equiv x \ldots x^{(r-1)}$, $\mathrm{R}' \equiv y \ldots y^{(r'-1)}$.

Con procedimento analogo a quello da noi tenuto si giunge ad altre espressioni, un po' più generali della (1), per $\mathrm{cm}(\mathrm{RR}')$:

Se $x, \ldots, x^{(r-1)}$ individuano R; $v, \ldots, v^{(l-1)}$ individuano L; e $y, \ldots, y^{(r'-l-1)}$ con $v, \ldots$ individuano R′; si ha

$$(4) \quad \mathrm{cm}^2(\mathrm{RR}') = (-1)^{r'-l} \frac{\Sigma \pm A_{vv} \ldots}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots A_{vv} \ldots} \begin{vmatrix} 0 & . 0 & A_{yx} & A_{yx'} & .. \\ . & . . & . & . & .. \\ 0 & . 0 & A_y{}^{(r'-l-1)}{}_x & A_y{}^{(r'-l-1)}{}_{x'} & .. \\ A_{xy} & . A_{xy}{}^{(r'-l-1)} & A_{xx} & A_{xx'} & .. \\ A_{x'y} & . A_{x'y}{}^{(r'-l-1)} & A_{x'x} & A_{x'x'} & .. \\ . & . . & . & . & .. \end{vmatrix} .$$

Se invece $u, \ldots, u^{(l'-1)}$ individuano L'; $x, \ldots, x^{(r-l'-1)}$ con $u, \ldots$ individuano R; e $y, \ldots, y^{(r'-1)}$ individuano R'; si ha

$$(4)'\quad \mathrm{cm}^2(\mathrm{RR}') = (-1)^{r-l'} \frac{\Sigma \pm A_{uu} \ldots}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{uu} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots} \begin{vmatrix} 0 & .\,0 & A_{xy} & A_{xy'} & .. \\ . & . \; . & . & . & .. \\ 0 & .\,0 & A_x{}^{(r-l'-1)}{}_y & A_x{}^{(r-l'-1)}{}_{y'} & .. \\ A_{yx} & .\, A_{yx}{}^{(r-l'-1)} & A_{yy} & A_{yy'} & .. \\ . & . \; . & . & . & .. \end{vmatrix}.$$

Quando R e R' non sono ortogonali, se $x, \ldots, x^{(r-1)}$ individuano R e $y, \ldots, y^{(r'-1)}$ individuano R', sarà (posto $r > r'$)

$$(5)\quad \mathrm{cm}^2(\mathrm{RR}') = \frac{(-1)^{r'}}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots} \begin{vmatrix} 0 & .\,0 & A_{yx} & A_{yx'} & . \\ . & . \; . & . & . & . \\ 0 & .\,0 & A_y{}^{(r'-1)}{}_x & A_y{}^{(r'-1)}{}_{x'} & . \\ A_{xy} & .\, A_{xy}{}^{(r'-1)} & A_{xx} & A_{xx'} & . \\ A_{x'y} & .\, A_{x'y}{}^{(r'-1)} & A_{x'x} & A_{x'x'} & . \\ . & . \; . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Terminiamo osservando che, se $\mathrm{R} \equiv x \ldots z \ldots$ e $\mathrm{R}' \equiv y \ldots z \ldots$ sono un $r$punto e un r'punto aventi in comune il $k$punto $\mathrm{K} \equiv zz' \ldots$, e se $\mathrm{r} \equiv \mathrm{X} \ldots \mathrm{Z} \ldots$ e $\mathrm{r}' \equiv \mathrm{Y} \ldots \mathrm{Z} \ldots$ sono un $r$punto e un r'punto aventi in comune il $k$punto $\mathrm{k} \equiv \mathrm{ZZ}' \ldots$, sarà in generale

$$(6)\quad \frac{\Sigma \pm A_{z\mathrm{Z}} \ldots \Sigma \pm A_{x\mathrm{X}} \ldots A_{y\mathrm{Y}} \ldots A_{z\mathrm{Z}} \ldots}{\Sigma \pm A_{x\mathrm{X}} \ldots A_{z\mathrm{Z}} \ldots \Sigma \pm A_{y\mathrm{Y}} \ldots A_{z\mathrm{Z}} \ldots} = \frac{\mathrm{m}(\mathrm{RR}')\,\mathrm{m}(\mathrm{rr}')}{\mathrm{cm}(\mathrm{Rr})\,\mathrm{cm}(\mathrm{R}'\mathrm{r}')}\,\mathrm{cm}(\mathrm{Kk})\,\mathrm{cm}(\mathrm{RR}', \mathrm{rr}'),$$

ove RR' indica l'$(r+r'-k)$punto composto da R con R', e rr' quello composto da r con r'.

Questa proposizione scaturisce immediatamente dalla (1) del § precedente e dalla (3) del presente.

§ XVIII. Momenti di diversi ordini.

La formola che dà il momento de' multipunti R, R' è un caso particolare di un' altra, la quale dà *la somma de' prodotti a ν a ν de' seni quadrati delle ρ distanze* $\left(\text{diverse da } 0 \text{ e } \frac{\pi}{2}\right)$ *fra* R *e* R', *per* $\nu = 1, \ldots \rho$. La radice quadrata di questa somma può essere denominata *momento* ν*.mo* di R e R'; riserbando il nome di *momento*, senz' altro, al momento ρ.mo.

Conservando le ipotesi e le notazioni del § XVI, e ponendo per brevità

$$\delta \equiv \Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{zz} \ldots, \qquad \delta' \equiv \Sigma \pm A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots,$$

$$\Delta \equiv \Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots,$$

consideriamo la somma

$$\mathrm{S}_\nu \equiv \frac{1}{\delta\delta'} \sum (\Sigma \pm A_x{}^{(b)}{}_x{}^{(f)} \ldots A_{zz} \ldots) \frac{\partial^{\rho-\nu} \Delta}{\partial A_x{}^{(b)}{}_x{}^{(f)} \ldots};$$

$$= \frac{1}{\delta\delta'} \sum (\Sigma \pm A_x{}^{(b)}{}_x{}^{(f)} \ldots A_{zz} \ldots)(\Sigma \pm A_x{}^{(c)}{}_x{}^{(g)} \ldots A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots),$$

ove $x^{(b)}...$ e $x^{(f)}...$ denotano combinazioni qualunque dei punti $xx'...x^{(r-k-1)}$ di classe $\rho-\nu$; ovvero $x^{(b)}...x^{(c)}....$ e $x^{(f)}...x^{(g)}...$ denotano quelle permutazioni pari di $xx'...$ in cui i gruppi $x^{(b)}...$ e $x^{(f)}...$ hanno gli elementi in ordine diretto e i gruppi $x^{(c)}...$, $x^{(g)}...$ presentano il minor numero possibile d'inversioni (o viceversa).

È chiaro innanzi tutto che S_ν non si altera quando a $z, ...$ si sostituiscono altri punti individuanti K.

Esaminiamo ora se avviene lo stesso quando a $x, x', ...$ si sostituiscano altri punti

$$\lambda_0 x + \lambda'_0 x' + ... + \beta z + \beta' z' + ..., \quad \lambda_1 x + \lambda'_1 x' + ... + \gamma z + \gamma' z' + ...,....$$

nelle stesse condizioni di quelli. Sappiamo che allora δ si muta in $\delta(\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1...)^2$, ove non entrano $\beta, ... \gamma, ..., ...$ Quanto alla somma principale, essa diviene

$$\sum(\Sigma\pm\lambda^{(\varepsilon)}_b...)(\Sigma\pm\lambda^{(\eta)}_f...)(\Sigma\pm A_x{}^{(\varepsilon)}_x{}^{(\eta)}...A_{zz}...)(\Sigma\pm\lambda^{(\zeta)}_c...)(\Sigma\pm\lambda^{(\theta)}_g...)\times$$
$$\times(\Sigma\pm A_x{}^{(\zeta)}_x{}^{(\theta)}...A_{yy}...A_{zz}...);$$

ove $b...c...$ e $f...g...$ sono permutazioni pari di $0, 1, ..., (r-k-1)$; $\lambda^{(\varepsilon)}...$ e $\lambda^{(\eta)}...$ sono combinazioni di classe $\rho-\nu$ de' *simboli* $\lambda, \lambda', ...$; $\lambda^{(\zeta)}...$ e $\lambda^{(\theta)}...$ combinazioni di classe $r-k-\rho+\nu=l'+\nu$ de' medesimi simboli; e lo stesso vale per $x^{(\varepsilon)}, ...$ rispetto a $xx'...$ Ora il termine generale della detta somma si scinde nel prodotto delle tre seguenti:

$$(\Sigma\pm A_x{}^{(\varepsilon)}_x{}^{(\eta)}...A_{zz}...)(\Sigma\pm A_x{}^{(\zeta)}_x{}^{(\theta)}...A_{yy}...A_{zz}...),$$
$$\sum_{b...c...}(\Sigma\pm\lambda^{(\varepsilon)}_b...)(\Sigma\pm\lambda^{(\zeta)}_c...), \quad \sum_{f...g...}(\Sigma\pm\lambda^{(\eta)}_f...)(\Sigma\pm\lambda^{(\theta)}_g...).$$

La seconda è eguale manifestamente a $\Sigma\pm\lambda^{(\varepsilon)}_b...\lambda^{(\zeta)}_c...$; e quindi è nulla quando uno de' simboli $\lambda^{(\varepsilon)}, ...$ coincide con uno dei $\lambda^{(\zeta)}, ...$; ed è eguale a $(-1)^\tau\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1...$ quando $\lambda^{(\varepsilon)}...\lambda^{(\zeta)}...$ è una permutazione del gruppo $\lambda\lambda'...$ con σ inversioni. Similmente, la terza somma vale $(-1)^\sigma\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1...$ quando $\lambda^{(\eta)}...\lambda^{(\theta)}...$ è una permutazione di $\lambda\lambda'...$ con σ' inversioni: altrimenti è nulla. Per conseguenza il termine generale in quistione diviene

$$(\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1...)^2(-1)^{\tau+\sigma'}(\Sigma\pm A_x{}^{(\varepsilon)}_x{}^{(\eta)}...A_{zz}...)(\Sigma\pm A_x{}^{(\zeta)}_x{}^{(\theta)}...A_{yy}...A_{zz}...);$$

e ciò basta a provare che la somma principale nella espressione di S_ν si riproduce moltiplicata pel fattore $(\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1...)^2$, come δ. Onde S_ν non subisce alcuna alterazione.

Lo stesso dicasi quando a $y, ...$ si sostituiscono altri punti nelle medesime condizioni.

Ciò premesso, potremo nella espressione di S_ν fare, circa la posizione de'punti $x, ..., y, ..., z, ...$, le stesse ipotesi provvisorie che nel § XVI; e ne otterremo

$$S_\nu = \sum_{h...}\frac{A_x{}^{(h)}_x{}^{(h)}A_y{}^{(h)}_y{}^{(h)} - A^2{}_x{}^{(h)}_y{}^{(h)}}{A_x{}^{(h)}_x{}^{(h)}A_y{}^{(h)}_y{}^{(h)}}\times ....= \sum_{h...}\operatorname{sen}^2(x^{(h)}y^{(h)})...,$$

indicando con $(x^{(h)}y^{(h)})...$ una combinazione di ν, o $\nu+1, ...$ delle distanze fra R e R'. Se dunque indichiamo con M_ν il momento ν.mo di R e R' [onde $M_\rho = m(RR')$], avremo

$$S_\nu = M^2_\nu + \binom{l'}{1}M^2_{\nu+1} + \binom{l'}{2}M^2_{\nu+2} + ... + \binom{l'}{\rho-\nu}M^2_\rho,$$

con l'avvertenza che $\binom{p}{q} = 0$ per $p < q$.

L'ultima equazione e quelle che ne derivano aumentando ν successivamente, moltiplicandole per $1, -\binom{l'}{1}, +\binom{l'+1}{2}, -\binom{l'+2}{3}, \ldots$ e poi sommandole, porgono (1)

$$(1) \qquad M^2_\nu = S_\nu - \binom{l'}{1} S_{\nu+1} + \binom{l'+1}{2} S_{\nu+2} - \binom{l'+2}{3} S_{\nu+3} + - \ldots + (-1)^{\rho-\nu} \binom{l'+\rho-\nu-1}{\rho-\nu} S_\rho ,$$

la quale equazione fornisce il momento ν.mo di R e R′ in funzione delle somme $S_\nu, S_{\nu+1}, \ldots$, di cui è nota la composizione. L'ultima S_ρ esprime il momento (ρ.mo) quadrato di R e R′, e non è altro che il secondo membro della (1) del § XVI.

Invece dell'ultima equazione, si può evidentemente far uso dell'altra

$$(2) \qquad M^2_\nu = S'_\nu - \binom{l}{1} S'_{\nu+1} + \binom{l+1}{2} S'_{\nu+2} - + \ldots + (-1)^{\rho-\nu} \binom{l+\rho-\nu-1}{\rho-\nu} S'_\rho ,$$

supponendo che S'_ν sia composta con $x, \ldots$ e $y, \ldots$, come S_ν era composta con $y, \ldots$ e $x, \ldots$; vale a dire supponendo

$$S'_\nu = \frac{1}{\partial\partial'} \sum (\Sigma \pm A_{y^{(b)} y^{(f)} \ldots} A_{zz\ldots}) \frac{\partial^{\rho-\nu} \Delta}{\partial A_{y^{(b)} y^{(f)} \ldots}}$$

$$= \frac{1}{\partial\partial'} \sum (\Sigma \pm A_{y^{(b)} y^{(f)} \ldots} A_{zz\ldots})(\Sigma \pm A_{y^{(c)} y^{(g)} \ldots} A_{xx\ldots} A_{zz\ldots}) ,$$

(1) Si può infatti dimostrare che in generale

$$\binom{m}{p} - \binom{m}{1}\binom{m}{p-1} + \binom{m+1}{2}\binom{m}{p-2} - + \ldots \pm \binom{m+p-1}{p} = 0,$$

che si può scrivere anche compendiosamente così:

$$(*) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_s (-1)^s \binom{m+s-1}{s}\binom{m}{p-s} = 0.$$

Basta mostrare che questa relazione, la quale è esatta per $m = 0, 1, 2, \ldots$ (qualunque sia p da $p=1$ in su), ove sia ammessa sino a un certo valore m, sarà anche vera per $m+1$. A tale uopo scemiamo p di 1, ed avremo dalla (*)

$$\Sigma (-1)^s \binom{m+s-1}{s}\binom{m}{p-s-1} = 0 ;$$

e sommando con la (*)

$$\Sigma (-1)^s \binom{m+s-1}{s}\binom{m+1}{p-s} = 0 ,$$

da $p=2$ in su.

Questa eguaglianza, scemando p e s nel termine generale di 1 per volta, dà le altre

$$\Sigma (-1)^s \binom{m+s-2}{s-1}\binom{m+1}{p-s} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma (-1)^s \binom{m+s-p+1}{s-p+2}\binom{m+1}{p-s} = 0;$$

e sommandole tutte risulta

$$\Sigma (-1)^s \left\{ \binom{m+s-1}{s} + \binom{m+s-2}{s-1} + \ldots + \binom{m-1}{0} \right\} \binom{m+1}{p-s} = 0$$

ovvero

$$\Sigma (-1)^s \binom{m+s}{s}\binom{m+1}{p-s} = 0.$$

C. B. D.

ove $y^{(b)}\ldots$ e $y^{(f)}\ldots$ denotano le combinazioni di classe $\rho-\nu$ de'punti $y, y', \ldots, y^{(r'-k-1)}$, ovvero $y^{(b)}\ldots y^{(c)}\ldots$ e $y^{(f)}\ldots y^{(g)}$ denotano permutazioni pari de' medesimi punti, ma non tutte.

La seconda espressione di M^2_ν è preferibile alla prima quando $r > r'$; poichè allora è certamente $l < l'$, e però la seconda espressione contiene meno termini. Anzi, se R e R′ non hanno alcuna ortogonalità, si ha

$$M^2_\nu = S'_\nu .$$

Ottenuto M^2_ν (per $\nu=1,\ldots,\rho$) in funzione di $x,\ldots,y,\ldots$ e $z\ldots$, è immediatamente formata l'equazione che ha per radici i seni delle distanze fra R e R′: detta D una qualunque di tali distanze, l'equazione sarà

$$\operatorname{sen}^{2\rho} D - M^2_1 \operatorname{sen}^{2(\rho-1)} D + M^2_2 \operatorname{sen}^{2(\rho-2)} D - + \ldots + (-1)^\rho M^2_\rho = 0.$$

§ XIX. Comomenti di diversi ordini.

Ora esporremo un modo di determinare il *comomento* ν*.mo* di R e R′ per $\nu=1, 2, \ldots, \rho$, vale a dire la radice quadrata della somma de' prodotti a ν a ν de' coseni quadrati delle distanze fra R e R′.

Conservate le notazioni e le ipotesi del § XVII, e posto

$$\delta = \Sigma \pm A_{xx'}\ldots A_{uu'}\ldots , \qquad \delta' = \Sigma \pm A_{yy'}\ldots A_{vv'}\ldots ,$$

consideriamo la somma

$$S^{(\nu)} =$$

$$\frac{1}{\delta\delta'} \sum (\Sigma \pm A_{x^{(b)}x^{(f)}}\ldots A_{uu'}\ldots)(\Sigma \pm A_{y^{(i)}y^{(p)}}\ldots A_{vv'}\ldots)(\Sigma \pm A_{x^{(c)}y^{(j)}}\ldots)(\Sigma \pm A_{x^{(g)}y^{(q)}}\ldots) .$$

Qui $x^{(b)}\ldots$ e $x^{(f)}\ldots, y^{(i)}\ldots$ e $y^{(p)}\ldots$ sono combinazioni di classe $\rho-\nu$ de' punti $xx'\ldots x^{(r-l'-1)}$, $yy'\ldots y^{(r'-l-1)}$; inoltre $x^{(b)}\ldots x^{(c)}\ldots, x^{(f)}\ldots x^{(g)}\ldots$ e $y^{(i)}\ldots y^{(j)}\ldots, y^{(p)}\ldots y^{(q)}\ldots$ sono quelle permutazioni pari de'medesimi punti, nelle quali i primi $\rho-\nu$ non presentano inversioni e gli altri il meno possibile (o viceversa).

Osserviamo primieramente che δ e $\Sigma \pm A_{xx'}\ldots A_{uu'}\ldots$ si moltiplicano per uno stesso fattore quando a $u,\ldots$ si sostituiscono altri punti individuanti L′; sicchè $S^{(\nu)}$ non si altera per cosiffatta sostituzione. E lo stesso avviene quando a $v,\ldots$ si sostituiscono altri punti individuanti L.

Quando poi a $x,\ldots$ si sostituiscono altri punti

$$\lambda_0 x + \lambda'_0 x' + \ldots + \beta u + \ldots , \quad \lambda_1 x + \lambda'_1 x' + \ldots \gamma u + \ldots, \ldots,$$

allora δ si moltiplica per $(\Sigma \pm \lambda_0\lambda'_1\ldots)^2$, in cui non entrano $\beta,\ldots,\gamma\ldots,\ldots$; e resta ad esaminare quale modificazione subisca la somma principale in $S^{(\nu)}$. Essa diviene

$$\sum (\Sigma \lambda^{(\varepsilon)}{}_b\ldots)(\Sigma \pm \lambda^{(\eta)}{}_f\ldots)(\Sigma \pm A_{x^{(\varepsilon)}x^{(\eta)}}\ldots A_{uu'}\ldots)(\Sigma \pm A_{y^{(i)}y^{(p)}}\ldots A_{vv'}\ldots)$$
$$\times (\Sigma \pm \lambda^{(\zeta)}{}_c\ldots)(\Sigma \pm A_{x^{(\zeta)}y^{(j)}}\ldots)(\Sigma \pm \lambda^{(\theta)}{}_g\ldots)(\Sigma \pm A_{x^{(\theta)}y^{(q)}}\ldots) ;$$

ove $b..c..$ e $f..g..$ sono permutazioni pari di $01..(r-l'-1)$; $\lambda^{(\varepsilon)}\ldots$ e $\lambda^{(\eta)}\ldots$ sono combinazioni di classe $\rho-\nu$ de' simboli $\lambda\lambda'\ldots$; $\lambda^{(\zeta)}\ldots$ e $\lambda^{(\theta)}\ldots$ combinazioni di classe $r-l'-\rho+\nu=k+\nu$ de' medesimi; e lo stesso vale per $x^{(\varepsilon)},\ldots,\ldots$ Ora il termine generale della detta somma è il prodotto delle seguenti tre:

$$(\Sigma \pm A_{x^{(\varepsilon)}x^{(\eta)}}\ldots A_{uu'}\ldots)(\Sigma \pm A_{y^{(i)}y^{(p)}}\ldots A_{vv'}\ldots)(\Sigma' \pm A_{x^{(\zeta)}y^{(j)}}\ldots)(\Sigma \pm A_{x^{(\theta)}y^{(q)}}\ldots) ,$$
$$\sum_{b..c..} (-\Sigma \pm \lambda^{(\varepsilon)}{}_b\ldots)(\Sigma \pm \lambda^{(\zeta)}{}_c\ldots) , \quad \sum_{f..g..} (\Sigma \pm \lambda^{(\eta)}{}_f\ldots)(\Sigma \pm \lambda^{(\theta)}{}_g\ldots) ;$$

delle quali la seconda e la terza hanno valore, e valgono $\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1\ldots$ moltiplicato rispettivamente per $(-1)^{\sigma}$ e $(-1)^{\sigma'}$, solo quando $\lambda^{(\varepsilon)}\ldots\lambda^{(\zeta)}\ldots$ e $\lambda^{(\eta)}\ldots\lambda^{(\theta)}\ldots$ sono permutazioni di $\lambda\lambda'\ldots$ con σ e rispettivamente σ' inversioni. Sicchè il termine generale diviene la prima somma moltiplicata per $(\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1\ldots)^2$ e per $(-1)^{\sigma+\sigma'}$; e ciò basta a provare che la somma principale in $S^{(\nu)}$ si riproduce moltiplicata per lo stesso fattore che δ, cioè $(\Sigma\pm\lambda_0\lambda'_1\ldots)^2$; e per conseguenza $S^{(\nu)}$ non si altera per effetto della sostituzione di altri punti a $x,\ldots$

E similmente non si altera $S^{(\nu)}$ quando a $y,\ldots$ si sostituiscono altri punti nelle stesse loro condizioni.

Ciò premesso, potremo nell'espressione di $S^{(\nu)}$ introdurre le stesse ipotesi provvisorie che nel § XVII; e ne trarremo

$$S^{(\nu)}=\Sigma\frac{A^2_{x^{(h)}y^{(h)}}}{A_{x^{(h)}x^{(h)}}A_{y^{(h)}y^{(h)}}}\ldots=\Sigma\cos^2(x^{(h)}y^{(h)})\ldots,$$

indicando con $(x^{(h)}y^{(h)})\ldots$ una combinazione di ν, o $\nu+1,\ldots$ distanze fra R e R′. Se dunque denotiamo con C_ν il comomento ν.mo di R e R′ [onde $C_\rho=\mathrm{cm}(RR')$], avremo

$$S^{(\nu)}=C^2_\nu+\binom{k}{1}C^2_{\nu+1}+\binom{k}{2}C^2_{\nu+2}+\ldots+\binom{k}{\rho-\nu}C^2_\rho\,.$$

Da questa equazione e da quelle che ne derivano aumentando ν successivamente, moltiplicandole per $1,-\binom{k}{1}$, $+\binom{k+1}{2},\ldots$ e sommandole, concludiamo

$$(1)\qquad C^2_\nu=S^{(\nu)}-\binom{k}{1}S^{(\nu+1)}+\binom{k+1}{2}S^{(\nu+2)}-\binom{k+2}{3}S^{(\nu+3)}+-\ldots$$
$$+(-1)^{\rho-\nu}\binom{k+\rho-\nu-1}{\rho-\nu}S^{(\rho)},$$

equazione che fornisce il comomento ν.mo in funzione delle somme di nota composizione $S^{(\nu)},\ldots,S^{(\rho)}$; l'ultima delle quali non è che il comomento (ρ.mo) quadrato di R e R′, cioè il secondo membro della (1) del § XVII.

Se $k=0$

$$C^2_\nu=S^{(\nu)}.$$

Ottenuto C_ν (per $\nu=1,\ldots\rho$) in funzione di $x,\ldots,u,\ldots$ e $y,\ldots,v,\ldots$, è immediatamente formata la equazione che ha per radici i coseni delle distanze fra R e R′: essa è

$$\cos^{2\rho}D-C^2_1\cos^{2(\rho-1)}D+C^2_2\cos^{2(\rho-2)}D-+\ldots+(-1)^{\rho}C^2_\rho=0.$$

§ XX. Assoluto de' piani. Angolo di due piani.

Due piani ξ e η hanno una sola distanza: cioè la distanza fra' due punti ove essi sono secati dalla comune perpendicolare, ovvero la distanza fra' due punti conjugati ad essi piani, pe' quali due punti passa la detta perpendicolare. Questa perpendicolare è poi conjugata al bipiano $\xi\eta$ individuato da' due piani ξ e η.

Se $x, x', \ldots, x^{(n-2)}$ e $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ sono punti individuanti ξ e η, la (3) del § XVII darà

$$\cos^2(\xi\eta) = \frac{\left\{\Sigma \pm A_{xy}\ldots.\right\}^2}{\Sigma \pm A_{xx}\ldots\Sigma \pm A_{yy}\ldots};$$

e ricordando che [§ IX (6)]

$$\Sigma \pm A_{xy}\ldots = A_{\xi\eta},\ \Sigma \pm A_{xx}\ldots = A_{\xi\xi},\ \Sigma \pm A_{yy}\ldots = A_{\eta\eta},$$

avremo

$$\cos^2(\xi\eta) = \frac{A^2_{\xi\eta}}{A_{\xi\xi}\, A_{\eta\eta}}.$$

L'aspetto di questa formola, così somigliante a quella che dà il coseno della distanza fra due punti (§ X), ci suggerisce di scegliere come assoluto, nello spazio di $n-1$ dimensioni che ha per elementi i piani, l'insieme de' piani soddisfacenti alla equazione

$$A_{\xi\xi} \equiv \Sigma\, \alpha_{ij}\xi_i\xi_j = 0\ (i, j = 1, \ldots, n).$$

Allora, definito come *rapporto anarmonico* di quattro piani ξ, η, $\lambda_1\xi + \mu_1\eta$, $\lambda_2\xi + \mu_2\eta$, di un medesimo bipiano, il doppio rapporto $\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}$; e definito come *angolo* de' due piani ξ e η il logaritmo, diviso per $2i$, del rapporto anarmonico determinato da' due piani e da quegli altri due che il loro bipiano ha comune con l'assoluto de' piani; sarà *l'angolo fra due piani eguale alla distanza fra' medesimi* considerati come $(n-1)$punti.

Viceversa, la distanza fra due punti è eguale all'angolo fra' due piani che passano rispettivamente per i due punti ed appartengono al bipiano conjugato alla retta che unisce i due punti.

Insomma la distanza e l'angolo fra due piani sono equivalenti e riducibili l'una all'altro.

L'angolo di due piani ξ, η è eguale a $\frac{\pi}{2}$ quando $A_{\xi\eta} = 0$. Tutti i piani ξ che fanno un tale angolo con uno stesso η costituiscono un $(n-1)$piano contraddistinto dalla equazione $A_{\xi\eta} = 0$ o $\Sigma \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\eta\eta}}{\partial \eta_i}\xi_i = 0$, vale a dire inviluppano il punto conjugato al piano η. Allo stesso risultato si perviene osservando che, se due piani fanno l'angolo $\frac{\pi}{2}$, la retta comune perpendicolare li seca in punti distanti per $\frac{\pi}{2}$, ciascuno de' quali è il punto conjugato all'altro piano. Questo riscontro giustifica l'epiteto *ortogonali* da noi attribuito a punti distanti per $\frac{\pi}{2}$.

Un piano e un punto conjugati rispetto all'assoluto de' punti $A_{xx} = 0$ possono dunque dirsi conjugati anche rispetto all'assoluto de' piani $A_{\xi\xi} = 0$.

I piani ortogonali a tutti i piani di un $r$piano passano per i punti conjugati a questi piani, e quindi inviluppano l'$r$punto o $(n-r)$piano conjugato a quell'$r$piano. Sicchè un $r$piano o $(n-r)$punto e un $(n-r)$piano o $r$punto, che sieno conjugati rispetto all'assoluto de' punti, sono tali anche rispetto all'assoluto de' piani. A ciascun piano dell'uno corrisponde ciascun punto dell'altro.

§ XXI. Angoli fra due multipiani.

Le cose esposte nel § XI intorno all'ortogonalità semplice, doppia, ..., perfetta fra due multipunti si applicano tutte a' multipiani, scambiando solo l'elemento *punto* con l'elemento *piano*; ed è perciò superfluo qui svilupparle.

È intanto da osservare che, se due multipiani hanno una certa ortogonalità, la medesima ortogonalità essi presenteranno come multipunti. Infatti se, posto $r' \leqq r$, un r'piano R′ contiene (1) un $l$piano L perfettamente ortogonale a un $r$piano R, nel qual caso R conterrà un $(r-r'+l)$piano L′ perfettamente ortogonale a R′; allora R′ e il conjugato R_0 di R avranno in comune L; ovvero, considerati come un $(n-r')$punto e un $r$punto, R′ e R_0 apparterranno a uno stesso $(n-l)$punto L; quindi avranno in comune un $(\overline{n-r'}+r-\overline{n-l})$punto o $(r-r'+l)$punto, il quale sarà perfettamente ortogonale a R considerato come multipunto. E similmente, R come multipunto conterrà un $l$punto perfettamente ortogonale a R′ come multipunto.

Un bipiano, che oltre ad essere semplicemente ortogonale a un multipiano, abbia con questo un piano in comune, lo diremo *perpendicolare* al multipiano *in* quel piano comune.

Anche il contenuto del §§ XII e XIII si applica allora a' multipiani. Per es. un $r$piano R e un r'piano R′ ammettono de' bipiani perpendicolari comuni in piani distinti; i quali bipiani sono perpendicolari anche a R_0 e R_1 (conjugati di R e R′) in piani distinti, sono perpendicolari a R e R_0 in piani ortogonali, come pure a R′ e R_1. Questi bipiani sono ortogonali perfettamente a due a due. E son tali altresì rispetto a' multipiani che R, R′, R_0, R_1 possono aver di comune a due a due; in altre parole, passano pe' multipunti che R, R′, R_0 e R_1 possono avere in comune a due a due.

I varî angoli compresi fra ciascuna coppia di piani ne' quali uno stesso bipiano è perpendicolare a R e R′, li chiameremo *gli angoli dei multipiani* R, R′. Essi sono i minimi fra gli angoli compresi tra ciascun piano di R e ciascuno di R′.

Del resto, *gli angoli fra* R *e* R′ *come multipiani sono eguali, ciascuno a ciascuna, alle distanze fra* R *e* R′ *come multipunti.* Infatti, sia un certo bipiano perpendicolare a R, R′, R_0 e R_1 ne' piani Π, Π', Π_0 e Π_1; i quali abbiano per punti conjugati P,P′, P_0 e P_1. Poichè Π,... appartengono a un bipiano, P,... staranno nella retta conjugata del bipiano. E poichè Π è un piano di R, P è un punto di R_0 e quindi anche di Π_0; e similmente P_0 è in R e Π, P′ in R_1 e Π_1, P_1 in R′ e Π'. Onde la retta P... è perpendicolare a R, R′, R_0, R_1 ed a Π, Π', Π_0, Π_1 rispettivamente in P_0, P_1, P, P'. Dunque l'angolo $(\Pi\Pi')$ è eguale alla distanza (P_0P_1); vale a dire: uno degli angoli fra R e R′ è eguale a una delle distanze fra R e R′. E viceversa, com' è facile dimostrare.

È superfluo trascriver le formole che dànno il momento, il comomento,... di due multipiani individuati da' loro piani; basta mutare le coordinate di punti in coordinate di piani ne' §§ XVI,...

(1) Vale a dire: se fra i suoi piani ve ne ha ∞^{l-1} costituenti un $l$piano L ecc.

§ XXII. Altre espressioni de' momenti e de' comomenti.

Ne §§ XVI,... abbiamo supposte date le coordinate de' punti individuanti due multipunti, ed abbiamo espressi in funzione di esse i momenti e i comomenti de' diversi ordini. È manifesto intanto che coteste funzioni metriche debbono potersi esprimere mediante le coordinate dei due multipunti, quali le definimmo nel § VI; ed è ciò che ci proponiamo ora di fare.

Siano $x_{1..r}$,... le coordinate di R e $y_{1..r}$..., quelle di R′. *Se, essendo* $r + r' < n$, R *e* R′ *non hanno punti comuni*, il numeratore della (2) del § XVI si sviluppa in

$$\Sigma a_{c..d..,g..h..}(\Sigma \pm x_{c..}y_{d..})(\Sigma \pm x_{g..}y_{h..}),$$

ove *c..d..* e *g..h..* indicano combinazioni di classe $r + r'$ degl' indici 1.. n; e sviluppando i determinanti $\Sigma \pm x_{c..}y_{d..}$, $\Sigma \pm x_{g..}y_{h..}$ in prodotti di determinanti minori di ordini r e r', il detto numeratore diviene

$$\Sigma a_{c..d..g..h..}x_{c..}y_{d..}x_{g..}y_{h..},$$

ove *c..d..* e *g..h..* indicano disposizioni pari della classe $r + r'$ di 1... n, e precisamente quelle in cui *c..* e *g..* non presentano inversioni e *d..*, *h..* ne presentano il meno possibile; o viceversa. E siccome il denominatore della medesima formola, per la (6) del § IX, si riduce a $A(\overset{r\,r}{x\,x}).A(\overset{r'r'}{y\,y})$; così, ponendo

$$A(\overset{r\,r}{x\,x}).A(\overset{r'r'}{y\,y}) = \frac{1}{\omega},$$

avremo

$$(1) \qquad m^2(RR') = \omega \Sigma a_{c..d..,g..h..}x_{c..}y_{d..}x_{g..}y_{h..},$$

con la regola enunciata per gl' indici, la quale può ridursi a questo: che *c..d..* e *g..h..* siano disposizioni di 1... n tali, che i primi r (*c..* o *g..*) e i rimanenti r' (*d..* o *h..*) non presentino inversioni.

Se, essendo $r + r' = n$, R *e* R′ *non hanno punti comuni*, allora si ottiene

$$(2) \qquad m^2(RR') = \omega a \left\{ \Sigma x_{c..}y_{d..} \right\}^2,$$

indicando con *c.. d..* quelle permutazioni pari di 1... n in cui *c..* non presentano inversioni e *d..* ne presentano il meno possibile (o viceversa).

Se, essendo $r + r' = n + k$, R *e* R′ *hanno un k-punto comune*, proveremo che si avrà

$$(3) \qquad m^2(RR') = \omega a \Sigma a_{b..,f..}x_{b..c..}y_{b..d..}x_{f..g..}y_{f..h..},$$

dove *b..c..d..*, *f..g..h..* sono quelle permutazioni pari di 1... n in cui i gruppi di k elementi *b..* e *f..* non presentano inversioni; mentre gli $r - k$ *c..* e *g..* non presentano inversioni, e gli $r' - k$ *d..* e *h..* ne presentano il meno possibile (o viceversa).

Se infine, essendo $r + r' < n + k$, R *e* R′ *hanno un k-punto comune*, proveremo che sarà

$$(4) \qquad m^2(RR') = \omega \Sigma a_{b..,f..}a_{b..c..d..,f..g..h..}x_{b..c..}y_{b..d..}x_{f..g..}y_{f..h..},$$

ove $b..c..d..$, $f..g..h..$ indicano quelle disposizioni della classe $r+r'-k$ in cui i primi k indici $b..$ o $f..$, i seguenti $r-k$ $c..$ o $g..$ e i rimanenti $r'-k$ $d..$ o $h..$ non presentano inversioni.

È chiaro che questa ultima relazione comprende come caso particolare la precedente, ed anche le due prime; e che essa è alla sua volta un corollario della seguente, della quale soltanto basterà quindi dare la dimostrazione:

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{m(RR')m(rr')}}{\mathrm{cm(Rr)cm(R'r')}}\,\mathrm{cm\,(Kk)\,cm\,(RR',\,rr')}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{A}(\overset{r}{x}\mathrm{x}).(\mathrm{A}\overset{r}{y}\mathrm{y})}\,\Sigma a_{b..,f..}a_{b..c..d..,f..g..h..}x_{b..c..}y_{b..d..}\mathrm{X}_{f..g..}\mathrm{Y}_{f..h..},$$

dove r e r' sono un altro $r$punto e un altro r'punto aventi in comune un $k$punto k, $\overset{r}{\mathrm{X}}$ e $\overset{r}{\mathrm{Y}}$ stanno per le coordinate di r e r', RR' e rr' sono i due $(r+r'-k)$punti composti da R con R' e da r con r', e gl'indici sono regolati come sopra.

Per dimostrare questa relazione, ricordiamo che il primo membro, in virtù della (6) del § XVII, equivale a

$$(6) \qquad \frac{\Sigma\pm \mathrm{A}_{z\mathrm{Z}}...\,\Sigma\pm \mathrm{A}_{x\mathrm{X}}...\,\mathrm{A}_{y\mathrm{y}}...\,\mathrm{A}_{z\mathrm{Z}}...}{\Sigma\pm \mathrm{A}_{x\mathrm{X}}...\,\mathrm{A}_{z\mathrm{Z}}...\,\Sigma\pm \mathrm{A}_{y\mathrm{y}}...\mathrm{A}_{z\mathrm{Z}}...},$$

posto $\mathrm{k}\equiv \mathrm{Z}...$, ecc. Ora il denominatore è eguale a $\mathrm{A}(\overset{r}{x}\mathrm{X}).\,\mathrm{A}(\overset{r}{y}\mathrm{Y})$, come si voleva provare. Quanto al numeratore, essendo il primo determinante lineare in $z,...,\mathrm{Z},...$ e il secondo lineare in $x,...,y,...,z...$ e $\mathrm{X},...,\mathrm{Y},...,\mathrm{Z},...$, sarà il prodotto una funzione quadrilineare e omogenea delle coordinate di R, R', r, r'; e però basta determinare il coefficiente di un termine *qualunque* di tale funzione.

A questo scopo consideriamo gli n punti,

$$\mathrm{P}_1\,(1,0,0,...)\,,\quad \mathrm{P}_2\,(0,1,0,...)\,,...$$

che possiamo chiamare i *fondamentali* dello spazio proposto di $n-1$ dimensioni; e indicando con $b..c..d..$, $f..g..h..$ gruppi di $k+(r-k)+(r'-k)\equiv r+r'-k$ fra gl'indici $1;..,n$, supponiamo provvisoriamente

$$\mathrm{K}\equiv \mathrm{P}_b...\,,\quad \mathrm{R}\equiv \mathrm{P}_b..\mathrm{P}_c..\,,\quad \mathrm{R'}\equiv \mathrm{P}_b..\mathrm{P}_d..\,,$$
$$\mathrm{k}\equiv \mathrm{P}_f...\,,\quad \mathrm{r}\equiv \mathrm{P}_f..\mathrm{P}_g..\,,\quad \mathrm{r'}\equiv \mathrm{P}_f..\mathrm{P}_h...$$

Allora delle coordinate di R, R', r, r' le sole che non si annullino sono

$$x_{b..c..}\,,\quad y_{b..d..}\,,\quad \mathrm{X}_{f..g..}\,,\quad \mathrm{Y}_{f..h..}\,,$$

ciascuna delle quali vale 1; sicchè la funzione quadrilineare richiesta si ridurrà al coefficiente del termine in cui si trovano moltiplicate coteste quattro coordinate. Ma d'altra parte è facile ottenere questo valore ridotto introducendo le fatte ipotesi nel numeratore della (6), il quale allora diviene

$$\Sigma\pm a_{bf}...\,\Sigma\pm a_{bf}...\,a_{eg}...\,a_{dh}..\,=\,a_{b..,f..}\,a_{b..c..d..,f..g..h..}\,.$$

Sarà dunque

$$a_{b..,f..}\,a_{b..c..d..,f..g..h..}\,x_{b..c..}\,y_{b..d..}\,\mathrm{X}_{f..g..}\,\mathrm{Y}_{f..h..}$$

il termine generale della funzione richiesta.

Per compiere la dimostrazione della (5), si osservi che nella distribuzione degl'indici di questo termine generale nulla vieta di supporre che i gruppi $b..$ e $f..$ non presentino inversioni, come pure $c..$ e $g..$, $d..$ e $h..$.

Con analogo procedimento si dimostra la seguente relazione anche più generale delle (1),..., (4), e nella quale S_ν ha il significato esposto nel § XVIII:

$$(7) \qquad S_\nu = \omega \Sigma a_{b..c..,f..g..} a_{b..d..e..,f..h..i..} x_{b..e..d..} y_{b..e..} x_{f..g..h..} y_{f..i..};$$

qui $b..c..d..e..$, $f..g..h..i..$ sono disposizioni della classe $k + (\rho - \nu) + [(r-k) - (\rho-\nu)] + (r'-k) = r + r' - k (\leqq n)$, e i gruppi parziali $b..$, $c..$, ... non presentano inversioni.

Una simile espressione per S'_ν.

L'espressione del comomento di R e R′ mediante le loro coordinate si deduce subito da quella del momento osservando che il comomento di R e R′ non è che il momento di R e di R_1, $(n-r')$punto conjugato di R′, che ha per coordinate [§ IX-(8)]

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial A(\overset{n-r'}{\eta}\overset{n-r'}{\eta})}{\partial \eta_{1..(n-r')}}, \ldots \right) \text{ ovvero } (\Sigma \alpha_{1..(n-r'),i...} \eta_{i...}, \ldots) \text{ od anche}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma a_{1..r',j...} y_{j...}, \ldots \right).$$

Se R *e* R′ *non hanno alcuna ortogonalità*, vale a dire se R e R_1 non hanno che un $(r-r')$punto comune, la (3) porgerà

$$(8) \qquad \mathrm{cm}^2(RR') = \omega \Sigma a_{b..,f..} a_{c..,p..} a_{g..,q..} x_{b..c..} y_{p..} x_{f..g..} y_{q..},$$

intendendo con $b..$ e $f..$, $c..$ e $g..$, $p..$ e $q..$ combinazioni degl'indici $1 \ldots n$ rispettivamente delle classi $r - r'$, r', r'; e con la condizione che i gruppi $b..$ e $f..$ non abbiano niun indice comune rispettivamente con $c..$ e $g...$

Quando $r' = r$, la (8) si riduce a

$$(9) \qquad \mathrm{cm}^2(RR') = \omega \left\{ \Sigma a_{c..,p..} x_{c..} y_{p..} \right\}^2,$$

$c..$ e $p..$ essendo combinazioni di $1 \ldots n$ a r a r.

Se R *e* R′ *sono l volte ortogonali*, vale a dire se R e R_1 hanno un l'punto comune (posto $l' = r - r' + l$), la (4) darà

$$(10) \qquad \mathrm{cm}^2(RR') =$$
$$\omega \Sigma a_{b..,f..} a_{c..d..,p..} a_{g..h..,q..} \alpha_{d...h..} x_{b..c..} y_{p..} x_{f..g..} y_{q..};$$

intendendo con $b..$ e $f..$, $c..$ e $g..$, $d..$ e $h..$, $p..$ e $q..$ combinazioni di $1 \ldots n$ delle classi $r - r' + l = l'$, $r' - l = r - l'$ $(= k + \rho)$, l, r' rispettivamente; ed avvertendo che $b..c..d..$ e $f..g..h..$ sono disposizioni della classe $r + l = r' + l'$ dei medesimi $1 \ldots n$.

Per calcolare poi i comomenti degli ordini inferiori servirà la formola seguente, in cui $S^{(\nu)}$ ha il significato stesso che nel § XIX:

$$(11) \qquad S^{(\nu)} =$$
$$\omega \Sigma a_{b..\beta..,f..\varphi..} a_{\beta..c..,p..} a_{\varphi..g..,q..} \alpha_{d...h..} x_{b..\beta..c..} y_{p..} x_{f..\varphi..g..} y_{q..};$$

qui $b..$ e $f..$, $\beta..$ e $\varphi..$, $c..$ e $g..$, $d..$ e $h..$, $p..$ e $q..$ sono combinazioni di $1 \ldots n$ delle rispettive classi $r - r' + l = l'$, $\rho - \nu$, $r' - l - \rho + \nu = r - l' - \rho + \nu = k + \nu$, l, r'; con la restrizione che $b..\beta..c..d..$ e $f..\varphi..g..h..$ siano disposizioni della classe $r + l = r' + l'$ di $1 \ldots n$.

In tutte le equazioni qui trovate è lecito mutare le coordinate ${}^{r}x, {}^{r}y, \ldots$ di R, R′,... nelle coordinate ${}^{n-r}\xi, {}^{n-r}\eta, \ldots$ de'medesimi considerati come multipiani; ovvero mutare la lettera x in ξ, la y in $\eta, \ldots$, a in α, α in a, considerando R, R′,... come un $r$piano, un r'piano,... Ci basti averlo accennato.

§ XXIII. Assoluti de' multipunti e de' multipiani.

Sia dalla (3) del § XVII, sia dalla (8) del § precedente, abbiamo per due $r$punti R, R′ di coordinate ${}^{r}x$ e ${}^{r}y$:

$$\mathrm{cm}^2(\mathrm{RR}') = \frac{\mathrm{A}^2({}^{r}x\,{}^{r}y)}{\mathrm{A}({}^{r}x\,{}^{r}x).\,\mathrm{A}({}^{r}y\,{}^{r}y)}\,.$$

Siamo quindi indotti ad assumere come *assoluto* dello spazio di $(n-r)r$ dimensioni che ha per elementi gli $r$punti del proposto spazio di $n-1$ dimensioni, l'insieme degli $\infty^{(n-r)r-1}$ $r$punti che soddisfanno alla equazione $\mathrm{A}({}^{r}x\,{}^{r}x)=0$; ed allora *il comomento di due r-punti* R, R′ *è eguale al coseno della distanza fra' due elementi* R, R′ *del detto spazio di* $(n-r)r$ *dimensioni*. Questo spazio non è che uno spazio parziale (e non di curvatura costante) rispetto ad uno spazio di $\binom{n}{r}-1$ dimensioni e di curvatura costante che abbia per assoluto

$$\mathrm{A}xx \equiv \Sigma a_{ij} \mathrm{X}_i \mathrm{X}_j = 0\,,$$

indicando con $\mathrm{X}_i, \ldots$ le coordinate omogenee (del tutto arbitrarie) di un elemento di esso spazio, e supponendo che facciano l'ufficio di indici i, j,... le combinazioni di $1, \ldots, n$ a r a r.

Analogamente, se ${}^{n-r}\xi$ e ${}^{n-r}\eta$ si riferiscono a R e R′ considerati come $(n-r)$piani, si ha

$$\mathrm{cm}^2(\mathrm{RR}') = \frac{\mathrm{A}^2({}^{n-r}\xi\,{}^{n-r}\eta)}{\mathrm{A}({}^{n-r}\xi\,{}^{n-r}\xi).\,\mathrm{A}({}^{n-r}\eta\,{}^{n-r}\eta)}\,,$$

e

$$\mathrm{A}({}^{n-r}\xi\,{}^{n-r}\xi) = \mathrm{A}({}^{r}x\,{}^{r}x)\,.$$

Assumeremo quindi come assoluto dello spazio di $(n-r)r$ dimensioni, considerato come composto di $(n-r)$piani, $\mathrm{A}({}^{n-r}\xi\,{}^{n-r}\xi)=0$. Questo spazio sarà parziale rispetto a uno spazio di $\binom{n}{r}-1$ dimensioni che abbia per assoluto

$$\mathrm{A}\Xi\Xi \equiv \Sigma \alpha_{pq} \Xi_p \Xi_q = 0\,,$$

ove $\Xi_p, \ldots$ indicano le coordinate di un elemento, e si suppone che facciano da indici p, q,... le combinazioni di $1, \ldots, n$ a $n-r$ a $n-r$.

I due spazî di $\binom{n}{r}-1$ dimensioni qui accennati si possono identificare stabilendo fra le Ξ e le X le stesse relazioni che sussistono tra le ${}^{n-r}\xi$ e le ${}^{r}x$ [§§ VII - (2) e VIII - (*)], cioè ponendo

$$\mathrm{X}_{ij\ldots} : \Xi_{kl\ldots} \equiv \sqrt{\alpha} = 1 : \sqrt{a}\,,$$

ove $ij..\,kl..$ è una permutazione pari di $1 \ldots n$; ecc. Infatti allora risulta

$$\mathrm{A}xx = \mathrm{A}\Xi\Xi\,.$$

Fu già detto che appartengono all'assoluto dei punti quei punti pe'quali $\mathrm{A}_{xx}=0$, e che quindi possono ritenersi come ortogonali a se stessi (*autortogonali*), e cadono ne'piani rispettivamente conjugati (§§ IX e X). Similmente appartengono all'assoluto de'piani

quei piani pe'quali $A_{\xi\xi}=0$, e che quindi sono ortogonali a se stessi, e passano per i punti rispettivamente conjugati. E se un punto appartiene all'assoluto de'punti, il piano conjugato apparterrà all'assoluto de'piani; e viceversa.

Appartengono all'assoluto degli $r$punti quegli $r$punti R pe'quali $A(\overset{r}{x}\overset{r}{x})=0$. Or questa equazione equivale all'altra

$$\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots = 0$$

se $x, x', \ldots$ sono r punti individuanti R; e questa a sua volta esprime l'annullarsi del discriminante della equazione (3) del § X:

$$A_{xx}\lambda^2 + \ldots + 2A_{xx'}\lambda\lambda' + \ldots = 0$$

ovvero

$$A(\lambda x + \lambda' x' + \ldots, \quad \lambda x + \lambda' x' + \ldots) = 0;$$

la quale ci servì per determinare quali punti $\lambda x + \lambda' x' + \ldots$ di R appartengano all'assoluto de'punti. Or l'annullarsi del discriminante è la condizione per la coesistenza delle equazioni derivate della precedente:

$$A(x, \lambda x + \lambda' x' + \ldots) = 0, \quad A(x', \lambda x + \lambda' x' + \ldots) = 0, \ldots;$$

le quali esprimono l'ortogonalità del punto $\lambda x + \lambda' x' + \ldots$ a $x, x', \ldots$ e quindi a tutto R, e individuano questo punto. Dunque *l'assoluto degli r-punti consta di quegli* $\infty^{(n-r)r-1}$ *r-punti, ciascuno de' quali contiene un punto ortogonale a tutto l'r-punto, ovvero ha un punto comune con l'*$(n-r)$*punto conjugato.* Questo punto appartiene all'assoluto de' punti, ed è ortogonale altresì a tutto l'$(n-r)$punto, il quale per conseguenza appartiene all'assoluto degli $(n-r)$punti. Dunque, *se un r-punto appartiene all'assoluto degli r-punti, l'*$(n-r)$*punto conjugato apparterrà all'assoluto degli* $(n-r)$*punti.*

In particolare, l'assoluto delle rette è costituito da quelle rette che hanno comuni con l'assoluto dei punti due punti coincidenti, cioè dalle rette *tangenti* all'assoluto de'punti (§ X). Il punto di contatto è ortogonale a tutta la retta, è comune al bipiano ad essa conjugato, ed è ortogonale a questo bipiano, il quale fa parte dell'assoluto de'bipiani. E così via.

Quando un $r$punto R ($r>3$) appartiene all'assoluto degli $r$punti, quei suoi punti che stanno sull'assoluto de' punti si trovano distribuiti sopra ∞^{r-3} rette passanti pel punto X ortogonale a R in R; poichè, se X' è uno di tali punti, si ha $A_{XX}=0$, $A_{X'X'}=0$, $A_{XX'}=0$, onde $A(\lambda X+\lambda' X', \lambda X+\lambda' X')=0$. In queste rette ogni punto è ortogonale alla retta su cui giace. Ogni altra retta condotta per X in R tocca in X l'assoluto dei punti, ovvero fa parte dell'assoluto delle rette. Così pure un tripunto,..., che passi per X e stia in R, fa parte dell'assoluto de'tripunti,...

Un tripunto ($r=3$) che appartenga all'assoluto de'tripunti ha comuni con l'assoluto de'punti due sole rette.

Per le esposte proprietà un $r$punto che appartenga all'assoluto degli $r$punti si può chiamare *tangente* all'assoluto (si sottintende: de'punti) in quello fra' suoi punti che è ortogonale a tutti gli altri.

Per ogni punto X dell'assoluto passa un piano tangente ivi; il quale ha comune con l'assoluto ∞^{n-4} rette (due sole se $n=4$), che sono tutte le rette esistenti nell'assoluto e passanti per X. E le rette, i tripunti,..., che passano per X e stanno nel piano, sono quelle rette, que'tripunti,... che toccano l'assoluto in X. Ciascuno di questi

tripunti,... è in generale individuato da due,... delle rette passanti per X e giacenti nell'assoluto.

Un νpunto tocchi l'assoluto in P e lo sechi in un altro punto P', e si consideri un $(n - \nu + r)$punto che tocchi l'assoluto in P' e passi per la retta PP'. I due multipunti hanno di comune un $r$punto, il quale passerà per la PP' ed avrà ortogonali P,P' e quindi tutti i punti della PP'; vale a dire sarà tangente all'assoluto *lungo* la retta PP'. E lo stesso dicasi dell'$(n - r)$punto conjugato.

Ancora: un νpunto tocchi l'assoluto lungo una retta PP' e lo sechi altrove in P'', e si consideri un $(n - \nu + r)$punto tangente all'assoluto in P'' e che passi per le rette P''P, P''P'. I due multipunti avranno in comune un $r$punto, il quale toccherà l'assoluto *lungo* tutto il tripunto PP'P''; e così anche l'$(n - r)$punto conjugato —

Così proseguendo si constata l'esistenza di multipunti tangenti all'assoluto, non in un sol punto, ma lungo un intero multipunto; ovvero di multipunti aventi un bipunto, tripunto,... in comune co'loro conjugati.

Per tali multipunti sono nulli i minori d'ordine $r - m + 1$ del determinante $\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots$, supposto che il contatto avvenga lungo un $m$punto. Ciò equivale a m condizioni distinte, e riduce le n equazioni derivate di cui sopra a $n - m$ distinte, che saranno le $n - m$ equazioni dell'$m$punto.

È bene notare che m non può sorpassare il più piccolo de'due numeri, $r, n - r$.

Tutto ciò che precede si applica letteralmente a'multipiani, scambiando i punti con i piani. Ed è chiaro che se un $r$punto appartiene all'assoluto degli $r$punti, considerato come $(n - r)$piano apparterrà all'assoluto degli $(n - r)$piani.

§ XXIV. Ampiezza di un multipunto. — Teoremi relativi alle ampiezze.

Adotteremo le seguenti abbreviature:

1.° Dati r punti $x, x', \ldots$, il determinante

$$\Sigma \pm \cos(xx) \cos(x'x') \ldots \quad \text{ovvero} \quad \frac{\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \ldots}{A_{xx} A_{x'x'} \ldots}$$

sarà denotato da

$$\operatorname{sen}^2(xx' \ldots).$$

Questa notazione è una estensione della relazione [§ X - (2)]

$$\operatorname{sen}^2(xx') = \Sigma \pm \cos(xx) \cos(x'x') = \frac{\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'}}{A_{xx} A_{x'x'}},$$

e quindi la quantità $(xx' \ldots)$ può venir definita come *ampiezza* del gruppo di punti $x, x', \ldots$

Si avverta che, se gli r punti appartengono a uno stesso $(r - 1)$punto, o se il numero de'punti eccede n, $\operatorname{sen}^2(xx' \ldots)$ è nullo [§ IX - (5)]; e se il punto è un solo, $\operatorname{sen}^2(x)$ va ritenuto equivalente all'unità.

2.° Più generalmente, se R, R', ... sono de'multipunti, porremo

$$\operatorname{sen}^2(RR' \ldots) = \Sigma \pm \operatorname{cm}(RR) \operatorname{cm}(R'R') \ldots$$

Qui bisogna ricordare che i comomenti talora si riducono a semplici coseni; per es. quando R,... sono de'piani.

Ciò premesso, con l'aiuto delle formole esposte ne'§§ XVI e XVII, è facile dimostrare le seguenti relazioni:

1.° *Se* $x, x', \ldots$ *e* $y, y', \ldots$ *sono due gruppi di altrettanti punti, si ha*

$$\operatorname{sen}(xx'\ldots)\operatorname{sen}(yy'\ldots)\operatorname{cm}(xx'\ldots, yy'\ldots) = \Sigma \pm \cos(xy)\cos(x'y')\ldots = \frac{\Sigma \pm A_{xy}A_{x'y'}\ldots}{\left\{A_{xx}\ldots A_{yy}\ldots\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

dove $xx'\ldots$ indica il multipunto individuato da $x, x', \ldots$, ecc.

In particolare

$$\operatorname{sen}(xx'..x^{(n-1)})\operatorname{sen}(yy'..y^{(n-1)}) = \Sigma \pm \cos(xy)\cos(x'y')\ldots\cos(x^{(n-1)}y^{(n-1)}).$$

2.° *Dati* r *punti* $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$, *e spartitili in tre gruppi* $(x, x', .., x^{(k-1)})$, $(x^{(k)}, \ldots, x^{(s-1)})$, $(x^{(s)}, \ldots, x^{(r-1)})$, *si ha*

$$\operatorname{sen}(x\ldots x^{(r-1)}) = \frac{\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)}x^{(k)}..x^{(s-1)})\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)}x^{(s)}..x^{(r-1)})\operatorname{m}(x..x^{(k-1)}x^{(k)}..x^{(s-1)}, x..x^{(k-1)}x^{(s)}..x^{(r-1)})}{\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)})}$$

E in particolare

$$\operatorname{sen}(x..x^{(r-1)}) = \operatorname{sen}(x, x'..x^{(r-1)})\operatorname{sen}(x'..x^{(r-1)}) = \ldots. = \operatorname{sen}(x, x'..x^{(r-1)})\operatorname{sen}(x', x''..x^{(r-1)})\ldots.\operatorname{sen}(x^{(r-2)}, x^{(r-1)}).$$

Si ha pure

$$\operatorname{sen}(x..x^{(r-1)}) = \operatorname{sen}(x..x^{(k-1)})\operatorname{sen}(x^{(k)}..x^{(r-1)})\operatorname{m}(x..x^{(k-1)}, x^{(k)}..x^{(r-1)})$$

3.° *Dati* r *punti* $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$; *se ne scelgano* k $x, x', \ldots, x^{(k-1)}$, *e gli altri si combinino ad* s *ad* s, *e sieno* $x^k.., x^l.., \ldots$ *tali combinazioni; sarà*

$$\operatorname{sen}^{\binom{r-k-1}{s-1}}(x..x^{(r-1)}) = \frac{\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)}x^{(k)}..)\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)}x^{(l)}..)\ldots\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)}x^{(k)}.., x..x^{(k-1)}x^{(l)}.., \ldots)}{\operatorname{sen}^{\binom{r-k-1}{s}}(x..x^{(k-1)})}.$$

Questa relazione si dimostra osservando che il quadrato del numeratore, stante il significato de'suoi fattori e la proposizione 1.ª, può trasformarsi nel determinante di determinanti

$$\Sigma \pm \left\{\Sigma \pm \cos(xx)..\cos(x^{(k-1)}x^{(k-1)})\cos(x^{(k)}x^{(k)})..\right\}\left\{\Sigma \pm \cos(xx)..\cos(x^{(k-1)}x^{(k-1)})\cos(x^{(l)}x^{(l)})..\right\}\ldots,$$

il quale si forma dal determinante

$$\Sigma \pm \cos(xx)..\cos(x^{(k-1)}x^{(k-1)})..\cos(x^{(r-1)}x^{(r-1)}) = \operatorname{sen}^2(x\ldots x^{(r-1)})$$

sopprimendovi ciascuna volta $r-k-s$ orizzontali e verticali scelte sempre fra le ultime $r-k$, e quindi (1) è eguale alla potenza $\binom{r-k-1}{r-k-s}^{\text{ma}}$ o $\binom{r-k-1}{s-1}^{\text{ma}}$ di

(1) « Il determinante che ha per elementi i minori di ordine $r-\mu$ ricavati da un dato determinante d'ordine r col sopprimervi ciascuna volta μ orizzontali e μ verticali, scelte comunque fra λ orizzontali e λ verticali assegnate, è eguale alla potenza $\binom{\lambda-1}{\mu}^{\text{ma}}$ del dato determinante moltiplicata per la potenza $\binom{\lambda-1}{\mu-1}^{\text{ma}}$ del minore ricavato dal medesimo sopprimendovi le λ orizzontali e λ verticali assegnate». — Veggasi la mia Nota *su' determinanti di determinanti* già citata.

questo determinante moltiplicata per la potenza $\binom{r-k-1}{r-k-s-1}^{\text{ma}}$ o $\binom{r-k-1}{s}^{\text{ma}}$

del minore

$$\Sigma \pm \cos(xx')..\cos(x^{(k-1)}x^{(k-1)}) = \operatorname{sen}^2(x..x^{(k-1)}).$$

In particolare, per $k=1$ si ottiene *la proporzionalità fra il seno di ciascuno de' gruppi*

$$x'..x^{(r-1)},\ xx''..x^{(r-1)},\ \ldots,\ xx'..x^{(r-2)}$$

e il seno del gruppo di $(r-1)$*punti individuati da' rimanenti gruppi di punti*, cioè

$$\operatorname{sen}(x'..x^{r-1}) : \operatorname{sen}(xx''..x^{r-1},\ldots,xx'..x^{r-2}) = \ldots.$$

4.° Più generalmente, *dati altri r punti* $y, y', \ldots, y^{(r-1)}$ *e spartitili in gruppi come gli* $x, \ldots$ *nella proposizione precedente, si ha*

$$\operatorname{cm}^{\binom{r-k-1}{s}}(x..x^{(k-1)}, y..y^{(k-1)})\ \operatorname{cm}^{\binom{r-k-1}{s-1}}(x..x^{(r-1)}, y..y^{(r-1)}).$$
$$.\operatorname{sen}(x..x^{(k-1)}x^{(k)}.., x..x^{(k-1)}x^{(l)}.., \ldots)\operatorname{sen}(y..y^{(k-1)}y^{(k)}.., y..y^{(k-1)}y^{(l)}.., \ldots)$$
$$= \sum \pm \operatorname{cm}(x..x^{(k-1)}x^{(k)}.., y..y^{(k-1)}y^{(k)}..)\operatorname{cm}(x..x^{(k-1)}x^{(l)}.., y..y^{(k-1)}y^{(l)}..)....$$

Analoga dimostrazione.

5.° *Se r punti* $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ *individuanti un r-punto* R *si projettino sopra un s-punto* S $(r \leqq s)$ *in* $z, z', \ldots, z^{(r-1)}$, *sarà*

$$\frac{\operatorname{sen}(z..z^{(r-1)})}{\operatorname{sen}(x..x^{(r-1)})} = \frac{\operatorname{cm}(RS)}{\cos(xz)\ldots\cos(x^{(r-1)}z^{(r-1)})}.$$

Infatti osserviamo che le rette $xz, \ldots$ incontrano l'$(n-s)$punto S_1 conjugato di S ne' punti $u, u', \ldots$ projezioni di $x, x', \ldots$ su S_1 (§ XIV); che le distanze $(zu), \ldots$ sono eguali a $\frac{\pi}{2}$; che (zz'), (uu') sono le distanze fra le rette $zu, z'u'$ (§ XV); e così via.

Ciò posto, si ha (2.°, terza eq.ᵉ)

$$(*)\quad \begin{aligned} &\operatorname{sen}(x..)\operatorname{sen}(u..)\operatorname{m}(RS_1) = \operatorname{sen}(xu)\operatorname{sen}(x'u'...)\operatorname{m}(xu, x'u'...) = \ldots. \\ &= \operatorname{sen}(xu)\operatorname{sen}(x'u')...\operatorname{m}(xu, x'u'...)\operatorname{m}(x'u', x''u''...)...; \end{aligned}$$

e poichè (§ XV)

$$\begin{aligned} &\operatorname{m}(RS_1) = \operatorname{cm}(RS),\ \operatorname{sen}(xu) = \cos(xz), \ldots, \\ &\operatorname{m}(xu, x'u'...) = \operatorname{sen}(z, z'...)\operatorname{sen}(u, u'...), \ldots, \\ &\operatorname{sen}(z...) = \operatorname{sen}(z, z'...)\operatorname{sen}(z', z''...)..., \\ &\operatorname{sen}(u...) = \operatorname{sen}(u, u'...)\operatorname{sen}(u', u''...)...; \end{aligned}$$

risulterà dalla (*)

$$\operatorname{sen}(x...)\operatorname{sen}(u...)\operatorname{cm}(RS) = \cos(xz)...\operatorname{sen}(z...)\operatorname{sen}(u...),$$

onde la relazione da dimostrarsi.

N. B. Tutte le proposizioni qui enunciate sussistono, senz'altra modificazione che nel significato de' simboli, anche per piani e multipiani, con perfetta dualità.

§ XXV. Significato metrico delle coordinate di multipunti e multipiani.

Gli n punti (cfr. § XXII)

$$P_1(1,0,0,...),\quad P_2(0,1,0,...),...$$

hanno una speciale importanza nella determinazione degli altri punti del proposto

spazio di $n-1$ dimensioni, e però denomineremo *fondamentali* essi punti, non che le rette, i tripunti,... da essi individuati.

La (2) del § XXII, applicata a un $r$punto R di coordinate $(x_{1..r}, ...)$ e ad un $(n-r)$punto fondamentale $P_{c..}$ (in cui $c..$ sia una disposizione della classe $n-r$ di $1...n$), visto che la sola coordinata di $P_{c..}$ che non si annulli è quella d'indici $c..$ e vale 1, si riduce a

$$m^2(R, P_{c..}) = \frac{a x^2_{b..}}{A(\overset{r}{x}\overset{r}{x})\, a_{c...c..}},$$

dove $b..\,c..$ è una permutazione pari di $1...n$; e se ne trae

$$(1) \qquad \frac{x_{b...}}{\sqrt{A(\overset{r}{x}\overset{r}{x})}} = \sqrt{\alpha_{b..,b..}}\, m(R, P_{c..}).$$

Adunque *le coordinate dell' r-punto* R *sono proporzionali a' momenti di* P *rispetto agli* $(n-r)$*punti fondamentali* $P_{c..}$, *moltiplicati per le radici quadrate de'coefficienti dell' assoluto degli r-piani* $\alpha_{b..,b..}$, od anche de' coefficienti dell'assoluto degli $(n-r)$punti $a_{c..,c..}$

Analogamente, se S è un $r$piano di coordinate $(\xi_{1..r}, ...)$, si ha

$$(2) \qquad \frac{\xi_{b..}}{\sqrt{A(\overset{r}{\xi}\overset{r}{\xi})}} = \sqrt{a_{b..,b..}}\, m(R, P_{b..}).$$

Con l'aiuto della (1) si potrebbero esprimere i momenti e comomenti di due multipunti in funzione de'loro momenti rispetto a'multipunti fondamentali. Per es., applicando la (1) alla (1) del § XXII, questa diviene

$$m^2(RR') = \sum a_{c..d..,g..h..} \sqrt{\alpha_{c..,c..}\alpha_{d..,d..}\alpha_{g..,g..}\alpha_{h..,h..}}\, m(R\, P_{d..e..})\, m(R'\, P_{c..e..}) \cdot m(R\, P_{h..i..})\, m(R'\, P_{g..i..});$$

ove $c..d..e..$ e $g..h..i..$ sono quelle permutazioni di $1,...n$ in cui i primi r $c..$ e $d..$, i seguenti r' $g..$ ed $h..$, e i rimanenti $n-r-r'$ $e..$ ed $i..$ non presentano inversioni. Ma si ha dalla (3) del § XVII

$$cm^2(P_{d..e..}\, P_{h..i..}) = \frac{a^2_{d..e..,h..i..}}{a_{d..e..,d..e..}\, a_{h..i...h..i..}} = \frac{\alpha^2_{c..,g..}}{\alpha_{c...c..}\, \alpha_{g...g..}}, \ldots;$$

dunque risulterà

$$(3) \quad m^2(RR') = \sum \frac{1}{\alpha}\, \alpha_{c...g..}\alpha_{d...h..}\alpha_{e...i..} \frac{m(RP_{d..e..})m(R'P_{c..e..})m(RP_{h..i..})m(R'P_{g..i..})}{cm(P_{c..e..}P_{g..i..})cm(P_{d..e..}P_{h..i..})}.$$

Qui R e R′ sono un $r$punto e un r'-punto senza punti comuni, $r+r'<n$, e gli indici sono distribuiti come abbiamo accennato.

Ancora, se R e R′ sono due $r$punti, applicando la (1) alla (9) del § XXII, si trova

$$(4) \qquad cm(RR') = \sum a_{c...g..}\, \alpha_{c..\,g..} \frac{m(RP_{c..})\, m(R'P_{g..})}{cm(P_{c..}P_{g..})},$$

indicando con $c..$ e $g..$ le combinazioni di $1...n$ della classe $n-r$.

Questa relazione può ricevere l'altra forma

$$(4)' \qquad sen^2(P_1..P_n)\, cm(RR') =$$
$$\sum sen(P_{l..})\, sen(P_{c..})\, sen(P_{f..})\, sen(P_{g..})\, cm(P_{b..}P_{f..})\, m(RP_{c..})\, m(R'P_{g..});$$

se $b..\,c..$, $f..\,g..$ sono permutazioni pari di $1...n$, in cui $b..$ e $g..$ non diano inversioni, e $b..$ e $f..$ il meno possibile.

Facendo coincidere R′ con R, la (4) diviene

$$1 = \sum a_{c..,g..}\,\alpha_{c..,g..}\,\frac{\mathrm{m}(\mathrm{RP}_{c..})\,\mathrm{m}(\mathrm{RP}_{g..})}{\mathrm{cm}(\mathrm{P}_{c..}\,\mathrm{P}_{g..})}, \tag{5}$$

e si ha così *una relazione non omogenea fra i momenti di un qualunque r-punto* R *rispetto agli* $(n-r)$*punti fondamentali.* Un'altra forma della stessa relazione si ottiene dalla (4)′.

Delle relazioni omogenee fra cotesti momenti si potrebbero ricavare da quelle trovate nel § VII fra le coordinate di un multipunto; ma ci dispensiamo dal trascriverle.

Il suesposto significato delle coordinate di un multipunto ci abilita a trovare *le formole per la trasformazione delle coordinate.* Siano

$$\mathrm{Q}_1(y'_1, \ldots), \quad \mathrm{Q}_2(y''_1, \ldots), \ldots$$

gli n punti che vogliamo assumere come fondamentali in luogo di $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$; siano $\mathrm{Q}_{c..}$ gli $(n-r)$punti individuati da $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots$ e $(y^{(c\cdots)}{}_{1..(n-r)}, \ldots)$ le rispettive coordinate; e un $r$punto R abbia per coordinate $(x_{1..r}, \ldots)$ rispetto a $\mathrm{P}_1, \ldots$ e $(\mathrm{X}_{1..r}, \ldots)$ rispetto a $\mathrm{Q}_1, \ldots$ Allora la (1) porgerà

$$\mathrm{X}_{b..} = \sqrt{\mathrm{A}(\overset{r\ r}{xx}).\alpha.\mathrm{A}(y^{(c\cdots)}, y^{(c\cdots)})}.\mathrm{m}(\mathrm{R}, \mathrm{Q}_{c..});$$

ma dalla (2) del § XXII si trae

$$\mathrm{m}^2(\mathrm{R}, \mathrm{Q}_{c..}) = \frac{a}{\mathrm{A}(\overset{r\ r}{xx})\,\mathrm{A}(y^{(c\cdots)}\,y^{(c\cdots)})}\left\{\sum_{p..q..} x_{p..}\,y^{(c\cdots)}{}_{q..}\right\}^2,$$

indicando con $p..\ q..$ quelle permutazioni pari di $1 \ldots n$ in cui $p..$ non presenta inversioni e $q..$ ne presenta il meno possibile (o viceversa). Dunque avremo in fine

$$\mathrm{X}_{b..} = \sum_{p..q..} x_{p..}\,y^{(c\cdots)}{}_{q..}. \tag{6}$$

Dal sistema di equazioni del tipo (6) si può ricavare l'espressione delle primitive coordinate $(x_{1..r}, \ldots)$ di R in funzione delle nuove $(\mathrm{X}_{1..r}, \ldots)$.

Allo stesso modo, se $\eta^{(c\cdots)}$ si riferisce all'$(n-r)$piano $\mathrm{Q}_{b..}$, abbiamo

$$\Xi_{b..} = \sum \xi_{p..}\,\eta^{(c\cdots)}{}_{q..} \tag{7}$$

Una delle più notevoli trasformazioni di coordinate è quella in cui i nuovi punti fondamentali $\mathrm{Q}_1, \ldots$ si suppongono conjugati de'primitivi piani fondamentali $\mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n, \ldots$ (e quindi viceversa). I piani $\mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n, \ldots$ hanno per coordinate rispettive $(1, 0, 0, \ldots), \ldots$, e i punti $\mathrm{Q}_1, \ldots$ [§ IX - (1)]

$$\mathrm{Q}_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha_{11}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha_{12}, \ldots\right), \quad \mathrm{Q}_2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha_{21}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha_{22}, \ldots\right), \ldots;$$

l'$r$punto $\mathrm{P}_{b..}$ ha le coordinate nulle, tranne quella d'indice $b..$ che vale $1, \ldots$; e l'$(n-r)$punto $\mathrm{Q}_{c...}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha_{c..,(r+1)..n}, \ldots\right) \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{a}}a_{b..,1..r}, \ldots\right).$$

Per conseguenza

$$\mathrm{X}_{b..} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{p..} x_{p..}\,a_{b..,p..} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial \mathrm{A}(\overset{r\ r}{xx})}{\partial x_{b..}},$$

ovvero

$$\mathrm{X}_{b..} = \frac{1}{\sqrt{a}}\overset{r}{\xi}_{b..}$$

dove $\overset{r}{\xi}_{b..}$ si riferisce all'$r$piano conjugato di R.

Nel proposto spazio di $n-1$ dimensioni esistono (§ XI) $\infty^{\binom{n}{2}}$ gruppi di n punti mutuamente ortogonali, tali cioè che ciascuno abbia per conjugato il piano individuato dagli altri $n-1$. Quando si assumono come fondamentali i punti di un gruppo cosiffatto, è chiaro che A_{xx} deve ridursi alla forma canonica; e posto

$$A_{xx} \equiv \sum a_i x^2{}_i,$$

sarà

$$A_{\xi\xi} \equiv \sum \frac{1}{a_i} \xi^2{}_i,$$

$$A(\overset{r}{x}\overset{r}{x}) = \sum a_i a_j .. x^2{}_{ij..}, \quad A(\overset{r}{\xi}\overset{r}{\xi}) = \sum \frac{1}{a_i a_j ..} \xi^2{}_{ij..}.$$

Allora tutte le formole esposte in questo paragrafo e ne' precedenti divengono più semplici, come è facile verificare.

§ XXVI. Multipunti paralleli.

Vogliamo ora dar qualche cenno del parallelismo de' multipunti.

Un $r$punto R e un r'punto R′ si dicono *paralleli* quando hanno un $k$punto K comune ($k=1, 2, ...$) e questo K appartiene all'assoluto de'$k$punti, ossia tocca l'assoluto de'punti. Allora K contiene un punto X ortogonale a tutto K, il quale X appartiene anche all'$(n-k)$punto K_0 conjugato di K e fa ivi lo stesso ufficio. In K_0 sono contenuti l'$(n-r)$punto R_0 conjugato di R e l'$(n-r')$punto R_1 conjugato di R′. E: 1° R_0, R_1 non han punti comuni se $r+r'=n+k$; 2.°ma hanno un $(n+k-r-r')$punto K_1 comune se $r+r'=n+k$. Questo K_1 è conjugato dell'$(r+r'-k)$punto K′ in cui son contenuti R e R′.

Nel 1° caso ($r+r'=n+k$), esiste (§ IV-2°) una retta che passi per X e sechi R_0 e R_1 in punti distinti. Questa retta è appunto una di quelle perpendicolari comuni a R, R′, R_0 e R_1 su cui son contate le varie distanze fra R e R′ (o R_0 e R_1), benchè sechi R e R′ nello stesso punto X; poichè X soddisfa alla condizione di essere ortogonale a K. La distanza contata sulla retta di cui è parola sarà nulla, e quindi sarà nullo il momento di R e R′ (1). I momenti di ordine inferiore non patiranno modificazioni, ma nel comporli sarà inutile includere la detta distanza evanescente, il cui seno è nullo. Così, il prodotto de' seni quadrati delle distanze superstiti sarà espresso da $S_{\rho-1}$ (§ XVIII).

È del pari inutile tener conto della distanza evanescente nella composizione del comomento di R e R′, visto che il suo coseno è eguale all'unità. Ma non così ne'comomenti di ordine inferiore, nella composizione de' quali essa va considerata. Si può tuttavia escluderla modificando la (1) del § XIX come segue:

$$\Gamma^2{}_\nu = S^{(\nu+1)} - \binom{k+1}{1} S^{(\nu+2)} + \binom{k+2}{2} S^{(\nu+3)} - + \ldots \pm \binom{k+\rho-\nu-1}{\rho-\nu-1} S^{(\rho)},$$

dove $\Gamma^2{}_\nu$ è la somma de' prodotti a ν a ν de' coseni quadrati delle distanze superstiti.

(1) Si verifica questo fatto osservando la (1) del § XVI, la quale dà $m(RR')=0$ perchè $\Sigma \pm A_{zz..}=0$ nel caso attuale.

Nel 2° caso poi ($r+r'<n+k$), esisteranno (§ IV-2°) infinite rette passanti per X e secanti R_0 e R_1 in punti distinti; ma è facile assicurarsi che una sola fra queste secherà R_0 e R_1 in punti ortogonali al loro $(n+k-r-r')$punto comune K_1 [1]; e per conseguenza si rientra nel 1° caso.

Fra due multipunti posson darsi anche de'parallelismi di varî ordini, superiori a quello del caso testè accennato. Un $r$punto R e un r'punto R′ si diranno *m volte paralleli* quando hanno comune un $k$punto K il quale tocchi l'assoluto de'punti secondo un $m$punto M, vale a dire appartenga all'assoluto de'$k$punti e contenga un $m$punto M perfettamente ortogonale a esso K (§ XXIII). Allora K_0 passa per M, e per ogni punto di M si può condurre una retta che sechi R_0 e R_1 in punti distinti e sia ortogonale all'intersezione K_1 di R_0 e R_1 (quando c'è); ma pure di tali rette m soltanto sono da annoverare fra quelle sulle quali si contano le distanze fra R e R′; poichè è evidente che basta supporre vi siano m rette perpendicolari a R,R′,R_0 e R_1, ma secanti R_0,R_1 in punti distinti e R, R′ in punti di K, per concludere che questi punti sono ortogonali a K e quindi individuano in K un $m$punto M perfettamente ortogonale a K, secondo la ipotesi. Per conseguenza m delle ρ distanze fra R e R′ svaniranno [2], e con esse i momenti degli ordini più alti sino al $(\rho-m+1)$.mo [3], mentre il $(\rho-m)$.mo darà il prodotto de' seni delle distanze superstiti e si ridurrà a $\sqrt{S_{\rho-m}}$. Quanto a' comomenti, il più alto si ridurrà al prodotto de' coseni delle distanze superstiti, e la somma Γ^2_ν de prodotti a ν a ν de' coseni quadrati delle distanze superstiti sarà espressa da

$$\Gamma^2_\nu = S^{(\nu+m)} - \binom{k+m}{1} S^{(\nu+m+1)} + \binom{k+m+1}{2} S^{(\nu+m+2)} - + \ldots.$$

Quando i due multipunti R, R′ sono m volte paralleli ($m = 1, 2, \ldots, k$), i loro conjugati R_0 e R_1 son contenuti in un $(n-k)$punto K_0, il quale, come K, tocca l'assoluto lungo l'$m$punto M. Delle distanze fra R_0 e R_1 m si annullano, come per R e R′; e così via. Diremo *antiparalleli m volte* due multipunti i quali compongano un multipunto tangente all'assoluto lungo un $m$punto. Ed è chiaro che, se due

(1) Infatti risulta dal citato § IV-2° che il punto d'incontro di R_0 con una delle rette in questione sarà $\lambda' z' + .. + \lambda^{(n-r)} z^{(n-r)} + X'$, dove $z', \ldots$ individuano K′. Ora affinchè questo punto sia ortogonale a $z', \ldots$ occorrono tante equazioni lineari

$$A(z', \lambda' z' + .. + X') = 0, \ldots.$$

quante son le λ; e però queste sono univocamente determinate.

O altrimenti. Una sola retta passa per X e seca l'$(r'-k)$punto e l'$(r-k)$punto che in R_0 e R_1 sono perfettamente ortogonali a K_1, visto che, mentre $(r'-k)+(r-k)<(r+r'-k)$, X si trova con l'$(r'-k)$punto e con l'$(r-k)$punto nello stesso $(r+r'-k)$punto K′ (§ IV-2°).

(2) Che le distanze si riducano a $\rho-m$, risulta anche dall'osservare che attualmente K_0 seca R e R′ in un $(r-k)$punto e in un $(r'-k)$punto aventi in comune M, e quindi le distanze fra questi $(r-k)$punto e $(r'-k)$punto (le quali sono appunto le distanze non evanescenti fra R e R′, giusta il § XII-4° e XIII-1°) sono $(r'-k)-m$ ossia $\rho-m$.

Ciò nella ipotesi che R e R′ non presentino ortogonalità; altrimenti (§ XIII-4°) bisognerà considerare solo le distanze fra due $(r'-k-l)$punti aventi M in comune, le quali saranno $(r'-k-l)-m=\rho-m$, come prima.

(3) Nel caso attuale sono nulli i minori d'ordine $k-m+1$ della matrice $\Sigma \pm A_{zz} A_{z'z'} \ldots$, ciò che equivale a m condizioni distinte.

multipunti sono m volte paralleli, i loro conjugati saranno m volte antiparalleli; e viceversa.

Osserviamo che, se R e R′ hanno in comune un $k$punto K tangente all'assoluto lungo un $m$punto M, allora gli stessi R e R′, considerati come multipiani, comporranno un $(n-k)$piano K, il quale sarà tangente all'assoluto de' piani lungo un $m$piano M_0 (il conjugato di M). Al tempo stesso R_0 e R_1, considerati come multipiani, avranno in comune un $k$piano K_0, tangente all'assoluto de'piani lungo M_0. Estendendo dunque le definizioni di parallelismo e antiparallelismo a' multipiani, col solo scambiare l'elemento *punto* nell'elemento *piano*, concludiamo che se due multipunti sono m volte paralleli o antiparalleli, considerati come multipiani saranno m volte antiparalleli o paralleli rispettivamente.

§ XXVII. Discussione del caso in cui $a = 0$.

La perfetta dualità che ha regnato in tutto ciò che abbiamo sin qui esposto fra l'elemento *punto* e l'elemento *piano*, non che tra le forme da essi costituite (multipunti e multipiani), cessa nella ipotesi che sia nullo il discriminante a dell'assoluto de' punti $A_{xx} = 0$ (ovvero quello α dell'assoluto de' piani $A_{\xi\xi} = 0$). Questo caso è importante, come quello che trova riscontro nello spazio *euclideo* di tre dimensioni; e merita perciò una particolare disamina.

Sia $a = 0$ (1). Allora *l'assoluto de'punti* $A_{xx} = 0$ *risulta costituito da un punto principale* X, le cui coordinate sono determinate ne' loro rapporti dalle n equazioni derivate di $A_{xx} = 0$:

$$\Sigma_i a_{1i} x_i = 0, \quad \Sigma_i a_{2i} x_i = 0, \ldots \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(le quali coesistono solo se $a = 0$), *e da altri* ∞^{n-2} *punti distribuiti sopra* ∞^{n-3} *rette uscenti dal punto* X (2).

Possiamo assumere, com'è noto, per coordinate di X le quantità

$$\left(\frac{\partial a}{\partial a_{11}}, \frac{\partial a}{\partial a_{12}}, \cdots\right)$$

o le loro proporzionali

$$\left(\frac{\partial a}{\partial a_{21}}, \frac{\partial a}{\partial a_{22}}, \cdots\right)$$

e così via; e poichè dall'accennata proporzionalità risulta

$$\left(\frac{\partial a}{\partial a_{ip}}\right)^2 = \frac{\partial a}{\partial a_{ii}} \cdot \frac{\partial a}{\partial a_{pp}} \quad (i, p = 1, \ldots, n).$$

potremo anche assumere invece

$$\left(\sqrt{\frac{\partial a}{\partial a_{11}}}, \sqrt{\frac{\partial a}{\partial a_{22}}}, \ldots\right),$$

(1) Nello spazio euclideo è $\alpha = 0$, e quindi per applicare ad esso quel che qui esponiamo bisognerà scambiare l'elemento *punto* con l'elemento *piano* (oltre a porre $n = 4$).

(2) Insomma l'assoluto de' punti si trova, quando $a = 0$, in condizioni analoghe al sistema de' punti che *in generale* un $r$punto tangente all'assoluto de' punti ha in comune con questo assoluto (cfr. § XXIII).

intendendo che i radicali portino i segni convenienti. Queste ultime si scrivono anche così:

$$(\sqrt{a_{2..n,2..n}},\quad \sqrt{a_{3..n1,3..n1}},\ldots).$$

Per vedere a che si riduca l'assoluto de' piani $A_{\xi\xi}=0$, osserviamo che, quando si supponga a diverso da zero, i sistemi di equazioni

$$\begin{aligned}&(\Sigma a_{1i}x_i=a,\quad \Sigma a_{2i}x_i=0,\quad \Sigma a_{3i}x_i=0,\ldots),\\ &(\Sigma a_{1i}x_i=0,\quad \Sigma a_{2i}x_i=a,\quad \Sigma a_{3i}x_i=0,\ldots),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

hanno rispettivamente per soluzioni

$$\left(\frac{\partial a}{\partial a_{11}},\ \frac{\partial a}{\partial a_{12}},\ldots\right),$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial a_{21}},\ \frac{\partial a}{\partial a_{22}},\ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Quando poi si fa tendere a verso zero, questi sistemi di soluzioni tendono a divenir proporzionali; sicchè in generale è lecito supporre

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ip}}=\sqrt{\frac{\partial a}{\partial a_{ii}}\cdot\frac{\partial a}{\partial a_{pp}}}+a\varepsilon_{ip}\ ,$$

indicando con ε_{ip} una quantità che non divenga infinita quando a va a zero. Avremo dunque

$$\begin{aligned}A_{\xi\xi}&=\Sigma\alpha_{ip}\xi_i\xi_p=\frac{1}{a}\Sigma\frac{\partial a}{\partial a_{ip}}\xi_i\xi_p\\ &=\frac{1}{a}\Sigma\sqrt{\frac{\partial a}{\partial a_{ii}}\frac{\partial a}{\partial a_{pp}}}\xi_i\xi_p+\Sigma\varepsilon_{ip}\xi_i\xi_p\\ &=\frac{1}{a}\left\{\Sigma\sqrt{\frac{\partial a}{\partial a_{ii}}}\xi_i\right\}^2+\Sigma\varepsilon_{ip}\xi_i\xi_p,\end{aligned}$$

ovvero

$$A_{\xi\xi}=\frac{1}{a}\left\{\Sigma\sqrt{a_{j..,j..}}\,\xi_i\right\}^2+\Sigma\varepsilon_{ip}\xi_i\xi_p,$$

dove $ij...$ indica le permutazioni circolari di $1...n$. Poichè $A_{\xi\xi}$ si compone di una parte moltiplicata pel fattore $\frac{1}{a}$ (che va all'infinito per $a=0$), e di una parte finita, non potrà essere $A_{\xi\xi}=0$ se non quando sia

$$\left\{\Sigma\sqrt{a_{j..,j..}}\,\xi_i\right\}^2=0.$$

Laonde l'assoluto de' piani sarà l'(n—1)piano costituito da tutti i piani soddisfacenti a questa equazione, vale a dire da tutti i piani passanti pel punto X; ma dovrà questo (n—1)piano esser contato due volte. Più brevemente, *l'assoluto de' piani si ridurrà a due volte il punto o* (n—1)*piano* X.

Il discriminante $\overset{\nu}{a}$ dell'assoluto de' νpunti (§ VIII)

$$A(\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x})=\sum a_{ij...pq..}x_{ij...}x_{pq...}=0$$

vale $a^{\binom{n-1}{\nu-1}}$, e quindi è nullo anch'esso. Inoltre, siccome per un teorema noto (1)

$$\frac{\partial(\overset{\nu}{a})}{\partial a_{ij\ldots pq\ldots}} = a^{\binom{n-1}{\nu-1}-1}\frac{\partial^\nu a}{\partial a_{ip}\partial a_{jq}\ldots} = a^{\binom{n-1}{\nu-1}-1}a_{kl\ldots,rs\ldots},$$

(*ij..kl..,pq..rs* permutazioni pari di 1...*n*); così riescono nulli anche i minori degli ordini più alti in $\overset{\nu}{a}$, e quindi non si possono applicare qui tutte le osservazioni fatte sopra A_{xx}.

Quanto all'assoluto de' νpiani, esso è

$$A\left(\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\xi}\right) = \frac{1}{a}\sum a_{kl\ldots,rs}\xi_{ij\ldots}\xi_{pq\ldots} = 0,$$

e però si compone di quei piani pe'quali

$$\sum a_{kl\ldots,rs\ldots}\xi_{ij\ldots}\xi_{pq\ldots} = 0.$$

Apparisce dalle precedenti considerazioni che le funzioni metriche de' punti e de'multipunti non soffrono, nel caso di cui ci occupiamo, alcuna sostanziale modificazione; ma non avviene lo stesso delle funzioni metriche di piani e multipiani, una volta che $A_{\xi\xi}, A^{\xi\xi}_{\xi\xi}, \ldots$ contengono il fattore infinito $\frac{1}{a}$. Per es. si trova, posto

$$\overset{2}{\xi}_{bc} = \xi_b\xi'_c - \xi_b'\xi_c$$

e supposto che a non sia ancora zero,

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\xi\xi')}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{A^{\xi\xi}_{\xi\xi}}{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'}} = \frac{\Sigma a_{d\ldots h\ldots}(\xi_b\xi'_c - \xi_c\xi'_b)(\xi_f\xi'_g - \xi_g\xi'_f)}{\left[\left\{\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi_b\right\}^2 + a\Sigma\varepsilon_{lf}\xi_b\xi_f\right]\left[\left\{\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi'_b\right\}^2 + a\Sigma\varepsilon_{bf}\xi_b\xi_f\right]}$$

denotando con *bcd..* e *fgh...* permutazioni pari di 1...*n*. Or quando a tende a zero, anche $\operatorname{sen}^2(\xi\xi')$, e quindi $(\xi\xi')$, tendono a zero. Tuttavia il rapporto $\frac{\operatorname{sen}^2(\xi\xi')}{a}$ tende allo stesso limite che $\frac{(\xi\xi')^2}{a}$; e però potremo assumere $\lim\frac{(\xi\xi')}{\sqrt{a}}$ come *angolo* dei piani ξ e ξ', tutte le volte che si tratterà di paragonare fra loro varî angoli. Indicando con $[\xi\xi']$ l'angolo così definito, avremo dunque

$$\left[\xi\xi'\right]^2 = \frac{\Sigma a_{d\ldots,h\ldots}(\xi_b\xi'_c - \xi_c\xi'_b)(\xi_f\xi'_g - \xi_g\xi'_f)}{\left\{\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi_b\cdot\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi'_b\right\}^2},$$

che è una funzione algebrica delle coordinate de' due piani.

(1) « Il determinante che ha per elementi i minori d'ordine μ ottenuti da un dato determinante d'ordine n prendendo gli elementi comuni a μ orizzontali e μ verticali, delle quali 0,1,..., $\mu-1$ appartengano a ν assegnate orizzontali e a ν assegnate verticali, è eguale alla potenza $\binom{n-1}{\mu-1}-\binom{\nu-1}{\mu-1}$ del dato determinante, moltiplicata per la potenza $\binom{\nu-1}{\mu-1}$ del minore ottenuto da esso sopprimendovi le assegnate ν orizzontali e ν verticali ». Cfr. la citata Nota *Su' determinanti di determinanti.*

Al modo stesso, quando si tratta di paragonare varî $r$piani, si può assumere come *ampiezza* di un $r$piano $\xi\xi'\ldots\xi^{(r-1)}$ la quantità $[\xi\xi'\ldots\xi^{(r-1)}]$ definita dalla

$$\left[\xi\xi'\ldots\right]^2=\left\{\lim\frac{(\xi\xi'\ldots)}{\underbrace{a^{\frac{r-1}{2}}}}\right\}^2=\lim\frac{\operatorname{sen}^2(\xi\xi'\ldots)}{a^{r-1}};$$

e quindi avremo

$$\left[\xi\xi'\ldots\right]^2=\frac{\sum a_{d\ldots h\ldots}(\Sigma\pm\xi_b\xi'_c\ldots)(\Sigma\pm\xi_f\xi'_g\ldots)}{\left\{\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi_b\cdot\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi'_b\ldots.\right\}^2}$$

dove *bc..d..* e *fg..h..* sono permutazioni pari di 1...n.

In particolare sarà

$$\left[\xi\xi'\ldots\xi^{(n-1)}\right]=\frac{\Sigma\pm\xi_b\xi'_c\ldots.}{\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi_b\cdot\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi'_b\ldots.}.$$

Nulla vietando di scegliere le coordinate di ciascun piano in guisa che, senz'alterazione de' mutui rapporti, esse verifichino la equazione

$$\Sigma\sqrt{a_{c\ldots,c\ldots}}\,\xi_b=1\ (^1);$$

le notate espressioni di $[\xi\xi']^2$ e $[\xi\xi'\ldots]^2$ potranno ridursi a'rispettivi numeratori soltanto.

§ XXVIII. Ancora del caso $a=0$.

Il punto principale X *è ortogonale a tutti i punti dello spazio*; poichè annulla le derivate di A_{XX} e quindi anche A_{Xx}, qualunque sia x. Un piano qualunque ha per conjugato sempre il punto X; e un punto qualunque ha per conjugato un piano per X, cioè un piano dell'assoluto de' piani e secante l'assoluto de' punti secondo ∞^{n-4} rette per X. Un $r$punto ha per conjugato un $r$piano o $(n-r)$punto passante per X, cioè contenuto nell'assoluto de' piani e secante l'assoluto de' punti secondo ∞^{n-r-3} rette; anzi tutti gli $r$punti esistenti in uno stesso $(r+1)$punto che contenga X hanno uno stesso $r$piano conjugato.

Inoltre fu dimostrato (§ IV-2°) che di rette che passino per X e sechino un $r$punto R e un r'punto R' in punti distinti, non ve n'è alcuna, così quando essendo $r+r'<n$ R e R' non han punti comuni, come quando essendo $r+r'<n+k$ R e R' hanno un $k$punto comune; ma ve n'è una quando essendo $r+r'=n$ R e R' non han punti comuni, e ∞^k quando essendo $r+r'=n+k$ R e R' hanno un $k$punto K comune. Quando ve n'è una, questa conta fra quelle perpendicolari comuni a R e R' sulle quali si trovano le distanze di R e R', e la distanza ad essa corrispondente è nulla; quindi è nullo anche il momento di R e R'. Tuttavia il momento non si annullerà più, ove si modifichi la sua composizione prendendo invece del seno della distanza evanescente il limite del suo rapporto a $\sqrt{a}$, come dianzi fu fatto per l'angolo di due piani; vale a dire prendendo invece del seno della detta distanza l'angolo (nel senso ultimamente definito) de' due piani perpendicolari a R e R' negli estremi della

(1) Tranne pe' piani condotti per X, pe' quali questa somma è zero.

distanza medesima, e quindi passanti pel bipiano ad essa conjugato come pure pe'punti comuni a R e R'. Potremo *allora* dire che R *e* R' *ammettono* $\rho - 1$ *distanze, più un angolo.* E le medesime cose han vigore anche quando sono ∞^k le rette passanti per X e secanti R e R'; poichè una sola fra esse seca R e R' in punti ortogonali a K.

Di qui si conclude che, indicando con M' il momento modificato nel senso ora esposto, la (2) e la (1) del § XVI divengono

$$M'^2 = \frac{\left\{ \Sigma \pm x_1 x'_2 \ldots y_{r+1} y'_{r+2} \ldots \right\}^2}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots} \quad (\text{per } r + r' = n),$$

$$M'^2 = \frac{\left\{ \Sigma \pm x_1 \ldots y_{r-k+1} \ldots z_{n-k+1} \ldots z_n^{(k-1)} \right\}^2}{\Sigma \pm A_{xx} \ldots A_{zz} \ldots \Sigma \pm A_{yy} \ldots A_{zz} \ldots} \quad \text{per } (r + r' = n + k);$$

e la (2) e la (3) del § XXII

$$M'^2 = \frac{\left\{ \Sigma x_{c \ldots} y_{d \ldots} \right\}^2}{A\binom{r\,r}{x\,x} A\binom{r'r'}{y\,y}} \quad (\text{per } r + r' = n),$$

$$M'^2 = \frac{1}{A\binom{r\,r}{x\,x} A\binom{r'r'}{y\,y}} \sum a_{b \ldots f \ldots} x_{b \ldots c \ldots} y_{b \ldots d \ldots} x_{f \ldots g \ldots} y_{f \ldots h \ldots} \quad (\text{per } r + r' = n + k).$$

Le espressioni de'momenti di ordine inferiore di R e R' non patiranno modificazioni, ma nel comporli sarà inutile tener conto della distanza evanescente testè considerata (quando ci è); per es. il prodotto de'seni quadrati delle $\rho - 1$ distanze superstiti fra R e R' sarà $S_{\rho-1}$. Ed allora l'*angolo* di R e R' verrà espresso da

$$\frac{M'}{\sqrt{S_{\rho-1}}}.$$

È pure inutile tener conto della distanza evanescente nella composizione del comomento di R e R'; ma non così ne'comomenti di ordini inferiori, ne' quali va considerata, ammenocchè non vogliasi sostituire alla (1) del § XIX la seguente:

$$\Gamma^2_\nu = S^{(\nu+1)} - \binom{k+1}{1} S^{(\nu+2)} + \binom{k+2}{2} S^{(\nu+3)} - + \ldots$$

come nel caso de' multipunti paralleli (§ XXVI).

Coteste conclusioni rispetto alle distanze ed all'angolo di due multipunti non reggono in tutta la loro integrità quando i due multipunti si suppongono paralleli. Allora, come mostrammo nel § precedente, se i due multipunti R, R' sono m volte paralleli, m delle distanze fra R e R' si annuliano, per esser contate sopra rette perpendicolari a R e R' in uno stesso punto (di M) e perpendicolari a R_0 e R_1 in due punti distinti. Ma fra queste distanze non figura quella alla quale abbiam fatto sottentrare *l'angolo* dianzi definito (quando la detta distanza ci è), poichè essa era contata sopra una retta perpendicolare a R e R' in punti distinti e perpendicolare a R_0 e R_1 in X. Per conseguenza *due multipunti* m *volte paralleli ammettono* $\rho - m$ *distanze non evanescenti, quando essendo* $r + r' < n + k$ *essi hanno un* k*-punto comune*; *ed ammettono* $\rho - m - 1$ *distanze oltre l'angolo, quando essendo* $r + r' = n + k$ *hanno un* k*-punto comune.*

Quando i due multipunti hanno $\rho - m$ distanze, circa a' momenti e comomenti de'varî ordini può ripetersi quel che ne accennammo al § precedente. Quando poi hanno $\rho - m - 1$ distanze più l'angolo, sono nulli i momenti degli ordini più alti sino al $(\rho - m + 1)$.mo; ma il $(\rho - m)$.mo non risulta più nullo se nel formarlo si adopera l'angolo invece del seno della distanza alla quale l'angolo sottentra. Gli altri momenti non subiscono alterazione; ma nel formarli è inutile includere le distanze evanescenti per effetto del parallelismo e quella che dà origine all'angolo.

Consideriamo ora il caso di due multipiani paralleli; siano cioè R e R′ un $r$piano e un r'piano aventi in comune un $k$piano K composto da piani passanti per X, ossia appartenenti all'assoluto dei piani. È chiaro innanzi tutto che qui non è più il caso di distinguere parallelismi di diversi ordini, visto che tutti i piani di K appartengono all'assoluto. Ciò posto, osserviamo che R e R′, considerati come multipunti, sono antiparalleli, vale a dire che si trovano con X in un multipunto K; per conseguenza esiste una retta che passa per X e seca R e R′ in due punti distinti ed ortogonali al multipunto K′ comune a R e R′ (se vi è), e la distanza fra questi due punti conta fra le varie distanze di R e R′. Ma siccome questa distanza si annulla, così possiamo sostituirle l'angolo fra' due piani condotti per i detti due punti rispettivamente ed appartenenti al bipiano conjugato della retta che unisce questi punti (e quindi passanti per K′). Adunque *due multipiani paralleli ammettono, quando* $a = 0$, *un angolo e* $\rho - 1$ *distanze.*

Per concludere, osserviamo che quando $a = 0$ si può assumere X come uno de'punti fondamentali dandogli per coordinate (0,..0,1), e supporre inoltre gli altri $n - 1$ punti fondamentali a due a due ortogonali. Allora la A_{xx} può esser ridotta alla forma

$$A_{xx} = x^2_1 + \ldots + x^2_{n-1},$$

e per ogni piano ξ è lecito supporre $\xi_n = 1$. Ciò fatto avremo per de' piani qualunque

$$[\xi\xi']^2 = (\xi_1 - \xi'_1)^2 + \ldots + (\xi_{n-1} - \xi'_{n-1})^2;$$

$$[\xi\xi' \ldots \xi^{(r)}]^2 = \sum \begin{vmatrix} \xi_b & \xi_c & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \xi^{(r)}_b & \xi^{(r)}_c & \ldots & 1 \end{vmatrix}^2,$$

ove $bc\ldots$ sta per le combinazioni di $1,\ldots,n-1$ a r a r; e

$$[\xi\xi' \ldots \xi^{(n-1)}] = \begin{vmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_{n-1} & 1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \xi_1{}^{(n-1)} & \ldots & \xi^{(n-1)}_{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Dati due punti x, x', essi sono su una retta che passa per X se è possibile determinare λ in guisa che sia

$$x_1 + \lambda x'_1 = 0\ ,\ \ldots\ ,\ x_{n-1} + \lambda x'_{n-1} = 0\ ,$$

ossia se è

$$\frac{x_1}{x'_1} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x'_{n-1}}\ ;$$

in questo caso i due punti sono certamente antiparalleli (ma non solo allora), e considerati come $(n-1)$piani sono paralleli.

Ancora, dati un $r$punto R e un r'punto R′, sappiamo (§ IV-2°)che: 1° se essendo $r + r' = n$ R e R′ non han punti comuni, ovvero se essendo $r + r' < n$ R e R′ non han punti

comuni ma l'$(r+r')$punto in cui essi son contenuti passa per X, allora esiste una retta che passa per X e seca R e R′ in punti distinti, vale a dire fra' punti di R ve n'è uno antiparallelo a un certo punto di R′; 2° se essendo $r+r'=n+k$ R e R′ hanno un $k$punto comune, ovvero se essendo $r+r'<n+k$ R e R′ hanno un $k$punto comune e l'$(r+r'-k)$punto in cui essi son contenuti passa per X, allora vi sono ∞^k delle rette suddette, vale a dire che in R e R′ vi sono due $(k+1)$punti composti di punti antiparalleli ciascuno a ciascuno. In tutti questi casi (ma non solo in questi) R e R′ sono antiparalleli, e considerati come multipiani sono paralleli (1).

(1) Ne' due ultimi casi il sig. Jordan (mutati i punti in piani e viceversa) direbbe che R e R′ hanno un parallelismo di ordine $k+1$, e ne' due primi un parallelismo semplice.

Bisogna avvertire che la definizione di multipiani paralleli da noi adottata non concorda pienamente (mutati i punti in piani e viceversa) con quella del Jordan, benchè sì l'una come l'altra sieno una legittima generalizzazione del concetto di parallelismo proprio della Geometria euclidea. Ciò avviene perchè il Jordan nel generalizzare si pone da un punto di vista differente dal nostro. Tuttavia, a parte le denominazioni, le nostre due definizioni non sono contraddittorie, e possono sussistere entrambe.

Sulla origine della cellula gigantesca del tubercolo.

Nota del dottor CESARE MILONE presentata dal Socio TODARO

nella seduta del 6 maggio 1877.

L'opportunità di possedere delle glandole linfatiche affette da tubercolosi primitiva, ed il saggio consiglio del mio amico prof. F. Durante m'invogliarono d'intraprendere delle ricerche sulla cellula gigante del tubercolo.

Parecchi illustri osservatori si occuparono della origine e significazione della cellula gigante del tubercolo, e se questa rappresenti un elemento costitutivo essenziale del nodulo tubercolare, od un elemento secondario ed incostante; ma varie e discordi ne furono le opinioni, incerto e discutibile è rimasto, a mio credere, tale argomento.

Moltissimi tagli eseguii dal gennaio all'agosto 1876 sulle dette glandole, e su altro materiale tubercolare, non che su glandole linfatiche infiammate cronicamente, e su glandole linfatiche normali injettate per la via dei linfatici: il tutto mi portò a conclusioni, che nel modo più chiaro mi proverò di esporre.

La scoverta della cellula gigante nel tubercolo comincia con Rokitanski. Nel 1855 questi parlò di cellule polinucleate, che rinvenne nel tubercolo del peritoneo, e ne dette dei disegni ([1]).

Venne quindi il Virchow e costatò la presenza della cellula gigante nel tubercolo dell'omento. Egli in principio le credè derivassero da cellule grassose metamorfosate ([2]); poscia trattando del tubercolo in genere disse, che si originavano dalla moltiplicazione del nucleo di grandi e piccole cellule uninucleate (corpuscoli di connettivo, cellule midollari), senza che il protoplasma prendesse parte alla proliferazione, ma solo allo ingrandimento ([3]). Più tardi ancora, avendo osservate cellule giganti più o meno in rapporto coi vasi linfatici, pensò si originassero dall'endotelio di questi vasi ([4]).

E. Wagner le riscontrò nel tubercolo del fegato ([5]): in seguito in altro lavoro le considerò come un componente costante del linfoadenoma, che per lui corrisponderebbe al tubercolo ([6]).

Busch descrisse nei tubercoli della coroide corpi singolari, i quali furono poi riconosciuti dal Virchow per cellule giganti ([7]).

([1]) *Lehrb. d. Phatol. Anat.* 3 Aufl. 1855 I pag. 295. ([2]) Virchow's Arch. XIV pag. 49. ([3]) *Cellularpathologie*, 3 Aufl. 1862 pag. 441. ([4]) *Krankhafte Geschwülste* II pag. 641. ([5]) Arch. d. Heilk. II 1861 pag. 35. ([6]) *Das Lymphadenom* pag. 6. ([7]) Virchow's Arch. XXXVI pag. 449.

Langhans le ritenne un componente quasi essenziale del tubercolo di tutti gli organi del corpo umano. Egli dopo il Virchow riconobbe i rapporti dei vasi linfatici col tubercolo, e specialmente colle cellule giganti. Ma pur nulladimeno considerando che queste formazioni si trovavano nei tubercoli dell'omento, nel quale era dubbia l'esistenza dei vasi linfatici, non volle insistere su tale origine: quindi pensò che le cellule giganti potessero formarsi o dalle cellule uninucleate per accrescimento del protoplasma e proliferazione del nucleo, appoggiando l'idee del Virchow, oppure dalla fusione di più cellule minori ([1]).

Klebs osservò nella tubercolosi del diaframma delle cavie lo sviluppo delle cellule giganti disposte in serie l'una dopo l'altra, e circondate da cellule fusiformi in modo da ricordare il decorso de' vasi linfatici ([2]): costatò il medesimo fatto nella giovane zona di proliferazione di un piede elefantiaco ([3]). Opinò quindi che detti elementi provenendo dagli endotelii dei linfatici si sviluppassero nell'interno di essi, e che forse il contenuto dei vasi linfatici coagulando partecipasse alla loro formazione. Per il medesimo osservatore le cellule giganti mentre si trovano quasi costantemente nel tubercolo di ogni parte del corpo umano, pure non sono necessario attributo, nè si appartengono ad esso solo.

Köster studiò la cellula gigante nel tubercolo dell'artrite fungosa. Egli appoggiò l'opinione di Klebs, anzi ammise l'origine dai vasi linfatici anche per le cellule giganti delle membrane sinoviali, nelle quali non è costatata la presenza dei vasi linfatici ([4]).

Schüppel nel 1871 pubblicò un lavoro sulla tubercolosi delle glandole linfatiche ([5]), e fermò anche la sua attenzione sulla presenza delle cellule giganti in detti organi affetti da tubercolosi. Considerò quest'elemento del tubercolo, almeno nella tubercolosi delle glandole linfatiche, come un componente che non manca mai: e si oppose all'idea di Virchow, di Klebs e di altri, i quali affermarono che la cellula gigante si trova in questi organi anche per processi affatto differenti dalla tubercolosi. Secondo lo Schüppel quindi la cellula gigante nelle glandole linfatiche denota sempre la presenza del tubercolo. Riguardo all' origine poi dubitò che quest' elemento del tubercolo provenisse da proliferazione. Dubitò ancora che potesse svilupparsi dai vasi linfatici, e se non altro, secondo il suo modo di vedere, non dovevasi ritenere l'origine vasale linfatica nei tubercoli delle glandole linfatiche: e ciò per aver visto cellule giganti nell'interno dei follicoli, in cui non esistono vasi linfatici. Finalmente si mostrò propenso ad accettare la provenienza dai vasi sanguigni. Egli incontrò nelle sezioni dei tubercoli del fegato vasi sanguigni tagliati per traverso, e ripieni di una sostanza ricca di nuclei, che poteva dirsi una cellula gigante.

TH. Hering ([6]) si oppose a quanto opinava lo Schüppel: egli non trovava argomento di relazione tra le cellule giganti e i vasi sanguigni. Appoggiandosi poi alla

([1]) Virchow's Arch. XLII 1868 pag. 382. ([2]) Virchow's Arch. 44 Bd. pag. 286. ([3]) L. c. pag. 289. ([4]) Virchow's Arch. 48 Bd. pag. 114 seg. ([5]) Os. Schüppel, *Untersuchungen Lymphdrüsen-Tuberculose* 1871. ([6]) *Histologische und experimentelle Studien über die Tubercolose.* Berlin 1873 pag. 105.

forma di canali contorti, alle apparenze della massa che li riempiva, descritta come protoplasma delle cellule giganti, credè che questi elementi del tubercolo corrispondessero molto probabilmente a sezioni di vasi linfatici; ne' quali però il corpo albuminoide fosse stato coagulato dall' azione chimica dei liquidi d' indurimento, ed i nuclei contenuti in questa massa corrispondessero ad endotelii trasformati per proliferazione.

Il prof. Bizzozero (1) rinvenne cellule giganti nei tubercoli del fegato, milza e reni dei conigli operati colla inoculazione sottocutanea di sostanza tubercolare. Per l'origine delle cellule giganti egli concordò con tutti coloro, i quali pensarono alla iperplasia di una cellula fissa del connettivo (2).

A. Visconti (3) riconobbe sia le cellule giganti del tubercolo come quelle del sarcoma giganto-cellulare di origine vasale sanguigna. Egli ammise inoltre che le cellule giganti del tubercolo potevano qualche volta formarsi fuori dei vasi per metamorfosi dei globuli sanguigni rossi stravasati: nel qual caso i nuclei sarebbero rappresentati da elementi linfoidi impigliati nella sostanza albuminoide del sangue.

Forlanini (4) sostenne che la cellula gigante è in origine un ammasso protoplasmatico racchiudente in sè parecchi nuclei; il quale ammasso può svilupparsi nell' interno dei vasi sanguigni o dei linfatici: questo ammasso poi così formato acquisterebbe nelle sue fasi progressive sempre maggior volume per aumento del suo protoplasma e per moltiplicazione de' suoi nuclei; e nelle sue fasi regressive presenterebbe un processo di alveolizzazione progrediente dalla periferia verso il centro; in virtù del quale processo si formerebbe il reticolo e le cellule epitelioidi, che si osservano nel tubercolo.

C. Bozzolo (5) nell' esame istologico di alcune glandole linfatiche in uno dei tagli incontrò alla periferia dei follicoli degenerati una sezione trasversa di vasi sanguigni piuttosto cospicui; nell'interno dei quali si distingueva una massa granulosa di aspetto apparentemente simile a quella delle cellule giganti, e provvista di nuclei copiosi.

P. Foà (6) in tal'argomento scrisse che, se la presenza della cellula gigante nel tubercolo è il fatto più comune, non è deciso in modo assoluto che non si possano dare tubercoli senza cellule gigantesche. In riguardo all'origine poi accomunò la cellula gigante del tubercolo a tutti gli elementi polinucleati patologici e normali: quindi considerò la cellula gigantesca del tubercolo identica alle grandi cellule con più nuclei, che si trovano nella infiammazione delle sierose, della cornea, del pannicolo adiposo sottocutaneo, nella lebbra, nell'elefantiasi, negli alveoli polmonari durante una pneumonite catarrale, nel cancro, nel sarcoma giganto-cellulare, alla periferia di pustule vajolose, nella inserzione placentare dell'utero, e nel normale e patologico riassorbimento delle ossa. Conseguente ad un tal principio accettò anche per la cellula gigante del tubercolo la doppia origine, per ipertrofia cioè di un elemento, e per la

(1) Oss. di Torino 1873. (2) Gazzetta delle Cliniche di Torino 1876 n. 5. (3) Dai Rendiconti del R. Istituto lombardo serie II vol. VII fasc. XIX. (4) Annali universali di medicina e chirurgia fasc. gennaio 1875 p. 73. (5) Estratto dagli Annali universali di medicina vol. 231 an. 1875. (6) Arch. delle scienze mediche G. Bizzozero vol. 1 fasc. 2 1876 pag. 115.

fusione di più cellule. Citò inoltre una sua osservazione fatta nel 1873 nel laboratorio di Bizzozero, colla quale egli aveva costatato, studiando la struttura del tubercolo cerebrale, che mano mano dalla zona grigia si procedeva verso il centro caseoso, si incontravano cellule connettive sempre più grandi, e a nuclei sempre più numerosi ed ovali, sinchè le cellule prendevano l'aspetto delle cellule giganti del tubercolo.

Colamiatti (1) parimente nelle due Memorie *La cellula gigante, studio critico ed esperimentale* e *La sifilide nella produzione della tisi* riconobbe per le cellule giganti del tubercolo, come per quelle degli altri processi patologici e normali, la origine prolifera. Anzi egli nell'ultimo lavoro aggiunse che colle cellule giganti del tubercolo non devono confondersi certi ammassi di sostanza granulosa, che si trovano spesso nell'interno di vasi a pareti sottilissime circondate da cellule semoventi e molto dilatate; ammassi che sono talvolta alveolati, e che contengono sovente nel loro interno globuli sanguigni bianchi, i quali potrebbero esser presi per nuclei, non che alcuni globuli rossi.

G. Tizzoni (2) protestò contro il Ranvier (3), che lo ritenne (per un lavoro antecedente) (4) quale autore della confusione delle vere cellule giganti con altre figure date da trombi dei vasi sanguigni e linfatici, e da processi degenerativi degli epitelii dei tuboli. Lo stesso Tizzoni riconobbe di origine prolifera le cellule più comuni ad incontrarsi nel tubercolo, che io direi tipiche o proprie del neoplasma tubercolare, le quali risiedono ordinariamente nella spessezza di esso o nel centro. Chiamò poi *pseudo-cellule giganti* quegli ammassi di sostanza granulosa, che risiedono nell'interno dei vasi o dei canalicoli del testicolo, che sono abbastanza rari, e che si trovano senz'alcun ordine di sede nel tessuto tubercolare.

Dopo la non breve serie di opinioni emesse intorno alla origine ed essenzialità della cellula gigantesca nel tubercolo parrebbe che l'argomento fosse oramai esaurito; secondo il mio modo di vedere non l'è così.

In ognuno dei surriferiti lavori si trovano senza dubbio osservazioni, che io stesso ebbi a riscontrare vere: ma spesso e specialmente nelle ultime monografie la interpretazione non mi sembra rappresentare sempre una deduzione evidente dei fatti osservati. Laonde in questo mio lavoro ho cercato di moltiplicare le osservazioni, e parmi aver ottenuto un gran numero di preparati dimostrativi, i quali concorrono a stabilire una teoria forse più razionale, che meglio corrisponde ai fatti osservati.

Non farò una completa descrizione istologica del tubercolo, che non sarebbe mio compito, ma in succinto metterò in rilievo di questo neoplasma tutto ciò che coll'argomento ha relazione. Mi limiterò poi ad un esatto esame degli elementi polinucleati, che incontrai in tre speciali casi di tubercolosi, e ciò perchè studiando questi diversi tessuti tubercolari, che io scelsi, si possono stabilire le varietà possibili, i diversi stadî e gradazioni di tutti gli elementi polinucleati tubercolari.

(1) V. F. Colamiatti, *La cellula gigantesca* febbraio 1876 pag. 13. - *La sifilide nella produzione della tisi* gennaio 1877 pag. 26. (2) Estratto della Rivista Clinica di Bologna 1877 pag. 23, 24, 25. (3) Cornil e Ranvier, *Histolog. Patolog.* parte 3ª pag. 2106 e seg. (4) Tizzoni e Gaule, *Ein Beitrag zur Lehre von der Hodentuberculose.* Virchow's Arch. Bd. LXIII.

Nel maggio 1876 si riceveva nella Clinica chirurgica di Roma un bambino di anni 8, a nome Febo Cernitori, romano. Egli proveniva da genitori tubercolosi, ed era affetto da tumor bianco dell'articolazione coxo-femorale destra. Non passò molto tempo che l'infermo cessò di vivere con fenomeni di tubercolosi migliare acuta generale.

All'autopsia, eseguita in questo Istituto fisico-patologico, oltre ai fatti locali, che rappresentavano il fomite dell'infezione, fu riscontrata tubercolosi migliare del polmone e di altri organi cavitarî.

Ultimata l'autopsia portai meco un grosso pezzo di polmone, e lo tenni ad indurire nella soluzione di acido cromico (il mezzo per cento).

Esame microscopico. — Il polmone suddetto presentava nelle sottili sezioni tubercoli in varî periodi di sviluppo ed in diversi stadî di degenerazione caseosa. Inoltre tessuti interstiziali infiammati, ed in specie quelli che circondavano i noduli tubercolari; spesso pneumonite lobulare o catarrale, come suol dirsi.

I giovani tubercoli polmonari, nei quali ancora il centro non era in degenerazione caseosa, comunemente contenevano uno o più grandi corpi polinucleati, cioè: quei grandi elementi a più nuclei, che si notano a prima vista in tutti i tubercoli del corpo umano, e che sono stati appellati cellule giganteschе del neoplasma tubercolare.

Di tali elementi giganteschi quando se ne rinveniva un solo in un tubercolo spesso risiedeva nel centro; quando erano in più (e non oltrepassavano mai il numero di cinque o sei), non era raro il caso vederli circondati dagli elementi tubercolari con certo ordine, in modo cioè da rappresentare tanti centri di altrettanti cumuli o noduli, quasi più tubercoli fusi in uno. Tal fatto però non era costante; altra volta le cellule giganti s'incontravano disperse in tutta la spessezza del tubercolo, e raramente sulla estrema periferia. Questi grandi corpi polinucleati ordinariamente si trovavano in mezzo ad una prima zona di cellule tubercolari endotelioidi rotonde, fusiformi, appiattite; qualche volta poi erano circondati da corpuscoli tubercolari linfoidi.

I caratteri inerenti alle cellule giganteschе di questo caso erano i seguenti:

In qualunque direzione fosse caduto il taglio sulla cellula gigante, questa quasi sempre ricordava la forma cilindrica, cioè: o un cilindro tagliato trasversalmente, o longitudinalmente, o nel senso obliquo, o per le diverse curve troncato in varie sezioni.

Qualche volta si trovavano cellule giganteschе biforcate, o con ramo collaterale minore (Fig. 5, 7).

Il minimo di loro grandezza non raggiungeva nel diametro trasverso 0,014^{mm}.

Il massimo di grandezza presentava un diametro trasverso di 0,036.^{mm}

Rinvenni una cellula gigante nel centro di un tubercolo, che mentre nel diametro trasverso segnava 0,015^{mm}, nel longitudinale raggiungeva il diametro di 0,135.^{mm}

Nelle cellule giganti si distingueva una parete esterna, una sostanza che le riempiva, e molteplici nuclei.

La parete non sempre vi si riscontrava; quando esisteva era ordinariamente rappresentata da una zona trasparentissima, o qualche volta da strie o fibrille circolari. Dalla superficie esterna di dette pareti partivano, o ad esse venivano ad aderire

fortemente fibrille connettivali, che erano in connessione col reticolo o trama connettivale del tubercolo. Tal fatto si osservava colla spennellatura, o col dilavamento dei preparati, o dissociando i tessuti coll'ago.

La massa protoplasmatica era di apparenza granulosa, spesso a grossi granuli, di colore talora giallo o giallo-verde.

I nuclei delle cellule giganti erano ovali allungati, quasi fusiformi. Non oltrepassavano in lunghezza il diametro di 0,012^{mm}, ed in grossezza di 0,003^{mm} o poco più; erano provveduti di uno o due nucleoli, che apparivano come punti neri; erano disposti sempre col maggior diametro nel senso dell' asse longitudinale del cilindro, in modo che nel taglio trasverso della cellula gigante si presentavano di figura circolare; risiedevano alla periferia dell' elemento, ed avevano ordinariamente disposizione regolare da costituire una parete di nuclei. Qualche volta si vedevano nuclei in disordine nella spessezza della cellula gigante, ma in tal caso non mancava la coroncina di nuclei alla periferia. Altra volta, ma raramente, l' elemento conteneva nuclei in tutta la spessezza.

Nella moltiplicità dei tagli incontrai due cellule giganti, le quali per un quarto di loro lunghezza erano fornite di massa granulosa gialliccia, per il resto poi presentavano minor diametro, mancavano di massa granulosa, e si vedevano come un fascio di nuclei fusiformi e trasparentissimi (Fig. 6).

Qualche volta si rinvenivano cellule gigantesche a margini irregolari, fornite di angoli più o meno acuti e nucleati, per i quali si congiungevano colle fibrille del reticolo. Questi elementi non erano dissimili dai precedenti, e solo si distinguevano per una certa retrazione della parete insieme alla massa; infatti spesso si notavano spazî tra gli angoli rientranti di esse e gli elementi tubercolari, che le circondavano.

Le cellule giganti però non sempre conservavano i caratteri da me enumerati; spesso per la degenerazione incipiente del nodulo tubercolare avevano perduto i nuclei, ed erano divenute poco trasparenti, ma conservavano la forma cilindrica o biforcata; altra volta s'incontravano in frantumi in mezzo a degenerazione caseosa, ma erano riconoscibili dalla sede.

Sulla periferia dei tubercoli qualche volta si trovavano sezioni di vasi riempiti da una massa granulosa di color gialliccio, frastagliata di nuclei, e che ricordava la massa del sangue in disfacimento. Questi corpi granulosi, che dirò di una seconda serie, col portare i preparati sul vetro porta-oggetti facilmente sfuggivano dal vase od alveolo.

In alcuni rari tubercoli ancora, oltre ai grandi elementi polinucleati descritti, ed i grandi corpi granulosi che riempivano i vasi, s'incontravano alcune grosse cellule del volume quadruplo di un corpuscolo linfoide o appena doppio di un elemento endotelioide con due o qualche volta quattro nuclei.

Differenti caratteri presentavano questi corpi polinucleati o grosse cellule, onde li dirò anche corpi polinucleati di una terza serie per distinguerli dalle due altre varietà di corpi polinucleati suddescritti, cioè:

Si vedevano principalmente sulla periferia del tubercolo, avevano forma sferica od ovalare, i loro nuclei al numero di due o raramente quattro risiedevano nel centro dell' elemento, il protoplasma era finamente granuloso e trasparentissimo, non

mostravano mai traccia di pareti cellulari, non avevano connessione col reticolo, in modo che come gli elementi tubercolosi erano innicchiati nella trama o rete di tessuto connettivo del tubercolo, e potevano esserne allontanate col dilavamento dei tessuti; qualche volta si vedeva chiaramente, che non appartenevano al tubercolo, ma ai tessuti infiammati circostanti.

Finalmente si rinvenivano, sebbene raramente, giovani tubercoli costituiti da un nodulo semplicissimo, privo affatto di elementi polinucleati, cioè: da un cumulo di corpuscoli tubercolari linfoidi innicchiati in un reticolo di fibrille connettivali. Ad evitare ogni equivoco, per ciò che riguarda la mancanza di elementi polinucleati in questi speciali tubercoli, dirò, che tagliai i tessuti sul microtomo, ed osservai taglio per taglio le diverse sezioni di un tubercolo; inoltre mi attenni sempre per questa osservazione alla ricerca di quei tubercoli, nei quali per la buona apparenza non si poteva sospettare fossero stati alterati da degenerazione regressiva, o per azione dei liquidi conservativi.

Per ultima osservazione: i noduli tubercolari, giovani a preferenza, presentavano alla periferia vasi sanguigni dilatati e fortemente injettati.

Le osservazioni, che ho notate in questo caso si ripetevano in tutti i casi di tubercolosi migliare acuta del polmone; erano uguali ancora, ma meno evidenti, nella tubercolosi polmonare cronica.

Nel medesimo anno scolastico 1876 fu ricevuto in questa Clinica chirurgica un tal Francesco Ceroni, d'Imola, di anni 21, calzolajo. Egli si era portato nell'ospedale per esser curato di sei tumori nelle regioni cervicali di ambo i lati.

L' illustre direttore della Clinica prof. C. Mazzoni, dopo aver diagnosticato tubercolosi primitiva delle glandole linfatiche cervicali, le enucleò, e me ne incaricò dell'esame microscopico.

Conservai ancora quelle glandole nella soluzione di acido cromico (mezzo per cento), e dopo indurite n' eseguii l'analisi; ebbi il seguente risultato.

Le dette glandole presentavano il centro in degenerazione caseosa; sulla periferia dei focolai di degenerazione s' incontrava una moltitudine di tubercoli in diversi stadî, follicoli ipertrofici, e scarso tessuto d' infiammazione cronica.

I giovani tubercoli risultavano di una o al più due cellule gigantesche, che occupavano il centro del nodulo; di un agglomerato di elementi tubercolari di forma endoteliale, cioè: di grosse cellule tondeggianti, appiattite, fusiformi, ovali, di apparenza vitrea con nucleo poco visibile; di una trama connettivale, che rappresentava il reticolo, nel quale gli elementi endotelioidi erano innicchiati, e stretti l'un contro l'altro; finalmente di una zona esterna di tessuto connettivo giovane, in mezzo al quale s' incontrava, però raramente, qualche cellula gigante nell' interno de' vasi, e delle grosse cellule con due o quattro nuclei nel centro.

Le cellule giganti, che risiedevano nel centro del tubercolo delle glandole linfatiche in parola, erano rappresentate in massima parte da grossi corpi protoplasmatici privi di pareti e nuclei, di forma circolare od ovale, e qualche volta figuravano una sezione di cilindro guardato nel senso dell'asse longitudinale; raggiungevano il diametro di 0,080^{mm}, e quelle rinvenute in sezione longitudinale raggiungevano in lunghezza il diametro di 0,165^{mm}, ed in larghezza 0,080^{mm}.

Tra i molteplici tagli si trovavano pochi tubercoli di recentissima data, nei quali la cellula gigantesca si presentava distintamente fornita di diverse parti, cioè: di una massa centrale incolore a minuti granuli, di una serie di nuclei disposti in corona alla periferia, o in forma di un ammattonato in quelle che rappresentavano un cilindro sezionato nell'asse longitudinale, e finalmente di una parete costituita da una zona esilissima e trasparente a doppio contorno, come una membrana anista (Fig. 10).

I nuclei erano voluminosi (larghezza $0{,}009^{mm}$, lunghezza $0{,}012^{mm}$), erano tondeggianti, ovali o reniformi.

Come ho detto poco innanzi, parimenti che alla periferia dei tubercoli del polmone analizzato si rinvenivano sezioni di vasi riempiti di una massa granulosa, la quale in genere poco si allontanava dalla massa delle cellule giganti.

Eguali ancora a quelle descritte nel tubercolo del polmone erano le grosse cellule della terza serie, cioè, quelle cellule di forma endotelioide con due o quattro nuclei centrali.

Verso la fine dello stesso anno 1876 un caso di tubercolosi primitiva della glandola mammaria con riproduzione nelle glandole linfatiche del cavo ascellare dello stesso lato fu raccolto dall'abile chirurgo dott. Egidii. Egli, amputata la mammella, ed enucleate le glandole linfatiche, rimise quei tessuti immersi nell' alcool diluito al prof. Durante per l'analisi microscopica, e questi me li offrì.

Dalle mie osservazioni risulta quanto segue.

Il tumore, che aveva sede nella glandola mammaria, era costituito d'abbondante tessuto congiuntivo iperplastico, entro cui erano disseminati tubercoli e focolai caseosi.

I tubercoli, che si rinvenivano in questo tessuto, non erano dissimili da quelli descritti nel caso precedente: se non che spesso si vedevano più tubercoli insieme chiusi in un grande spazio od alveolo di tessuto connettivo fibroso ed elastico.

Le cellule giganti ordinariamente non erano centrali, ma non si trovavano fuori della spessezza del tubercolo, e spesso nelle vicinanze di esse si rinvenivano varie cellule giganti più piccole, e qualche volta delle grosse cellule con due o quattro nuclei centrali.

Distinguo gli elementi polinucleati di minor grandezza in cellule giganti piccole ed in grosse cellule con due o quattro nuclei centrali, poichè le prime, quantunque di ugual volume delle seconde, conservavano lo stesso tipo, che predomina nelle così dette cellule giganti del tubercolo, cioè: forma cilindrica, contorta, nuclei periferici ecc., mentre le seconde, come nei casi precedenti, avevano due o quattro nuclei centrali, erano tondeggianti, ovoidi, mancavano di parete, ed erano rarissime ad incontrarsi.

In questo terzo caso la maggior parte delle cellule giganti avevano nuclei molto visibili, e del tutto simili per forma e grandezza a quelli del caso precedente.

Speciale menzione meritano alcune delle cellule gigantesche situate verso il centro dei tubercoli di quest'organo.

Oltre alle cellule giganti fornite di una parete esterna di apparenza fibrillare, se ne rinvenivano di quelle, che all'esterno della corona de' nuclei erano cinte da un alone di aspetto vitreo o zona jalina (Fig. 13 *a*), la quale poteva raggiungere la spessezza di $0{,}010^{mm}$.

S'incontravano cellule giganti, che mancavano affatto di pareti, ma erano chiuse in una cinta di tessuto fibrillare, col quale avevano solo pochi punti di contatto; sembravano chiuse come in un alveolo, che non riempivano completamente.

Sovente si trovavano cellule giganti, nelle quali si vedeva un vacuolo nel centro della sostanza granulosa: rinvenni una cellula gigante, nella quale la sostanza granulosa ed i nuclei erano scomparsi affatto, e non vi rimaneva che un vacuolo chiuso dalla conservata parete della cellula (Fig. 14 *f*); a riconoscere la cellula gigante era d'uopo osservare il preparato rivoltato, si vedeva che nella sezione inferiore era provveduta di sostanza granulosa e nuclei (Fig. 15).

Qualche volta i nuclei di una cellula gigante erano trasformati in altrettante vescicole.

Finalmente conservo ancora un preparato ottenuto dopo migliaia di tagli, in cui si vede una bella cellula gigante nella spessezza di un tubercolo, che mentre serba tutti i caratteri delle altre cellule giganti limitrofe, presenta di più un altro fatto degno della più grande considerazione, cioè: mentre in una metà si nota la solita filza di nuclei periferici, nell'altra metà i nuclei disposti anche in corona sono circondati da un'areola di protoplasma finamente granuloso e più trasparente della massa granulosa della cellula gigante. Con altre parole: su di un lato della cellula gigante i nuclei rappresentano i nuclei di altrettante cellule tondeggianti od ovali, che alla loro volta si trovano nella spessezza ed alla periferia della cellula gigante (Fig. 12).

Per ultima osservazione su questo caso dirò, che si trovava un certo numero di cellule giganti, le quali si allontanavano alquanto dal tipo finora descritto; ma spesso però conservavano qualcuno dei caratteri, che faceva ricordare che anche queste appartenevano alla medesima classe, cioè: alcune di esse, mentre mancavano di pareti, presentavano margini irregolari, erano fornite di una moltiplicità di nuclei sconfinati e senz'ordine, pure, ora per la sede nel centro del tubercolo, ora perchè in un limitato punto della periferia conservavano ancora traccie della parete, ora finalmente perchè su di un sol punto i nuclei si trovavano con un cert' ordine periferico, facevanmi convincere che anche queste cellule giganti erano della medesima natura di tutte le altre sudescritte.

Le glandole linfatiche ascellari secondariamente attaccate dalla tubercolosi non presentavano particolarità degne di rilievo. In questi organi notavasi estesa degenerazione caseosa, sviluppo enorme di tessuto congiuntivo giovane, in mezzo a cui qua e là vedevasi qualche tubercolo ancora ben conservato con cellule giganti centrali, che talora non si allontanavano dal tipo di quelle descritte nelle glandole linfatiche prese da tubercolosi primitiva, e talora si accostavano a quelle rinvenute nei tubercoli della mammella.

Dalle varie osservazioni fatte nell'esame de' tre casi esposti, e ripetute in varî pezzi patologici, raccolti in diverse autopsie, risulta una evidente differenza di caratteri essenziali tra quei grandi corpi con nuclei periferici, più comuni ad incontrarsi nel tubercolo, così dette cellule giganti, e tra quelle cellule tubercolari grosse con due o quattro nuclei centrali, che s'incontrano raramente. La differenza nei caratteri essenziali costituisce varietà di tipi istologici; da ciò nacque in me l'idea della diversa provenienza. E questa la ragione, perchè io comincio dal distinguere nel tubercolo due prime serie di corpi polinucleati, e ne ricerco l'origine.

Prima di occuparmi dell'origine di quei grandi corpi a nuclei periferici o cellule giganti, terrò parola intorno a quella delle grosse cellule con due o quattro nuclei centrali.

Questi elementi del tubercolo per tutti i loro caratteri, la forma dell'elemento, l'aspetto del protoplasma, la mancanza di pareti, la centralità, ed il limitato numero de'nuclei, evidentemente non possono essere altro che cellule connettivali o endotelioidi in via di proliferazione. È oramai comune il fatto, che dove esiste un processo lento di proliferazione si rinvengono elementi, i quali prima di scindersi in elementi minori aumentano in volume, ed il nucleo prolifera. In tutte le infiammazioni croniche e subacute, della cornea, del pannicolo adiposo, della sierosa, nella lebbra, nell'elefantiasi, negli alveoli polmonari durante una pneumonite; in tutte le neoplasie, epitelioma, sarcoma (meno nel sarcoma giganto-cellulare, in cui è dubbia tal origine delle cellule giganti, come diremo); finalmente in molti processi di proliferazione fisiologica, nell'inserzione placentare dell'utero, e nel normale riassorbimento delle ossa si riscontra il fatto suaccennato. Tali cellule del tubercolo quindi, che sarebbero le vere cellule giganti, e che dagli osservatori o non furono incontrate, o furono ritenute come gli elementi primordiali delle comuni cellule giganti, quando qualche volta si rinvengono, io le riconosco elementi in via di proliferazione, o cellule madri viste nel momento di dividersi in cellule minori.

Ma hanno la medesima provenienza quegli enormi corpi polinucleati a nuclei periferici, che così comunemente s'incontrano nel tubercolo, e che per i primi attirarono l'attenzione degli osservatori, e si acquistarono il nome di cellule giganti del tubercolo? Rappresentano essi un periodo di maggiore sviluppo di quelle grosse cellule, che ho chiamato elementi tubercolari in via di proliferazione? Il Foà partigiano dell'origine prolifera per la massima parte delle cellule giganti, poichè ammette anche l'origine da fusione, riconosce in quegli elementi connettivali in proliferazione il primo periodo di sviluppo delle cellule giganti del tubercolo. È egli vero quanto dice il Foà di aver cioè visto stadî di passaggio tra gli elementi connettivali in via di proliferazione e le cellule giganti del tubercolo nella tubercolosi del cervello? Lo Schüppel nel suo lavoro dichiara, non aver mai potuto osservare stadî di passaggio dalla cellula connettivale alla cellula gigante del tubercolo. Io inoltre nelle mie ricerche mi son convinto, che gli elementi delle due serie conservano il loro diverso tipo nei loro diversi diametri; ho visto cioè cellule giganti tubercolari, che non raggiungevano in grossezza il diametro di 0,014^{mm}, eppure conservavano tutti i caratteri per riconoscerle dell'identica natura delle grandi cellule giganti tubercolari, cioè: forma cilindica, contorta, nuclei periferici e disposti a costituire parete, ecc. Questi elementi per me non sono che cellule giganti di minor grandezza. Le cellule in via di proliferazione poi nel tubercolo non raggiungono gran volume, ne ho viste del diametro di 0,020^{mm}, ma nel loro massimo diametro come nel piccolo conservano sempre l'aspetto di grosse cellule endotelioidi col nucleo in proliferazione, cioè: forma rotonda ed ovale, protoplasma di aspetto appena granuloso, nuclei centrali in proliferazione.

A mio vedere quindi, le cellule giganti del tubercolo ripetono un'origine, che non è la prolifera; invece tutti i caratteri dicono per la provenienza vasale, cioè: i vasi siano sanguigni che linfatici attaccati dal processo tubercolare, e prendendo parte attiva con tutti i loro elementi, si trasformano in questa specie di corpi polinucleati.

Mentre alcuni de' caratteri notati nei tre casi destano il sospetto di tal origine, altri o tutti insieme la dimostrano evidentemente. Ed invero l'osservazione che in alcuni casi di tubercolosi le cellule giganti hanno forma cilindrica quasi costante, ed i nuclei pressochè fusiformi corrispondono pel loro asse longitudinale all'asse longitudinale della cellula, risiedono alla periferia dell'elemento, e sono ravvicinati e disposti regolarmente da costituire una parete, desta l'idea, che le cellule giganti non sono che altrettanti tubi tapezzati di nuclei d'endotelio, e riempiti di sostanza granulosa. La presenza delle pareti in una gran parte di cellule giganti, ora di apparenza fibrillare finissima, ora quale una cinta fibrillare più spessa, ora quale zona vitrea o jalina, non può che concorrere all'idea, che fosse la parete vasale ancora non riassorbita o distrutta dal processo di proliferazione. I granuli di pigmento giallo o giallo-verde, che talvolta si rinvengono nel centro della cellula gigante, fanno supporre la loro provenienza da distruzione dei globuli del sangue. La produzione di vacuoli nelle cellule gigantesche del tubercolo desta il sospetto che nello stabilirsi un coagulo in un vaso la parte solida, cioè, la fibrina separandosi dalla parte sierosa, questa si raccolga in uno spazio regolare, e dia così origine a quelle specie di cavità od alveoli ripieni di liquido trasparente. Dimostrative poi sono quelle cellule giganti biforcate, o con ramo collaterale minore; e le altre, che per i tre quarti di lor lunghezza mancando di sostanza protoplasmatica prendono in quella parte l'aspetto di fasci di nuclei; o per dir meglio si manifestano tal quale un tratto di vase, che per un quarto di sua lunghezza costituisce la cellula gigante, e pel resto rappresenta un vase avvizzito. Dimostrativo è quel preparato, nel quale si vede una parte di nuclei della cellula gigante, che risiedono nel centro di altrettanti endotelii rigonfiati, i quali alla lor volta son situati verso la periferia del gran corpo polinucleato (Fig. 12*a*).

Il Colamiatti, il Tizzoni, il Ranvier sostenitori della distinzione in cellule giganti vere, ed in pseudo-cellule giganti del tubercolo potrebbero objettare, che gli elementi da me incontrati, e che riconosco di origine vasale, appartenessero alla classe da loro distinta col titolo di pseudo-cellule giganti, mentre la generalità delle cellule giganti del tubercolo rimarrebbe sempre di origine prolifera, e perciò sarebbero vere cellule. Anch'io ho rinvenuto sulla periferia dei tubercoli figure sopranumerarie di cellule giganti, ossia sezioni di vasi riempiti di una massa granulosa frastagliata di nuclei, e che ricorda la massa del sangue in disfacimento; anch'io riconosco questi corpi per trombi vasali troppo evidenti: ma son convinto anche che gli elementi di cui ho voluto parlare innanzi, appartengono al gran numero delle cellule giganti del tubercolo sia per la sede, che per i caratteri generali, ovvero a quelle che i suaccennati osservatori chiamano cellule giganti vere, e che se le pseudo-cellule giganti dei medesimi osservatori sono trombi vasali, ciò non toglie che tutte le altre cellule giganti possan aver origine vasale.

Il Foà non parla di distinzione di caratteri delle cellule giganti del tubercolo, e quindi riesce molto vago; ma il Colamiatti parlando della disposizione dei nuclei nelle cellule giganti del tubercolo, che egli le dice vere, si esprime così: « la loro disposizione alla periferia può avere talora un aspetto elegante, paragonabile forse al rivestimento cilindrico semplice di alcuni canali, aspetto questo, che fu già rivelato come caratteristico delle cellule giganti, che si riscontrano nei tubercoli, ma che però

può in queste mancare, od esser poco pronunziato, e trovarsi anche in altre cellule non tubercolari (1) ». Il Tizzoni parimenti nella sua descrizione delle cellule giganti vere, tra gli altri caratteri, aggiunge che questi elementi giganteschi talora hanno nuclei alla loro periferia di forma ovale o a bastoncini disposti regolarmente (2). Nè il Colamiatti, nè il Tizzoni però ricercano la ragione, perchè debba trovarsi questa ordinata disposizione nei nuclei di molte cellule giganti.

D'altronde se si studiano le cellule giganti di altri processi patologici, sulle quali non può cader dubbio della loro origine prolifera, non si rinviene mai quella disposizione di nuclei, nè gli altri caratteri da me suesposti: infatti se rivolgiamo la nostra attenzione alle cellule giganti scoperte dal Bizzozero nel midollo delle ossa, e nella milza (3), troviamo che sono caratterizzate da ammassi di nuclei centrali o più o meno raccolti nel centro, che non hanno mai pareti e sono di forma ovalare o reniformi. Io ho avuto l'opportunità di osservare innumerevoli tagli di un sarcoma polimorfo studiato dal prof. Durante (4), in cui spesso si vedevano enormi cellule con un gruppo caratteristico di nuclei di proliferazione nel centro. Trovandomi presso il medesimo prof. Durante, quando egli preparava il materiale pel suo lavoro sui tumori (5), ho potuto ancora molto spesso vedere grosse cellule di proliferazione, e negli epiteliomi, e nei sarcomi magno e fuso-cellulare, le quali avevano nuclei centrali, e mancavano costantemente di tutti quei caratteri, che si rinvengono nelle cellule giganti del tubercolo.

Rivolgendo la mia attenzione a questi fatti, cioè alla centralità dei nuclei nelle cellule, nelle quali non si può mettere in dubbio l'origine prolifera, e non sapendomi dar ragione colla medesima origine della disposizione dei nuclei, che il Colamiatti dice elegante, nelle cellule giganti del tubercolo, maggiormente mi sono confermato nell'opinione, che le cellule giganti tubercolari sono di origine vasale, origine la quale per se stessa spiega tant'ordine ne' nuclei, e tutti i caratteri delle cellule giganti descritte.

Non ho incluse tra le cellule di origine prolifera quelle del sarcoma giganto-cellulare, e quelle della carie delle ossa, poichè anche in questi processi patologici le cellule giganti possono essere di origine vasale, e quindi presentare caratteri somiglianti alle cellule giganti del tubercolo. Il Visconti riconobbe l'origine vasale nelle cellule del sarcoma giganto-cellulare (6). Il dottor S. Cacciola mio amico, e che studia nel medesimo laboratorio, quando io aveva quasi completate le ricerche sulla cellula gigante del tubercolo, si occupò dell'origine delle cellule giganti del sarcoma giganto-cellulare e di quelle della carie delle ossa, e provò col suo lavoro (7) la provenienza vasale di quelle cellule giganti.

Molti di coloro, i quali si occuparono dell'origine delle cellule giganti del tubercolo, accettarono col Langhans l'idea, che le cellule giganti oltre all'origine prolifera potessero anche qualche volta provenire dalla fusione di elementi minori, e sostennero tal opinione appoggiandosi alle osservazioni seguenti.

(1) L. c. pag. 5. (2) L. c. pag. 27. (3) Giornale Morgagni 1869 pag. 465. (4) Atti dell'Accad. med. di Roma pag. 81 anno 1876. (5) Durante; *Epiteliomi*. Tesi di concorso per la cattedra di anatomia pat. di Catania, ottobre 1875. (6) L. c. pag. 120. (7) Gazzetta medica di Roma, maggio 1877.

Rustizki aveva richiamato l'attenzione su di alcune cellule giganti rinvenute nell'interno di corpi estranei porosi messi nei sacchi linfatici delle rane, e aveva riconosciuto che provenissero dalla fusione di elementi minori. Ziegler aveva ottenuto cellule giganti tra due vetrini introdotti nel tessuto connettivo sottocutaneo della piega dell'inguine dei cani e conigli, e si era convinto si originassero dalla fusione di cellule più piccole. Il Foà (1), dopo aver prodotto nei conigli una pneumonite tagliando i vaghi e injettando nel polmone polvere di cinabro, aveva trovato nell' interno degli alveoli polmonari o un semplice ammasso di cellule epiteliali un po' ingrossate, contenenti granuli di cinabro, o singole cellule epiteliali di volume assai cresciuto con due o quattro nuclei e con ammassi di granulazioni colorate, o finalmente dei grandi ammassi di protoplasma, che parevano sfiancare le pareti dell'alveolo contenenti molti nuclei, e nummoli circoscritti di granuli colorati. Questi nuclei colla loro disposizione, secondo il succitato osservatore, appartenevano da prima a singole cellule, dalla cui totale fusione derivava la massa protoplasmatica in discorso.

Per quanto fossi convinto dell' origine vasale delle cellule giganti del tubercolo, stando ai caratteri suesposti, i quali escludono ancora l' origine da fusione, pure non tralasciai occuparmi di qualche esperimento in proposito.

Nel corso scolastico 1876 raccolsi in questa Clinica chirurgica un pezzo di sughero, poichè essendo stato introdotto dal prof. Mazzoni in mezzo ai tessuti vivi per mantenere in giusta posizione il mascellare inferiore resecato nei suoi condili, vi era rimasto ventiquattro giorni. Dopo non lungo tempo, avendolo conservato nella soluzione di acido cromico (il $\frac{1}{2}$ per 100), eseguii dei sottili tagli, e li sottoposi al microscopio. Ecco quanto osservai: Per l' ordinario si notavano delle cellule vegetali ripiene di corpuscoli semoventi, ma qualche volta il vano delle cellule vegetali era riempito di sostanza di apparenza protoplasmatica, in mezzo alla quale si trovavano molti nuclei somiglianti ai suaccennati, ed allora il contenuto di una capsula vegetale ricordava una cellula gigante.

Questo mio esperimento non è dissimile da quello del Rustizki: però in me ingenerò il dubbio, che quegli ammassi protoplasmatici con nuclei disseminati non fossero che coaguli di essudati fibrinosi, in mezzo a cui si trovavano impigliati corpuscoli di migrazione. Il prof. Durante, osservando quei preparati, impressionato anche egli da una tale apparenza, manifestò in proposito all'Accademia Medica di Roma il suo proponimento di studiare tal argomento, onde possibilmente risolverne la questione.

È d' uopo ritenere perciò, che intorno alla teoria basata su questi esperimenti ancora non è detta l'ultima parola: ma volendo anche accettare una tale teoria, per quanto queste osservazioni possano valere a provare la fusione di più elementi nell'interno di spazî circoscritti, non possono al certo avere alcun valore a confermare l'idea della produzione libera di cellule giganti da fusione in mezzo ai tessuti.

Dopo questa riflessione io credo che se si deve accettare la probabilità, che le cellule tubercolari si fondano per costituire cellule giganti, si debba solamente accettare per gli elementi endovasali, cioè: gli endotelii dei vasi, prendendo parte al processo tubercolare, aumentano di volume e proliferano, ma trovando una resistenza

(1) L. c.

ad occupare maggiore spazio per le pareti vasali, e per la medesima disposizione, tendono a fondersi col loro protoplasma; ne favorisce allora la fusione il liquido circolante, il quale, infiltrando il protoplasma delle cellule endoteliali, e coagulando, dà un'apparenza omogenea a tutta la massa protoplasmatica. Il preparato da me rinvenuto nella tubercolosi della mammella, nel quale si vedono su di un lato della cellula gigante endotelii col loro protoplasma in parte ben conservato, favorisce la mia idea.

Sta quindi per me in questo special modo di costituirsi il trombo la differenza di aspetto delle cellule giganti che il Colamiatti e il Tizzoni dissero cellule giganti vere, da quelle che i medesimi osservatori riconobbero per pseudo-cellule giganti. Nelle prime predomina la proliferazione delle cellule endoteliali, l'aumento in volume del protoplasma di queste cellule, che si fonde, ed in minima parte vi concorre il coagulo fibrinoso; nelle seconde invece predomina il coagulo fibrinoso, e in questo rimangono imbrigliati i corpusculi rossi e bianchi del sangue.

Mi corre l' obbligo in questo punto di ricordare che il giorno 25 febbraio prossimo scorso, quando mi decisi comunicare queste mie ricerche all' Accademia Medica di Roma, l' egregio prof. Ettore Marchiafava, aiuto nella cattedra di Anatomia patologica di questa Università, mostrò dei preparati di tubercolosi del polmone, i quali non erano dissimili da alcuni de' miei, che io presentava al consesso scientifico. Anche il Marchiafava raggiungeva i medesimi miei risultati, ed era convinto dell' origine vasale, se non altro, secondo lui, per una parte delle cellule giganti del tubercolo. Nella sua opinione quindi si accostava a quella del Tizzoni, del Colamiatti, ecc.

Hering opinò che la massa granulosa protoplasmatica delle cellule giganti fosse il contenuto vasale coagulato per l' azione dei liquidi conservativi.

Si oppone a ciò il fatto di aver io spesso rinvenuto rottami di cellule giganti in mezzo alla degenerazione caseosa; ciò suppone la preesistenza del coagulo alla morte dell' individuo tubercoloso. Inoltre io ho potuto costatare la presenza delle cellule giganti anche nei tagli a fresco delle glandole tubercolari.

Coloro, i quali hanno ammesso l' origine vasale per tutte le cellule polinucleate del tubercolo, non sono stati concordi nello stabilire, se tali corpi provenivano dal sistema vasale sanguigno, o dal sistema vasale linfatico.

Dalle mie varie osservazioni mi sono convinto che le cellule giganti del tubercolo possono originarsi nell' uno e nell' altro sistema di vasi: esistono cioè cellule giganti di produzione vasale sanguigna e cellule giganti di produzione vasale linfatica.

Il diametro ordinariamente piccolo delle cellule giganti del tubercolo del polmone, la presenza di pareti con strie circolari, la moltiplicità, l' aspetto fusiforme, la disposizione dei nuclei, il colore spesso gialliccio, o qualche volta giallo-verde del contenuto, la presenza non rara di grossi granuli, che ricordano i globuli del sangue in disfacimento, o la presenza di globuli ancor ben conservati, che ricordano i corpuscoli sanguigni, furono tutti indizî, i quali mi convinsero che le cellule giganti della spessezza dei tubercoli del polmone provengono dai vasi sanguigni. Però con ciò non intendo escludere del tutto che nel tubercolo del polmone vi possano esser cellule giganti di origine vasale linfatica, e specialmente per quelle di minimo diametro, nelle quali non sono rimarchevoli caratteri speciali.

Sono evidentemente poi trombi sanguigni quei corpi, che s' incontrano sulla

periferia dei tubercoli del polmone, sulla periferia dei tubercoli delle glandole linfatiche ecc., e che il Colamiatti ed il Tizzoni chiamarono pseudo-cellule giganti.

Ad altra conclusione sono stato portato per le cellule giganti del centro dei tubercoli delle glandole linfatiche, e specialmente nel caso da me descritto di tubercolosi primitiva delle glandole linfatiche cervicali.

La mancanza in quegli enormi corpi polinucleati di pareti, che ricordino le tuniche vasali sanguigne, mi fece sospettare l'origine vasale linfatica. Non esistono vasi sanguigni del diametro di 0,080^{mm} che non abbiano ben sviluppate pareti vasali. Nè potrà objettarsi che le pareti vennero distrutte o riassorbite, poichè le mie osservazioni furono fatte su tubercoli recentissimi, ne' quali, come nei tubercoli del polmone o in quelli delle mammelle, le cellule giganti avrebbero dovuto conservare, almeno qualche volta, pareti rappresentate da strie circolari. Ed a chi pensasse che l'enorme grandezza delle cellule giganti del centro del tubercolo delle glandole linfatiche potesse esser causata assolutamente dall'ingrossarsi e proliferare degli endotelii del vase d'origine, dirò che ciò dovrebbe accadere principalmente in quelle cellule giganti cariche di nuclei, come quelle del tubercolo del polmone (Fig. 4): ma io invece ho visto nel centro dei tubercoli delle glandole linfatiche del mio caso enormi cellule giganti con nuclei scarsi, e che intanto non avevano indizio di pareti.

È comune il fatto d'incontrare nelle glandole linfatiche normali vasi linfatici e lagune linfatiche della grossezza di 0,080^{mm}. In tali vasi le pareti sono tenuissime; quindi trova fondamento l'idea che le cellule giganti del centro del tubercolo delle glandole linfatiche siano di origine vasale linfatica.

Schüppel ha negato l'origine vasale linfatica, specialmente alle cellule giganti del tubercolo delle glandole linfatiche, per aver incontrato cellule giganti nei follicoli. Si sa che nei follicoli delle glandole linfatiche non v'esistono vasi linfatici.

A ciò sarebbe da objettare che i vasi sanguigni, i quali penetrano nel centro del follicolo, sono sempre vasi di piccolissimo diametro; ma siccome lo Schüppel non ha parlato della grandezza, ne' dei caratteri istologici minuti delle cellule giganti da lui rinvenute nel follicolo, e si è espresso in un modo tutto favorevole per l'origine vasale sanguigna, è a supporsi che egli incontrò qualche trombo di quei vasi sanguigni, i quali penetrano nel follicolo. Dall'osservazione quindi di quelle piccole cellule giganti o trombi sanguigni nel centro del follicolo egli trasse un principio generale, e mise sotto la stessa categoria tutte le cellule giganti, che s'incontrano nelle glandole linfatiche tubercolari.

Ma ammesso anche che lo Schüppel avesse visto nel follicolo delle glandole linfatiche proprio quelle false cellule giganti, le quali io riconosco d'origine vasale linfatica, credo non possiamo attenerci ad una tale osservazione.

Io conservo preparati di glandole linfatiche normali, in cui i linfatici furono injettati con gelatina di pesce colorata: in questi preparati si trovano trombi di injezione di forma cilindrica, che si vedono nel follicolo, e pur nondimeno risiedono nel sistema linfatico. Probabilmente, credo, o sono trombi dei seni, o trombi dei vasi linfatici, che per la direzione in cui cadde il taglio si mostrano nella spessezza del follicolo.

Con ciò non intendo sostenere assolutamente che tutte le cellule giganti del centro dei tubercoli delle glandole linfatiche sieno di origine vasale linfatica, poichè

vi sono delle glandole linfatiche, nelle quali i tubercoli si sono originati in un tessuto connettivo di nuova formazione, in cui sono anche vasi sanguigni dilatati o neoformati. Così in quelle glandole del cavo ascellare prese da tubercolosi secondaria non poteva più dirsi che i tubercoli avessero sede in un tessuto glandolare, ma bensì in un tessuto ricco di congiuntivo neoformato, ed eminentemente vascolare. Credo quindi poter accettar l'origine vasale linfatica per quelle enormi cellule giganti con scarsi e grandi nuclei del centro di quei tubercoli, i quali si originarono nel tessuto midollare delle glandole, dove cioè i vasi sanguigni hanno un piccolo calibro.

Nel caso descritto di tubercolosi delle glandole linfatiche cervicali i tubercoli erano disseminati nella sostanza midollare, mentre le glandole avevano conservato un aspetto poco lontano dal normale, e le cellule giganti del centro dei tubercoli erano grandi e con scarsi nuclei; avevano la forma circolare od ovalare, e raramente di un cilindro tagliato nel diametro longitudinale (come si vede nella Fig. 11 *a*).

Le cellule giganti dei tubercoli della mammella e di altri organi (tra i quali le glandole linfatiche che subirono trasformazioni di tessuti) ora si presentavano con caratteri da ricordare i vasi sanguigni, ed ora con caratteri da ricordare i vasi linfatici.

Stabilita l'origine vasale delle cellule giganti del tubercolo, sorge la domanda, quali sono le cause di tal produzione?

Difficilissimo è un tal compito, ed io non farò che esporre delle ipotesi probabili.

Il Klebs inoculando della sostanza tubercolare in una cavia trovò nel diaframma una serie di cellule giganti, le quali erano disposte secondo il decorso dei vasi linfatici. Questo fatto appoggerebbe l'idea che la sostanza tubercolare assorbita dai linfatici sia causa di trombi o di cellule giganti. Quindi coll'esperimento del Klebs si può concludere con la ipotesi che la causa della trombosi, per la quale si originano le cellule giganti sia rappresentata da sostanza infettiva penetrata nei linfatici.

Lo Schüppel manifesta l'idea, che nei casi di tubercolosi migliare generale, per quei tubercoli, i quali cominciano con una cellula gigante centrale, bisogna trovare nel sangue la ragione della diffusione. Cioè, una sostanza infettiva specifica, o sottili elementi tubercolari in circolazione sarebbero per lui la causa per sviluppo della cellula gigante nell'interno dei vasi sanguigni.

Per lo Schüppel quindi le cellule giganti non solo avrebbero origine vasale sanguigna, ma la causa che n'eccitò la produzione sarebbe un elemento specifico circolante.

Nell'esame della tubercolosi delle glandole linfatiche notai il fatto, che i giovani tubercoli con cellule giganti centrali costantemente si trovavano in vicinanza dei focolai caseosi: ciò mi fece sospettare, tenendo anche conto dell'osservazione del Klebs, che la sostanza caseosa del focolare penetrata nei linfatici fosse la causa determinante il trombo o false cellule giganti, e queste dassero origine al tubercolo. Qualche volta, come ho riportato nelle osservazioni sulla periferia dei tubercoli del polmone, notai vasi sanguigni, in cui il contenuto insieme agli endotelii era per trasformarsi in cellula gigante. Per questa osservazione sospettai che altra volta per la diffusione di un processo di flogosi alle pareti vasali si potesse determinare la trombosi, e quindi cellule giganti: oppure che gli elementi delle pareti vasali attaccati

dal processo di granulazione tubercolare trasformandosi in prodotti di granulazioni, prendessero l'aspetto di quei corpi, che furono detti cellule giganti.

In ultimo rimane la questione dell'essenzialità della cellula gigante nel tubercolo. Come ho notato altrove, ricercando con esattezza nella tubercolosi migliare acuta del polmone, s'incontrano qualche volta tubercoli privi di cellule giganti. Inoltre l'origine vasale delle cellule giganti del tubercolo è per se stessa un argomento negativo. È vero che nella tubercolosi bisogna ammettere una condizione speciale, la quale esercitando la sua azione sulle pareti vasali e sul liquido circolante determini con tanta frequenza le cellule giganti da dover riconoscere nel tubercolo la presenza di esse quasi costantemente, ma devesi ancora convenire che se il tubercolo per condizioni infettive generali si origina in sedi, in cui non esistono vasi linfatici o sanguigni, la cellula gigante deve mancare. Il prof. Armanni riproduceva la tubercolosi nella cavia inoculando sulla cornea dell'animale la sostanza caseosa soluta nell'acqua distillata: esaminando i noduli migliari, che si stabilivano sulla cornea venti giorni dopo l'inoculazione, li trovava costituiti da un cumulo di elementi linfoidi: l'osservatore non parlò di cellule giganti, ma accennò alla tubercolosi generale, che ne seguiva all'animale.

Quindi sebbene la cellula gigante per condizioni inerenti al processo tubercolare manca raramente nel tubercolo, pur nulladimeno non può riconoscersi come un elemento costitutivo essenziale.

Lo Schüppel annette tal importanza alla presenza della cellula gigante, specialmente nella tubercolosi delle glandole linfatiche, che la crede in questi organi indizio infallibile della tubercolosi escludendo qualunque altro processo patologico.

Se la cellula gigante del tubercolo è un trombo dei vasi sanguigni, come lo Schüppel medesimo riconosce, devesi convenire che essendo varie le cause della trombosi si può trovare anche in altri processi patologici. Infatti io ho rinvenuto false cellule giganti in glandole infiammate cronicamente, che nè clinicamente, nè istologicamente potevansi considerare tubercolose. Non riporto il caso per brevità.

È d'uopo però riconoscere il fatto della frequenza: nella tubercolosi la cellula gigante, meno in singoli tubercoli, si trova costantemente; in altri processi poi, come nell'infiammazione cronica delle glandole linfatiche, s'incontra eccezionalmente, o per dir meglio con pochissima frequenza.

In conclusione i grandi corpi polinucleati del tubercolo, che furono detti cellule giganti, per me non sono che false cellule di origine vasale, mentre le grosse cellule tubercolari con tre o quattro nuclei centrali, che raramente s'incontrano, non sono stadî primordiali di sviluppo delle medesime false cellule giganti, ma elementi tubercolari in via di proliferazione.

Può dar origine a quei grandi corpi polinucleati del tubercolo tanto il sistema vasale sanguigno, quanto il sistema vasale linfatico. Predominano quelli d'origine vasale sanguigna nel tubercolo del polmone, e quelli d'origine vasale linfatica nei tubercoli sviluppati nel tessuto midollare delle glandole linfatiche.

Le cellule giganti non sono elementi costitutivi essenziali del tubercolo, quantunque vi si rinvengano quasi costantemente.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. Sezione di un tubercolo del polmone (oc. 3. ob. 7. Harnatch) trattato col dilavamento. *a* Cellula gig. del centro del nodulo vista nel suo diametro traverso, e nelle connessioni col reticolo. *b* Elemento tubercolare con gruppo di nuclei centrali.

Fig. 2. Idem (idem) *a* Cellula gig. della spessezza del tubercolo vista in sezione obliqua.

Fig. 3. Idem (idem) *a* Cellula gig. del centro del tubercolo vista nel diametro longitudinale.

Fig. 4. Idem (idem) *a* Cellula gig. centrale con molteplici nuclei.

Fig. 5. Idem (idem) *a b* Cellula gig. con ramo collaterale minore.

Fig. 6. Idem (idem) *a a* Cellula gig. della spessezza del tubercolo, la quale per i tre quarti di sua lunghezza presentavasi priva di sostanza granulosa, e come un vase avvizzito. *c* Elemento endotelioide del tubercolo con nucleo in proliferazione.

Fig. 7. Idem (idem) *a a* Cellula gig. della spessezza del tubercolo con ramo collaterale minore. *b* Cellula gig. di piccolo diametro.

Fig. 8. Idem (idem) *a* Cellula gig. vista nel diametro longitudinale. *b* Cellula gig. vista nel diametro trasverso, nella quale notavasi una parete esterna dell'aspetto di zona vitrea o jalina.

Fig. 9. Idem (idem) *a* Cellula gig. sezionata nel diametro longitudinale, la quale era situata nel centro di un cumulo di elementi endotelioidi, e mostrava evidentemente dopo il dilavamento le sue connessioni col reticolo. *b* Cellula gigante, nel di cui centro vedevansi dei corpuscoli somiglianti ai corpuscoli del sangue.

Fig. 10. Sezione di un tubercolo delle glandole linfatiche cervicali (idem ingran.) *a a* Cellula gig. centrale. *b b* Cellule endotelioidi col nucleo in proliferazione.

Fig. 11. Idem (idem) *a* Cellula gig. vista nel diametro longitudinale. *b* Cellula endotelioide con nucleo in proliferazione.

Fig. 12. Sezione di un tubercolo della mammella (idem ingran.) *a* Cellula gig., in cui al lato destro si notavano una serie d'endotelii, che gradatamente fondevano il loro protoplasma colla sostanza granulosa della medesima cellula gig., per apparire sul lato sinistro come nuclei di questa.

Fig. 13. Idem (idem) *a* Cellula gigante, nella quale notavasi una parete esterna dell' aspetto di una zona vitrea o jalina a doppio contorno. *b* Cellula gig. chiusa in un alveolo fibrillare. *c* Cellula gig. di piccolo diametro. *e e* Cellule endoteliali con nucleo centrale in proliferazione.

Fig. 14. *a* Cellula gig. con pareti fibrillari. *b* Cellula gig. con corpuscoli somiglianti a quelli del sangue. *d* Cellula gig. con grossi granuli centrali da ricordare corpuscoli del sangue in disfacimento. *f* Cellula gig. in cui il contenuto era sostituito da un vacuolo, e la parete si presentava in parte fibrillare, in parte come una zona vitrea. *c e g l m n o q* Cellule gig. diverse. *h k y p* Cellule tubercolari con gruppo di nuclei centrali.

Fig. 15. Della cellula gigante *f* della figura 14 vista capovolta, vista cioè in una sezione dove scompariva il vacuolo.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 7.

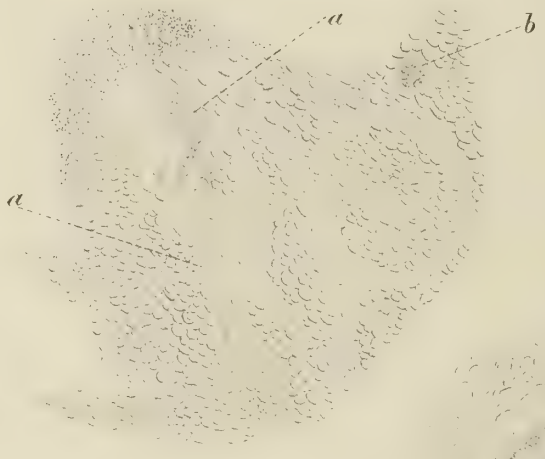


Fig. 6.

Fig. 12.

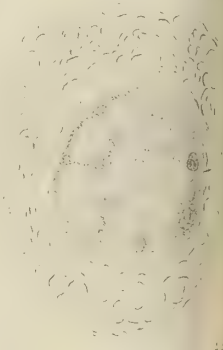


Fig. 10.

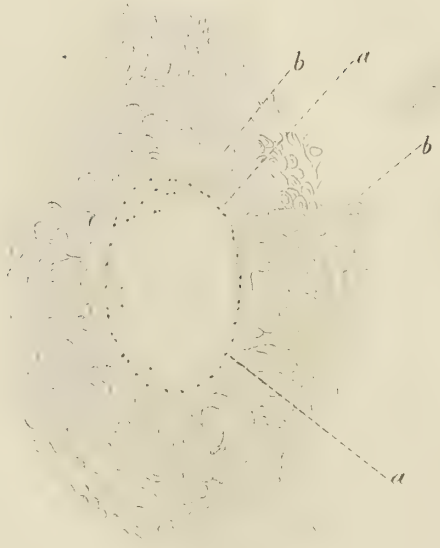


Fig. 11.

Lit. G. Cleman. Roma. Via Cesari N.o 37.

ig. 3.

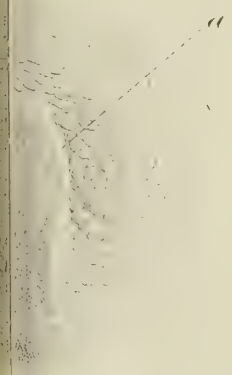


Fig. 4.

Fig. 5.

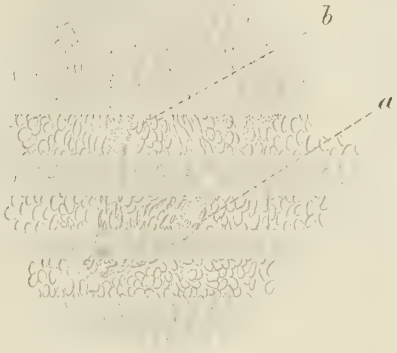
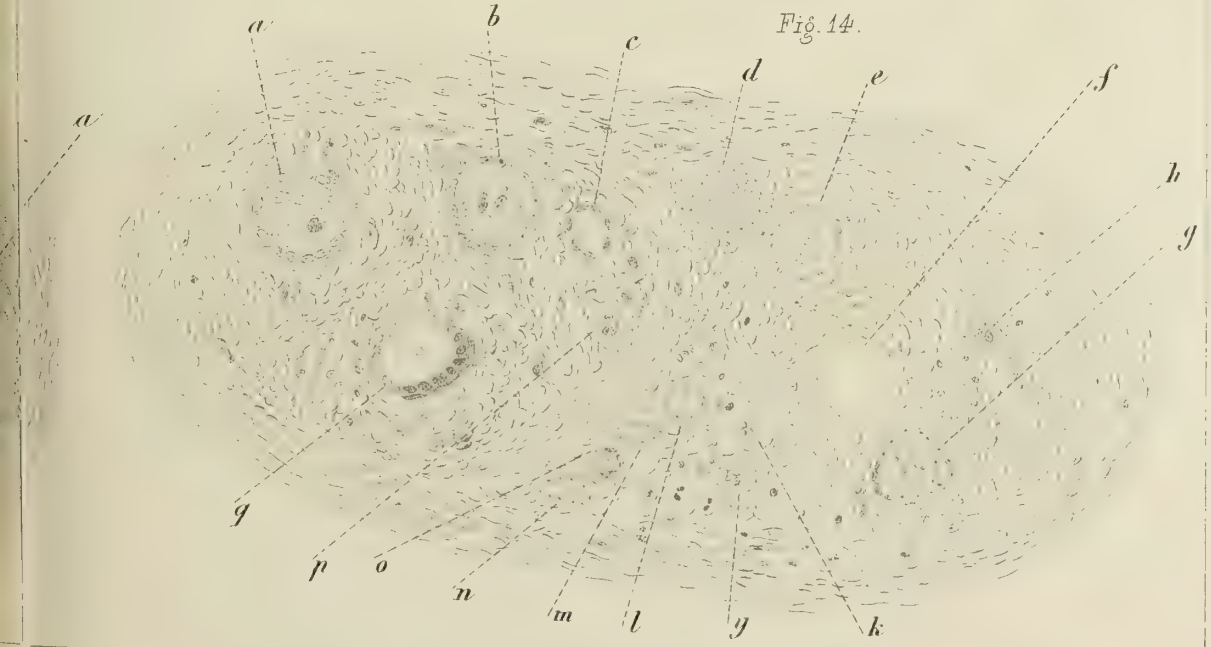


Fig. 8.

Fig. 9

Fig. 15.

Fig. 14.



U. Colonna inc.

Fig. 1

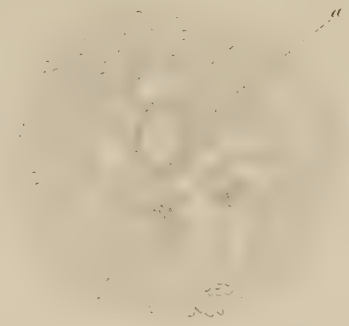


Fig. 2

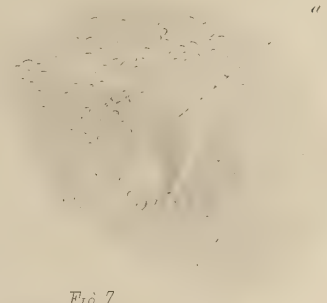


Fig. 3

Fig. 4.

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7.

Fig. 8

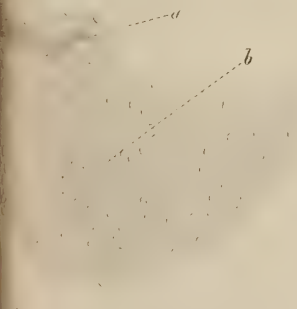


Fig. 9

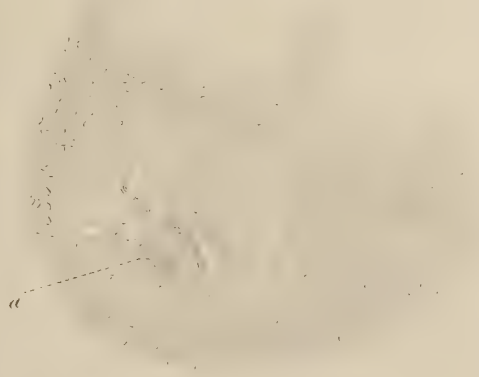
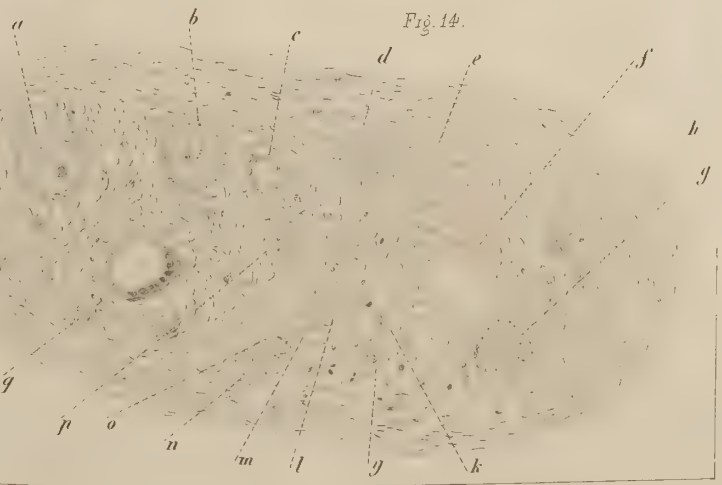


Fig. 10

Fig. 11.

Fig. 15.

Fig. 14.



Risposta del Socio P. VOLPICELLI alle obbiezioni fatte dal prof. G. PISATI contro la moderna teorica di Melloni sulla elettrostatica induzione

letta nella seduta del 4 giugno 1876.

---

§ 1.

Il sig. G. Pisati, professore di Fisica sperimentale nella Università di Palermo, ha pubblicato nella Gazzetta Chimica Italiana (Palermo an. 1875, tomo V) una Memoria col titolo: *Difesa dell'antica teoria della induzione elettrostatica.* Questa difesa risulta principalmente di due serie di sperienze, nelle quali l'inducente consiste sempre in una macchina elettrica.

Nella prima serie l'autore si serve della forma, che la elettrica luce manifesta nella oscurità sulle punte metalliche; mentre nella seconda serie egli si serve del noto mescuglio di zolfo e minio, spinto fortemente per mezzo di un soffietto, a traverso lo spazio fra l'indotto e l'inducente (macchina elettrica). Poche riflessioni fanno d'uopo a mostrare, che le indicate sperienze del Pisati, nè difendono dagli errori l'antica teorica della elettrostatica influenza, nè abbattono quella moderna del Melloni sullo stesso argomento.

A cominciare dalla prima serie facciamo riflettere, che la macchina elettrica non è un inducente acconcio per l'analisi delicatissima dei fenomeni relativi alla elettrostatica induzione. Imperocchè: 1° la macchina elettrica è una inducente *variabile*, mentre per l'analisi medesima fa d'uopo che l'inducente sia costante, per lo meno in tutto il tempo della sperienza; 2° la macchina elettrica mentre agisce, carica di elettricità tutto ciò che la circonda, quindi la induzione si opera sopra corpi elettrizzati; e ciò si deve del tutto evitare, perchè altera di molto quei fenomeni, che semplicemente ed unicamente alla induzione appartengono, la quale perciò si deve produrre in un indotto nello stato suo neutrale; 3° la macchina elettrica per avere elettrizzato tutto l'ambiente, questo induce da ogni parte, laonde complica maggiormente i fenomeni della elettrostatica induzione.

§ 2.

Ora passiamo ad analizzare le interpretazioni date dall'autore, contro la teorica del Melloni, agli effetti di elettrica luce prodotti sopra i conduttori armati di metalliche punte, servendoci delle stesse figure pubblicate dall'oppositore nella sua citata Memoria.

Il Pisati non ha considerato due fatti, cioè: 1° che i fenomeni luminosi, rappresentati dalla 1ª figura, non incontrano induzione veruna, e perciò non possono servire di criterio nelle sperienze rappresentate dalle figure, nelle quali per l'attuale

quistione debbono i fenomeni luminosi essere soggetti alla induzione; 2° non ha egli considerato neppure, che sulla punta si produce la stelletta e non il fiocco, tanto allorchè nella punta stessa entra l'elettricità positiva, quanto allorchè la negativa esce dalla medesima punta. Perciò, manifestandosi nella punta la stelletta, si deve restare in dubbio, se questa manifestazione appartenga od all'ingresso della elettricità positiva nella punta, od all'egresso della negativa dalla punta stessa. Di più, siccome la punta è soggetta alla induzione della macchina elettrica, così può verificarsi ancora che anche l'uscita del positivo dalla punta si manifesti con una stelletta e non con un fiocco, lo che genera un secondo dubbio.

Per togliere il primo dubbio si deve ricorrere ad un opportuno piano di prova, il quale convenientemente applicato sulla punta, mostra in ognuna delle sperienze del Pisati, relative alle figure 2, 3, 4, 5, e 6, che la elettricità entra od esce dalla punta, ma sempre *positiva*, e che non esce dalla medesima la elettricità *negativa*.

Per togliere il secondo dubbio, basta che la palla indotta, guernita di punta ed isolata, si porti presso il bottone di un elettroscopio a pile secche; poichè se la foglia d'oro di questo istromento manifesterà la positiva, saremo certi che nella punta entrò questa elettricità; e se manifesterà la negativa, saremo certi che dalla punta uscì la positiva. Nelle punte coesistono i due poteri, assorbente uno e disperdente l'altro. Quando la punta è applicata ad un conduttore isolato ed indotto, in questo caso allorchè la punta si trovi collocata troppo vicino all'inducente, il suo potere assorbente supera quello disperdente; perciò nel caso medesimo l'indotto, portato fuori della induzione ed accostato all'elettroscopio a pile secche, si mostrerà carico di elettricità omonima della inducente: ma ciò non avviene perchè la indotta di prima specie siasi dispersa per la punta, ma unicamente perchè si è accresciuta la omonima della inducente sull'indotto stesso, mediante il potere assorbente della medesima punta. Inoltre si deve senza dubbio trovare una distanza fra la punta e l'inducente, nella quale l'indotto, portato sull'elettroscopio, si mostra neutrale. Ciò avviene perchè gli effetti dei due poteri, uno assorbente l'altro emittente, al contatto dell'aria si fanno equilibrio. Mi è sempre riescito trovare per tentativi questa distanza.

Non manca mai fra l'indotto e la punta una distanza, per la quale il potere disperdente della punta superi quello assorbente della medesima, ed allora l'indotto, portato nell'isolamento all'elettroscopio, si mostra carico di elettricità contraria della inducente. Ciò si verifica perchè la indotta di prima specie non può disperdersi nè per la punta, nè per l'aria finchè rimane tale, lo che dimostra essa indotta non avere tensione. Trovata questa distanza, si otterrà sempre dall'indotto il medesimo effetto, ripetendo quanto si vuole, alla distanza medesima, questa sperienza. Inoltre si troverà che più dura la induzione sul corpo indotto ed isolato, più cresce sul medesimo la perdita di elettricità omonima della inducente.

La distanza di cui parliamo dipende ancora dalla tensione della inducente; poichè questa distanza deve crescere coll'aumentarsi della elettrica tensione induttrice. Qualunque sia la distanza della inducente dall'indotto, armato di una o più punte applicate in quell'estremo suo che si avvicina più di tutti all'inducente stesso, non diminuirà mai su questo la indotta di prima specie, sebbene facciasi durare molto la induzione. Ciò dimostra ad evidenza che la medesima indotta non possiede tensione.

Effetti del tutto simili si ottengono sul cilindro indotto, anche quando ad esso non si applichi veruna punta; ma in tal caso a pari condizioni debbono modificarsi le distanze fra l'indotto e l'inducente. Tutto ciò fu verificato più volte da me, unitamente al mio assistente sig. ingegnere Paparozzi. Il fatto che dalle punte per mezzo di un opportuno piano di prova non si ottiene mai il negativo, dimostra chiaramente non essere la prima serie delle sperienze dall'autore istituite colle punte, un argomento valido, nè a difendere l'antica teorica sulla elettrostatica influenza, nè ad abbattere la nuova del Melloni.

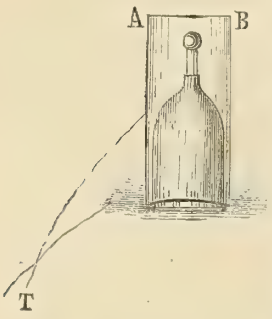
§ 3.

Dopo ciò passiamo ad analizzare la interpretazione che ha dato l'autore agli effetti della seconda serie delle sue sperienze, mediante la mescolanza delle polveri di zolfo e di minio. Il ch. Antonio Nobile di Napoli fu il primo a tentare di servirsi del mescuglio di zolfo e minio, per analizzare il fenomeno della induzione elettrostatica, ma esso dovette abbandonare questo mezzo, avendolo riconosciuto per più motivi non soddisfacente (V. Memorie della R. Accademia delle scienze di Napoli, vol. 2° 1857, pag. XLI, lin. 15 e seguenti). Primieramente dobbiamo riflettere, che in questa seconda serie di sperienze, i delicatissimi fenomeni, che specialmente si riferiscono alla elettrostatica induzione, non solo vengono alterati dall'uso della macchina elettrica presa per inducente, come risulta dai motivi già sopra esposti da noi riguardo alla prima serie di sperienze; ma vengono inoltre alterati maggiormente, perchè le indicate polveri hanno una elettricità loro propria. Quindi esse pure inducono, e perciò non possono, come pretende l'autore, servire da elettroscopio nelle ricerche attuali. È chiaro dunque, che l'uso delle polveri e della macchina elettrica sono due mezzi che alterano di troppo gli effetti, semplicemente ed unicamente appartenenti alla elettrostatica induzione. Fra le diverse cause turbatrici degli effetti che semplicemente appartengono alla elettrostatica induzione prodotta mediante la macchina elettrica, e spingendo le polveri zolfo e minio con un soffietto, avvi anche l'ondulazione dei dischi, che ricevono la induzione stessa, nei quali la indotta di prima specie per taluni movimenti diviene in parte libera, e per tali altri vincolata. In somma le indicate ondulazioni complicano i fenomeni che semplicemente appartengono alla elettrostatica induzione; perciò questi due mezzi non si debbono adoperare nell'analisi della induzione stessa. Ma passiamo innanzi, e vedremo che adoperando anche questi mezzi nè si può difendere dagli errori l'antica teorica sulla elettrostatica induzione, nè si può distruggere la moderna del Melloni.

Il Pisati nel valersi delle indicate polveri, non ha posto mente a questo fatto, cioè che il minio, per essere positivo, è repulso dal forte positivo della macchina elettrica. Per provare che il minio viene respinto dall'inducente positivo, si facciano cadere dall'alto fra la macchina elettrica inducente ed una palla isolata indotta, le polveri zolfo e minio, e si vedrà che vengono respinte quelle di minio verso la palla indotta. Se facendole cadere ugualmente, ma senza la palla indotta, la repulsione del minio sarà più manifesta. Per conseguenza di ciò, tutti gli effetti delle polveri rappresentate colle figure 8, 9, 10, 11, e 12 dall'autore, si spiegano facilmente con questa repulsione; però aggiuntavi la considerazione, che lo zolfo per essere negativo è attratto dal positivo della macchina, e da quella parte della palla indotta, la quale si trova

più lontana dalla inducente. Imperocchè anche da questa parte fortemente positiva viene respinto il minio, e viene attratto lo zolfo; ed alle figure 11 e 12 dell'autore, il minio si trova in maggior copia sulla sfera indotta, e comunicante col suolo; perchè questa comunicazione avendo dissipato l'omonima della inducente dall'indotto, ha reso più energica la induzione positiva della macchina, e perciò più energica la repulsione del minio dalla macchina stessa. Inoltre la medesima comunicazione, ha pure tolta quella debole repulsione, che procede dalla omonima della inducente, la quale secondo la nuova teorica si trova pure su quella parte della palla indotta ed isolata, che riguarda la inducente, lo che pure produce un aumento di minio sulla medesima palla non isolata. Di più poichè le polveri, prima di giungere sull'inducente e sull'indotto, sono già per attrito elettrizzate, ne viene che il minio respinto dal positivo della macchina induce sull'indotto, ed è attratto da questo, benchè si trovi carico di elettricità del tutto vincolata. Lo zolfo poi non solo è attratto dal positivo della macchina, ma è anche attratto dal conduttore della medesima, perchè induce su questo.

(Fig. *a*)



Gettando polveri di minio presso la superficie AB (fig. *a*) del cilindro metallico comunicante col suolo, ed indotto internamente da una bottiglia di Leida, la superficie stessa nell'interno sarà indotta negativamente. Quindi se la indotta di prima specie potesse influire a traverso le superficie metalliche comunicanti col suolo, dovrebbe il minio essere attratto verso questa superficie. Questo fatto deve attribuirsi alla elettricità delle polveri stesse, le quali perciò inducendo sulla esterna superficie AB, sarebbero attratte da questa. In tal caso si gettino delle polveri presso la esterna superficie AB, le quali non si possano elettrizzare nè per attrito fra loro, nè fra le pareti del soffietto da cui sono spinte. Si vedrà in tal caso che le polveri medesime non sono attratte per nulla dalla esterna superficie AB. Da ciò si conclude che la induzione non agisce punto sopra corpi difesi bene da masse conduttrici non isolate.

Con siffatte osservazioni vediamo ad evidenza, che i fenomeni delle polveri si spiegano, negando all'indotta di prima specie ogni tensione, come si dimostra per mezzo di moltissime altre sperienze. Vediamo altresì che i fenomeni medesimi costituenti la seconda serie delle sperienze del Pisati, fatte da esso colle polveri di zolfo e minio, neppur esse, come le sperienze della prima serie, valgono a proteggere dagli errori l'antica teorica sulla elettrostatica induzione; e molto meno valgono ad annullare quella del Melloni da me sostenuta. Ed in fatti abbiamo veduto che le indicate due serie di sperienze si spiegano facilmente, senza fare uso dell'antica teorica, e senza negare la verità della moderna, che tutta riposa sulla mancanza di tensione, ossia sul perfetto legame della indotta di prima specie prodotto dalla inducente.

§ 4.

Il professor Pisati termina questa sua difesa, tentando spiegare coll'antica teorica sei delle molte sperienze da me pubblicate a favore della teorica del Melloni. Ora noi vedremo che dalle medesime sperienze si deve concludere il contrario di quanto fu concluso dal Pisati.

Nella *prima* sperienza l'autore confessa che « *tutta l'indotta di prima specie* è mantenuta sulla estremità B (fig. 13), attrattavi dalla contraria elettricità inducente, e che allontanando l'inducente C, la indotta di prima specie si distribuisce, secondo le note leggi, sul conduttore BAD, e si appalesa colla deviazione della foglia d'oro ». Per mostrare che da questa confessione dell'autore discende potersi soltanto colla moderna teorica di Melloni spiegare il fatto riferito in questa sperienza, e non con la teorica antica, basta domandare all'autore medesimo, perchè la indotta di prima specie, la quale è mantenuta nella estremità B dall'inducente C, non si distribuisce secondo le note leggi sul conduttore BAD, senza che si allontani l'inducente stesso? Bisogna rispondere: ciò verificarsi perchè la indotta di prima specie rimane *vincolata* dalla inducente C; ma se rimane così vincolata, essa deve aver perduta la facoltà di muoversi, perciò deve avere perduta la sua tensione, per la quale *unicamente* l'elettrico può di per sè muoversi e distribuirsi. Dunque dalla indicata prima sperienza si conclude, contro l'antica teorica, che la indotta di prima specie non ha tensione, come appunto vuole la teorica del Melloni.

Nel dare la spiegazione della mia *seconda sperienza*, l'autore non ha riflettuto, che avvicinando l'estremo P all'altro B (fig. 14), e quindi anche all'inducente C, cresce in P la indotta di prima specie; perciò giunto P in contatto di B, l'elettroscopio secondo l'antica teorica, dovrebbe dare indizio di questa elettricità; ma invece manifesta esso la indotta di seconda specie, come si richiede dalla nuova teorica di Melloni, contro l'antica comunemente adottata. Ora giustamente si domanda, perchè la indotta di prima specie, la quale come tutti sanno uguaglia in quantità quella di seconda, ed in qualità si oppone ad essa, perchè dico non si distribuisce come la medesima, lo che porterebbe una neutralizzazione totale delle due elettricità, le quali si trovano sullo stesso conduttore? Si deve rispondere, che questa neutralizzazione non avviene, perchè la indotta di prima specie non tende.

Riguardo alla spiegazione della *terza* mia sperienza, l'autore così si esprime: « Si mantenga la precedente disposizione (fig. 14), e si applichino due pagliette alla estremità P del cilindro indotto (ed orizzontale). Stabilita e poscia interrotta la comunicazione del filo BA col suolo, la foglia d'oro occupa la sua posizione d'equilibrio. Si metta il filo a contatto colle pagliette, l'elettroscopio accuserà elettricità di seconda specie (l'omonima dell'inducente); si ponga il cilindro PQ in comunicazione col suolo, e la foglia d'oro ritornerà alla sua posizione d'equilibrio ». Ora si domanda: perchè quando l'estremo B tocca queste pagliette annesse all'indotto PQ isolato, l'elettroscopio non accusa l'indotta di prima specie, ma invece accusa la indotta di seconda? Si deve rispondere: perchè quella non possiede tensione, ma bensì la seconda, che per la teorica moderna e contro l'antica, si trova eziandio sull'estremo P del cilindro indotto, ed anche sulle pagliette senza potersi neutralizzare con quella di prima specie, la quale perciò resta del tutto vincolata.

Si domanda inoltre: perchè quando l'indotto PQ comunica col suolo, se coll'estremo B si toccano le pagliette, non è accusata dall'elettroscopio la indotta di prima specie, sebbene questa sia cresciuta sulle pagliette, come pure sull'estremo P? Si deve rispondere: che ciò si verifica perchè la indotta di prima specie, secondo la moderna teorica e contro l'antica, non possiede tensione, perciò non può distribuirsi.

La spiegazione data dall'autore alla mia *quarta* sperienza, conferma sempre più che la indotta di prima specie, finchè rimane tale, non può distribuirsi, e perciò non possiede tensione. In fatti l'oppositore dice: « Quando il cilindro PQ (fig. 14), già comunicante col suolo, si mette a contatto coll'estremo B del filo, si forma un unico sistema indotto, composto dal cilindro, dal filo, dall'elettroscopio, e dalla terra: l'indotta di prima specie si trova nelle parti più vicine all'inducente, e quella di seconda specie nel suolo: per tanto la foglia d'oro non abbandona la sua posizione d'equilibrio. Interrompendo però la comunicazione col suolo, ed allontanando l'inducente C, l'indotta di prima specie si distribuirà su tutto il sistema, e la foglia d'oro si muoverà ». Conferma eziandio questa spiegazione del Pisati, che quando la indotta medesima cessa di essere di prima specie, cioè quando si allontana da essa l'inducente, allora la medesima diviene libera, e può distribuirsi, perchè possiede in *atto* la tensione, che prima era vincolata dalla presenza della inducente, era cioè ridotta virtuale.

Nella spiegazione data dal Pisati alla *quinta* mia sperienza, troviamo negata una verità, e troviamo che il medesimo cade in una contraddizione. L'autore stesso in fatti dice: « la indotta di prima specie invece di distribuirsi su tutta la superficie del corpo indotto, si accumula sulla faccia *prospiciente* il corpo induttore, attrattavi dalla opposta elettricità inducente ». Se però l'autore avesse collocato un piano di prova sul disco AB indotto (fig. 15), sul quale sono i minuzzoli di carta, essendo questo disco in comunicazione col suolo, ed influito dall'altro PQ, avrebbe veduto che portando il piano di prova istesso sull'elettroscopio a pile secche, si manifesta la contraria della inducente, la quale perciò si trovava indotta di prima specie sul piattello minore AB, sul quale stanno i minuzzoli di carta. Questi perciò sono anch'essi carichi per induzione dell'ambiente, ovvero curvilinea, di elettricità indotta di prima specie. Ciò si nega dall'autore, perciò esso nega una verità, come noi dicemmo, la quale forma l'essenza dello sperimento di cui ci occupiamo. In quanto all'accennata contraddizione, questa consiste nell'avere asserito il Pisati, relativamente alla stessa quinta sperienza, « che la indotta di prima specie in vece di distribuirsi su tutta la superficie del corpo indotto, si accumula sulla faccia *prospiciente* il corpo induttore, attrattavi dalla opposta elettricità inducente ». Invece l'autore medesimo, quando rende conto della mia sesta sperienza, dice che « il disco A (fig. 17) si copre tutto di zolfo su *ambedue le sue* faccie » ed appresso dice: « il disco A, come abbiamo visto, per l'influenza di N, si carica *tutto* di elettricità positiva ». Ora siccome il disco A, perchè comunicante col suolo, possiede la sola indotta di prima specie, perciò l'autore, contraddicendosi, ammette che questa elettricità si trovi non solamente nella superficie dell'indotto A, la quale riguarda la inducente N, ma eziandio nell'altra opposta superficie dell'indotto stesso, lo che precedentemente il Pisati aveva negato.

Dobbiamo dichiarare, che le due superficie del piattello AB sono ambedue cariche di elettricità indotta di prima specie; la superiore proviene dalla induzione curvilinea, e la inferiore proviene dalla diretta di PQ; e se domandiamo per qual motivo queste due induzioni non comunichino fra loro, come facilmente si dimostra, dobbiamo rispondere, che ciò avviene perchè non hanno tensione, e che l'acquistano solo quando si sopprima la elettricità inducente contenuta in PQ, come insegna la moderna teorica del Melloni, contro quello che insegna e non dimostra la teorica antica.

Pretende l'autore Pisati che la mia *sesta* sperienza, rappresentata colla fig. 16, sia la stessa di quella dell'autore medesimo, rappresentata da esso colla fig. 17. Non possiamo ammettere questa pretesa coincidenza delle indicate due sperienze, imperocchè nella mia sperienza della fig. 16, i due dischi *ab* e *pq*, si applicano sull'indotto mantenuti fra loro sempre a contatto coll'interposto coibente: mentre nella sperienza della fig. 17 del Pisati, i tre dischi A, B, C si considerano quando sono fra loro separati. Perciò quelle reazioni che si verificano nel primo caso, non possono essere identiche a quelle che si verificano nel secondo. Se con un piano di prova *opportuno*, cioè non condensante per semplicità maggiore, si verifichi lo stato elettrico dei tre dischi A, B, C (fig. 17), prima e dopo investiti dalle polveri di zolfo e minio, si vedrà chiaro che i risultamenti del piano di prova, eziandio condensatore (fig. 16), confermano la nuova teorica del Melloni, e sono in opposizione con quella comunemente adottata. Del resto i fenomeni che offrono i tre dischi A, B, C, per la influenza di N (fig. 17), si spiegano facilmente, colle nostre precedenti osservazioni, senza punto valersi dell'antica teorica, e senza distruggere menomamente la moderna del Melloni.

Inoltre i piani di prova da me adoperati nell'analisi del fenomeno in proposito, sono senza eccezione, giacchè i medesimi, come si dimostra facilmente, manifestano la vera natura dell'elettrico esistente in quel punto dell'indotto, sul quale sono applicati; essi costantemente mostrano esistere la omonima della inducente, pure su quello estremo dell'indotto isolato, che più vicino trovasi all'inducente, senza potersi neutralizzare colla contraria, cioè colla indotta di prima specie; perciò dobbiamo, non ostante qualunque obbiezione, ritenere che questa elettricità non possiede tensione, cioè trovasi del tutto vincolata, perchè *veritas veritati opponi non potest.*

Da tutto ciò discende non potersi ammettere la seguente proposizione del Pisati, cioè che « un conduttore comunicante col suolo, ed interposto tra un corpo inducente, ed uno indotto, produce l'inversione nella polarità elettrica di quest'ultimo ». A me sembra che l'autore abbia corso troppo nell'enunciare questa proposizione, la quale trovasi contraddetta in più guise dalla sperienza. Da quanto abbiamo esposto discende ancora, non essere menomamente sufficienti nè le sperienze, nè i ragionamenti pubblicati dal prof. Pisati, a difendere dagli errori l'antica teorica sulla elettrostatica induzione, come nè pure sufficienti a dimostrare difettosa quella moderna del Melloni.

§ 5.

Il Pisati viene a parlare del piano di prova condensatore a piattelli mobili, rappresentato da esso colla fig. 16 nella sua Memoria citata, quello appunto da me adoperato, a fine di mostrare la presenza della omonima della inducente anche nella parte dell'indotto, che più vicina trovasi all'inducente stesso; ed in tal modo egli si esprime: « Questo fatto, che sembra veramente inesplicabile coll'antica teoria, è invece una delle più luminose conferme della medesima. Esso dipende da ciò, che quando il piano di prova è posto tra il corpo induttore ed il cilindro indotto, il piatto *pq* pur'essendo in comunicazione col suolo, è fortemente elettrizzato della indotta di prima specie; la quale anzichè esser priva di tensione e dissimulata, esercita per proprio conto, attraverso lo strato di vernice ed il disco *ab*, una energica induzione sul cilindro indotto: questo per tanto sulla stessa faccia prospiciente l'induttore, presenta tutte e due le opposte elettricità separate da una regione neutra ».

A convincersi della falsità di questo asserto dell'autore, si pratichi nel modo seguente: Si esponga *solo* questo piano di prova alla induzione di un induttore, che non sia però la macchina elettrica, per le ragioni su esposte; presentando l'armatura *pq* che comunica col suolo all'induttore stesso, e ponendo in momentanea comunicazione pure con la Terra l'altro dischetto *ab* isolato, egli è certo che questo rimarrà caricato della indotta di prima specie, e se sarà stato influito, come vuole Pisati, dal disco *pq* che permanentemente comunica col suolo, dovremo trovare su esso *ab* una indotta, che sarà omonima della inducente. La sperienza pel contrario ci manifesta, che il dischetto *ab* rimane *sempre* carico di elettricità contraria a quella inducente. Notiamo fin da ora, che la induzione, la quale si effettua sul disco isolato *ab*, proviene dalla induzione dell'ambiente, e non mai dal traversamento di qualunque influenza pel disco *pq*, comunicante col suolo contro quanto pretende il Pisati.

Dopo ciò vede ognuno, che per effetto della *induzione curvilinea* ricevuta sul piano di prova *ba*, questo resta carico di elettricità contraria della inducente; affinchè dunque possa manifestare, dopo toccato coll'indotto, la omonima della inducente, come in ogni caso si osserva, è necessario che di questa ne prenda tanta dall'indotto medesimo, che una parte basti a neutralizzare la contraria generata sul dischetto *ab* per induzione curvilinea, e l'altra parte si manifesti quando il piano di prova si porta all'elettroscopio.

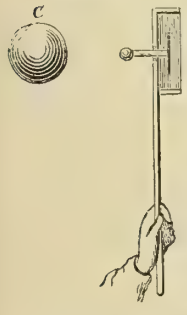
Nè varrebbe punto il dire, che la comunicazione col suolo del dischetto *ab*, il quale serve da saggiatore, abbia potuto alterare il fenomeno; imperocchè oltre ad essere questa una difficoltà, che verun fisico farebbe mai, per altra parte non varrebbe a scemare la efficacia della nostra prova. Poichè non è necessario che il dischetto *ab* si ponga a comunicare col suolo, ma basta aspettare alcun poco, finchè abbia potuto aver tempo a dissiparsi dal disco *ab* quel che trovasi di libero sul medesimo, e praticando pure in questo modo si ottiene lo stesso risultamento. L'autore nella sua già riferita obbiezione si fonda sopra un principio falso, quello cioè che la induzione traversi non solamente lo strato di vernice, ma bensì anche il dischetto *pq*, che si trova in comunicazione con la Terra. Che la induzione non traversi le masse metalliche non isolate, è un fatto stabilito già dagli Accademici del Cimento e poi da Faraday, e confermato dalla sperienza, del quale non può dubitarsi. Di questo argomento avremo occasione parlare diffusamente più oltre; per ora lo scopo nostro è quello di stabilire col mezzo della sperienza, che il piano di prova da noi adoperato (fig. 16) è scevro da qualunque induzione secondaria pretesa dall'autore, e che il piano stesso ci manifesta il vero. Per dimostrare anche in altra guisa, non avere alcun fondamento la obbiezione del Pisati contro l'uso del mio piano di prova condensante, quello cioè che può dirsi veramente voltaico, poichè i suoi piattelli sono mobili, dobbiamo riflettere come segue: L'obbiezione del Pisati consiste nell'ammettere, che il piattello *pq* possa divenire inducente sul piattello *ab*, perchè la induzione produce una indotta contraria sul dischetto *pq*, e per conseguenza questa induzione produrrebbe, secondo Pisati, sul dischetto *ab* una indotta di prima specie omonima della induttrice; e secondo questo oppositore, sarebbe spiegata così la manifestazione della omonima della inducente sul medesimo *ab*, quando viene in contatto dell'estremo dell'indotto più vicino all'induttore.

Se questo che immagina il Pisati fosse vero, si dovrebbe ancora verificare, che crescendo il raggio del disco *pq*, dovrebbe crescere la induzione di questo sopra l'altro disco *ab*, il quale dovrebbe mostrare una quantità maggiore di elettricità omonima; ma invece accade il *contrario*; poichè al crescere del disco *pq*, si verifica nell'altro disco *ab* una carica eteronoma, di cui si rende conto facilmente. Per tanto il fatto che ci offre la sperienza distrugge totalmente quello che presume Pisati avvenire in questa sperienza, come può dedursi da quanto abbiamo ragionato per distruggere quello che presume Riess, riguardo agli effetti d'un piano di prova pure condensatore, ma a dischi fissi (V. Comptes rendus, t. XLVIII, séance du 27 juin 1859, pag. 1162).

Per confermare colla più manifesta evidenza, che l'obbiezione del Pisati, relativa al mio piccolo piano di prova condensante non sussiste, riflettiamo che applicando una punta in qualunque direzione sull'estremo del cilindro indotto il più vicino all'inducente *costante*, si ottiene sempre dall'indotto medesimo, portato all'elettroscopio, una elettrica risultante contraria della inducente. Ciò vuol dire senza dubbio che sull' estremo indicato esiste la indotta di 2ª specie, altrimenti questa non potrebbe disperdersi per la punta stessa. Ma siccome il piano di prova condensante dimostra pur'esso, che la indotta di 2ª specie trovasi sull'indicato estremo, discende che questo piano di prova manifesta quello che realmente trovasi sull'estremo del cilindro indotto il più prossimo all' inducente, e ancora manifesta essere insussistente la obbiezione del Pisati. Di fatti la sperienza evidentemente dimostra, che ripetendo per varie volte il contatto del piano di prova *ab*, coll' estremo dell' indotto il più vicino all' inducente, si giunge a non avere più dal piano di prova stesso manifestazione omonima della induttrice, per averne affatto privato l' indotto. Ora un tale risultamento non potrebbe davvero verificarsi, secondo quello che vuole l'oppositore; poichè ogni volta che il piano di prova viene posto fra l' indotto e l'inducente, si rinnoverebbe la stessa induzione sul medesimo piano, ed il piattello *pq* carico della indotta di prima specie, comunicante col suolo, agirebbe sull'indotto, traversando l'altro disco *ab*, e si dovrebbe per tanto avere la stessa manifestazione di elettricità omonima della inducente, che si ebbe precedentemente.

Questa prova sperimentale, per essere tanto contraria alla spiegazione data dal Pisati, dimostra chiaramente la falsità di questa, ed insieme giustifica l' uso del nostro piano di prova. Come abbiamo detto avanti, il piano di prova condensante a piattelli mobili, quando le dimensioni dei due dischetti non siano proporzionate in modo, che il dischetto *pq* comunicante col suolo difenda del tutto dalla induzione dell'ambiente quello isolato *ab*, allora questo per effetto della induzione laterale dell'ambiente si mostra carico della contraria della inducente. A fine di avere un dischetto di prova, che si trovi perfettamente allo stato neutrale, quando viene portato a contatto dell'indotto, si pratichi la seguente modificazione. In luogo di adoperare un dischetto comunicante col suolo, a difendere l'altro isolato, gli si sostituisca un piccolo cilindro metallico, tenuto a mano, entro il quale si trova il dischetto isolato. Con questo mezzo si è sicuri, che il piano stesso presentato all'induttore C, nel modo indicato dalla (fig. *b*), senza toccare l'indotto, non manifesterà quando sia portato ad un elettroscopio, elettricità di sorta. Per conseguenza,

(fig. *b*.)



1.° toccando col dischetto isolato l'estremo dell'indotto, che più vicino trovasi all'inducente, quel dischetto isolato manifesterà una elettricità omonima della inducente, colla sicurezza che l'avrà ricevuta *unicamente* per comunicazione dall'indotto stesso. Poichè, 2.° mettendo l'indotto a comunicare col suolo, cioè privandolo di tutta l'omonima della inducente, ed applicando poscia il piano di prova così modificato su quell'estremo dell'indotto, più vicino all'inducente, si osserva che quando si ritrae il piano medesimo, e viene saggiato all'elettroscopio, si mostra esso *perfettamente allo stato neutrale* nello stesso modo, come quando il piano di prova non avea toccato l'indotto. Tuttavia su quell'estremo si trova in grande quantità raccolta la indotta di prima specie, la quale se avesse tensione dovrebbe comunicarsi al piano di prova medesimo, come avviene per quella di seconda specie. 3.° Inoltre se l'indotto così privato della omonima della inducente, ovvero indotta di seconda specie, quindi ridotto nell'isolamento venga per poco allontanato dall'induttore, e nel tempo stesso si applichi sull'indicato estremo il piano di prova, subito questo mostrerà all'elettroscopio d'avere ricevuto una carica *contraria* a quella inducente, ossia una carica indotta di prima specie divenuta ora libera. Essendo per tanto questo piano di prova capace di mostrare i tre indicati risultamenti affatto diversi fra loro, si ha dai medesimi una evidente prova, che il piano stesso non è affetto da cause *permanenti*, le quali alterino il fenomeno, come presume il Pisati; tanto più che quando l'indotto ha comunicato per un istante col suolo, e poscia viene allontanato dall'induttore, il piano di prova stesso mostra quello che tutti ammettono esistere sull'indotto, quantunque pure in questo caso riceva quasi la stessa induzione, per la quale, secondo l'autore, dovrebbe mostrare una carica omonima della inducente.

Nell'analizzare tal genere di piani di prova, conviene porre per condizione, che il dischetto isolato *ab*, cioè quello che serve da saggiatore, trovisi *assolutamente allo stato neutrale*. Questa condizione facile a riscontrare viene a puntino verificata nei piani di prova che noi adoperiamo. Essendo per tanto tutto questo incontrastabile perchè, come abbiamo detto, ce lo insegna la sperienza, ci facciamo a domandare al Pisati, d'onde quella elettricità, che manifesta il piano stesso, può essere derivata, se non dalla comunicazione di questa, dal cilindro al piano di prova? Ed in fatti, come abbiamo sopra detto, dopo un certo numero di volte che il piano di prova si porta a contatto coll'indotto, questo resta del tutto privato *solamente* della indotta di seconda specie, la qual cosa ci sembra essere la più chiara dimostrazione, che il piano di prova stesso riceve tale omonima della inducente, per comunicazione dall'indotto. Ciò per altro, quando venga praticato nel modo che il Pisati descrive nella sua fig. 17, non ci farà mai conoscere il vero. Non possiamo comprendere la ragione, per la quale il Pisati adottar voglia per elettroscopio quel miscuglio di zolfo e minio, quasi mancassero elettrometri sensibilissimi, le indicazioni dei quali sono incontrovertibili. È misterioso ed inesplicabile il vedere preferito questo miscuglio, che imbratta gli ambienti e le macchine, che annerisce le superficie d'argento, che sommamente noce allo stomaco di chi lo assorbe, che richiede inoltre un lavoro faticosissimo a gittare le polveri stesse fra l'indotto e l'inducente, senza raggiungere lo scopo.

Finalmente poi, non diremo della complicazione di effetto elettrostatico, incontrata nell'adoperare siffatte polveri; poichè sono esse stesse cariche di elettrico, e non sappiamo di quanto: inoltre si trovano esse nell'aria elettrizzata dalla macchina elettrica.

Di più queste polveri inducono sopra i corpi che le circondano, ed è certo che quella polvere caricata omonimamente all' induttore, dev' essere *respinta* da questo sull'estremo dell'indotto, il più vicino all'induttore stesso, ingannando chi sperimenta, cioè sembrando essa polvere venir attratta dall'estremo indicato del medesimo indotto. Invano Bonhenberger, pel Pisati, applicò le pile secche all'elettroscopio a foglia d'oro, rendendolo di squisita sensibilità; inutilmente Thomson, Melloni, Palmieri ed altri si sono studiati d'introdurre nella scienza elettrostatica quei loro delicatissimi elettrometri per misurare, e per conoscere la natura elettrica. Il Pisati invece ha creduto piuttosto, fra tanti squisiti mezzi che si hanno, non escluso il piano di prova, prescegliere il peggiore, cioè quello che non si dovrebbe adoperare mai. Questo mezzo di cui si è servito il Pisati, è stato appunto la causa, che lo ha condotto a conclusioni opposte a quei risultamenti sperimentali ottenuti con altri mezzi, che non incontrano eccezione di sorta.

Tornando sui piani di prova condensatori, diciamo che di questi ne abbiamo fatti di forme molto diverse fra loro, tanto ad armature mobili, quanto fisse, e che tutti ugualmente danno i medesimi risultamenti, e per tutti dev' essere applicata la stessa analisi. Non è però questa la sola classe di piani di prova da noi adoperata, per dimostrare primieramente la esistenza della indotta di seconda specie su quell'estremo dell'indotto, che riguarda l'induttore; secondariamente per dimostrare che la indotta di prima specie, finchè tale rimanga, non si comunica punto a quei corpi che la toccano. La descrizione colla teorica di questo altro genere di piani di prova, i quali non sono condensatori, fu da me comunicata, non ha guari, alla R. Accademia dei Lincei, nella seduta del 4 marzo 1877. Questi piani di prova sono formati da un dischetto metallico, che non supera in diametro 5^{mm}; è annesso questo dischetto, per mezzo di buon coibente, ad un'asticella *finissima* di vetro, spalmata di gomma lacca, e tale asticella capillare di vetro dev'essere *perfettamente* coibente. Il principio su cui sono fondati questi altri piani di prova, è il seguente: che cioè la elettricità libera, per causa della propria tensione, ha virtù d'introdursi nei coibenti, ed in tal modo il dischetto, che fa da piano di prova, può ricevere una dose di elettricità maggiore di quella, che trovasi nel punto sul quale fu posto a contatto. È certo, che se un semplice elemento dell'indotto isolato venga portato via dalla parte di questo indotto la più prossima all'induttore, la natura elettrica in esso risultante deve *necessariamente* manifestarsi contraria di quella inducente, giusta il diagramma elettrico da me costruito, che rappresenta la teorica del Melloni. È perciò necessario un artificio, onde prendere tanto di elettricità libera nell' indicato contatto, da superare quella contraria, che sul piano di prova si genera per la induzione. A prima giunta sembra strano, che un dischetto metallico non condensatore manifesti una risultante omonima dell' inducente, mentre la indotta di prima specie trovasi in quel punto in copia maggiore. Però alla introduzione appunto della elettricità nel coibente, che congiunge il dischetto all' asticella, è dovuto questo fatto indubitato.

La elettricità spintasi nel coibente di nuovo esce, quando il medesimo coibente venga portato lungi dall' indotto; quindi sul piano di prova si verifica una risultante omonima della inducente, per la quale siamo fatti certi, che anche sull' estremo dell' indotto, il più prossimo all'inducente, trovasi la indotta di seconda specie. Il fatto medesimo fu da me osservato, quando sottoponendo alla induzione un cilindro di cera lacca, ed esplorato dipoi ad un elettroscopio, appariva prima carico di elettricità contraria a quella

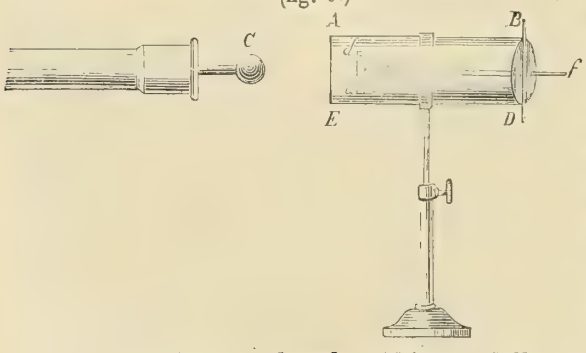
inducente; quindi avendolo immerso nell' acqua contenuta in un vaso metallico, comunicante col suolo, dopo un certo tempo, appariva invece carico di elettricità omonima. Questa evidente prova della introduzione della elettricità *libera* nelle masse coibenti, mi diede lume per formare un piano di prova non condensatore, fondato su questa proprietà dell' elettrico, proprietà che rivela esistere la indotta di seconda specie su qualunque punto dell' indotto isolato.

Debbo dichiarare che questo piano di prova non condensatore, non fu già da me immaginato per sostituirlo agli altri condensanti, quasi che dubitassi della veridicità di questi; ma bensì fu da me adoperato per mostrare, che in più modi la sperienza risponde favorevole alla teorica che sostengo. Tale fatto che un piano di prova non condensatore, *ineccezionabile a priori,* dia quei risultamenti stessi che si ottengono adoperando quello condensatore, giustifica l'uso di questo, contrariato ingiustamente dal Pisati.

Preghiamo questo professore, a non voler seguire l'esempio di taluni, quello cioè di non esaminare a fondo le risposte che vengono fatte alle obbiezioni loro, riportando dopo poco in campo le quistioni stesse, come non si fossero mai trattate. Così fatto modo equivale a dichiarare di non voler raggiungere la verità, e di volerla nascondere agli altri. Se il prof. Pisati sentisse non esser convinto, o in tutto, o in parte, di queste ragioni che abbiamo addotte, gradiremo assai che torni egli nuovamente sulla stessa quistione, opponendo delle buone ragioni alle nostre, quando però questa opposizione parta da leale desiderio di raggiungere il vero, e non da spirito di parte.

Finalmente un'ultima sperienza produciamo, sulla quale si richiama l'attenzione, non solo del Pisati, ma di tutti quei fisici, che obbiettano alla teorica del Melloni. Questa sperienza semplicissima, la crediamo valevole ad abbattere tutte le conclusioni alle quali è giunto il Pisati, tanto nella prima già citata, quanto nella seconda sua pubblicazione sull'argomento in proposito, intitolata: *Ricerche sperimentali sulla induzione elettrostatica* (vedi Appendice del vol. V, 1876 delle Memorie degli Spettroscopisti italiani). Le tre figure che riferisconsi a queste ricerche sperimentali, non raggiungono la verità, perchè, come ora vedremo, l'azione inducente risulta nulla sopra un punto interno di un conduttore non isolato, e perciò non si manifesta sui corpi ben difesi dall' indicato conduttore. Del resto molti fisici, prima del Pisati, hanno riconosciuto che l' avvicinamento dei corpi fra loro è causa di sviluppo elettrico nei medesimi, come accade nel mulinello di Nicholson, e nel duplicatore del Belli. Quindi non reca meraviglia, che introducendo le polveri di zolfo e minio fra due corpi avvicinati fra loro, come fa il Pisati, si veggano dei fenomeni d' induzione da esso chiamati nuovi (vedi § 2 dell'ultima suacitata Memoria); nei quali fenomeni prende parte ancora l'elettricità dell'ambiente in cui si sperimenta, come ho veduto verificarsi per mezzo di alcune mie sperienze. La sperienza medesima ora da noi promessa, consiste in ciò che segue: Sia ABED (fig. *c*) un cilindro metallico, vuoto e comunicante col suolo, abbia una delle sue basi BD aperta, e l'altra AE chiusa;

(fig. c.)



sia *de* un disco pure metallico che abbia un diametro alquanto minore di quello del cilindro, e sia portato da un manubrio *fg* coibente, che può essere di vetro spalmato di vernice isolante. S'introduca il disco *de* nel cilindro ad una distanza arbitraria dalla sua base chiusa AE. Così disposta la sperienza, si presenti l'induttore C, che in questo caso può non essere costante, alla base chiusa AE del cilindro, ad una distanza qualunque da questa; si può inoltre per mezzo di un filo metallico porre il disco *de* in momentanea comunicazione col suolo, ovvero aspettare qualche tempo, mantenendolo sempre nell'isolamento. Di poi si tolga preventivamente l'induttore C, quindi si estragga dal cilindro il disco *de*, il quale verrà esplorato avvicinandolo ad un elettroscopio. Vedrà il Pisati, che a *qualunque distanza* dalla base AE venga posto il disco *de* nell'interno del cilindro, purchè non abbia luogo sul medesimo la induzione curvilinea, sempre il disco medesimo, avvicinato ad un elettroscopio, si mostrerà allo stato perfettamente neutrale. Da questo fatto dunque si conclude che i risultamenti ottenuti dal Pisati sono l'effetto tanto dell'induzione dell'ambiente o curvilinea, la quale dovette essere molto forte nel modo con cui egli sperimentò, giacchè fece uso di una macchina elettrica per induttore; quanto del mezzo complicato di che si servì per analizzatore, cioè del miscuglio di zolfo e minio. In fatti rimosse queste pessime condizioni, la nostra sperienza riesce contraddittoria del tutto a quella del Pisati, dimostrandosi colla nostra che la induzione non traversa i conduttori comunicanti col suolo, cioè non isolati. Se invece il cilindro sia di coibente, allora la induzione sul medesimo lo traverserà, e giungerà sul piano di prova già introdotto nel cilindro coibente stesso.

Queste conclusioni confermano tanto quelle di Faraday sul proposito, quanto le altre che furono da me ottenute dal calcolo esposto nella mia Memoria, la quale ha per titolo: *Analisi fisico-matematica degli effetti elettrostatici relativi ad un coibente armato e chiuso*, inserita nel tomo 2° serie II^a pag. 609 degli Atti della R. Accademia dei Lincei del 1875. Le conclusioni medesime si accordano col principio preso per fondamento nelle applicazioni dell'analisi superiore alle questioni di elettrostatica. Questo principio prima di tutti adottato da Poisson, quindi da ogni fisico analista, e confermato dalla sperienza, consiste nell'essere nulla l'azione di un inducente sopra un punto interno di un indotto conduttore (1). Ciò vale quanto ammettere che la induzione elettrostatica non traversa le masse conduttrici, e perciò la obbiezione del Pisati contro il mio piano di prova condensante (fig. 16) non sussiste, come pure non sussiste la pretesa nuova proprietà, che l'autore stesso dedusse dalla sua medesima obbiezione.

(1) Vedi (*Mémoires de l'Institut Impérial de France, année* 1811 pag. 3 lin. 22 e seguenti; pag. 7 lin. 12, e seguenti). — Vedi anche (*Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, e sua applicazione alla elettricità statica*, del prof. Enrico Betti, estratta dal Nuovo Cimento, vol. XVIII, XIX e XX; § X°). — Vedi Gavarret, t. 1 p. 56 del suo *traité d'électricité* sullo stesso argomento.— Vedi, *Leçons élémentaires d'électricité* par W. Snow Harris. Paris 1857, pag. 149 e seguenti. — Vedi Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism* 1873, t. I pag. 248, esempio VIII.

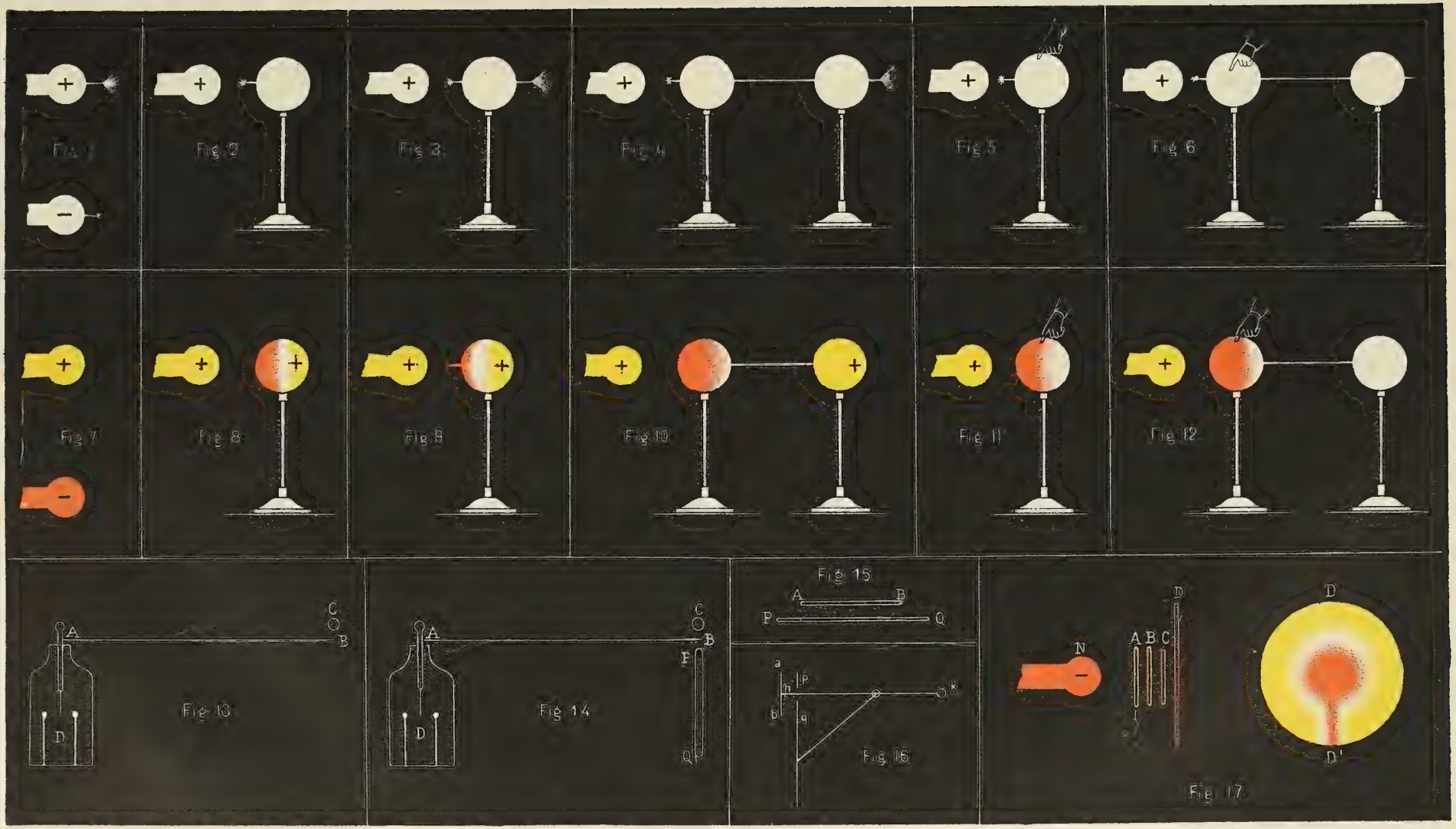


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
A
B
C
D
Fig. 13
A
B
C
D
F
Q
Fig. 14
Fig. 15
A
B
P
Q
a
b
h
p
k
q
Fig. 16
N
A B C
D
D
D'
Fig. 17

Studî sugli anfibî anuri del Piemonte.

Memoria del prof. M. LESSONA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 4 marzo 1877.

Nelle cose della natura nulla dobbiamo sprezzare, accendendo anche ogni più minuta di queste lume a lume.

VALLISNIERI.

INTRODUZIONE

I.

Il Piemonte, come tutti i paesi di pianura appie' di monti, presenta notevolissime differenze di suolo e di clima, e corrispondenti differenze nei viventi.

Il torinese che da piazza Castello guarda alla cima del monte Cibrario, che spicca in capo alla via di Doragrossa, è a 230 metri sul livello del mare. Quella cima, cui egli può giungere in poche ore, è alta 2210 metri. E la cima del monte Cibrario è ben lungi dall'essere la più alta, e il piano di piazza Castello è ben lungi dall'essere il più basso del Piemonte.

Le risaie del Vercellese, la Vauda, che senza la bella corona delle circostanti montagne e la invadente coltivazione tanto ricorderebbe la steppa russa, i colli aprici del Monferrato, le brulle falde dei monti, i pendii rocciosi spogli ora in gran parte della antica arborea e foltissima vegetazione, albergano piante ed animali che dalla flora e dalla fauna dell' Europa temperata vanno passando fino a quella delle regioni circumpolari. In mezzo alla vegetazione ed alla vita animale dell'Europa temperata e del settentrione, qua e là, pel predominar di certi venti e per lo schermo che fanno i monti al soffiar di certi altri, per la più efficace azione dei raggi solari, per le condizioni igrometriche e per la natura del suolo, per qualche accidentale immigrazione d'esseri, che poi vi si sono propagati, si trovano certe isole od oasi di una vegetazione, di una vita animale notevolmente diversa dalla circostante, e quale consuetamente è incontrata in regioni più meridionali.

Assai più tardi che non in altre parti d'Italia ebbero culto in Piemonte le scienze, e segnatamente le scienze naturali. Primi e più numerosi furono i botanici. Gli studî intorno alla mineralogia, incominciati in sul finire del secolo passato, ebbero, insieme coi geologici, ai giorni nostri il loro più grande sviluppo, e con risultamenti importanti. Nella zoologia gli insetti ebbero la più bella parte: dopo, ma a grande distanza, vengon gli uccelli. Intorno a questi il Bonelli pubblicò un catalogo coi nomi vernacoli,

latini, e francesi; in sul principio del corrente secolo scrissero inoltre, intorno ai vertebrati del Piemonte, il Genè ed il De Filippi, ma non pigliando a considerare di proposito una qualche classe di animali.

Degli anfibî del Piemonte non trovo fatto cenno dai naturalisti che nacquero e vissero in questa provincia italiana dove ebbi nascimento, ma d'onde passai lontana buona parte della mia vita intellettuale. Ritornato già da qualche anno colla speranza di non aver più da mutare, venni facendo qualche osservazione di fauna locale, che spero di poter a mano mano accrescere e pubblicare.

Piacemi dare ora un qualche cenno intorno agli anfibî anuri.

Il Piemonte, rispetto agli anfibî anuri, ci rivela una fauna che si potrebbe dire di passaggio fra quella dell'Europa centrale e quella dell'Europa meridionale; non ci si trovano più certe specie dell'Allemagna e della Francia settentrionale e centrale, e non ci si trovano ancora certe specie della Francia meridionale e dell'Italia centrale.

L'Europa comprende otto generi e quattordici specie di anfibî anuri, che sono annoverati nella tavola seguente, nella quale ancora si dà qualche ragguaglio intorno alla loro distribuzione.

N.	Generi e specie	Piemonte	Lombardia (1)	Svizzera (2)	Sicilia (3)	Veneto (4)	Tirolo meridionale (5)	Liguria (6)	Sardegna (7)	Italia (8)	Contorni di Parigi (9)	Dipartimento della Gironda (10)	Europa
1	*Rana esculenta* Linn.	+	+	+	+	+	+	+	»	+	+	+	+
2	» *temporaria* Linn.	+	+	+	+	+	+	+	»	+	+	»	+
3	» *agilis* Thomas	+	+	+	»	+	»	»	»	+	+	+	+
4	» *oxyrrhina* Steenst.	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	+
5	*Discoglossus pictus* Otth	»	»	»	+	»	»	»	+	+	»	»	+
6	*Pelodites punctatus* Dugés	»	»	»	»	»	»	+	»	+	+	+	+
7	*Alytes obstetricans* Laur.	»	»	+	»	»	»	»	»	»	+	+	+
8	*Pelobates fuscus* Wagler	+	+	+	»	»	»	»	»	+	+	»	+
9	» *cultripes* Tschudi	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	+	+
10	*Bombinator igneus* Laur.	»	+	+	+?	+	+	+	»	+	+	+	+
11	*Hyla viridis* Laur.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	»	+
12	*Bufo vulgaris* Laur.	+	+	+	+	+	+	+	»	+	+	+	+
13	» *viridis* Laur.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	»	»	+
14	» *calamita* Laur.	»	»	»	»	+?	»	»	+?	+?	+	+	+
14		7	8	9	6	7	6	6	3	10	10	8	14

(1) Cornalia, *Osservazioni sul Pelobates fuscus e sulla Rana agilis* ecc. Att. Soc. Ital. di scienze natur. 1873. Vol. XVI. — (2) Fatio, *Faune des vertébrés de la Suisse.* Tom. III. Genève e Bâle, 1872. — (3) Doderlein, *Generalità intorno la fauna sicula dei vertebrati.* Annuario della Società dei naturalisti. Modena, VI. — (4) (5) De Betta, *Erpetologia delle provincie venete e del Tirolo meridionale.* Verona, 1857. — *Fauna d'Italia. Rettili ed Anfibî.* Milano, 1874. — (6) *Museo civico di Storia naturale di Genova* (da lettera). — Descrizione di Genova 1846. Vol. I. Sassi, *Rettili..* — (7) Genè, *Synopsis Reptilium Sardiniae indigenorum.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Serie II Tom. I. — Carruccio, *Catalogo metodico degli animali riportati dalle escursioni nelle provincie meridionali in Sicilia ed in Sardegna* ecc. Atti della Soc. di Scienze natur. Vol. XII fascicolo 3.° — (8) De Betta, op. cit. — (9) (10) Lataste, *Catalogue des Batraciens et Reptiles des environs de Paris.* Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux. Tom. XXX. 1876. — Lataste, *Essai d'une faune herpétologique de la Gironde.* Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux. Tom. XXX, 1876.

Intorno a questa tavola dobbiamo avvertire che il *Pelodites punctatus* Dugés è notato qui come esistente in Liguria perchè un individuo ne fu trovato e portato al museo civico di Storia naturale di Genova dal dott. Wiedersheim che lo raccolse nella Liguria occidentale, e che il *Bombinator igneus* Laur. si trova soltanto nella parte orientale della Liguria, presso la Spezia.

Degli otto generi notati nella precedente tavola, secondo i risultamenti cui mi hanno condotto, fino ad ora, le mie ricerche, quattro sono rappresentati in Piemonte, e delle quattordici specie sono rappresentate sette.

Pertanto, gli anfibî anuri, che, fino ad ora, mi riuscì di trovare in Piemonte, sono i seguenti:

Rana esculenta Linn.
» *temporaria* Linn.
» *agilis* Thomas.
Pelobates fuscus Wagler.
Bufo vulgaris Laur.
» *viridis* Laur.
Hyla viridis Laur.

Questa lista potrà certo essere modificata da ulteriori ricerche; ma le ricerche mie incominciano pur ad avere un certo valore, essendo state fatte con molta assiduità sia con escursioni ripetute tanto nel contorno di Torino quanto in punti più lontani e sovratutto sui monti, sia per aver io ricevuto da varie parti del Piemonte considerevoli materiali.

Possiamo quindi dire che il Piemonte, per quello che riguarda gli anfibî anuri, è povero di specie, rispetto ad altre località, come sarebbe, per esempio, il contorno di Parigi (1).

Si prova poi meraviglia, considerando le specie finora trovate in Piemonte, che manchi il *Bombinator igneus* Laur., intorno al quale il De Betta (2) ha le seguenti parole: « Fra noi si mostra abbondantissimo quasi per ogni dove, potendo dirsi in genere non esservi fosso, o stagno, o palude, o pozzanghera, sia in pianura che al monte, che esso non si affretti ad abitare e popolare... ». E qui il De Betta dicendo « *fra noi* » non mostra di voler parlare delle provincie venete, ma dell' Italia in generale, la qual cosa dunque non è esatta.

Il Bonaparte (3), parlando del *Bufo calamita* Laur. dice essere specie italiana « che a vero dire non si attenta di scendere dalle Alpi ». Sulle Alpi io non trovai finora questa specie, e negli altri scrittori che ne han parlato come di specie italiana non si trovano pure indicazioni precise.

Notevole è la presenza in Piemonte della *Rana agilis* Thomas, e più ancora quella del *Pelobates fuscus* Wagler: ma di questi meglio dirò di proposito nel discorso particolare intorno a ciascuna di queste due specie.

Le sette specie di anfibî anuri che si trovano in Piemonte, come ben si intende, non si trovano tutte e sette dapertutto, e dapertutto non si trovano in pari modo numerose.

(1) Lataste, op. cit.
(2) De Betta, *Fauna d'Italia* ecc. p. 70.
(3) *Fauna italica.*

Si comprende l'abbondanza di questi animali là dove sono le condizioni favorevoli alla loro esistenza, acque ferme e correnti, riviere, ruscelli e fiumi, laghi, stagni, pozze, paludi e risaie. Ma non si comprende in pari modo, anzi non si può dir con certezza la ragione per cui sono certe specie circoscritte entro certe località determinate.

Siccome gli anfibî anuri si trovano tanto al piano quanto in montagna, possiamo, considerandoli in Piemonte, esaminare la loro distribuzione nella pianura, o distribuzione orizzontale, e la loro distribuzione nei monti, o distribuzione verticale.

Per pianura intendiamo qui tutto quel tratto del Piemonte cui cingono le Alpi e gli Apennini, e che è limitato inferiormente dal Ticino. Questo spazio è costituito da varî terreni, e non è sempre una pianura nello stretto significato del vocabolo, comprendendo colline abbastanza elevate, e bassure notevolmente al disotto del livello di Torino sopramenzionato. La basilica di Superga è alta 672 metri sopra il livello del mare, e il punto dove la Trebbia sbocca nel Po non si eleva oltre a 41 metri. Alessandria è ad 82 metri, Asti a 134, Vercelli a 150, Cuneo a 540 metri.

Questo piano rispetto agli anfibî anuri si può dividere in tre regioni.

La prima regione ci si presenta in forma di un triangolo. Il vertice è presso Pavia, là dove il Ticino entra nel Po; uno dei lati scorre lungo la riva sinistra del Po fin verso Crescentino, l'altro segue la riva destra del Ticino, passa per Vigevano, Trecate ecc. e finisce a Sesto Calende presso il Lago Maggiore; la base si può rappresentare con una linea che, partendo da Sesto Calende, passi sopra Novara, Santhià, ecc., e venga a finire presso Chivasso.

La seconda regione comprende sostanzialmente le colline di Torino, dell'Astigiano e del Monferrato.

La terza regione è la più vasta e la meno esattamente delimitata. Essa comprende Carmagnola, Bra, Savigliano, Fossano, Mondovì, Cuneo, Saluzzo, Pinerolo, Torino, Ciriè, Rivarolo, Castellamonte, Agliè, Ivrea, Biella.

La tavola I indica queste regioni della distribuzione orizzontale degli anfibî anuri in Piemonte.

Ognuna di queste tre regioni del piano è segnata con un suo proprio colore, e la tinta più carica indica maggiore copia di questi animali, quella più sbiadita l'opposto.

Di queste tre regioni del piano, la più ricca di anfibî anuri è la prima. Essa si potrebbe chiamare la regione delle risaie, e si intende come debba porgere le condizioni meglio favorevoli allo sviluppo di cosifatti animali. Vi si trovano le specie seguenti:

Rana esculenta Linn.
» *temporaria* Linn.
Pelobates fuscus Wagler.
Bufo vulgaris Laur.
» *viridis* Laur.
Hyla viridis Laur.

Non trovai fino ad oggi in questa regione la *Rana agilis* Thom., ma è cosa possibile che un giorno o l'altro ci si trovi.

Rispetto alla loro frequenza le specie sovranotate si dispongono in questa regione nell'ordine seguente:

1 { *Rana esculenta* Linn. / *Hyla viridis* Laur. / *Bufo viridis* Laur.
2 *Bufo vulgaris* Laur.
3 *Rana temporaria* Linn.
4 *Pelobates fuscus* Wagler.

La seconda regione è povera d'acque e quindi anche dei nostri animali. Vi si trovano le specie seguenti:

Rana esculenta Linn.
» *temporaria* Linn.
Bufo vulgaris Laur
» *viridis* Laur.
Hyla viridis Laur.

Per la loro frequenza queste specie vogliono essere enumerate nel seguente modo:

1 { *Rana esculenta* Linn. / *Hyla viridis* Linn. / *Bufo vulgaris* Laur.
2 *Rana temporaria* Linn.
3 *Bufo viridis* Laur.

La terza regione presenta così disugualmente distribuiti gli animali di cui parliamo, scarsi in certi luoghi e numerosissimi in certi altri, che la possiamo considerare siccome un deserto sparso d'oasi, o località limitate in cui essi abbondano mentre scarseggiano nei luoghi circostanti. Sono località ricche presso Torino le rive della Stura segnatamente alla foce, e le falde del monte Asinaro, ricche di stagni o laghetti come quelli di Casellette, di S. Gillio, della Scottina, ecc. Hannovi pure località ricche presso Villastellone, e più lontano presso Saluzzo e presso Mondovì.

Siccome esempî di località povere possiamo citare una gran parte del Biellese, e in generale i luoghi compresi fra Castellamonte, Agliè, Cuorgnè e Lanzo.

Si trovano in questa regione tutte le specie che abbiamo riferito al Piemonte, e queste rispetto alla loro frequenza si possono schierare così:

1 { *Rana esculenta* Linn. / *Bufo vulgaris* Laur.
3 *Rana agilis* Thomas.
4 *Pelobates fuscus* Wagler.

2 { *Hyla viridis* Laur. / *Bufo viridis* Laur. / *Rana temporaria* Linn.

Questa regione comprende Torino e il suo contorno, dove, come è facile intendere, mi riuscirono più continuate e numerose le osservazioni. La tavola I (II) porta un ingrandimento particolare di questa località, e i segni convenzionali esprimono a colpo d'occhio quello che ci presenta di più notevole sia rispetto alle specie, sia rispetto alla copia degli anfibî anuri.

La regione a sud di Torino, oltre la barriera di Nizza, piuttosto asciutta e coltivata coll'aratro, è scarsa di anfibî anuri, mentre la regione a nord, dove è copia d'acque e praterie, brulica di questi animali. Una differenza notevole fra queste regioni si trova ancora nel tempo dell'apparizione e sviluppo delle uova, essendo spesso già i girini guizzanti nelle acquicelle della regione a sud mentre non si vedono ancora in quella a nord, e ciò con una differenza di tempo sovente di circa due settimane.

Nel contorno di Torino, considerandolo un po' largamente, il luogo di maggior precocità di apparizione e di sviluppo delle uova è nelle acquicelle stagnanti presso Rivoli.

L'abbondanza della *Rana agilis* Thom. in questa regione, alla Mandria presso la Venaria reale, presso a Rosta ed anche alle porte di Torino, è certo particolarità notevole. Ma particolarità ben più notevole è la presenza qui, a Rivoli ed a Settimo Torinese a Testona ed in Vanchiglia, presso alla cinta daziaria, del *Pelobates fuscus* Wagler, dei quali fatti parlerò di proposito nel discorso particolare intorno a queste due specie.

Una cosa è da dirsi qui, che mi venne osservata ripetutamente nel contorno di Torino, e di cui non so darmi la spiegazione. Sovente in una pozza non si trovano che girini di una sola specie, in un'altra pozza vicina girini esclusivamente di un'altra specie, od almeno pel massimo numero predominanti; in una terza pozza girini di parecchie specie in numero a un dipresso pari. Così una grande pozza del contorno di Torino a destra dello stradone che mena a Milano, non ha altri girini tranne quelli del *Bufo vulgaris* Laur. e questi numerosissimi. Una pozza poco oltre la cinta daziaria fra il Po ed il Camposanto ha quasi esclusivamente girini della *Hyla viridis* Laur., e la pozza detta delle Maddalene, a poca distanza dalla città lungo la via che dal ponte sulla Dora mena al R. Parco, brulica di girini del *Bufo vulgaris* Laur., del *Bufo viridis* Laur. non che di quelli della *Hyla viridis* Laur. e, più numerosi di tutti di quelli della *Rana esculenta* Linn. Queste tre pozze sono fra loro poco discoste e il suolo circostante non offre nulla di particolare che possa dar spiegazione di una tale differenza. Nè ciò si osserva soltanto nella pianura, ma bensì anche in montagna. Laghetti vicinissimi fra di loro presentano grande copia, o grande scarsità, o difetto assoluto di girini, senzachè, esaminando il contorno, riesca facile trovarne la ragione.

Le cime nevose delle Alpi mantengono lungo gli erti pendii del Piemonte buona copia d'acqua, raccolta in laghi e laghetti di varie dimensioni e a notevoli altezze, oppure anche a notevoli altezze scorrenti in placidi rivi, o scendenti in cascatelle eleganti e in torrenti precipitosi, e in queste acque, dapertutto dove trovano buone condizioni, brulicano gli anfibî anuri, più tranquilli e meno perseguitati che non quelli del piano. E così avviene che non scema sovente a notevoli altezze la quantità degli individui, sebbene col salire scemi proporzionatamente il numero delle specie.

Mentre nella pianura si trovano tutte e sette le specie che menzionammo sopra ripetutamente, incominciando a salire mancano il *Pelobates fuscus* Wagl. e la *Rana agilis* Thom. Ai piedi dei noci e dei castagni grandiosamente verdeggianti fino a mille metri sopra il livello del mare si trovano le altre cinque specie, cioè:

Rana esculenta Linn. — *Bufo vulgaris* Laur.
» *temporaria* Linn. — » *viridis* Laur.
Hyla viridis Laur.

Con questa avvertenza che le due ultime specie sono a questa altezza poco comuni.

Delle cinque specie qui enumerate, tre si fermano a questo punto. Due salgon più oltre accompagnando i faggi che vanno fino a mille e cinquecento metri sopra il livello del mare, e sono le seguenti:

Rana temporaria Linn. — *Bufo vulgaris* Laur.

Ma quest'ultimo è rarissimo a tal punto, e già raro anche a qualche centinaio di metri più basso. Così nel bello altipiano di Usseglio, lungo a un dipresso otto chilometri e largo due, sparso di prati e qua e là biondeggiante di messi, con gruppi

di faggi, di aceri, di betulle e di larici, e tutto percorso dalle serpeggianti limpidissime acque della Chiara, all'altezza di 1300 metri sul livello del mare, i rospi mancano quasi interamente, là dove la *Rana temporaria* Laur. è comune.

Nè qui si arresta questa specie, che sale ancora, là dove le altre conifere sono scomparse, insieme coi pini cembri fin anco a tremila metri sul livello del mare.

Dicendo degli anfibî anuri alle varie altezze in rapporto colla varia vegetazione arborea, non bisogna intendere che gli alberi sian necessarî alla vita di questi animali. Il diboscamento ha denudato in varî luoghi i pendii dei nostri monti, e le rane non paiono per questo esservi meno numerose.

Siccome la *Rana temporaria* Linn. si è quella che vive a maggiori altezze sui monti, si può dire che qui l'acqua è meno necessaria alla vita degli anfibî anuri che non nel piano, perchè nel piano, almeno del Piemonte, predomina la *Rana esculenta* Linn. la quale non abbandona mai la vicinanza delle acque, mentre la sua affine summenzionata se ne discosta appena compiuta la metamorfosi e non ci ritorna guari che per la riproduzione.

Anche in montagna, del resto, come in pianura, non di rado, come già abbiamo detto sopra, si trovano acquicelle vicine le une poverissime e le altre ricchissime di anfibî anuri, senza che se ne possa agevolmente trovare la ragione, e si trovano poi parimente, la qual cosa è facile spiegare, grandi tratti scarseggianti di questi animali e tratti minori od oasi dove essi si trovano numerosissimi.

Ricco di rane è il lago del Cenisio (metri 1900); il lago della Maddalena sopra l'Argentera (metri 2000 circa); i laghetti della valle di Viù (metri 2300 circa); il contorno di Casteldelfino (metri 1310), ecc.

E qui mi piace correggere un errore registrato nella statistica di Saluzzo dello Eandi, il quale dice che mentre le rane si trovano ancora a Casteldelfino, non si trovano più a Pontechianale.

Io sono stato sul principio di agosto del corrente anno (1876) a Pontechianale, che è all'altezza di circa 1800 metri sul livello del mare, ed acquistai certezza che sonovi là rane in considerevole copia.

Le varie regioni del piano e del monte nelle quali vivono le specie degli anfibî anuri sopra enumerate danno un qualche carattere al loro colorito, di cui si può tener qui conto con un cenno generale, riservando poi i ragguagli meglio particolareggiati al discorso intorno alle singole specie.

La regione del piano, che abbiamo chiamato la prima, segna di colori intensi e vivi gli anfibî anuri che vivono in essa. La *Rana esculenta* Linn. sfoggia qui più vive le sue tinte verdi, e i suoi splendidi riflessi dorati, e ciò non solo al tempo della riproduzione, ma anche dopo; qui il *Bufo viridis* Laur. mostra più intensamente coloriti sul verde delicato delle sue macchie quei punticini rossi che gli danno tanta bellezza; qui anche le altre specie più modestamente colorite mostrano sempre una maggiore eleganza e vivacità di colori.

La seconda regione del piano dà alquanto più sbiadite le sue tinte; le macchie tendono a sbiadirsi e a fondersi col colore fondamentale. Nella *Rana esculenta* Linn. predominano il verde grigiastro e il giallognolo; nella *Rana temporaria* Linn. il bigio

rossastro con macchie poco spiccate. La *Hyla arborea* Linn. e le due specie di *Bufo* non mostrano notevoli particolarità di colori.

Nella terza regione del piano i colori non offrono guari campo a considerazioni generali. Nel contorno di Torino spiccano le tinte brillanti della prima regione. La *Rana esculenta* Linn. dei laghi di Caselette, della Scottina, di Avigliana, presenta, in generale, tinte più cariche con predominio di toni bigi.

Nei contorni di Mondovì e di Saluzzo (metri 395 circa) le tinte si sono fatte più terrose e più sbiadite.

Lungo i pendii dei monti, a mano a mano che si sale, vanno scomparendo i colori vivaci, e prendono il sopravvento le tinte giallo-brune, le rossiccie o rosee, le verdognole sbiadite e sporche; le macchie si fanno più numerose ed appariscenti, e non di rado si sviluppano tanto da costituire varietà quasi nere: ciò si vede nella *Rana temporaria* Linn. di Valsavaranche, del lago della Maddalena sopra l'Argentera (metri 2000 circa), del lago del Moncenisio (metri 1900) e dei contorni di Casteldelfino (metri 1310).

In tutto ciò si vede quella corrispondenza del colore degli animali col colore del mezzo in cui vivono, che da lungo tempo si attirò l'attenzione degli osservatori, ed ebbe al tempo nostro dal Darwin ampia e soddisfacentissima spiegazione.

II.

Il Vallisnieri si applicò alla ricerca della qualità del nutrimento degli anfibî anuri con molta diligenza, e riferì minutamente i risultamenti dei suoi studî. I rospi e le rane, secondo quello che risultò al Vallisnieri dalle sue osservazioni, si nutrono di insetti di varie sorta, di crostacei, di miriapodi, di molluschi e di vermi. Ma oltre a ciò, a suo dire, le rane presenterebbero in proposito un fatto particolare. In sul finire del mese di luglio e nella prima parte del mese di agosto, quando è più forte l'afa della state, le rane si nutrono esclusivamente, o a un dipresso, di lente palustre. Il Vallisnieri fece le sue osservazioni nel Padovano, e dice che i pescatori di rane di quelle provincie lo assicuravano che le rane si nutrono pure di frumento, cosa che egli riconobbe falsa. Del resto, sempre secondo quello che egli riferisce, i pescatori di rane del Padovano sapevano benissimo che le rane si pascono anche di lente palustre, e il nome volgare di *ranina* dato là a questa pianticella ne è una prova.

Nello esame fatto nel mio laboratorio del canal digerente di un gran numero di rane e di rospi non vedemmo mai nulla che possa convalidare per questo ultimo rispetto le osservazioni del Vallisnieri. Devo dire tuttavia che non si è esaminato di proposito il canal digerente di rane raccolte in località acconcie proprio negli ultimi giorni di luglio e nei primi giorni di agosto, nel tempo del maggior caldo, unico tempo in cui quell'osservatore abbia trovato le rane per tal modo erbivore. Il Vallisnieri trae anzi argomento da ciò per raccomandare ai medici di lasciare in disparte le rane di fiume, che erano quelle che al tempo suo solevansi consigliare ai malati, per appigliarsi invece alle palustri raccolte nel tempo di questo loro eccezionale regime. Non è oggi più tempo di tal sorta di considerazioni, ma la osservazione del

Vallisnieri, per quanto il fatto possa parere inverosimile *a priori*, merita di essere riferita e presa in considerazione, venendo da un così grande maestro.

Il Fatio (1) menziona lo asserto di alcuni scrittori i quali dicono che talora i rospi si cibano anche di piccoli vertebrati, e soggiunge che le sue osservazioni riescirono sempre contrarie ad una così fatta asserzione.

Io fui testimonio del fatto seguente: In un acquario nel mio studio posi in sul finire di maggio dell'anno 1874 una rana esculenta adulta, ed una rana temporaria giovane, della lunghezza di m. 0,038, raccolte nel contorno di Torino. Cercai di indurre a prender cibo queste rane, siccome mi era riuscito con altre, tagliando un pezzettino di carne cruda allungato a mo' di vermiciattolo, e movendolo loro con una pinza davanti al muso. La giovane mangiò, l'adulta non volle saperne. Il giorno cinque del mese di giugno, la rana esculenta stava posata sopra un pezzo di sughero galleggiante nell'acquario, e teneva nelle fauci la piccola rana temporaria: l'aveva abboccata per le estremità posteriori, aveva ingoiato queste, i lombi, il resto del corpo fino alle ascelle, e la sola testolina oggimai della rana ingoiata sporgeva dalla bocca della grande testa della rana ingoiatrice: la vittima faceva ancora qualche sforzo per tirarsi fuori, ma invano. Le grida disperate di una signora che fu prima ad avvertire il fatto e lo accorrere intorno all'acquario di tutti i giovani che erano nello studio furono forse causa che la predatrice si tuffasse in acqua; i movimenti che dovè fare pel nuoto diedero agio alla vittima di balzar fuori con uno sforzo disperato e arrampicarsi sul galleggiante dove, nella massima spossatezza, si pose colle estremità posteriori allungate ed immobili come per paralisia.

Questo fatto lascia supporre che in natura sovente i rospi e le rane adulte si pascano di individui piccoli già trasformati della loro medesima specie e di specie affini, siccome è certo pure che si pascono dei loro girini, avendone io pure tal fiata trovato nello stomaco loro.

Tutto inoltre quello che trovò il Vallisnieri, tranne il cibo vegetale sopra menzionato, si trovò pure da noi in un gran numero di rane e di rospi sezionati nel laboratorio del museo zoologico di Torino.

Il cibo loro prediletto sono gli insetti, e sovratutto i coleotteri. Le raganelle che passano la vita nel fogliame degli alberi dan caccia a quegli insetti che stanno nelle foglie e sui fiori, crisomelini, lamellicorni ecc.; le rane ed i rospi dan caccia sul terreno principalmente ai carabici, brachelitri ecc.

Sono disposti nella tavola che segue per ordine di frequenza i risultamenti delle ricerche fatte da noi intorno al cibo degli anfibî anuri in Piemonte.

(1) Op. citat.

Rana esculenta Linn. » *temporaria* Linn. » *agilis* Thomas	*Bufo vulgaris* Laur. » *viridis* Laur.	*Hyla viridis* Laur.
1.° **Coleotteri** 1.° Carabici (comunissimi) 1.° Harpalus 2.° Carabus 2.° Brachelitri (comunissimi) 1.° Staphylinus 2.° Philonthus, Poederus, Stenus 3.° Lamellicorni 1.° Serica, Onthophagus, Aphodius, Oniticellus 2.° Geotrypes (comuni) 3.° Pentodon, Copris 4.° Palpicorni Sylpha Qualche volta in gran numero nel ventricolo di qualche individuo. 5.° Tenebrionidi 1.° Opatrum (non molto frequenti), Blaps 6.° Curculionidi 1.° Molytes, Otiorynchus Crisomelini 1.° Crysomela (raram.) 7.° Coccinellini 1.° Coccinella (raram.) 2.° **Imenotteri** 1.° Si trovano frequentemente individui col ventricolo pieno di formiche. 2.° Raramente qualche vespa. 3.° **Crostacei** Qualche volta si trovano individui col ventricolo pieno di *Oniscus*. 4.° **Lepidotteri - Ortotteri - Ditteri** Qualche Acridio e qualche larva di Lepidottero. 5.° **Emitteri** Qualche Pentatoma. 6.° **Molluschi** Poco frequenti, qualche *limaccia* e qualche *chiocciolina*. 7.° **Aracnidi** Rari 8.° **Ditiscidi - Idrofilidi** Rari assai. 9.° **Miriapodi - Vermi** Qualche Scolopendra, qualche *Julus*, qualche *Lumbricus*.	1.° **Coleotteri** 1.° Carabici (comunissimi) 1.° Harpalus 2.° Carabus 1.° Brachelitri (comunissimi) 1.° Staphylinus 2.° Philonthus, Poederus Si trovano non raramente rospi col ventricolo pieno di individui di una sola specie. 3.° Lamellicorni 1.° Serica, Onthophagus 2.° Geotrypes (comune) 3.° Pentodon, Copris 4.° Palpicorni Sylpha (non molto com.) 5.° Tenebrionidi 1.° Opatrum, Blaps Meno rari che non nelle rane, specialmente negli individui presi in estate. 6.° Curculionidi 1.° Molytes, Otiorynchus Crisomelini 1.° Crysomela (raramente) 7.° Coccinellini 1.° Coccinella (raramente) 2.° **Imenotteri** Si trovano non raramente individui col ventricolo pieno di formiche. 3.° **Crostacei** Oniscus (non rari) 4.° **Molluschi** Più comuni che non nelle rane. 1.° Chioccioline (comuni) 2.° Limaccie 5.° **Ortotteri** Non rari gli individui col ventricolo pieno di *forficole* o di altri ortotteri, come *Acridii*, *Locustini*. 6.° **Lepidotteri** Le larve si incontrano più frequentemente che non nelle rane. 7.° **Aracnidi** Più frequenti che non nelle rane. 8.° **Emitteri - Ditteri** Rari assai. 9.° **Miriapodi - Vermi** Qualche *Julus*. Non rari i *Lumbricus* e le Scolopendre.	1.° **Coleotteri** 1.° Crisomellini 1.° Crysomela 2.° Agelastica, Plagiodera, Adimonia 2.° Curculionidi 1.° Polydrosus, Otiorynchus 2.° Rhynchites 3.° Coccinellidi 1.° Coccinella, Thea 4.° Lamellicorni 1.° Oxythyrea Ne trovai individui col ventricolo pieno, specialmente in primavera. 2.° Serica 3.° Cetonia 5.° Elateridi 1.° Lacon 6.° Brachelitri 1.° Paederus 7.° Carabici 1.° Harpalus 2.° **Ditteri** Non rari negli individui presi in estate. 3.° **Ortotteri** 1.° Numerosissime le forficole. 2.° Qualche *Acridio* e qualche *Blatta*. 4.° **Imenotteri** Varie specie (non rari) 5.° **Lepidotteri** Non rare le larve. 6.° **Emitteri** Più frequenti che non nelle rane e nei rospi; ma non molto comuni. 7.° **Aracnidi - Miriapodi** Qualche *Oniscus*, qualche *Julus*. Non rari i ragni di varie specie.

Dalla tavola precedente si scorge come gli studiosi di entomologia possono trovare, per tal modo, uno inaspettato e nuovo e non disprezzabile campo di ricerche. Nello stomaco, ad esempio, della rana temporaria raccolta alle maggiori altezze cui essa possa vivere sulle Alpi si possono trovare insetti non comuni e ben conservati, come pure spesso preziosi insetti è dato di trovare nello stomaco di anfibî anuri di lontani paesi.

Non è duopo dire che quanto siamo venuti fin qui esponendo intorno al regime alimentare degli anfibî anuri si riferisce allo stato adulto, o per dir meglio a quel tratto della vita che immediatamente tien dietro alla metamorfosi. E qui piacemi ancora aggiungere che sovente mi venne fatto di vedere le rane adoperare entrambe le zampe anteriori a mo' di mani per spingere celeremente nella bocca un cibo un po' grosso.

Per quello che si riferisce ai girini, parlando dello allevamento loro in casa diremo come, sebbene siano a preferenza erbivori, pure accolgono anche cibi animali, e a rigore con questi soli si potrebbero anche portare fino alla metamorfosi. In natura, siccome fu dimostrato in questi ultimi tempi da parecchi naturalisti, contro la comune opinione che li dichiarava strettamente erbivori, paiono pascersi principalmente di vegetali, come confervacee, lemne, ecc., ma accogliere anche all'uopo sostanze animali.

Il girino della rana temporaria che vive a grandi altezze in quei laghi alpini dove è scarsissima la vegetazione, per necessità si pasce di carne e di insetti.

Ma ritornando ora agli individui nello stato adulto, e stando a quello che si osserva facilmente nel contorno di Torino, è da notare che qui le rane ed i rospi sono più abbondanti in quei luoghi appunto ove sono più abbondanti gli insetti, vale a dire a nord-est della città, nella regione di Vanchiglia, lungo il Po, la Dora, e la Stura; meno nella parte opposta, a sud-ovest, fuori della barriera di Nizza, dove, siccome abbiamo già detto, sono più rari gli anfibî anuri, e sono anche più rari gli insetti.

Tutto ciò è naturalissimo; ma poco in armonia con certi moderni dettami di zoologia applicata alla agricoltura, e certe norme intorno alla conservazione di animali utili ed alla distruzione di nocevoli.

Secondo questi dettami empirici di zoologia applicata, sono tanto più utili gli animali quanto più sono distruggitori di insetti. Ragionando così converrebbe dire che fra gli anfibî anuri del Piemonte viene in prima linea d'utilità la raganella, poi il rospo comune, poi il rospo smeraldino, poi la rana esculenta, la rana temporaria e finalmente la rana agile, e il pelobate.

Ma qui vien prima di tutto spontanea la seguente domanda. Se le rane ed i rospi sono così formidabili distruggitori di insetti, perchè mai questi si trovano più abbondanti laddove appunto quelli più abbondano?

La quantità di rane e di rospi che si trovano in Vanchiglia dovrebbe aver fatto scomparire oggimai tutti gli insetti da quella località, la quale invece è fra tutte nel contorno di Torino la più ricca d'insetti.

In secondo luogo bisogna sapere che alla agricoltura non giova la distruzione degli insetti in generale, senza distinzione, ma bensì gioverebbe invece la distruzione solo di certi determinati insetti. Sono gli insetti o erbivori, o carnivori. Dei primi,

siccome nocevoli ai vegetali coltivati dall'uomo, è giovevolissima la distruzione: dei secondi, i carnivori, che divorano altri insetti, non può essere utile, ma deve tornare invece nocevole la distruzione. Ora in massima parte gli insetti di cui si cibano le rane ed i rospi sono carnivori, che, come abbiamo detto, sono degni di essere protetti e non perseguitati.

Questo argomento della utilità e della nocevolezza degli animali è molto complesso e malagevole, e generalmente trattato da quelli che meno sanno.

Rispetto agli anfibî anuri, si può dire che in un modo solo essi possono veramente riuscire utili, non all'agricoltore ma allo orticoltore. Quando, ad esempio, le foglie dei cavoli e delle lattughe sono per esser divorate dalle limacce, raccogliendo una certa quantità di rospi e mettendoli tutti assieme nell'orto, divoreranno in breve questi ed altri piccoli ma pericolosissimi nemici degli ortaggi, salvo a morire poi essi stessi di fame quando non riescano ad uscire dal recinto e trovarsi altro scampo.

Come tutti gli animali numerosi ed inermi, gli anfibî anuri hanno molti nemici che operano continuamente a loro danno.

I pericoli maggiori per questi animali sono nel primo stadio della loro vita, in istato di girino.

E il danno più grande, la maggior distruzione, fannosi da se stessi, vale a dire i genitori alla prole.

I vecchi naturalisti tenevano in conto di assioma la infallibilità dello istinto: oggi molti fatti provano che quello che si chiama l'istinto degli animali sovente sbaglia, e li manda a rovina.

L'imprevidenza dei genitori è negli anfibî anuri, secondochè moltissime volte mi venne fatto di osservare, causa che un numero incalcolabile di nati non vadano nella vita al di là dei primi giorni, oppure anche che non si sviluppino le ova, fecondate.

Le pioggie primaverili fanno sovente tanto in montagna quanto nelle colline e nella pianura certe pozze temporanee che in breve poi si prosciugano. Le rane ed i rospi vanno a deporre in queste pozze le ova, e col prosciugarsi delle acque le ova, o i girini che ne sono nati, vanno tutti perduti.

Sopra Casteldelfino, all'altezza di 1310 metri sul livello del mare, si trova un laghetto che la gente del paese chiama *Lai-sec,* Lago secco, perchè sovente nelle estati un po' calde si prosciuga al tutto. Quel laghetto brulica di girini della rana temporaria, che, quando il prosciugamento avviene, muoiono inesorabilmente tutti.

Questo, in minori dimensioni, ma moltiplicato in moltissime parti, avviene nel contorno di Torino e dapertutto in Piemonte, e tanto costantemente ed estesamente che, tutto ben calcolato, si può considerare come la causa più grande di distruzione degli animaletti di cui parliamo. Così pure ancora quando una pozza non si prosciuga intieramente, basta a recar nocumento ai girini che ne vengano a scarseggiar troppo le acque. Ammucchiati i girini in soverchia copia in uno spazio troppo ristretto, non è d'uopo dire quale ostacolo incontrino al loro sviluppo.

Sovente poi ancora in primavera si aggiunge un'altra causa di distruzione, dove tuttavia non è da incolpare la imprevidenza dei genitori. Sopravvengono spesso grandi pioggie quando già le ova sono state deposte, o sono già nati i girini: queste pioggie

fanno straripare le acque, trasportandone fuori girini ed ova, che restano in breve all'asciutto.

Non sono nocevoli, come si potrebbe credere a tutta prima, i repentini abbassamenti della temperatura, quali sovente avvengono in Piemonte, dove a qualche giornata e settimana primaverile precocemente calda tengon spesso dietro freddi novamente rigorosi. Questo non fa altro che ritardare lo sviluppo, tanto delle ova quanto dei girini. Ma di ciò diremo qualche parola di più in altro luogo,

È pure ostacolo allo sviluppo dei girini il soverchio moltiplicarsi che fanno talora in certe pozze ristrette alcune alghe della famiglia delle confervacee, le cladofore (1), le spirogire (2), che talora finiscono per ingombrare letteralmente tutto quanto lo spazio. Ciò nel contorno di Torino si osserva regolarmente in una pozza presso la riva destra della Stura, nella località detta del Ponte rotto.

Vogliono poi essere menzionati, siccome ben s'intende, quali distruggitori dei girini, tutti quegli animali che si pascono di essi. Ma questa causa per quanto estesa viene tuttavia solo in seconda linea rispetto alle precedenti.

Le pozze dove brulicano i girini accolgono pure buona copia di varie specie di coleotteri acquaioli della famiglia degli idrocantaridi (ad esempio, i generi *Dytiscus, Acilius, Eunectes, Agabus, Cybister* ed altri) che tanto in istato di larva quanto in quello d'insetto perfetto si cibano di girini, e, siccome voracissimi e assai grossi, ne fanno molta strage.

Non parmi che di girini di anfibî anuri, almeno in Piemonte, debbano fare guari strage i pesci. Nelle acque delle pozze e dei fossi al piano, e nei laghetti sulle Alpi, dove più brulicano i girini, i pesci mancano o sono scarsi e piccoli. Nei grandi laghi, nelle fiumane e nei fiumi, le rane ed i girini stanno presso la riva, dove l'acqua è più scarsa e meno in moto, e qui non possono essere guari inseguiti dai pesci voraci.

Nemici ben più pericolosi hanno i girini degli anfibî anuri nella propria classe. Il *Triton cristatus* Laur. ed il *Triton punctatus* Dugès, le sole due specie di anfibî urodeli della famiglia dei Tritoni che mi sia stato dato di trovare in Piemonte nella regione del piano, sono comunissimi dapertutto, ma segnatamente nel contorno di Torino, nelle acquicelle stagnanti o di lento corso, e fanno delle ova e dei girini di cui parliamo il principale loro cibo.

Sono poi distruggitori dei girini degli anfibî anuri gli adulti della stessa loro specie, siccome già ho notato parlando dei cibi di cui questi ultimi si sogliono nutrire.

Le bisce d'acqua, molti uccelli palmipedi e trampolieri e qualche piccolo mammifero acquaiuolo fanno ancora distruzione di girini; ma qui la strage è molto più grande compiuta la metamorfosi.

Il Roesel, nel quale insuperabilmente s'accordano le qualità del naturalista e del pittore, con un mirabile disegno che mette in capo alla prefazione della sua storia delle rane, presenta operanti i nemici delle rane in istato adulto.

(1) *Cladophora glomerata* Kutzing.
(2) *Spyrogyra quinina* Kutzing.

La rana esculenta, che passa tutta la sua vita accosto all'acqua o nell'acqua stessa, è preda frequentissima delle bisce, e già da tal fatto traeva Dante una delle sue similitudini più belle. In questo stadio della vita adulta, più facilmente pure che non nello stadio della vita di girino, va nelle fauci del luccio vorace. In montagna la rana temporaria è vittima della vipera, sebbene questa dia la preferenza alle talpe ed ai piccoli rosicanti.

Ma certamente la rana in istato adulto ha per suo maggior nemico il gran nemico di tutti gli animali, l'uomo.

In Piemonte le rane entrano a far parte della pubblica alimentazione, e in qualche provincia ne son parte non tanto scarsa.

In Torino si smerciano sui mercati a un dipresso seicento miriagrammi di rane annualmente. Se ne smerciano da dieci a dodici miriagrammi per settimana in estate, e da due a tre miriagrammi per settimana in inverno. La maggior parte delle rane che si mangiano in Torino vengono mandate da pescatori del Vercellese, ed anche da Piobesi, da Settimo torinese, e da Chivasso. Questo commercio si fa da rivenditori in grande, i quali, quando la quantità delle rane è maggiore, affidano una parte della vendita a rivendugliole ambulanti che le smerciano principalmente nei sobborghi alla periferia della città.

Quando scarseggia lo affluire delle rane dalle località sopramenzionate, i grandi rivenditori si rivolgono alla piazza di Bologna, da cui fanno venir rane che si tengono preferibili siccome più grosse ed a miglior mercato. Ma pel gusto si dice che siano migliori le piemontesi, e si tengono in conto di squisite a preferenza di tutte le altre quelle che si fanno venire da Piobesi e da Settimo torinese. Il prezzo medio delle rane sul mercato di Torino è di settanta centesimi al chilogramma; i rivenduglioli per la città le vendono nella buona stagione venticinque centesimi la libbra.

A Vigevano si portano in media otto miriagrammi al giorno di rane sul mercato dall'aprile al settembre, la massima quantità nei mesi di giugno e di luglio; si vendono in media sessanta centesimi al chilogramma; ma pesandole scorticate e mozzate del capo.

Eguale e forse anche maggiore è lo smercio delle rane in Novara ed in Vercelli, e nell'agro circostante a queste due città. Soventissimo nella buona stagione si vedono al tramonto le contadine nei poderi sulla soglia della loro dimora intente a scorticar le rane che subito poi friggono ed imbandiscono alla famiglia. Grande è la quantità delle rane che per tal modo vien consumata.

Si comprende facilmente come il commercio delle rane non sia egualmente vivo in tutto il Piemonte: a Biella, ad esempio, è quasi nullo.

In montagna non si usa quasi un tal cibo; gli alpigiani si contentano dei loro latticinî e della loro polenta, e non cercano guari altro cibo: i soli doganieri, che venendo dal piano portano seco altri gusti, ed han molto tempo disoccupato, si dilettano nelle nostre montagne di una tal sorta di pesca e di una tal sorta di cibo, e trattasi allora della rana temporaria, intorno alla quale il Bonaparte, paragonandola dal punto di vista alimentare con la rana esculenta, dice: «..... Gareggerebbe volontieri in bontà di carne con l'antecedente, ma le mense ben apparecchiate la degnano più raramente di quella, e per verità, è duretta di polpe, e non saporosa, cibo

insomma assai vile...» Il Fatio invece dice che in Svizzera questa ultima specie, come cibo, è preferita alla prima.

Parlando delle rane adoperate come cibo, il Vallisnieri dice: « In certi luoghi del Napoletano, per relazioni di un mio amico,..... mangiar non le possono senza che loro non venga ardore e sovente difficoltà d'orina..... In certe parti pure della Grecia aborriscono le medesime, e ciò seguirà probabilmente perchè faranno loro o avranno fatto qualche volta del nocumento, essendo per altro quei popoli ingordi e voracissimi di ogni altro cibo....».

In Sardegna si ha per le rane, od almeno pel genere *Discoglossus* che le rappresenta, un abborrimento profondo, anzi un vero terrore, tenendole in conto di velenosissime e micidiali al solo contatto. Un contadino, volendo dire di un suo figliuoletto la peggior cosa, lo chiama *Sa rana de domu.* Un giorno il cav. Comba raccolti alcuni di questi animaletti cui le sue guide non osavano toccare, ne pose uno in bocca. Le guide dapprima inorridirono, poi si spiegarono la cosa dicendo che egli senza fallo sapeva *la preghiera*, lo scongiuro con cui si rendono innocui gli animali più pericolosi.

In Liguria non mangiano affatto rane, e le dichiarano cibo nocevole. Un medico della riviera di ponente mi raccontava che un operaio piemontese, burlandosi di tale opinione locale, raccolse là una certa quantità di rane, le mangiò, e ne fece una malattia. Credo tuttavia che la vera ragione per cui in Liguria non si mangiano le rane sia la stessa che per la Sicilia adduce il Doderlein colle seguenti parole:

«..... La Sicilia a vero dire non trae grande vantaggio igienico e sociale dalla sua fauna erpetologica. Quivi le rane, tranne qualche raro caso, non si mangiano, sia per la scarsezza della specie *esculenta*, confinata qual' è in alcuni pochi luoghi dell'isola, sia perchè il corrispondente *Discoglossus pictus* che le rappresenta negli stagni e nei laghi salmastri del litorale non offre quella delicatezza di sapore che ha la prima, sia infine perchè la notevole copia di squisiti pesci, di crostacei, di molluschi, che il vicino mare tributa agli isolani fa sì che questi sdegnino ogni altro cibo meno appetitoso ed opportuno» (Doderlein, *Alcune generalità intorno la fauna sicula dei verterbrati* pag. 32).

Intorno al modo di pescare le rane il Vallisnieri dice che i pescatori le pigliano colle mani, per le zampe di dietro, sbattendo loro subito per farle morire il capo sopra qualche corpo duro.

I contadini dei contorni di Vigevano, nella buona stagione, fanno durante la notte la pesca delle rane, e vanno scalzi, lungo gli argini delle risaie, tenendo in una mano un lanternino che ha posteriormente e lateralmente una parete di legno e projetta tutta in avanti la luce, e coll'altra mano afferrano a quel debole lume le rane con tanta sicurezza che i più abili ne raccolgono un paio di miria in una notte. Si fa poi ancora colà un' altra maniera di pesca alle rane che vien praticata generalmente dalle donne: esse appendono ad una lenza penzolante da un bastone una pelle di rana arrotolata a gomitolo, e la fanno ballonzolare a fior d'acqua; le rane l'abboccano e la ingoiano, le donne tirano rapidissimamente la lenza a terra ed afferrano la rana prima che abbia avuto tempo a rivomitare la strana preda.

Nel contorno di Torino qualche pescatore appende alla lenza un peso cui attacca

parecchi uncini, e muove la lenza con tanta destrezza da far piombare gli uncini sulla rana nell'acqua, tirandola fuori infilzata.

Lo Tschudi dice che in Svizzera si fa lungo la notte una sterminata distruzione di rane pescandole a lume di faci, e che, siccome quello che si cerca in esse come nutrimento sono le zampe posteriori, i pescatori taglian queste sul luogo abbandonando il resto del corpo, che essi credono atto a ripristinare le zampe e proseguire la vita. Il Roesel in testa al capitolo nel quale tratta della rana esculenta, disegna elegantissimamente alcuni puttini che infilzano rane colla balestra, ed uno in un canto che taglia loro con una grande forbiciata le zampe posteriori.

Vallisnieri dice: « I nostri pescatori.... prendono gran quantità di rane l'autunno, fanno in terra profonde buche, e ve le ripongono, coprendole colle spoglie del grano del frumento che noi chiamiamo *locco*, per venderle l'inverno a più caro prezzo, sotto il quale ottimamente vivono e si conservano ». Qualche cosa di consimile si fa pure anche oggi in Torino, dove tutto l'anno si trovano da comperar rane.

Lo stesso autore parla della innocuità dei rospi, adoperati come nutrimento, contro il pregiudizio comune del suo tempo, che è anche quello del tempo nostro. Egli parla dei soldati tedeschi acquartierati nel Padovano, che mangiavano rospi senza danno. Il Cuvier, parlando del *Pelobates fuscus*, dice: « On le mange en quelques lieux, comme si c'était un poisson ».

Il Vallisnieri parla poi a lungo delle virtù medicinali delle carni dei rospi e delle rane. Per molto tempo furono proclamate dai medici efficacissime nella cura di molte malattie non solo le carni delle rane e dei rospi ma anche le loro ossa, le ova, e perfino lo sterco, e si diedero norme minutissime intorno ai varî modi di preparazione. In Oriente anche ora è così, segnatamente in Cina ed al Giappone.

In Piemonte anche oggi certi medici fanno prendere ai malati il brodo di rane.

La spesa che si fa in Piemonte principalmente per la pubblica alimentazione, ed anche in piccola parte per uso medicinale e per studî e sperimenti di anatomia e di fisiologia, è a un dipresso di annue cinquanta mila lire.

Riproduzione

Semina limus habet virides generantia ranas,
Et generat truncas pedibus, mox apta natando
Crura dat, utque eadem sint longis saltibus apta,
Posterior superat partes mensura priores.
Ovid. Metam. lib. XV.

Una lunga osservazione dei girini delle varie specie di anfibî anuri nostrali, ed una assidua comparazione di questi fra loro, dà luogo a risultamenti generali non indegni di essere notati, tanto riguardo al tempo della riproduzione ed a quello dello sviluppo, quanto alle differenze rispettive nei varî periodi, dalla emissione dell'ovo fino al compimento della metamorfosi, e al modo di distinguere ad ogni periodo un girino di una specie da quello di un'altra, e riconoscere, a un dipresso, l'età del girino.

Alcuni fra i risultamenti di tal sorta piacemi qui riferire.

Se paragoniamo, in modo generale, rispetto al tempo in cui danno opera alla riproduzione, gli anfibî anuri del Piemonte con quelli di altri paesi, troviamo che questo tempo è a un dipresso il medesimo come in Francia ed in Svizzera, e ci ha una anticipazione di circa un paio di settimane rispetto alla Germania.

Ma nel Piemonte stesso, senza parlare della regione alpina, ed anche considerando un tratto ristretto di terreno, si scorgono differenze abbastanza notevoli.

Nel contorno di Torino, anzi alle porte della città, havvi una differenza di una diecina di giorni fra la parte a sud-ovest e quella a nord-est della città. La prima è elevata, asciutta, scarsa d'alberi, coltivata coll'aratro: la seconda è bagnata dal Po, dalla Dora, dalla Stura, solcata di numerosi canali, ricca di prati, e, malgrado i numerosi tagli che ogni anno vi si vanno facendo, anche di foreste, umida, nebbiosa. La vita animale, la vegetazione, tutto, al ridestarsi della primavera, comincia a muoversi nella prima regione più presto che non nella seconda.

Differenze della stessa sorta ugualmente scorgonsi nei varî tratti della collina che si distende al di là del Po in faccia a Torino. Il tratto verso Moncalieri ha una certa precocità primaverile rispetto a quello verso Superga. Scorgonsi ancora differenze in termini più ristretti, dall'una all'altra vicina vallata, o lungo i due pendii della vallata stessa, e qui ancora non solo nel primo ridestarsi della vita nel mondo animale al sopravvenir della primavera, ma anche nella vegetazione, nello ingemmarsi dei rami, nello sbocciare e nel comparire delle tenere prime foglioline e dei primi fiori.

Paragonando il contorno di Torino col contorno di Rivoli e cogli altri luoghi che stanno allo sbocco di Val di Susa, si ha per questi una precedenza di un buon paio di settimane. Questo fatto è in rapporto con un altro fatto notevolissimo che la bella valle presenta. Vi sono cioè qua e là certi tratti a mo' di oasi di vegetazione e di vita animale per molti rispetti diversa da quella delle regioni circostanti, ed affine a quella delle regioni della Liguria e della Toscana.

Nella regione alpina è grandissima, siccome facilmente si comprende, la differenza della pianura, ed è grandissima pure la differenza a seconda dei varî livelli.

Il fatto menzionato dal Fatio (1) per osservazioni sue e dello Schiff, della rana temporaria che mette talora due anni a compiere le varie fasi del suo sviluppo ed entrare in stato perfetto, segue pure nelle Alpi del Piemonte. L'accoppiamento vien ritardato dal freddo lungo che tien gelata la superficie di un laghetto; i girini, poco inoltrati nel loro sviluppo, sorpresi dal sopravvenir dell'inverno, sotto la crosta di ghiaccio, senza cader in letargo come i loro progenitori, ma scarsamente nutrendosi e scarsamente crescendo, aspettano l'estate novella per spogliarsi delle branchie, ed abbandonare saltellando il nativo laghetto (2).

Lasciando in disparte quei più particolareggiati ragguagli, che saranno riferiti nel discorso intorno alle singole specie, si può dire in modo generale che in Piemonte le ova dei varî anfibî anuri si trovano nei tempi seguenti:

Rana esculenta Linn. dal principio di aprile alla prima metà di giugno.

Rana temporaria Linn. dal principio di febbraio a tutto marzo.

Hyla arborea Laur. dalla seconda metà di aprile a tutta la prima metà di giugno.

Pelobates fuscus Wag. dal principio di aprile a tutto marzo.

Bufo vulgaris Laur. dagli ultimi giorni di febbraio ai primi di aprile.

Bufo viridis Laur. dal principio di aprile agli ultimi giorni di maggio.

Della *Rana agilis* Thomas rispetto al tempo del suo accoppiamento in Piemonte posso dire solo che quest'anno 1877 ho trovato in una pozza presso Rivoli ova, e individui accoppiati alli 11 marzo. Il Fatio (3) dice per la Svizzera che questo accoppiamento ha luogo dalla prima metà di marzo fino al terminar dell'aprile.

La rana temporaria è adunque in Piemonte quella che prima incomincia l'opera della riproduzione, e ad essa tien dietro immediatamente il rospo comune. Ultima è la raganella.

Vogliamo riferire qui ora alcune tavole, riguardanti lo sviluppo delle ova e dei girini, le quali servono a far riconoscere dalla semplice ispezione dell'ovo, e del girino, la specie cui appartiene.

Per tale intento conviene considerare questo tratto della vita dello animale in alcuni periodi, nei quali esso presenta certi caratteri nel modo il più spiccato.

Questi periodi possono essere i seguenti:

1. L'ovo.
2. Dallo uscire del girino dal suo invoglio glutinoso, fino al rientrare delle branchie.
3. Dal rientrare delle branchie allo apparire dei primi rudimenti delle zampe posteriori.
4. Dallo apparire dei primi rudimenti delle zampe posteriori al compiuto loro sviluppo.
5. Dal compiuto sviluppo delle zampe posteriori allo scomparire della coda.

(1) Fatio, op. cit.

(2) Vedi Michele Lessona, *Nota intorno allo svernare di un girino di Hyla viridis* Laur. Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XII. Adunanza del 25 febbraio 1877.

(3) Fatio, op. cit.

I caratteri che contraddistinguono ciascun periodo, e cui le tavole sopra citate si riferiscono, sono nel massimo grado del loro sviluppo, oppure sono in via di accrescimento o di decrescimento, secondo che l'animaletto è nel punto culminante del periodo medesimo, o sta avvicinandosi ad esso, o l'ha oltrepassato.

La distinzione delle specie è senza paragone più facile quando si esaminano i girini negli stadî ulteriori che non quando (1) si esaminano nei primi. Nel primo periodo torna sovente malagevolissimo distinguere le specie affini, per esempio le due specie di rospi, il *rospo comune* ed il *rospo smeraldino*. Un paziente esame tuttavia mena a scorgere alcuni caratteri che valgono alla distinzione.

Le osservazioni intorno ai girini, come le osservazioni zoologiche in generale, vogliono esser fatte quanto più sia possibile in natura, e quelle che si fanno sopra individui tenuti in schiavitù possono mancar di valore. Tuttavia nel caso dei girini di cui parliamo lo allevamento in casa può presentare i suoi vantaggi, sia perchè dà campo ad osservazioni quotidiane ed anche d'ora in ora per le quali solo si rivelano certi fatti, sia perchè non altrimenti che in questo modo torna possibile scorgere ed esaminare alcuni atti della vita di questi animaletti.

Per questo, sebbene possa servire ogni sorta di recipiente, presentano un grande vantaggio i recipienti di vetro, fra i quali vogliono essere preferiti quelli di forma quadrangolare, che abbiano a un dipresso m. 0,30 nella loro maggior lunghezza e nella loro altezza e m. 0,20 nella lunghezza minore. Quei recipienti di vetro sferoidali che si trovano più facilmente ed a miglior mercato vogliono essere lasciati in disparte, non fosse altro che per la malagevolezza delle osservazioni attraverso alla convessità delle loro pareti. Si possono adoperare con vantaggio recipienti di vetro cilindrici della altezza di m. 0,50 e del diametro di m. 0,10.

Le dimensioni non troppo grandi dei recipienti presentano il grande vantaggio che questi si possono facilmente spostare e trasportare, senza il bisogno di estrarne i girini : ma convien badare a moltiplicare i recipienti all' uopo, perchè i girini tanto s'allevano meglio quanto più stanno al largo.

Non è buon consiglio coprire con uno strato di terra il fondo del recipiente. È meglio che questo, al momento in cui ci si mettono le ova, sia pieno di acqua pura, la quale deve avere a un dipresso la temperatura di + 15° centigradi. Una temperatura più bassa ritarda lo sviluppo, e può riuscire mortale una temperatura più elevata.

La vita degli animaletti di cui parliamo, entro ai serbatoi, si può dividere in due distinti periodi.

Il primo periodo comincia dal punto in cui si mettono le ova entro l'acqua del recipiente, e si termina col rientrare delle branchie.

Il secondo periodo va dal rientrare delle branchie fino al compiuto sviluppo.

La prima cosa cui bisogna badare nel primo periodo si è di non mettere nello stesso recipiente una troppo grande quantità di ova e di procurare che queste non restino tutte ammucchiate in basso; poi bisogna cambiar sovente l'acqua, più o meno secondo il numero dell'ova, normalmente ogni ventiquattro ore.

(1) Questo è fatto tanto semplice e volgare quanto alto ed importante, chi lo sappia considerare filosoficamente.

Quando i girini sono usciti dallo invoglio glutinoso e cominciano i primi loro guizzi, bisogna mettere nell'acqua una sufficiente quantità di conferve di cui essi pasconsi avidamente; ma tornerebbe a danno dei girini il metterne troppo.

Quando un certo numero d'ova non procedesse avanti nello sviluppo, o venisse a morire un certo numero di girini, bisogna subito trasportare tutti i girini sani superstiti in un altro recipiente pieno d'acqua pura. I primi stadî della vita del girino son quelli in cui esso più si risente delle azioni esterne ed ha bisogno di maggiori cure; dopo diventa più forte, e il bisogno di cure si fa minore.

Quando il girino si è alquanto sviluppato, quando incominciano a mostrarsi i primi rudimenti delle estremità posteriori, conviene modificare il suo vitto, aggiungendo alle conferve la lente palustre, o lemna, e così si può continuare fino alla fine.

È cosa certa, ripetiamo, che i girini si possono allevare nutrendoli esclusivamente di sostanze vegetali; ma è certo pure che si potrebbero parimente allevare con un nutrimento esclusivamente fatto di sostanze animali; anzi appunto di girini morti.

Ho fatto la prova di mettere in un recipiente, rinnovando l'acqua e seguendo le altre norme convenienti, un certo numero di girini, senza dare loro nessun cibo. Appena in tal caso un girino veniva a morire, gli altri gli si precipitavano sopra, e lo divoravano. In tal modo però il maggior numero, e alcuni pochi ottennero la loro trasformazione.

Ad un periodo un po' inoltrato del loro sviluppo i girini hanno più che mai bisogno di spazio, e allora in un recipiente delle dimensioni sovra indicate non se ne devono tenere più di dieci o dodici, e quando si tratti di girini del *Pelobates fuscus* Wagler anche non più di quattro o cinque. Bisogna continuare esclusivamente il rinnovamento dell'acqua, badando sempre alla temperatura, e scansando di mettere acqua troppo fredda rispetto alla precedente, per non far sopportare al girino un troppo rapido abbassamento di temperatura che gli potrebbe tornare nocevolissimo.

Non è buon consiglio mettere nei recipienti in cui si allevano i girini le acque delle pozze contenenti in gran copia minuti crostacei dei generi *Cyclops, Daphnia,* ed altri somiglianti; il rapidissimo e smisurato moltiplicarsi, che talora avviene di questi animaletti nel recipiente, può riuscire fatale ai girini.

Quando il girino è nell' ultimo tratto di questo primo stadio della sua vita, ha già sviluppate le zampe posteriori e le anteriori cominciano a sporgere, bisogna mettere nel recipiente qualche pezzo di sughero galleggiante, su cui salendo egli possa fare le prime prove della nuova vita in cui sta per entrare.

L'allevamento dei girini non presenta difficoltà, ma solo richiede diligenza ed assiduità di cure, di cui è largamente, per le osservazioni che in tal modo può fare, l'osservatore ricompensato.

Seguono ora le tavole sopra citate, destinate a fare riconoscere le differenti specie alla sola ispezione delle ova e dei girini: i caratteri differenziali sono facili da riconoscere, e le tavole tanto chiare da non aver bisogno di commento.

- **Ova**
  - **a mucchi . . .**
    - **grandi: le ova relativamente di grandi dimensioni.**
      - **nerognole**
        - relativ. grandi (*Rana esculenta* Linn.)
        - relativ. piccole (*Rana agilis* Thom.)
      - **giallognole: l'invoglio glutinoso relativamente piccolo . . . . . (*Rana esculenta* Linn.).**
    - **piccoli: le ova relativamente di piccole dimensioni e di color giallognolo-bruno . . . . . (*Hyla viridis* Laur.).**
  - **in forma di cordone, o coroncina**
    - **un solo cordone molto grosso pieno di ova . . (*Pelobates fuscus* Wagl.) (1). Tav. V fig. 27.**
    - **due cordoni . . . .**
      - **le ova disposte due a due alternatamente in guisa da formare una porzione di rombo . . . . . (*Bufo vulgaris* Laur.). Tav. V fig. 25.**
      - **Le ova disposte in fila l'un dopo l'altro in guisa da non formare una porzione di rombo . . . . . (*Bufo viridis* Laur.).**

Dallo uscire del girino dallo invoglio glutinoso fino al rientramento delle branchie.

- **Colore**
  - **giallognolo**
    - **il margine superiore della membrana caudale**
      - **giunge sul dorso fino presso al livello dell'occhio.**
        - **Il dorso presenta una concavità poco spiccata. I margini superiore ed inferiore della membrana caudale sono presso che paralleli . . (*Hyla viridis* Laur.). Tav. V fig. 16.**
      - **si ferma sul dorso in un punto molto al disotto del livello dell'occhio.**
        - **Il dorso presenta una concavità molto spiccata. I margini superiore ed inferiore della membrana caudale sono notevolmente convergenti verso l'estremità della costa . . . . . (*Rana esculenta* Linn.). Tav. V fig. 17.**
  - **nerognolo**
    - **membrana caudale**
      - **poco distinta ed i cui margini superiore ed inferiore sono sensibilmente paralleli fra loro . . . . . (*Rana temporaria* Linn.) (2).**
      - **ben distinta e di cui i margini non sono paralleli fra loro.**
        - **Il margine superiore della membrana caudale**
          - **giunge oltre la metà del dorso. Parte ventrale allungata . . . . . (*Pelobates fuscus* Wagl.). Tav. V fig. 24.**
          - **non giunge nemmeno alla metà del dorso. Parte ventrale tondeggiante . . . . . (*Bufo vulgaris* Laur.) (3). Tav. 5 fig. 26.**

(1) Diciamo che le ova del *Pelobates fuscus* vengono emesse riunite in un unico cordone, solo perchè, contrariamente a quanto succede pei *Bufi*, il *Pelobates fuscus* emette un solo cordone per volta. Si deve questa importante osservazione ad A. de l'Isle. Ecco le sue parole in proposito: « On croit... à tort dans la science, d'après un texte peu explicite de Roesel, que les pélobates n'accouchent que d'un cordon. Cependant ils possèdent, comme les autres amphibiens, deux ovaires et deux oviductes également développés! Aussi ai-je pris soin de vérifier le fait, que j'ai trouvé inexact. Les pélobates accouchent de deux cordons, comme les crapauds. Mais tandis que l'Alyte et le crapaud versent à la fois au dehors le produit de leurs ovaires sous forme de deux chapelets ou de deux cordons parallèles, les pélobates les émettent l'un après l'autre, parce qu'ils sont trop gros pour pouvoir sortir en même temps, à quelques heures et même à quelques semaines d'intervalle, suivant la chaleur ». (Annales des sciences naturelles. Série VI Tome III pag. 48).

(2) Manca in questa tavola e nelle seguenti la *Rana agilis* Thom. non avendo potuto fino ad ora osservare girini di questa specie.

(3) Non si osserva in questo stadio che una lieve differenza fra i girini del *Bufo vulgaris* e quelli del *Bufo viridis*; riesce quindi sommamente difficile il separare le due specie.

Dal rientrare delle branchie allo apparire dei primi rudimenti delle zampe posteriori.

- Cripte mucose
  - grandi e molto evidenti . . . . . (*Pelobates fuscus* Wagl.) (1). Tav. V fig. 19,20,28.
  - piccole e poco evidenti.
    - color generale del girino grigio-verdastro o giallognolo.
      - tutto il corpo circondato come da un cerchio trasparente. Macchie nere più o meno numerose sparse sul dorso; e per lo più disposte in modo da formare due striscie giallognole che procedendo da ciascun occhio convergono verso la regione mediana del dorso. Occhi sporgenti . . . . . (*Hyla viridis* Laur.) (2). Tav. III fig. 7,8,14.
      - Assenza, o traccia in qualche caso, del cerchio trasparente. Color generale grigiastro con macchie irregolari verdastre o brune. Occhi non sporgenti . (*Rana esculenta* Linn.).
    - Color generale del girino bruno o nero.
      - Margini della membrana caudale
        - notevolmente convergenti verso l'estremità. Color generale bruno sparso di riflessi cuprei nella parte ventrale. Membrana caudale con macchie brune molto spiccate. . . (*Rana temporaria* Linn.). Tav. IV fig. 9,10.
        - sensibilmente paralleli fra di loro
          - Corpo ovale, nero intenso, con qualche punticino dorato sul dorso e numerose granulazioni biancastre nella parte ventrale . . . . . (*Bufo vulgaris* Laur.). Tav. IV fig. 13,19.
          - corpo triangoliforme, nero non molto intenso. La parte ventrale generalmente presenta bei riflessi cuprei. . . (*Bufo viridis* Laur.). Tav. IV fig. 2,5.

(1) Nei girini di tutte le specie degli anfibî anuri del Piemonte si notano, in quali più in quali meno ben sviluppate, certe cripte mucose. Sono poco sviluppate nei rospi, un poco di più nelle rane, acquistano poi il massimo loro sviluppo nei girini del *Pelobates fuscus* Wagler. Esse hanno in questi girini una disposizione particolare e costante che non sarà inutile descrivere, tanto più che i cenni che ne dà il Cornalia non sono esatti.

Il Cornalia nel suo lavoro sul *Pelobates fuscus* e sulla *Rana agilis* trovate in Lombardia (Atti Soc. Ital. Scienze Natur. 1873, vol. XVI) dice: « Carattere dei girini di *Pelobates* sono, oltre quelli citati, due linee di *cripte mucose* che partite dall'orifizio nasale si portano sul capo girando attorno gli occhi, e dirigendosi poi verso la linea mediana finiscono a metà del dorso (fig. 3a) ». Ora le linee di cripte sono sempre quattro ed anche in qualche caso sei. Le due linee di cripte che il Cornalia chiama dorsali e che rappresenta nella tav. III fig. *a-b* del lavoro sopra citato, non nascono dagli orifizî nasali, ma molto più in basso, dall'apice del muso dove incontrandosi formano come una sorta di occhiello. Queste linee poi, avuta così la loro origine, passano all'indentro delle narici, diversamente da quello che mostra il disegno del Cornalia, e procedendo lungo tutta la regione dorsale vanno a perdersi nella coda e non si arrestano, come dice pure lo stesso Cornalia, a metà del dorso. Oltre a queste ve ne sono due altre che possiamo chiamare *laterali* e che, partite da una parte e dall'altra dell'occhiello sopra detto, passano al disotto degli occhi, percorrono sinuosamente tutto il fianco e vanno pure a perdersi nella coda. Qualche volta si osserva in ciascun fianco una terza linea di cripte che per qualche tratto è parallela alla precedente; ma è sempre piuttosto sfumata. In alcuni individui finalmente mi venne fatto di osservare la presenza di un'altra linea di cripte, per verità poco cospicue, che segue per qualche tratto la curvatura del mascellare superiore

(2) Qualche volta le macchie si fondono assieme e costituiscono come un fondo nerastro uniforme su cui spiccano in modo elegantissimo le striscie gialle sopra dette; altra volta invece le macchie nere restano sparse e le striscie gialle sono quindi meno ben limitate. Finalmente può accadere che il girino abbia un color grigio olivastro uniforme e che le striscie gialle non si vedano affatto.

Dallo apparire dei rudimenti delle zampe posteriori al compiuto loro sviluppo.

Estremità delle dita delle zampe posteriori

- più o meno acuminata
  - dita delle estremità posteriori
    - dilatata a guisa di disco. Occhi molto sporgenti . . . . . (*Hyla viridis* Laur.). Tav. V fig. 23.
    - sprovviste di tubercoli sottoarticolari. Tubercolo metatarseo con una lamina cornea tagliente . . . . . (*Pelobates fuscus* Wagl.). Tav. V fig. 21.
    - provvisti di tubercoli sottoarticolari
      - Colore
        - giallognolo o grigio verdastro con numerose macchie brune, non raramente una striscia dorsale chiara . . . . . (*Rana esculenta* Linn.). Tav. I fig. 5.
        - bruno o nero
          - fori delle narici
            - relativamente piccoli e posti ad una distanza dall'occhio eguale alla lunghezza dell'occhio stesso . . . . . (*Rana temporaria* Linn.) Tav. V fig. 35.
            - relativamente molto grandi e posti ad una distanza dall'occhio minore della lunghezza dell'occhio stesso.
              - Corpo ovale bruno-nero intenso . . . (*Bufo vulgaris* Laur.). Tav. V fig. 29.
              - corpo triangoliforme bruno-nero poco intenso (*Bufo viridis* Laur.). Tav. V fig. 37.

Dal compiuto sviluppo delle zampe posteriori allo scomparir della coda.

Estremità delle dita delle zampe anteriori e posteriori

- più o meno acuminate
  - presenza di tubercoli sottoarticolari
    - dilatate a guisa di disco. Colore del girino verde-cenerino chiaro. Le macchie temporali bene evidenti . . . . . (*Hyla viridis* Laur.).
    - assenza di tubercoli sottoarticolari; tubercolo metatarseo con una lamina cornea tagliente . . . . . (*Pelobates fuscus* Wagl.
    - lingua
      - a corna nella parte anteriore.
        - zampe posteriori
          - intieramente palmate. Girino di grandi dimensioni. Colore del dorso verde o grigio con macchiette brune . . . . . (*Rana esculenta* Linn.) (1).
          - palmate solo fino alla penultima falange. Girino di piccole dimensioni, bruno con macchiette nere in forma di un V rovesciato sul dorso . . (*Rana temporaria* Linn.) (2).
      - rotondata nella parte posteriore.
        - colore
          - bruno intenso per lo più uniforme. Zampe posteriori rossiccie con qualche fascia bruna. Parti inferiori di colore grigio scuro . . . . . (*Bufo vulgaris* Laur.).
          - bruno poco intenso per lo più con numerose macchiette nere. Parti inferiori di color grigio chiaro . . . . . (*Bufo viridis* Laur.).

(1) Presenta numerosissime varietà, in quanto al colore ed alla disposizione delle macchie, varietà che s'incontrano pure fra gli adulti. Pare che queste varietà di colore abbiano principio nella vita stessa di girino, comincino cioè a farsi evidenti nel periodo in cui si sviluppano le zampe posteriori. Quando ulteriori e più estese osservazioni venissero a dimostrare la costanza di questo fatto, non sarebbe irragionevole la domanda se per avventura queste varietà costanti, sebbene soltanto pel colore, fin dai primi periodi della vita, non possano meritare il nome di specie.

(2) In molti individui sono assai bene spiccate le macchie temporali.

Tutte le cose che siamo venuti dicendo intorno alle differenze delle ova, ed alle differenze dei girini, e le tavole che abbiamo riferito, servono a far sì che facilmente, venuto un girino sotto gli occhi, si possa dire a quale specie appartiene.

Vogliamo ora dare qualche norma intorno al modo di riconoscere, dato un girino, la sua età approssimativa.

Diciamo approssimativa e non precisa, perchè lo sviluppo del girino può procedere più o meno presto, od anche sopportare un notevole ritardo a seconda di alcune cause di cui fra breve faremo un po' di rassegna.

Giova ora qui avvertire che le misure notate esprimono medie di misure prese per parecchi anni sopra un gran numero di girini nei varî stadî, tanto fra quelli raccolti nelle escursioni quanto fra quelli allevati in casa, e che la temperatura alla quale seguì lo sviluppo nelle osservazioni da noi fatte varia fra i + 15° e + 19° del termometro centigrado.

Lo esame comparativo dello sviluppo del girino delle diverse specie degli anfibî anuri offre campo a varie considerazioni, di cui alcune ci paiono degne di essere qui riferite.

E prima di tutto è da notare che mentre, a parità di circostanze, lo sviluppo dell'ovo, dalla fecondazione alla uscita del girino dallo involglio glutinoso, presenta piccole differenze riguardo al tempo, presenta invece, pel medesimo rispetto, sempre a parità di circostanze, differenze notevolissime lo sviluppo del girino.

Così nelle rane in generale e nella raganella la vita in stato di girino è più lunga che non nei rospi. Ciò è in opposizione a quanto dice il Fatio (1), che ha le seguenti parole: « Il semble..... que dans la majorité des cas, nos crapauds soient les plus longs à terminer leurs métamorphoses, tandis que nos grenouilles seraient, par contre, sous ce rapport, les plus précoces ». Questa asserzione di un osservatore tanto accurato e dotto mi spinse, appena mi accorsi che le mie osservazioni mi portavano ad un risultamento contrario, a verificare diligentemente la cosa: ma le mie osservazioni ulteriori non hanno fatto altro che confermare le precedenti, per la qual cosa con certezza posso asserire che in Piemonte, siccome ho detto, le rane durano nello stato di girino più a lungo che non i rospi.

Fra i rospi stessi il rospo smeraldino ha vita di girino più lunga che non il rospo comune.

In tutte le specie poi, un po' più un po' meno, ma nella rana esculenta più che non in tutte le altre, si nota un fatto degno di considerazione, ed è questo, che vi ha nello accrescimento un periodo di pausa, variante a seconda delle varie condizioni modificatrici dello sviluppo, di cui parleremo in appresso.

Questo periodo di pausa vien tardi. Dato colla fecondazione l'impulso, le varie fasi dello sviluppo, dalla prima solcatura dell'ovo allo spuntare delle zampe posteriori, si proseguono più o meno presto a seconda dei casi; ma seguitatamente e regolarmente senza nissuna apparente fermata. Una volta apparse le zampe posteriori si vede nello sviluppo il sopra detto periodo di pausa; periodo che varia a seconda delle specie, ed anche, si può dire, a seconda delle condizioni individuali.

(1) Oper. citat.

Nella rana esculenta, in cui, siccome abbiamo detto, un tal fatto riesce più evidente che non in qualsiasi altra specie di anfibî anuri nostrali, questo periodo di pausa dura da quattro a cinque, fino a dieci ed anche a quindici giorni. Quegli individui che hanno una tale pausa più lunga giungono ad una mole maggiore, e non è raro trovare girini che hanno già ben sviluppate le zampe posteriori e sono piccoli rispetto ad altri che hanno mole del doppio maggiore, e delle zampe posteriori mostrano appena i primi rudimenti. Questo, che sovratutto frequentemente si trova nella rana esculenta, fu avvertito dal Fatio (1), il quale ha le seguenti parole: « Cette dissemblance, parfois si frappante chez une même espèce, ne paraît pas toujours facilement explicable. L'époque assez variable de la ponte est-elle la cause principale de ce fait, ou bien doit-on en rechercher la raison dans la température ou la richesse différente des eaux? J'ai remarqué, pour ma part, que le maximum de taille est, d'ordinaire, plus commun dans les mares stagnantes que dans les eaux froides ou courantes. Le rapport de Collin, qui dit avoir trouvé, en Danemark, de ces gros têtards déjà sur terrain sec, quoique possesseurs encore d'une queue bien développée, mis en regard de l'observation que j'ai faite, maintes-fois, que ces gros sujets, encore dépourvus de membres, viennent aussi souvent à la surface pour respirer que des individus plus petits mais déjà membrés, ne semble-t-il pas faire présumer que, dans certaines conditions, ces larves peuvent, en augmentant de taille, subir parfois des modifications intérieures qui devancent les changements de formes extérieures? »

Aggiunge poi lo stesso Fatio che talora i girini di più grossa mole e con sviluppo appena incipiente delle estremità posteriori furono talvolta scambiati con quelli del pelobate, che è fra tutti gli anfibî anuri nostrali quello di cui è più grosso il girino.

Questo periodo di pausa, che è tanto evidente nella rana esculenta, si mostra pure, ma in minor grado, nella rana temporaria, nella raganella e nel pelobate; in minor grado ancora è nei rospi, che presentano pertanto un più uniforme sviluppo.

Dopo questa prima pausa di cui siamo venuti fin qui parlando, sovente se ne osserva una seconda, che tien dietro al compiuto sviluppo delle zampe posteriori: questa è meno spiccata della prima e si osserva ancora nel più evidente modo nella rana esculenta, la quale è per conseguenza quella che fra tutti gli anfibî anuri, di cui ci occupiamo, presenta nella vita di girino un meno regolare e graduato sviluppo.

Queste pause si osservano anche nei girini che durante lo sviluppo vengono sottratti all'azione della luce.

(1) Oper. citat. pag. 279, 280 vol. III.

Rana esculenta (Linn.)

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
3	Lungh. m. 0,0025. Largh.mass.m.0,0015.	Il colore è giallognolo; la parte ventrale è di tinta alquanto più chiara della parte dorsale. La testa è ben distinta. La coda si è pure alquanto allungata. Si osservano, nella maggior parte dei casi, i primi rudimenti delle branchie, sotto forma di due piccoli tubercoletti posti ai lati del capo, e delle narici, segnate da due punticini bruni.
5	Lungh. m. 0,0045. Largh. mass. m. 0,001.	L'animale, per lo più, in questo stadio esce dallo invologlio glutinoso. Il suo colore non ha cambiato; la parte ventrale si distingue sempre per una tinta più chiara della parte dorsale. Il capo è ben formato. Le branchie si sono sviluppate e si presentano di già divise alla estremità. Si notano i primi rudimenti degli occhi. La coda ha continuato ad allungarsi; essa comincia ad essere, specialmente verso la punta, trasparente.
6	Lungh. m. 0,0055. Largh. mass. m. 0,001.	Nessuna variazione nel colore. Si nota in questo stadio la fessura boccale. Le branchie sono quasi completamente sviluppate. La coda si è allungata e si è resa completamente trasparente.
9	Lungh. m. 0,007. Largh.mas.m.0,00125.	I peduncoli a ventosa sono rientrati. La bocca è già ben costituita; la stessa cosa si deve dire per gli occhi e per le narici. La branchia destra è rientrata. Si osserva qualche punticino nerastro sul dorso.
10	Come nello stadio precedente.	Le branchie sono compiutamente rientrate.
14	Lungh. m. 0,010. Largh. mass. m. 0,002.	Il colore ha cambiato notevolmente; da giallognolo si è fatto brunoverdastro chiaro. I punticini nerastri del dorso si sono fatti assai numerosi ed hanno invaso anche la coda; in alcuni individui formano delle piccole macchie. Nella parte ventrale sono scarsi, fino ad ora, i punticini di color giallo dorato.
20	Lungh. m. 0,0165. Largh. mass. m. 0,004.	Il colore è in generale di un bigio verdognolo. Il dorso presenta numerose macchiette, almeno nella maggior parte dei casi, di color olivastro, le quali si vanno facendo più sbiadite sui fianchi. I punticini dorati si sono nella parte ventrale fatti assai numerosi.
27	Lungh. m. 0,0255. » coda m. 0,0155. Largh. mass.m.0,0055. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,001.	Predomina in generale il color bigio sporco. Sono numerose sul dorso le macchie bruno-verdastre; sui fianchi queste sono di un verde più vivace. In alcuni individui si osserva, sebbene pochissimo marcata, una linea più chiara che, percorrendo la regione mediana del dorso, dalla estremità del muso va all'ano.
	Tav. II fig. 3-4.	La parte ventrale ci presenta un color giallastro sporco con riflessi color di rame. I primi rudimenti delle zampe posteriori sono bianchicci. La membrana caudale presenta, specialmente verso gli orli, numerose macchie brune.
38	Lungh. mass. m. 0,028. » coda m. 0,0175. Largh. mass. m. 0,007. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,00125.	Il colore non ha variato sensibilmente. Le zampe posteriori presentano qualche punticino nerastro.

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
46	Lungh. m. 0,032. » coda m. 0,0185. Largh. mass. m. 0,008.	Il colore del dorso tende a farsi di un bigioverdastro uniforme.
52	Lungh. m. 0,034. » coda m. 0,0185. Largh. mass. m. 0,0085. Lungh. delle zampe posteriori variabile fra m. 0,002 e m. 0,004, secondo gli individui.	Nessuna variazione importante nel colore. Le zampe posteriori, negli individui in cui esse sono maggiormente sviluppate, presentano i rudimenti delle dita sotto forma di 3 tubercoli, di cui il mediano è il più pronunziato. Queste zampe sono di color bianco sporco o giallastro con numerosi punticini bruni.
58	Lungh. m. 0,036. » coda m. 0,019. Largh. mass. m. 0,0085. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,0075.	Le zampe posteriori sono molto più sviluppate che non nello stadio precedente. Sono ben distinte le divisioni delle dita. Le zampe posteriori vanno facendosi, per quanto riguarda il colore, di un brunolivastro.
68	Lungh. m. 0,046. » coda m. 0,026. Largh. mass. m. 0,009. Lungh. della coscia m. 0,005 - della gamba m. 0,0045 - del piede fino all' estremità del dito più lungo m. 0,0045.	Questo stadio è caratterizzato, sopratutto, dal compiuto sviluppo delle zampe posteriori. Queste sono nella parte dorsale ed un poco anche sui lati di color grigio sporco od olivastro con chiazze brune o verdastre; nella parte inferiore, specialmente ai femori, biancastre ed immacolate. La membrana caudale si è inspessita verso i margini, e presenta assai numerose le macchie brune e giallognole. Evidentissimi sono i muscoli caudali. Il color generale dell'animale è sensibilmente quello che si osserva negli stadî precedenti. In alcuni girini si nota una linea di color verdiccio o giallognolo che percorre longitudinalmente tutta la regione mediana del dorso. Non sono rari i girini che presentano ben evidente una macchia bruna un poco al disotto ed un poco all' indietro degli occhi. È questa, forse, un primo indizio della macchia temporale che presentano molti individui adulti di *Rana esculenta* Linn. Si nota, in fine, in questo stadio un sensibile restringimento del corpo verso la regione inguinale.
70	Le misure sono sensibilmente quelle dello stadio precedente.	Questo stadio è ben caratterizzato dall'uscire delle zampe anteriori. La zampa sinistra è quella che esce la prima, mettendo fuori, per il foro branchiale che è dal lato sinistro, prima il gomito, poi poco a poco tutto il resto. Nella regione ventrale del girino sono quasi completamente scomparsi i riflessi dorati; essa si presenta di color biancastro.
71	Le misure sono come nello stadio preced.	La zampa anteriore sinistra è uscita completamente. Comincia pure l' uscita della zampa anteriore destra, uscita che, per lo più, si compie nello spazio di sei a sette ore. Le file di uncini che stanno intorno alla bocca, sono in massima parte cadute; restano ancora le lamine cornee. Il corpo dell'animale si restringe sempre più verso gli inguini. Il muso si va facendo più aguzzo.
72	Nessuna variazione nelle misure.	La coda comincia a raccorciarsi. Le lamine cornee della bocca sono cadute, e l'apertura boccale giunge fino sotto agli occhi.

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
75	Nessuna variazione sensibile nelle misure.	Il color generale del girino è bigio con macchie nerognole. Non pochi individui presentano nella regione mediana del dorso una linea longitudinale più chiara. La coda è, nella maggior parte dei casi, affatto scomparsa. La respirazione è totalmente polmonare. La metamorfosi è compiuta (¹).

Rana temporaria (Linn.)

6	Lungh. m. 0,006. Largh. m. 0,002.	Il color generale del girino è bruno nero. Le parti ventrali sono di tinta meno carica delle parti dorsali. Si scorgono i rudimenti delle branchie. Succede tuttavia che qualche girino esca già in questo periodo dallo invoglio glutinoso.
9	Lungh. m. 0,007. Largh. m. 0,002.	Il color generale del girino non ha variato. Le branchie sono ben sviluppate. In generale il girino esce in questo periodo dallo invoglio glutinoso.
20	Lungh. m. 0,013. Largh.mass.m.0,0025. Lungh. della coda m. 0,007.	Il colore generale dell' animale si è fatto alquanto più chiaro. La parte ventrale è sempre di tinta meno carica della dorsale. Quest' ultima si presenta tutta coperta da macchiette irregolari giallodorate. Gli occhi sono ben distinti. Le branchie sono compiutamente rientrate. Il foro per l'uscita dell'acqua al lato sinistro è ben sviluppato. Non sono rari i casi in cui si nota un cerchio trasparente intorno al corpo, come nei girini della *Hyla viridis*.
25	Lungh. m. 0,015. » coda m. 0,0085. Largh. mass. m. 0,003.	Il colore tende sempre a farsi più chiaro; si notano dei punticini giallodorati anche nella parte ventrale, quelli del dorso si fanno più spiccati e numerosi.
30	Lungh. m. 0,018. » coda m. 0,0095. Largh.mass.m.0,0045.	Il cerchio trasparente, nei girini in cui si osserva, è al tutto scomparso. I punticini giallodorati si sono fatti, sul dorso, più numerosi e, raggruppandosi fra loro, vengono a formare sulle parti laterali della coda due striscie giallodorate. In molti casi si notano di già deboli riflessi cuprei nella parte ventrale.
45	Lungh. m. 0,026. » coda m. 0,017. Largh. mass. m. 0,006.	Il girino è di color brunobigio intenso. I punticini numerosi assai vengono a formare due macchiette più chiare dietro agli occhi. Le parti inferiori hanno eleganti riflessi cuprei, e gialli. La membrana caudale presenta, specialmente verso gli orli, numerosissime macchie brune. Si cominciano a vedere i primi rudimenti delle zampe posteriori.
52	Lungh. m. 0,0295. » coda m. 019. Largh. mass. m. 0,007. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,0005.	Il color generale del girino non ha sensibilmente variato. Le zampe posteriori sono cresciute alquanto e, nella maggior parte dei casi, si presentano, in questo stadio, solo sotto la forma di bitorzoletti biancastri.

(¹) La rana esculenta, appena uscita di metamorfosi, siccome per la prima volta quest' anno ho potuto verificare, al suo primo por piede sulla terra non cammina come il *Bufo vulgaris*, ma subito saltella assai bene. Vedi in proposito M. Lessona, *Intorno ad uno sperimento fisiologico del prof. Moleschott.* Att. R. Acc. Sc. Torino, vol. XI 1875.

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
56	Le misure non hanno sensibilmente cambiato.	Succede qui il periodo di sosta di cui è fatto parola più sopra. Questo periodo non giunge mai nella *Rana temporaria* ad eguagliare in lunghezza quello della *Rana esculenta*.
61	Lungh. m. 0,033. Largh.mass.m.0,0075. Lungh. della coda m. 0,0205. Le zampe posteriori hanno una lunghezza di m. 0,0025.	I colori sono sempre sensibilmente quelli degli stadî precedenti. Le zampe posteriori si sono alquanto sviluppate, e in qualche individuo possiamo già scorgere i rudimenti delle dita sotto forma di tre bitorzoletti. Il colore delle zampe è biancastro con qualche punticino nerastro.
71	Lungh. m. 0,039. Largh. m. 0,009. Lungh. della coda m. 0,025. Lungh. delle zampe posteriori » coscia m. 0,003. » gamba m.0,00325. » piede (fino all'apice del dito più lungo) m. 0,00375.	Nulla di nuovo per quanto riguarda il colore. Le zampe posteriori sono già inoltrate nello sviluppo, e si presentano, specialmente nella parte dorsale, colorite in bigio. Le dita sono già assai ben sviluppate. Si nota un principio di membrana interdigitale.
74	Lungh. m. 0,040. » coda m. 0,025. Largh. mass. m. 0,009. Lungh. delle zampe posteriori. » coscia m. 0,005. » gamba m.0,00475. » piede m. 0,00625.	Questo periodo è ben determinato dal compiuto sviluppo delle zampe posteriori. Il color generale del girino tende a farsi di un bruno ora rossiccio, ora grigiastro. Si notano macchiette di color più carico sparse qua e là sul dorso, e sulla parte dorsale delle zampe posteriori. Qualche individuo presenta le zampe posteriori regolarmente fasciate di bruno. La membrana interdigitale è compiutamente sviluppata.
76	Lungh. m. 0,040. » coda m. 0,025. Largh. m. 0,007. Zampe anteriori » braccio m. 0,002. » avamb.m.0,00125. » mano (fino all'apice del dito più lungo) m. 0,0025. Zampe posteriori come nello stadio preced.	Sono uscite quasi interamente le zampe anteriori. La larghezza del corpo ha alquanto diminuito; in qualche caso la coda comincia a sparire. L' apertura boccale non è ancora ben formata; si notano ancora le linee di uncini e le mascelle cornee come negli stadî precedenti.
80	Lungh. del corpo (dall'apice del muso all'ano) m. 0,011. Largh. m. 0,00425. Lungh. delle zampe anteriori » braccio m.0,00325. » antib. m. 0,0025. » mano m. 0,003.	L' animale ha compiuto la sua metamorfosi. Le zampe anteriori sono pienamente sviluppate. L' apertura boccale è ben formata ed ampia. La coda è ridotta ad un semplice moncone, di varia lunghezza a seconda degli individui. Il color generale del girino è come quello dello stadio precedente: le macchie si sono fatte di color più carico. Spiccano, nel maggior numero dei casi, assai bene le macchie temporali e le fascie brune delle zampe posteriori. Molti individui presentano una macchia brunonera in forma

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
	La lungh. delle zampe posteriori è sensibilmente quella dello stadio precedente; il piede solo si è alquanto allungato.	di A sul dorso presso alla testa. La parte ventrale è biancastra o grigiastra, con fine granulazioni. L'animaletto è assai vivace.

Pelobates fuscus (Wagler)

Non possiamo fare pel *Pelobates fuscus* un lavoro analogo a quello che è stato fatto per le precedenti specie, perchè il breve tempo da che è stato trovato in Piemonte ci ha impedito di fare in proposito un numero abbastanza grande di osservazioni.

Diremo solo che in Piemonte il suo sviluppo pare si compia in poco più di una sessantina di giorni, e che, cosa a tutti nota, i girini del *Pelobates fuscus* sono sempre, paragonati con girini, si intende nello stesso periodo di sviluppo, di altre specie, molto più grossi.

Bufo vulgaris (Laur.)

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
	Ova fecondate galleggianti nelle pozze.	Il loro colore è nero carbone; presentano una calotta alquanto più chiara del resto.
6	Lungh. m. 0,005. Largh. mass. m. 0,002.	Il colore si va facendo di un bruno più chiaro: la parte ventrale è alquanto più chiara della parte dorsale. Il cappuccio caudale si è di già allungato; ma non si presenta ancora trasparente ai margini.
7	Lungh. m. 0,0055. Largh. mass. m. 0,002.	Nel colore non vi è sensibile variazione. La coda è la parte che si è maggiormente sviluppata e comincia ad essere trasparente ai margini. Generalmente in questo stadio il girino esce dall'invoglio glutinoso.
9	Lungh. m. 0,007. Largh. mass. m. 0,002. Lunghezza della coda a partire dall'ano m. 0,0035.	Il colore generale si è fatto meno fosco, specialmente nella parte ventrale. Sono uscite le branchie. La membrana caudale si è fatta completamente trasparente.
12	Lungh. m. 0,011. » della coda m. 0,006. Largh. mass. m. 0,002.	Nessuna variazione nel colore. Le branchie sono compiutamente sviluppate.

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
14	Le dimensioni dell'animale non hanno variato sensibilmente.	Le branchie cominciano a rientrare, specialmente quelle del lato destro. L'occhio si è sviluppato e si presenta di color cenere tendente al turchino; nel mezzo si scorge la pupilla che è di tinta più carica. Le narici e la bocca presentano già le loro aperture. Col microscopio si scorgono alcuni punticini di un giallo pallido sul dorso.
16	Lungh. m. 0,013. » coda m. 0,0075. Largh. mass. m. 0,003.	Nessuna variazione sensibile nel colore. Le branchie sono totalmente rientrate anche dal lato sinistro, dove si è formata una apertura da cui esce l'acqua entrata per le narici e forse anche un poco per la bocca.
20	Lungh. m. 0,0165. » coda m. 0,0085. Largh. mass. m. 0,004.	Il colore non ha variato sensibilmente. La membrana caudale si è fatta trasparentissima e presenta qua e là qualche punticino nerastro. Si osservano i primi rudimenti delle zampe posteriori. I peduncoli a ventosa (*Crochets* di Rusconi) sono totalmente scomparsi. I muscoli caudali cominciano a distinguersi.
24	Lungh. m. 0,020. » coda m. 0,012. Largh. mass. m. 0,0045.	Il color naturale del girino ha variato alquanto, esso è d'un bruno seppia; nella parte dorsale si osservano qua e là dei punticini d'un giallo pallido; nella parte ventrale i punticini sono più numerosi, specialmente in vicinanza della bocca, e di un color cenerino. Nella membrana caudale, specialmente nella parte dorsale di essa, si notano delle macchie nerognole arborescenti che pare seguitino per certi tratti il decorso dei vasi sanguigni. Le narici sono ben sviluppate e funzionano bene; l'orlo di esse è foggiato a guisa di cordoncino ed ha un colore cenere scuro. I muscoli caudali sono evidentissimi.
26	Lungh. m. 0,022. » coda m. 0,013.	Nulla di nuovo pel colore. Le macchie nere si sono fatte, nella membrana caudale, numerosissime.
29	Lungh. m. 0,024. » coda m. 0,0135. Largh. mass. m. 0,005. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,002.	Il colore ed il resto come nello stadio precedente; le zampe posteriori sole presentano qualche variazione. Esse si sono alquanto allungate e presentano i primi rudimenti delle dita in piccoli tubercoletti.
33	Lungh. m. 0,025. » coda m. 0,0135. Largh. mass. m. 0,0055. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,0025.	I punticini gialli si vanno facendo numerosi e distintissimi, specialmente ai lati degli occhi e nella parte dorsale della coda. Nella parte ventrale del girino questi punticini gialli sono meno numerosi, ma più grandi e più evidenti.
35	Le misure sono sensibilmente le stesse dello stadio precedente.	Le zampe posteriori sole mostrano in questo stadio una qualche variazione. Esse si presentano distintamente divise all'estremità in 3 tubercoletti, di cui quello di mezzo è il più lungo.
40	Lungh. m. 0,026. » coda m. 0,015. Largh. m. 0,006. Lungh. delle zampe posteriori.	I punticini giallodorati, di cui sopra è parola, si sono moltiplicati in guisa da produrre una tinta generale più chiara di quella che il girino aveva negli stadi precedenti. Le zampe posteriori hanno progredito nello sviluppo, come si può vedere dalle misure contronotate.

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
	Tarso, fino all' apice del dito più lungo, m. 0,002. » gamba m. 0,001. » coscia m. 0,00125.	
48	Lungh. m. 0,028. » coda m. 0,0155. Largh. mass. m. 0,006. Lungh. delle zampe posteriori » tarso, m. 0,005. » gamba m. 0,003. » coscia m. 0,0035.	Le zampe anteriori cominciano a mostrarsi. Prima ad uscire si è la sinistra, della quale, in questo periodo, si scorge già il gomito che spunta fuori dall'apertura branchiale che è dal lato sinistro dell'animale. Dal lato destro la pelle è ancora intatta; la zampa destra fa pressione verso l'esterno per uscire. Le zampe posteriori sono pressochè compiutamente sviluppate.
49	Lungh. delle zampe anteriori (porzione visibile allo esterno). » braccio m. 0,003. » mano colle dita m. 0,004. Le altre misure sono, sensibilmente, quelle dello stadio preced.	Le zampe anteriori sono quasi uscite intieramente. La membrana caudale è ancora intatta. L' apertura boccale non ha ancora variato sensibilmente. La membrana interdigitale è nelle zampe posteriori assai bene sviluppata. I tubercoli palmari e plantari sono evidentissimi. Il color generale dell'animale si presenta di un bruno più o meno dorato, dovuto alla presenza di una quantità grandissima di punticini giallodorati sparsi su tutto il corpo. Sulle zampe posteriori questi punticini sono riuniti in modo da formare delle macchie più chiare. L'acqua, entrata per le narici, e forse anche un poco per la bocca, che negli stadî precedenti usciva solo dalla apertura branchiale posta al lato sinistro, esce in questo stadio anche dal lato destro pel foro fatto dalla zampa destra nell'uscire.
51	Lungh. del corpo dall' apice del muso all'ano m. 0,00875. » moncone di coda m. 0,0025. Diametro trasversale (misurato immediatamente al disotto degli occhi) m. 0,0035. Diametro trasversale (misurato all' altezza delle zampe posteriori ripiegate) m. 0,0035.	Il girino è, si può dire, compiutamente trasformato. Le zampe anteriori sono uscite intieramente dalla cavità che si può chiamare toracica. Le zampe posteriori si sono fatte più robuste. La membrana caudale tende a scomparire, e nello spazio di sole 4 ore si nota, a questo riguardo, una sensibile variazione. Il color generale del girino è sostanzialmente quello che esso aveva nello stadio precedente. La respirazione branchiale è cessata, e l'animale cerca d' uscire fuori dall'acqua. Il piccolo rospo, messo sopra una superficie piana, è incerto ancora tra il camminare ed il saltare; questa indecisione tuttavia dura tutto al più lo spazio di un giorno (1). L' apertura boccale giunge all'apice più interno dell'occhio.

(1) « Quando è compiuta la trasformazione, e la respirazione è diventata al tutto polmonale, il girino, che va perdendo la coda, ed è arrivato verso il cinquantunesimo giorno da quello in cui è uscito dal suo involucro glutinoso, va fuori dell' acqua, e comincia i suoi primi movimenti sulla terra. Ma questi primi movimenti non sono salti . . . . . Va diagonalmente a passi, si direbbe faticosamente, in breve si ferma, e sta a lungo immobile. Questa maniera di locomozione dura da uno a due giorni; al secondo giorno cominciano ad alternarsi i salterelli coi passi, al terzo giorno saltella al tutto, e questo poi è il suo modo costante di movimento pel resto della sua vita ». M. Lessona, *Nota intorno ad uno sperimento fisiologico del prof. Moleschott.* Atti Regia Acc. Scienz. di Torino, vol. XI 1875.

Bufo viridis (Laur.)

L'andamento dello sviluppo dei girini del *Bufo viridis* è analogo a quello dei girini del *Bufo vulgaris:* sarebbe quindi inutile ripetizione il fare per questa specie un lavoro simile a quello che venne fatto pei girini del *Bufo vulgaris.* Si noti però che i girini del *Bufo viridis* procedono nello sviluppo un poco più lentamente che non quelli del *Bufo vulgaris.* Il tempo medio che impiegano a svilupparsi in Piemonte oscilla fra i 60 e i 65 giorni. Le dimensioni che il girino del *Bufo viridis* ha nei varî stadî sono alquanto maggiori di quelle date pel girino del *Bufo vulgaris.* La differenza più importante, per quanto riguarda lo sviluppo, ripeto, consiste nella maggior lunghezza di ciascun periodo.

Hyla viridis (Laur.)

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
10	Lungh. m. 0,008. » coda m. 0,0055. Largh.mass.m.0,0015.	L'animaletto è da poco uscito dallo involglio glutinoso. Le branchie sono bene sviluppate. Il colore generale del girino è il giallo pagliarino, più chiaro nella parte ventrale che non nella parte dorsale. Nella parte dorsale poi si scorgono alcune macchiette nerastre sparse irregolarmente qua e là. Gli occhi sono grandi e non ancora sporgenti; la pupilla è nerastra. La membrana caudale è trasparentissima, si notano poche macchiette sparse qua e là, di un bruno chiaro.
12	Lungh. m. 0,009. » coda m. 0,006. Largh.mass.m.0,0015.	Nella maggior parte dei girini le branchie del lato destro (che, si noti, sono sempre le prime a rientrare) sono rientrate. Le narici sono già sviluppate, molto più la destra che non la sinistra. L'acqua non passa ancora per esse. I peduncoli a ventosa sono ridotti a due bottoncini, assai esili, di color bruniccio scuro.
14	Lungh. m. 0,010. » coda m. 0,0065. Largh. m. 0,002.	Le branchie sono totalmente rientrate. Il corpo del girino si presenta circondato come da un cerchio trasparente. L' acqua entra per le narici. Le macchie nere del dorso si sono fatte più numerose, e cominciano a spiccare, in molti casi, le striscie gialle caratteristiche.
19	Lungh. m. 0,012. » coda m. 0,00725. Largh. mass. m. 0,003.	La tinta generale del corpo tende a farsi più scura, e quindi le striscie gialle del dorso spiccano di più. Si nota qualche riflesso dorato nella parte ventrale. L' animale è vivacissimo, e muove frequentemente gli occhi che si sono fatti assai sporgenti.
24	Lungh. m. 0,014. » coda m. 0,00825. Largh.mass.m.0,0035.	Le macchie nere, nella maggior parte dei casi, si sono fatte numerose e spiccate. Il cerchio trasparente tende a scomparire. La parte ventrale ha bellissimi riflessi cuprei e dorati.
30	Lungh. m. 0,018. » coda m. 0,011. Largh.mass.m.0,0045.	Non vi sono variazioni importanti riguardo al colore. Le striscie gialle caratteristiche sono, nella maggior parte dei casi, ben evidenti.
35	Lungh. m. 0,021. » coda m. 0,0135.	Il color generale ha alquanto variato. Le macchie nere si sono, per così dire, divise. Il girino ci si presenta quindi

Giorni di vita	MISURE	OSSERVAZIONI
	Largh. mass. m. 0,005. Lungh. delle estremità posteriori m. 0,002.	alquanto più chiaro. Sono spuntate le zampe posteriori sotto forma di due tubercoletti biancastri.
42	Lungh. e larghezza come nello stadio precedente.	La tinta generale del girino tende al giallo oliva. Si osservano innumerevoli punticini gialli sparsi principalmente sulla parte dorsale.
45	Lungh. m. 0,023. Largh. m. 0,005. » coda m. 0,0145. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,0045.	Nulla di nuovo per quanto riguarda il colore. Le zampe posteriori si sono alquanto allungate.
58	Lungh. m. 0,030. » coda m. 0,019. Largh. mass. m. 0,0065. Lungh. delle zampe posteriori m. 0,0075.	La parte dorsale è di un color oliva sporco, e le macchie gialle caratteristiche che erano vivacissime nei precedenti stadî si sono fatte di un color giallo olivastro, che appena si distingue dal color fondamentale del dorso. La parte ventrale ha in gran parte perduto i riflessi cuprei, e si presenta di un giallo pallido. L'occhio sempre grande, e sporgente, presenta la pupilla nerissima. Si notano nelle zampe posteriori tre dita ben sviluppate, le altre sono ancora rudimentali. Si nota pure un ingrossamento alla loro estremità, ed un principio di membrana interdigitale.
66	Lungh. m. 0,033. » coda m. 0,020. Largh. mass. m. 0,008. Zampe posteriori » coscia m. 0,0045. » gamba m. 0,004. » piede m. 0,0055.	Il colore si è fatto sempre più uniformemente olivastro. Le zampe posteriori sono compiutamente sviluppate, e si presentano biancastre nella parte inferiore e brune nella superiore. Le dita sono rigonfie alla estremità come nell'adulto. La membrana interdigitale è evidentissima.
70	Le misure sono come nello stadio preced.	La parte dorsale presenta in qualche suo punto dei tratti di un elegante color verdegiallognolo. La parte ventrale è biancogiallastra ed alquanto granulosa. È uscita la zampa anteriore sinistra, e sta per uscire anche la destra.
71	Come nello stadio precedente per le zampe posteriori e pel resto. La larghezza sola ha diminuito di circa due millimetri.	È uscita anche la zampa destra, ma le aperture da cui sono uscite le due zampe non sono ancora chiuse. La bocca è ancora come negli stadî precedenti.
73	Lungh. del corpo (dall'estremità del muso all'ano) m. 0,013. Lungh. delle zampe anteriori » braccio m. 0,0015. » antibr. m. 0,003. » mano m. 0,0025.	Il color generale è olivastro assai chiaro, che in molti tratti del dorso si cambia in verde chiaro. In quasi tutti gli individui sono traccie delle macchie temporali e laterali che ci presenta l'animale adulto. Le parti inferiori sono granulose. Sono ben evidenti i tubercoli plantari, sia delle zampe anteriori che delle posteriori. L'animale ha compiuto la sua metamorfosi.

Tutto quello che abbiamo detto intorno al tempo richiesto nelle varie specie di anfibî anuri per lo sviluppo del girino, e il numero dei giorni segnato nelle tavole relative che precedono, non vuol essere preso in senso assoluto, ma vuol essere considerato come relativo, potendosi per molte cause esterne rallentare od accelerare lo sviluppo del girino stesso.

Importantissima causa di acceleramento o di ritardamento di sviluppo del girino, siccome facilissimamente si può prevedere, è la copia abbondante o scarsa del cibo.

Il cibo copioso produce due effetti nel girino, il rapido sviluppo, e lo aumentarsi della mole, e spesso ora l'uno ora l'altro a preferenza, senzachè torni facile trovarne la spiegazione: ciò segue tanto nei girini allevati in casa come in quelli che crescono fuori.

Ma si intende che a produrre questi effetti bisogna che concorrano anche le altre circostanze favorevoli, perchè, quando taluna di queste venisse a mancare, la sola copia del cibo non basterebbe a produrre il rapido sviluppo e lo aumento della mole. Una di queste è, siccome diremo fra breve, la libera azione della luce.

Abbiamo già detto sopra della mole straordinaria cui arriva talora il girino della rana esculenta senza un corrispondente sviluppo delle estremità posteriori, e degli errori cui, secondo il Fatio, ciò diede luogo.

Qualche osservazione tenderebbe a farmi credere che i girini che si nutrono esclusivamente o principalmente di materie animali riescano di mole più piccola che non quelli che si nutrono esclusivamente o principalmente di sostanze vegetali. Queste osservazioni furono fatte da me in girini della rana esculenta, allevati in casa, e in girini della rana temporaria osservati in acque scarse di vegetali e ricche di larve d'insetti. Ma queste osservazioni non sono abbastanza numerose ed estese perchè si possa asserire in modo certo il fatto.

La scarsità del cibo produce, come facilmente si può intendere, effetti opposti a quelli sopra menzionati. Il crescere vien lento e stentato, i movimenti son languidi, le tinte pallide, il corpo semitrasparente, piccole alla metamorfosi le dimensioni.

La temperatura ha certamente la sua azione sullo sviluppo dei girini, e possiamo farcene un chiaro concetto quando la consideriamo in quei casi in cui questa azione è portata alle sue ultime conseguenze, vale a dire quando, siccome già abbiamo detto, nei laghetti alpini ad una certa altezza, verso i duemila metri sopra il livello del mare, e in certe condizioni rispetto all'azione dei raggi solari, i girini non compiono la loro metamorfosi nella annata, ma passano l'inverno e si sviluppano nella estate successiva.

Nella regione del piano la temperatura bassa appare piuttosto esercitare la sua azione sulle ova che non sul girino. In Piemonte succede sovente, come già abbiamo avvertito, che nella primavera ad alcune giornate di caldo precoce tengano poi dietro ancora settimane di freddo. In una di tali primavere io presi in una pozza del contorno di Torino una certa quantità di ova di rana esculenta, e, portatele a casa, ne posi una metà sulla finestra fuori dei vetri, e l'altra metà tenni nella stanza. Queste ultime ebbero compiuto il loro sviluppo in un tempo minore delle precedenti.

Si può credere che le ova galleggianti nelle pozze presentino qualche differenza nel tempo del loro sviluppo a seconda dello andamento della stagione. Ma una volta

venuti fuori per l'acqua i girini, almeno per quanto si osserva nel contorno di Torino, non pare che le differenze nella temperatura abbiano una grande influenza nel loro sviluppo. Il girino, che tanto si risente del variare della temperatura quando è allevato in casa, non mostra di risentirsene in pari modo all'aperto. Del resto questo è argomento ancora da studiare.

Grandissima sullo sviluppo dei girini è l'azione della luce. Questo si può osservare in natura e sperimentare in casa.

Nel contorno di Torino nella regione di Vanchiglia si trovano a poca distanza l'una dall'altra due pozze in un prato, in pari modo esposte al sole, e a un dipresso di pari capacità e profondità, dove tuttavia è diversa la vegetazione. In entrambe si trova qualche pianta del *Lytrum salicaria,* e del *Poligonum persicaria,* ma una di esse è assai più dell'altra ricca di confervacee, ed ha poi una fitta vegetazione di lente palustre che a guisa di verde tappeto ricopre tutta la superficie dell'acqua. In entrambe queste pozze è molto rigogliosa la vita animale inferiore; ma più in quella dove è maggiore la vegetazione. Talora i piccoli crostacei dei generi *Daphnia, Cyclops,* ed affini, brulicano tanto numerosi da intorbidare le acque: gli idrofili, i ditisci, gli idropori, ed altri somiglianti coleotteri, le notonette, le ranatre, le nepe fra gli emitteri vi sono in grandissimo numero colle loro larve, e colle larve delle libellule e delle friganee e di parecchie sorta di zanzare, idrometre ancora ed idracne, e rotiferi, e varie sorta di infusorî, brulicano in queste acque. Nelle due pozze la temperatura appare la stessa; le osservazioni numerose fatte ripetutamente nelle diverse stagioni e in varie ore della giornata diedero appena una differenza di circa due gradi centigradi, ora in più ora in meno, per l'una o per l'altra delle due pozze.

Tenendo conto delle possibilissime cause di errore nel misurare la temperatura senza porre nella operazione la massima accuratezza, non è guari da tener conto di differenze di tal fatta. Se volessimo andar proprio pel sottile, dovremmo dire che la somma delle osservazioni fatte tenderebbe a dare una piccola differenza nella temperatura in meno per la pozza più ricca di vegetazione. Ma questa differenza è tanto scarsa, che nel caso nostro la possiamo benissimo trascurare.

Rispetto alla vita dei girini in queste due pozze, considerando la grande copia di cibo che trovano quelli che si vengono sviluppando nella pozza più ricca di vegetazione, subito *a priori* si sarebbe tratti a dire che quivi devono svilupparsi più presto; eppure la cosa va oppostamente.

Il difetto di luce in questa ultima pozza, perchè il verde tappeto della lente palustre intercetta ai suoi raggi il passaggio, è causa che lo sviluppo dei girini segua più lentamente. Osservazioni fatte per parecchi anni dimostrano ciò nel modo più palese.

Nello specchietto seguente sono segnalate le dimensioni dei girini che nello stesso tempo si trovavano nelle due pozze.

1° settembre 1875.	
1 Pozza colla superficie dell' acqua ricoperta da grande quantità di lente palustre.	2 Pozza colla superficie dell' acqua libera.
(1) Dimensioni minime Lunghezza . . . . . m. 0,0125 » coda . . . . . m. 0,0070 Larghezza massima . . . . m. 0,0035	(1) Dimensioni minime Lunghezza . . . . . m. 0,035 » coda . . . . . m. 0,022 Larghezza massima . . . . m. 0,0075 Lungh. delle zampe post. m. 0,003
(2) Dimensioni medie Lunghezza . . . . . m. 0,0150 » coda . . . . . m. 0,0007 Larghezza massima . . . . m. 0,004	(2) Dimensioni medie Lunghezza . . . . . m. 0,040 » coda . . . . . m. 0,023 Larghezza massima . . . . m. 0,0085 » femore . . . . . m. 0,004 » tibia . . . . . m. 0,0035 » piede . . . . . m. 0,0035
(3) Dimensioni massime Lunghezza . . . . . m. 0,035 » coda . . . . . m. 0,021 Larghezza massima . . . . m. 0,008 Lungh. delle zampe post. m. 0,0025	(3) Dimensioni massime Lunghezza . . . . . m. 0,046 » coda . . . . . m. 0,026 Larghezza massima . . . . m. 0,009 » femore . . . . . m. 0,005 » tibia . . . . . m. 0,0045 » piede . . . . . m. 0,0045

Si noti che nella pozza n. 1 i girini colle dimensioni (1) erano comuni e quelli colle dimensioni (3) rari; mentre nella pozza n. 2 erano rari quelli colle dimensioni (1) e comuni quelli colle dimensioni (3).

Due settimane dopo, addì 14 settembre, nella pozza n. 1 erano rari i girini colle misure segnate col n. (2): in generale gli altri erano più inoltrati nello sviluppo, la maggior parte tuttavia di poco superante le misure indicate al n. (3).

Nella pozza n. 2 invece i girini, già scarsi in numero, erano molto inoltrati nello sviluppo, rarissimi quelli cui non fossero ancora spuntate le zampe anteriori.

Un altro esempio della stessa cosa ci si mostrò pure in modo ben evidente in altre parti del contorno di Torino. Il giorno 19 settembre dell' anno 1875 trovammo fuori della barriera di Nizza i girini di una pozza colle dimensioni medie seguenti:

Lunghezza . . . . . m. 0,038
» . . . . . coda . m. 0,022
Larghezza mass. . . . . m. 0,008
Lunghezza della zampe posteriori. . . . m. 0,007

Queste dimensioni scarse e indicanti un tardo sviluppo sarebbero state tanto meno da aspettare in questa località, dove, siccome abbiamo detto sopra, è precoce il movimento della vita in primavera. Ma la pozza di cui parliamo, posta a poca distanza della riva sinistra del Po, sta sotto un rialzo di terreno che le toglie il sole per una buona parte della giornata, e la superficie dell'acqua che in essa si accoglie è nella massima parte coperta dalla lente palustre.

Così pure lo stesso giorno 19 settembre 1875, in una pozza presso la riva destra della Stura, nella località detta del Ponte rotto, trovammo i girini colle zampe posteriori sviluppate, ma senza che pur uno di essi mostrasse traccia di zampe anteriori.

Quella pozza sta in uno avvallamento in mezzo ai boschi, ha poca luce, non mai forse quella diretta dei raggi solari.

In una parola, considerando il ritardo di sviluppo dei girini della pozza di Vanchiglia (n. 1), e di quella fuori della barriera di Nizza, troviamo che questo ritardo non si può attribuire che alla scarsa azione della luce, essendo favorevoli tutte le altre circostanze, e che si può calcolare a un dipresso di una ventina di giorni.

Nella pozza del Ponte rotto il ritardo nello sviluppo è a un dipresso di una settimana; ma qui è minore la scarsità della luce.

Per confermare la conclusione cui le osservazioni dei fatti ora riferiti mi avea condotto, pensai di fare qualche prova più diretta, tenendo in casa girini sottratti alla azione della luce, e in buone condizioni pel resto.

Riferirò qui talune delle prove fatte. Scelsi un acquario con pareti di vetro, della lunghezza di m. 0,60, e della larghezza e della altezza di m. 0,30 con coperchio fornito di tubi di vetro ricurvi pel rinnovamento dell' aria. Tappezzai di cartone oscuro le pareti ed il coperchio per modo da intercettare i raggi della luce, e fornii sempre l' acqua, che si mantenne alla temperatura tra i + 15° e i + 18° centigradi, di abbondante cibo vegetale. Addì 10 maggio del corrente anno 1876, misi in questo acquario molti girini del *Bufo vulgaris* Laur., in un periodo piuttosto inoltrato di sviluppo, imperocchè le loro zampe posteriori avevano già in media m. 0,005 di lunghezza. Altri girini compagni di questi, raccolti insieme, e delle stesse dimensioni, tenni pure ben nutriti in recipienti di vetro alla luce. Tutti in breve ottennero il loro compiuto sviluppo senza che vi sia stata una sensibile differenza nel tempo.

Qui, dove i girini furono messi al buio in un periodo già alquanto inoltrato del loro sviluppo, la mancanza di luce non produsse effetto.

Addì 24 maggio misi nelle stesse condizioni in acqua al buio molte ova di *Bufo viridis* Laur. e di *Rana esculenta* Linn., e altre ne tenni alla luce.

Lo sviluppo in questi ultimi procedè più sollecitamente che non nei primi. Addì 20 agosto alcuni girini tanto della rana esculenta come del rospo smeraldino, fra quelli tenuti alla luce, avean già compiuto la metamorfosi, tutti erano a questa vicini.

Invece i girini venuti da quelle ova che eran state poste al buio, ed erano stati tenuti al buio essi stessi, erano molto meno avanti nello sviluppo; in alcuni pochi le zampe posteriori avevano m. 0,005 di lunghezza; nel maggior numero apparivano in istato al tutto rudimentale.

Addì 30 agosto la metamorfosi si era compiuta in tutti i girini tenuti alla luce, non uno si era trasformato ancora di quelli tenuti al buio.

In questi ultimi andava compagno allo scarso sviluppo un certo deperimento; parecchi morivano, e venivano, a mano a mano, tolti fuori dallo acquario.

Addì 5 ottobre parecchi avevano avuto la metamorfosi, molti erano indietro nello sviluppo, e in uno stato di maggiore deperimento. Questi stentarono la vita fino ai primi giorni del novembre.

Ai primi giorni del novembre delle tante ova poste nell' acquario in maggio, parecchi girini avevano stentatamente compiuto la metamorfosi, molti più eran morti, tre soli rimanevano vivi, dei quali due camparono fino al 20 dello stesso mese. Avevano le zampe posteriori bene sviluppate, ma non avevano ancora emesse le zampe anteriori.

Quello che mi venne fatto di osservare, sia nelle pozze del contorno di Torino, sia nel mio laboratorio, si può riassumere cosi:

— La mancanza della luce non produce effetto sensibile sullo sviluppo dei girini, quando venga loro tolta ad un punto già alquanto inoltrato del loro sviluppo.

— La mancanza di luce ritarda lo sviluppo se l' ovo o il girino viene posto e tenuto al buio, fin dai primordî della sua esistenza.

— Questo ritardo in natura fu visto da me a un dipresso di venti giorni, in casa fino ad un mese, e più anche, fino ad un mese e mezzo e due mesi.

— Il girino ha mole minore, e così anche l' animaletto dopo la metamorfosi

— I colori sono più sbiaditi, i riflessi dorati meno vivaci, il corpo quasi come trasparente.

— I movimenti sono meno vivaci.

— Quando negli ultimi stadî il girino ha sopportato a lungo la privazione della luce, parvemi scemare in esso la potenza visiva: non vedeva moversi, accostando ai loro occhi la pinza, i girini allevati al buio, mentre gli altri a ciò immediatamente guizzavan via.

— I girini allevati al buio provan molestia alla luce; scoperchiando l' acquario, si ritiravan tutti nel cantuccio più scuro. La sottrazione repentina della luce o la repentina disparizione dell'ombra non sono senza effetto anche sui girini venuti su in piena luce all'aperto.

In una piccola pozza scarsa d' acqua e piena di girini di raganella, facendo ombra in qualche punto, i girini precipitosamente guizzavan fuori del punto ombreggiato. Lasciando l'ombra a lungo, lo spazio ombreggiato tornava a popolarsi di girini; ma tutti novellamente fuggivano se ad un tratto veniva l' ombra novellamente tolta.

Descrizione

Ce qui commence comme une exception finit par devenir règle.
Proverbio francese.

Il signor Victor Fatio, nella sua classica Fauna dei vertebrati della Svizzera, dopo di aver esposto una serie di importantissime considerazioni generali intorno agli anfibî anuri cui stava per accingersi a descrivere particolareggiatamente, conchiude colle seguenti parole: « ..... En tout cas, la description complète d'une espèce, dans certaines conditions données, présentera toujours, ce me semble, un assez grand intérêt, en ce qu'elle facilitera la comparaison avec d'autres descriptions circonstaciées prises sur la même espèce dans d'autres conditions, et apportera, par là, son contingent dans l'étude si intéressante de la variabilité ».

Al concetto espresso da queste parole è informato il lavoro di cui vengo qui esponendo i principali risultamenti. Non descrivo fra gli anfibî del Piemonte specie nuove, e per questo rispetto l'unica cosa notevole che mi sia venuto fatto di riconoscere è la presenza in questa regione del *Pelobates fuscus* Wagler e della *Rana agilis* Thomas. Ma l'esame diligente di ogni carattere zoologico di un gran numero di individui delle varie specie degli anfibî anuri del Piemonte in tutte le età, in tutte le stagioni, e nelle più diverse loro condizioni rivela una somma di fatti cui dà grande peso la scienza moderna.

Le faune locali hanno grandissima importanza oggidì, e una diligente descrizione di un gruppo di viventi in una regione ristretta può riuscire di sommo vantaggio allo avvenire.

In sul finire dello scorso secolo e nel principio del secolo corrente il Giorna figlio e il Bonelli dimostrarono di comprendere bene l'importanza delle faune locali nella pubblicazione del prezioso loro *Calendario zoologico del Piemonte.*

Ma il lavoro di quei benemeriti naturalisti sarebbe riuscito incomparabilmente più prezioso se essi avessero avuto cura di fare una diligente descrizione degli animali che venivano menzionando. Per essere stata ommessa una così fatta descrizione, i nomi di molti insetti citati da Giorna presentano oggi una incertissima applicazione. Quelle modificazioni, poco apparenti pel lentissimo loro succedersi, ma radicali e profonde, che si vengono producendo, sul suolo e sulla vegetazione di un paese, producono importanti modificazioni nella vita animale che non si potranno mai ben valutare senza una descrizione delle faune fatte di tempo in tempo con ogni più ampio sviluppo e colla maggiore possibile diligenza, e quale sia la importanza di un così fatto lavoro non è chi oggi non conosca.

Questo è il lavoro compiuto qui intorno agli anfibî anuri del Piemonte.

Trattandosi di animali tanto conosciuti, credo superfluo riferire i caratteri della classe e della famiglia, e fra i caratteri generici credo acconcio riferire solo quelli che spiccano di più ed hanno una qualche speciale importanza. Così ancora per la stessa ragione credo inutile ogni considerazione e discussione intorno alla sistematica, ed ogni ripetizione, rispetto ai costumi, di tutto quello che già tante volte è stato detto.

Mi limito per la prima parte ad esporre una tavola che guida praticamente colla maggiore speditezza al riconoscimento delle singole specie, e per la seconda mi limito a riferire quello solo che di più nuovo ed importante mi venne fatto di osservare.

Dita più o meno acuminate, presenza di denti, lingua allungata, forcuta alla parte posteriore; pupilla orizzontale:

- denti del vomere fra gli orifizî nasali, dita delle zampe posteriori intieramente palmate; due sacchi vocali esterni nei maschi . . . . . (*Rana esculenta* Linn.).
- denti del vomere posti all'indietro degli orifizî nasali; dita delle zampe posteriori incompletamente palmate; nessun sacco vocale esterno nei maschi.
  - lunghezza del tronco paragonata con quella delle zampe posteriori, oltrepassante, generalmente, l'articolazione tibiotarsea . . . . . (*Rana temporaria* Linn.).
  - lunghezza del tronco paragonata eccett. arrestantesi prima della articolazione tibiotarsea . . . . . (*Rana agilis* Thomas).
- Lingua circolare intiera, o leggermente intaccata nel margine posteriore. Pupilla verticale . . . . . (*Pelobates fuscus* Wagl.).

Dita più o meno acuminate, assenza di denti:

- nessuna ripiegatura cutanea lungo il margine interno del tarso (*Bufo vulgaris* Laur.).
- Una ripiegatura cutanea lungo il margine interno del tarso . (*Bufo viridis* Laur.).

Dita colle estremità ingrossate a mo' di disco . . . . . (*Hyla viridis* Laur.).

Rana esculenta (Linneo)

Rana verde. — Nome vernacolo: *Rana.*

Rana fluviatilis. Rondel. *Aquatil. hist. lib. de palustr.* pag. 217 (1554).
Rana edulis. Aldrov. *Quadrup. digit. ovip.* 1 pag. 589 c. fig. pag. 591 (1663).
Ranunculus viridis. Charl. *Exercit. different. nomin. anim.* pag. 27 (1677).
Rana acquatica. Ray. *Synops. meth. anim. quadr. et serp.* pag. 247 (1713).
Rana viridis. Roesel. *Hist. nat. ranar.* pag. 53 tab. XIII-XVI (1758).
Rana esculenta. Linneo. *Syst. natur.* I pag. 212, 14 (1758).
Rana ridibunda. Pallas. *Reise d. versch. Prov. d. russ. Reich.* I p. 458, 14 (1771).
Rana vulgaris. Bonnat. *tabl. encyclop. meth.* Erpét. p. 3, 6 tab. 2 fig. 1 (1789).
Rana gigans gmelin. Linn. *Syst. nat.* III pag. 1053, 14 β (1790).
Bufo ridibundus. Schneid. *hist. amphib.* I pag. 226 XVII (1799).
Rana alpina. Risso. *Hist. nat. d. princip. product. de l'Europe méridionale* III pag. 93, 31 (1826).
Rana maritima. pag. 92, 30.
Rana hispanica. Michahell. *Isis* XXIII pag. 160 (1830).
Rana cachinnans. Pall. *Zoograph. rosso-asiat.* III pag. 7, 1 tab. I fig. 1 (1831).
Rana caucasica. pag. 15, 10.
Rana maritima. Bonap. *Iconogr. della Fauna Italica* II (1832).
Rana dentex. Krynicki. *Observ. quaed. de rept. indig.* in Bull. de la Soc. imp. d. nat. de Mouscou, III pag. 63, 2 tab. II (1837).
Rana palmipes. Spix. *nov. spec. rana, Brasil.* pag. 5 tab. V fig. I (1840).
Rana viridis. Dum. et Bib. *Herpét. gén.* pag. 343 VIII (1841).
Rana tigrina. Eichw. *Fauna casp. caucas.* pag. 157 (1842).

Pelophylax esculentus. Fitzing. *Syst. reptil.* I pag. 31 (1843).

Rana esculenta. var. *marmorata.* Massalongo. *Saggio di una erpetologia popolare veronese* pag. 47 XX (1854).

Rana esculenta. v. *roseo virens.* Massalongo. op. cit. pag. 47 XX.

Rana esculenta. De Betta. *Erpetelogia delle Provincie Venete* pag. 285 et. var. (1857).

Rana esculenta. Fatio. *Faune Suisse* III pag. 312 (1872).

Rana esculenta. De Betta. *Fauna d'Italia. Rettili ed anfibî* pag. 63.

Rana esculenta. Schreiber. *Herpet. Europaea* pag. 117 (1875).

Rana esculenta. Leydig. *Die Anuren Batrachier der deutschen Fauna* pag. 104 (1877).

Presenza di denti sui mascellari, sugli intermascellari superiori e sul vomere. — Parotidi mancanti. — Lingua ellittica, libera e forcuta nella parte posteriore. — Timpano ben distinto. — Presenza di due sacchi vocali esterni ai lati della bocca nei maschi. — Pelle un po' bitorzoluta presentante da ciascuna parte del dorso due ripiegature ben spiccate. — Zampa anteriore sempre un po' più lunga della tibia. Dimensioni medie: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,068, ♀ m. 0,082

Dimensioni massime

	maschi	*femmine*
Lunghezza del corpo (dall'apice del muso all'ano .	metri 0,071	metri 0,090
» della zampa anteriore (dalla spalla all'apice del 3° dito)	metri 0,039	metri 0,050
» della zampa posteriore (dall'ano all'apice del 4° dito)	metri 0,109	metri 0,155
» del piede fino all'apice del 4° dito).	metri 0,0515	metri 0,069
» della tibia	metri 0,035	metri 0,047
Larghezza della testa	metri 0,0235	metri 0,034

La testa è sempre comparativamente bene sviluppata; la larghezza è eguale o poco maggiore della lunghezza; negli adulti la differenza non è mai molto grande; nelle rane tuttavia provenienti dalle regioni meridionali del Piemonte la lunghezza supera in generale alquanto la larghezza; i giovani, in ogni parte del Piemonte, presentano sempre la lunghezza della testa alquanto maggiore della larghezza, e ciò è in rapporto colla loro maggiore acutezza di muso.

Lunghezza	metri 0,029 ♀	Larghezza	metri 0,029 ♀
»	0,028 ♀	»	0,027 ♀
»	0,025 ♂	»	0,025 ♂
»	0,0205 ♀ (Saluzzo)	»	0,023 ♀ (Saluzzo)
»	0,019 ♂ (Saluzzo)	»	0,019 ♂ (Saluzzo)
»	0,022 ♂ (Saluzzo)	»	0,0235 ♂ (Saluzzo)
»	0,010 (juv.)	»	0,009 (juv.)
»	0,0065 (juv.)	»	0,0055 (juv.)

La testa è sempre più corta della tibia; la lunghezza del tronco misura due volte o poco più la lunghezza della testa.

L'angolo che gli archi mascellari fanno fra di loro incontrandosi è in generale meno ottuso che non nei rospi, nel *Pelobates* e nell'*Hyla;* esso varia fra limiti non molto estesi, fra 54° cioè e 65°; nei giovani è un po' più acuto, ma non di molto; varia fra 54° e 60°. Negli adulti possiamo, per questo riguardo, distinguere due forme vale a dire:

Rana esculenta acutirostris.
Rana esculenta obtusirostris.

Le rane del mezzogiorno del Piemonte, ad esempio di Saluzzo, di Mondovì, di Cuneo, presentano in generale, sia nei maschi sia nelle femmine, la forma acutirostre: fin esse l'angolo sopradetto varia fra 56° e 61°.

Denti del vomere costanti e relativamente cospicui (1), vario è l'angolo che fanno ra di loro; la lunghezza dei gruppi varia negli adulti da m. 0,001 a m. 0,003. Bene sviluppati sono pure nei giovani; rari i casi in cui manchino affatto.

La lingua è oblunga, libera e forcuta nella sua parte posteriore; i corni posteriori di essa in generale meno sviluppati nei giovani che non negli adulti.

L'occhio è grande e sporgente; esso è collocato ad eguale distanza dall'apice del muso e dall'angolo delle mascelle; rari i casi in cui si trova più vicino all'apice del muso che non all'angolo delle mascelle. Nel mezzogiorno del Piemonte in cui, come abbiamo già detto, le rane hanno il muso più aguzzo, delle due distanze è maggiore quella dell'occhio dall'apice del muso. Nei giovani l'occhio è quasi sempre un po' più vicino all'apice del muso che non all'angolo delle mascelle. Paragonando il massimo diametro dell'occhio colla larghezza della testa, troviamo che esso è, un po' più un po' meno, eguale al terzo di quella. Nelle grosse e vecchie femmine lo trovai qualche rara volta eguale al quarto della larghezza della testa.

Diametro mass. dell'occhio metri	0,0031 ♀	Larghezza della testa metri	0,010 ♀
» »	0,0025 ♀	» »	0,008 ♀
» »	0,0019 ♀	» »	0,006 ♀
» »	0,0014	» »	0,005
» »	0,0022	» »	0,007
» »	0,002 (juv.)	» »	0,006 (juv.)

Timpano cospicuo e di forma consuetamente circolare; misura circa i due terzi del diametro massimo dell'occhio: non sono rari i casi tuttavia in cui esso è eguale al diametro stesso. Nei giovani è relativamente sempre molto sviluppato.

Timpano metri	0,006	Diametro mass. dell'occhio metri	0,009
»	0,004	» »	0,0055
»	0,006	» »	0,0065
»	0,0015	» »	0,002

L'angolo posteriore dell'apertura boccale giunge generalmente circa fino alla metà del timpano.

Il tronco è largo, piano e robusto; i maschi sono a pari età più piccoli delle femmine.

(1) Vedi per quanto riguarda i denti, fra gli altri Leydig, *Die Anuren Batrachier der deutschen Fauna*; e Hertwig, *Ueber das Zahnsystem der Anphibien.* Archiv für Mikroskopische Anatomie. Eilfter Band, Supplementheft 1874.

Le zampe anteriori sono robuste e un po' più tozze nei maschi che non nelle femmine; sono sempre un po' più lunghe della tibia; la differenza è nei giovani meno grande che non negli adulti.

Tibia metri	0,045	Zampa anteriore metri	0,047
»	0,041	»	0,050
»	0,027	»	0,031
»	0,008	»	0,010

Il primo dito è eguale al secondo nei maschi, un po' più lungo di questo nelle femmine: è poi negli uni e nelle altre notevolmente più corto del quarto.

I tubercoli sottoarticolari sono evidenti, ma relativamente poco sviluppati. Variabili nel loro sviluppo sono i tubercoli posti alla base delle dita; qualche volta mancano.

Nel tempo della riproduzione le scabrosità costituenti la spazzoletta copulatrice ricoprono in gran parte la regione dorsale e laterale del pollice, e si estendono nella parte inferiore di esso più o meno a seconda degli individui. Sono per lo più di color brunoverdastro, il quale non giunge mai ad essere così intenso come nei rospi.

Le zampe posteriori sono relativamente corte. Comparando la lunghezza della tibia colla lunghezza della testa troviamo che questa è, un po' più un po' meno, i tre quarti di quella.

Tibia metri	0,041	Lunghezza della testa metri	0,028
»	0,046	»	0,030
»	0,027	»	0,020
»	0,011	»	0,009
»	0,008	»	0,006

Comparando le zampe colla lunghezza del tronco troviamo che questa giunge nel massimo numero dei casi fino all'articolazione tibiotarsea: si incontrano individui, tuttavia, in cui essa giunge fin presso al tubercolo del primo cuneiforme; non ho trovato casi in cui giungesse, in modo apprezzabile, sotto al tallone o sopra al tubercolo del primo cuneiforme.

Lunghezza del tronco metri	0,090	Lunghezza delle zampe posteriori metri	0,145
»	0,070	»	» 0,110
»	0,046	»	» 0,081
»	0,031	»	» 0,050
»	0,017	»	» 0,026

Il tubercolo che si trova nel primo cuneiforme è comparativamente più sviluppato nei giovani che non negli adulti, in questi più nei maschi che non nelle femmine.

Pare che questo tubercolo si mostri più sviluppato nelle rane delle regioni meridionali del Piemonte (Mondovì, Saluzzo, Cuneo).

Poco sviluppato, e non raramente mancante, è l'altro tubercolo collocato alla base del quarto dito.

Pelle spessa ora liscia, ora più o meno tubercolosa: in alcune femmine di grande mole si hanno delle vere verruche con una piccola spina nel mezzo. Le parti inferiori sono liscie, meno le coscie che sono più o meno granulose; egualmente granuloso è il contorno dell'ano; nei giovani le granulazioni sono relativamente più numerose e

più piccole che non negli adulti. Si osservano in questa specie delle ripiegature e dei rigonfiamenti di forma e disposizione abbastanza costanti. Si notano anzitutto due rigonfiamenti in generale molto cospicui, che, presa origine presso la parte posteriore dell'occhio, corrono quasi paralleli fra loro fin presso al principio delle coscie. Un altro rigonfiamento della pelle va dall'angolo posteriore dell'occhio alla commessura delle mascelle circondando in parte il timpano; nei giovani questa ripiegatura non è mai molto evidente. La pelle forma nella parte inferiore del tarso due ripiegature nella maggior parte dei casi molto spiccate: una prende origine presso all'articolazione tibiotarsea, si dirige verso il margine interno del tarso e procedendo avanti finisce all'apice del quinto dito; l'altra prende pure origine presso all'articolazione tibiotarsea, si dirige verso il margine interno e proseguendo il suo cammino termina all'apice del primo dito (Tav. V fig. 6). La figura 6 della tavola V rappresenta altri rigonfiamenti che si osservano non infrequentemente, sopratutto nelle rane adulte, sulla regione dorsale della gamba, ripiegature che si osservano anche nella tav. XIII di Roesel, op. cit.

Si nota pure, finalmente, una ripiegatura della pelle sulla parte esterna dell'antibraccio. Tutte queste ripiegature, giova osservare, sono sempre più spiccate negli adulti che non nei giovani.

Rispetto alla pelle noi possiamo stabilire le varietà seguenti:

a) Cordoni laterali molto cospicui e prolungantisi senza interruzione fino all'origine delle coscie; pelle molto verrucosa; cordoni ghiandolari sulle gambe e sul tarso molto spiccati.

Questa varietà non è molto comune, e per lo più si osserva nelle femmine.

b) I cordoni laterali molto cospicui, ma che giungono solo sino ai due terzi del tronco; presenza inferiormente sul dorso di due ghiandole parotidiformi, che un po' più indentro dei precedenti cordoni si continuano, parallele fra di loro, sin verso l'ano.

Questa varietà è molto comune in tutto il Piemonte sia nei maschi che nelle femmine.

La rana esculenta è di tutte le specie di anfibî anuri da noi considerate quella che presenta maggiori varietà di colori: per procedere con ordine nello studio di questi dobbiamo considerarli separatamente nei maschi, nelle femmine, e nei giovani.

Credo inutile ripetere qui ciò che tutti sanno, che cioè i colori al tempo della riproduzione si fanno più vivaci, e che le intensità delle tinte variano col variare delle condizioni in cui l'animale si trova.

Possiamo anzitutto dividere gli individui appartenenti a ciascuna di queste categorie in due sezioni, in individui cioè in cui la tinta fondamentale del dorso è verde, ed in individui in cui la tinta fondamentale è grigia.

Maschi. — Tinta fondamentale del dorso verde.

a) Linea dorsale mediana mancante; dorso uniformemente di un verde più o meno chiaro cosparso di qualche macchia brunodorata poco spiccata; coscie macchiettate di nero e di giallo; zampe anteriori di color verde come il dorso con riflessi dorati e con qualche piccola macchia bruna; nessuna macchia sulle guancie e nella regione temporale; timpano di color verde dorato; palpebre circondate internamente

da una striscia dorata; rigonfiamenti dorsali cospicui e dorati; fianchi del colore del dorso, di un tono tuttavia un po' più chiaro e con piccole macchie brune; parti inferiori immacolate; nessuna traccia della macchia omerale.

Questa varietà è comune in tutto il Piemonte; comunissima poi nei contorni di Saluzzo e di Mondovì.

b) Linee dorsali di color verde giallognolo in numero di tre, una mediana e due laterali, queste ultime marginate di due piccole striscie grigiobrune; macchie dorsali poche e piccole; il resto come nella varietà *a*.

Questa varietà è comune in tutto il Piemonte.

c) Macchie dorsali poche, ma molto cospicue e disposte simmetricamente in due striscie longitudinali; il resto come nella varietà *a*.

Comune in tutto il Piemonte, meno tuttavia delle due varietà precedenti.

d) Linea mediana dorsale mancante; dorso di un verde cupo più o meno intenso; ben spiccati i rigonfiamenti laterali; macchie del dorso poche e confuse colla tinta fondamentale; parti inferiori cosparse di leggere macchie brune, come si osserva nelle femmine, più numerose sotto la gola.

Questa varietà si incontra in tutto il Piemonte, ma meno frequentemente che non le precedenti; pare non rara nei contorni di Saluzzo, Cuneo, Avigliana, Rivoli, Casellette.

e) Dorso, capo, e fianchi di un verde uniforme più o meno intenso; nessuna macchia sul dorso e sul capo; qualche piccola macchia sulla parte inferiore dei fianchi; rigonfiamenti laterali verdi con pochi riflessi dorati; zampe anteriori di un verde più cupo senza fascie o macchie brune; coscie verdi con qualche macchia giallognola e nericcia; gambe di color verde intenso con leggiere fascie brunoverdastre; piedi dello stesso colore; parti inferiori biancoimmacolate.

Non rara fra le rane delle parti meridionali del Piemonte; poco frequente nelle altre regioni.

f) Parti dorsali e zampe come nella varietà *e;* parti inferiori macchiettate come nelle femmine; queste macchie nelle parti addominali e della gola sono piccole e rare, ma nella regione inguinale e nella parte inferiore delle coscie e delle tibie sono rotondeggianti, numerose e spiccatissime.

Questa varietà è rara in Piemonte: ne trovai qualche individuo fra le rane del contorno di Saluzzo (Tav. III fig. 3).

g) Dorso, capo, zampe, ecc. come nella varietà *e;* macchie del dorso numerose e cospicue e disposte in due striscie longitudinali.

Non rara fra le rane dei contorni di Cuneo, Mondovì, Saluzzo, Vigevano.

Tinta fondamentale grigia.

a) Linea mediana dorsale verde o giallognola più o meno intensa; macchie brunodorate più o meno cospicue; macchie del muso e della regione temporale mancanti; parti inferiori immacolate.

Comune in tutte le regioni settentrionali del Piemonte; comunissima a Vigevano, nei contorni di Torino, a Casellette, Alpignano, Venaria reale, Chieri, Settimo, Rivarossa, Moncalieri, Rivoli, Avigliana; rara a Saluzzo, Mondovì, Cuneo, ecc.

Femmine. — Tinta fondamentale verde.

a) Linea chiara dorsale mancante; tinta fondamentale verde-chiaro; macchie cospicue e numerose disposte in guisa da formare due linee longitudinali; rigonfiamenti laterali molto cospicui e dorati; capo di color verde cosparso di piccole macchie; due strie brune che dall'angolo anteriore degli occhi si portano alla estremità del muso; fianchi di color verdechiaro tendente in basso al giallo con macchie brunonere; coscie gialle con numerose macchie brunonere; parti inferiori coperte di numerosissime e piccole macchie brunogrigiastre; zampe anteriori brunoverdastre con riflessi dorati; zampe posteriori brune con macchie più o meno cospicue e più o meno regolarmente disposte.

Questa varietà è frequente in tutto il Piemonte.

b) Linea dorsale mediana verde o gialla più o meno intensa; macchie dorsali poche e piccole; gambe e piedi posteriori verdi, con macchie brune trasversali; zampe anteriori verdi con fascie brune; macchie del muso e della regione temporale ben spiccate; il resto come nella varietà *a*.

Comune in tutto il Piemonte.

c) Linea mediana dorsale verdechiara o giallognola; macchie tondeggianti e poco numerose; capo e muso immacolati; macchia temporale mancante; fianchi di color grigio con macchie nere; zampe anteriori e posteriori bigie con striscie nere; parti inferiori cenerognole con numerose e cospicue macchie grigiastre.

Non rara nel contorno di Torino, a Rivoli, e nella Praia di S. Gillio.

d) Linea dorsale mediana mancante; dorso, capo, muso, fianchi, zampe anteriori e posteriori di un verde più o meno vivace; assenza completa sulle coscie di giallo, anzi le parti che nelle altre varietà sono gialle qui sono di un brunoverdastro; parti inferiori macchiettate di bruno.

Questa varietà è comune nelle regioni del Piemonte meridionale, Cuneo, Mondovì, Saluzzo, rara nelle altre regioni.

e) Linee dorsali in numero di tre, una mediana e due laterali di colore verdechiaro o giallognolo; macchie brune più o meno cospicue e più o meno regolarmente disposte; zampe posteriori bruniccie, con fascie brune; zampe anteriori verdi con riflessi dorati; parti inferiori generalmente macchiettate di nericcio.

Questa varietà è comune in tutto il Piemonte.

Tinta fondamentale grigia.

a) Linea mediana dorsale verde; macchie numerose e cospicue; rigonfiamenti dorsali dorati; tinta fondamentale delle coscie grigiosporco con macchie nere; fianchi grigioverdastri, con grosse macchie nere; capo grigio con macchiette nerognole; striscie brune del muso e macchia temporale cospicue; parti inferiori biancastre con grosse macchie nerognole irregolarmente sparse.

Questa varietà è comune in tutto il Piemonte; comunissima nel contorno di Torino e di Vigevano; meno comune nel Piemonte meridionale.

b) Linea dorsale mediana verde grigiastra o giallognola; parti inferiori biancastre con numerose e piccole macchie bruniccie; il resto come nella varietà *a*.

Questa varietà è frequente in tutto il Piemonte; comunissima poi nel contorno di Torino, Avigliana, Chieri, Settimo, Rivarossa, ecc.

c) Linee dorsali in numero di tre, una mediana e due laterali, di colore giallognolo o grigiochiaro; il restante del dorso di un grigio intenso con grosse macchie brunoverdastre; fianchi, capo, muso, dello stesso colore del dorso; coscie di colore giallo sporco con macchie brune; parti inferiori fittamente macchiettate di bruno.

Questa varietà non è molto comune; non rara nei contorni di Vigevano e di Torino; rara invece a Mondovì, a Cuneo, e nelle altre regioni meridionali del Piemonte.

d) Parti dorsali come nella varietà *c;* fianchi e coscie di color giallo intenso con spiccatissime macchie irregolari brunonere; zampe posteriori grigie, con regolarissime fascie brunoverdastre.

Non rara in tutto il Piemonte; comunissima poi nei contorni di Vigevano.

e) Parti dorsali, come nella varietà *d;* le macchie tuttavia del dorso, del muso, della regione temporale, delle zampe posteriori, più spiccate; rigonfiamenti laterali del dorso prominenti. Palpebre, muso, capo, dorso, rigonfiamenti laterali, zampe anteriori e posteriori, e dita ricoperte di elegantissimi riflessi cuprei; parti inferiori più o meno macchiettate di bruno.

Questa varietà è frequente nei contorni di Vigevano; rara nel restante del Piemonte.

Giovani. — Tinta fondamentale verde.

a) Linea mediana dorsale verdechiara o giallognola; macchiette brune, dorate, irregolarmente sparse sui fianchi e sul dorso; parti inferiori bianche immacolate o leggermente macchiettate di grigio, sopratutto sotto la gola.

Frequentissima in tutto il Piemonte.

b) Mancanza della linea mediana dorsale; il resto come nella varietà *a.*

Si trova questa varietà in tutto il Piemonte, ma meno frequentemente della precedente.

c) Linea mediana dorsale mancante; dorso verdecupo; macchie brunodorate, irregolarmente disposte; rigonfiamenti laterali cospicui giallodorati; zampe anteriori verdi, immacolate e con evidentissimi riflessi dorati; parti inferiori senza macchie.

Meno frequente delle precedenti, si trova specialmente nei contorni di Avigliana, nella Praia di S. Gillio, a Rivoli, a Casellette, a Sangano.

d) Dorso verde più o meno vivace; linea mediana dorsale mancante; macchie piccole e numerose; capo, muso, fianchi senza macchie; rigonfiamenti laterali cospicui e dorati.

Non rara specialmente nel contorno di Torino.

Tinta fondamentale grigia.

a) Linea mediana dorsale verdechiara; rigonfiamenti laterati grigiodorati; macchie brune dorsali, numerose ed irregolari con riflessi dorati; parti inferiori biancastre immacolate o leggermente punteggiate di grigio.

Molto frequente in tutto il Piemonte.

b) Linea mediana dorsale mancante, intieramente o appena sensibile verso l'ano; dorso di colore grigio uniforme più o meno intenso e puro; macchie brunodorate irregolarmente sparse sul dorso e sui fianchi; poco diversi dal dorso sono pel colore i fianchi e le zampe anteriori e posteriori.

Questa varietà non si trova egualmente comune in tutto il Piemonte: si osserva principalmente nei contorni di Avigliana e nella Praia di S. Gillio.

La rana esculenta, come abbiamo già detto, varia moltissimo. Nel Piemonte meridionale ci presenta, considerando un numero grande di individui di ambo i sessi, il muso più aguzzo, il tubercolo del primo cuneiforme più sviluppato, e tinte più verdi; in quelle delle regioni settentrionali invece, troviamo il muso relativamente più ottuso, il tubercolo del primo cuneiforme meno sviluppato, e preponderanza di tinte gialle, brune, bigie, e di riflessi dorati.

Il Vallisnieri menziona in questa comunissima specie per osservazioni sue un fatto di poliandria di cui non parlano i moderni, e che merita di essere riferito. Alla metà del mese di maggio, in un lago dove brulicavano rane infinite clamorosissimamente gracidanti, egli vide che: « le più erano in varie società divise, altre in varî ammassamenti ammonticellate, altre si cavalcavano e s'intricavano insieme ..... ». Così prosegue poi quell'osservatore maestro: « Feci prendere a un pescatore pian piano con una rete uno di quei gruppi, o ammassi d'innamorate rane, e vidi, che non vi era fra tante che una miserabile femmina partoriente le uova sue, abbracciata strettamente da un maschio che colle mani, che sporgea avanti il petto, molto forte la stringea e, quello ch'era curioso, era questo maschio cavalcato da un altro, e un altro pure stava abbracciato petto a petto colla femmina, quindi altri, e poi altri stavano tutti addosso a quei tre primi fortunati amatori, ed impazienti ed appassionatissimi giravano ora da un canto ora dall'altro e con un rauco suono, dirò così, bravando e brontolando, non mai stavano fermi, e sempre tentavano d'insinuarsi fra loro e scavalcargli, per entrare anch'essi più da vicino nei godimenti desiderati; ma ciò non veniva loro fatto, tanto i primi tenevano rabbiosamente legata e stretta l'amata rana. Era uno spettacolo da risa il vedere quel brulicame di tanti amatori, discordi nel moto, nel canto, nel gesto, e solo concordi nel tentare ogni arte, per arrivare al fine bramato, menando essi una inquieta e miserabile vita ..... ».

Il Vallisnieri osservò diligentemente le rane così raccolte per riconoscere se avessero un organo copulatore, essendo in quel punto questo lo scopo principale delle sue ricerche. Poi soggiunge: « Tornai al lago, e guardando attentamente ora una femmina ora l'altra col marito, o con più mariti, accoppiata, vidi che da alcune scappavano le uova ed il maschio, o i maschi, sempre più allora la stringevano, e mille atti sconci e divincolamenti, e strida facevano. Vidi alcuno, come stanco abbandonare l'impresa, a cui subito un altro furiosamente succedeva ».

Ogni asserto del Vallisnieri ha un gran peso, siccome d'uomo che mirabilmente accoppiava all'ingegno la coscienza; le mie osservazioni non mi permettono nè di confermare nè di negare quanto di lui ho qui riferito: mi vennero invece incontrate rane svernanti non nel fango sott'acqua, ma nella terra presso all'acqua, siccome egli pure asserisce.

Ebbi anche campo a verificare lo asserto dello Schreiber, che le rane più vecchie van più sotto e quelle giovani meno, per cui queste sono ancora le prime a venir fuori saltellando in primavera.

La rana esculenta qui esce dai suoi nascondigli invernali un po' più tardi delle

sue congeneri; come queste, al sopraggiungere della cattiva stagione, si appiatta pel letargo; ma non è raro tuttavia vedere, nel contorno di Torino, in sul finire dell'ottobre, se l'autunno è bello, qualcuna di queste rane godersi il sole col muso a fior d'acqua; ma non gracidan più al tramonto, ciò solo facendo in primavera e nelle calde sere di estate. Basta qualche giornata nebulosa e fredda a farle scomparire, senza che poi valga a richiamarle fuori qualche nuova bella giornata di sole.

I più giovani ranocchi della rana esculenta, come sopra ho detto, sono i primi a venir fuori in primavera, sono pure gli ultimi a scomparire nell'autunno. Frequentissimamente ho ciò verificato nel contorno di Torino, e anche altrove. Addì 19 ottobre dell'anno 1875 in una pozza lungo la via che mena da Torino a Collegno, trovai buon numero di ranocchi tutti giovani di rana esculenta. Il primo giorno di novembre dello stesso anno trovai parimenti non pochi di tali giovani ranocchi in una pozza presso la stazione di Sangone, e quest'anno (1876) ne trovai uno ben vivace presso la Stura il giorno 25 novembre.

Così, per quel che riguarda il primo venir fuori nella primavera, i ranocchi di questa specie che cominciano a vedersi qua e là per le pozze nei primi giorni di aprile sono tutti giovani. Visitando il lago di Avigliana addì 14 aprile trovai buon numero di individui della rana esculenta, ma non due accoppiati, tutti qua e là nuotanti isolati, e giovani tutti.

Rana temporaria (Linneo)

Rana rossa, Rana muta. — Nomi vernacoli: *Rana, Babi campee, Pissacan* (Vigevano).

Rana gibbosa. Gesn. *Quadrup. ovipar.* pag. 51.
Rubeta gibbosa. Aldrov. *Quadrup. digit. ovip.* pag. 610 (1663).
Rana temporaria. Charlet. *Exercit. different. nomin. anim.* pag. 27 (1677).
Rana fusca terrestris. Roesel. *Histor. natur. ranar.* I pag. 1 tab. I-VIII.
Rana alpina. Laur. *Synops. reptil.* pag. 133.
Rana muta. Laur. *Synops. reptil.* pag. 30, 17.
Rana atra. Bonat. *Tabl. encyclop. Erpétol.* pag. 9, 21.
Rana cruenta. Pall. *Zoogr. rosso-asiat.* pag. 12, 6.
Rana temporaria. Linneo. *Syst. nat.* I pag. 357, 14.
Rana alpina. Fitzing. *Neue Classific. d. reptil.* pag. 64, 11.
Rana temporaria. Bonaparte. *Fauna Ital.* et tab.
Rana platyrrhinus. Steenstrup. *Ueber die Lebens.* etc. Berict. über die Versammt. deutsch Naturf. etc. in Kiel p. 131.
Rana alpina. Schinz. *Fauna Helvet.* in Mém. Soc. Helvet. 1837, p. 143. — Bonap. *Fauna Ital.* et tabula.
Rana temporaria. Dum. e Bibr. *Herpét. gén.* VIII p. 858. — De Betta. *Erpet. Ven.* p. 292 (in parte). — Fatio. *Faune Suisse* III p. 321. — Schreiber. *Herpet. Europaea.*
Rana fusca. Leydig. *Anuren Batrachier der deutschen Fauna* pag. 116 (1877).

Pelle generalmente sottile e liscia. Rigonfiamenti laterali del dorso un po' meno sviluppati che non nella specie precedente. — Primo dito delle zampe anteriori un

po' più lungo del secondo e un po' più corto del quarto. — I sacchi vocali del maschio sono interni. — La lunghezza del tronco comparata colla lunghezza delle zampe posteriori oltrepassa più o meno la articolazione tibiotarsea. — Fianchi in generale con macchie nere numerose e cospicue. Dimensioni medie: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,068, ♀ m. 0,075.

Dimensioni massime

	maschi	*femmine*
Lungh. del corpo (dall'apice del muso all'ano).	metri 0,075	metri 0,082
» delle zampe anteriori (dalla spalla all' apice del terzo dito) . . .	» 0,041	» 0,045
» delle zampe posteriori (dall'ano all'apice del 4° dito)	» 0,126	» 0,140
» del piede (fino all'apice del 4° dito).	» 0,055	» 0,063
» della tibia	» 0,038	» 0,0435
Larghezza della testa	» 0,021	» 0,029

Testa larga, spessa e arrotondata nella parte anteriore; la larghezza è quasi sempre un po' maggiore della lunghezza; nelle femmine specialmente la differenza è molto notevole; nei giovani le due misure sono presso che eguali, e qualche volta la lunghezza è maggiore della larghezza.

Lunghezza metri 0,021	Larghezza metri 0,023
» 0,024 ♀	» 0,029 ♀
» 0,020 ♂	» 0,0205 ♂
» 0,009	» 0,008
» 0,007	» 0,00725

Di tutte le specie da noi considerate la rana temporaria è quella che ci presenta maggiore irregolarità nello sviluppo e nella disposizione dei denti del vomere, che ora mancano affatto, ora sono appena visibili, e variano in generale fra m. 0,0005 e m. 0,0025 di lunghezza. I due gruppi si avanzano verso i palatini e formano, un po' dietro agli orifizî nasali, un angolo più o meno acuto; in generale tuttavia un po' più acuto che non nella rana agile. Sono sempre poco sviluppati nei giovani, e frequentemente mancano.

La lingua ha la forma presso a poco di quella della rana esculenta; le corna posteriori tuttavia sono meno sviluppate.

L' angolo che fanno fra di loro incontrandosi gli archi mascellari è in generale più ottuso che non nella rana agile; possiamo tuttavia stabilire due forme di rane temporarie, come ha fatto il Fatio, vale a dire:

Rana temporaria acutirostris.
Rana temporaria obtusirostris.

Queste varietà, devo notare, si trovano tanto in pianura quanto in montagna: anzi in montagna nelle rane della seconda forma si osservano le tibie comparativamente più lunghe che non nelle rane della forma *obtusirostris*: ma non raggiungono mai la lunghezza di quelle della rana agile e nemmeno si notano in quelle rane gli altri caratteri proprî di questa specie.

Nella forma *obtusirostris* l'angolo sopradetto oscilla fra i 65° ed i 70°. Nella forma *acutirostris* varia fra i 55° ed i 65°.

Nei giovani è più acuto che non negli adulti e oscilla fra 50° ed i 60°.

Il labbro superiore oltrepassa un poco l' inferiore.

Le narici generalmente negli adulti sono al centro dello spazio che corre fra l'angolo anteriore dell'occhio e l'apice del muso.

Occhio cospicuo e prominente; per lo più collocato ad eguale distanza dall'apice del muso e dall'angolo posteriore delle mascelle; negli individui molto vecchi la distanza dell'occhio dall'angolo posteriore delle mascelle è maggiore dell' altra; nei giovani in generale è invece maggiore la seconda.

Paragonando il massimo diametro dell'occhio colla larghezza della testa troviamo che è eguale ad un terzo circa di questa; esso è relativamente un po' più grande e prominente nei giovani che non negli adulti.

Lunghezza della testa metri	0,023	Massimo diam. dell'occhio metri	0,007
» »	0,017	» »	0,005
» »	0,0245	» »	0,008
» »	0,009	» »	0,00275
» »	0,005	» »	0,00225

Il timpano è sempre molto evidente e di forma per lo più circolare: esso è relativamente più distante dall'angolo posteriore dell'occhio che non nella rana agile; l'angolo posteriore della apertura boccale non giunge quasi mai alla metà di esso.

Timpano metri	0,004	Diametro massimo dell'occhio metri	0,006
»	0,006	» »	0,008
»	0,005	» »	0,007
»	0,0015	» »	0,0035
»	0,00125	» »	0,003

Il tronco è meno largo e meno appiattito che non nella rana esculenta; i maschi a pari età sono più piccoli delle femmine.

Le zampe anteriori sono relativamente più lunghe di quelle della rana agile: paragonate colla tibia le troviamo sempre un po' più lunghe di questa, e la differenza è notevole anche nei giovani.

Zampe anteriori metri	0,044	Tibia metri	0,038
»	0,038	»	0,036
»	0,017	»	0,016
»	0,011	»	0,008
»	0,050	»	0,048

Il primo dito è un po' più lungo del secondo, e più corto del quarto; questa differenza è tuttavia minore nei maschi che non nelle femmine.

Bene sviluppati sono sempre i tubercoli sottoarticolari; alla base delle dita abbiamo tubercoli analoghi a quelli che si osservano nella rana agile; ma, relativamente alla mole dell'animale, meno sviluppati. Il tubercolo che è alla base del primo dito si riveste anch' esso nel tempo degli amori di scabrosità bruniccie.

La cosidetta spazzoletta copulatrice ha in questa specie maggior estensione e ci presenta papille più grosse che non nella rana agile; si presenta anche di colore

più intenso, senza tuttavia essere nera, o brunocarica come nei rospi; rari i casi in cui si estende anche sopra al secondo dito.

Le zampe posteriori sono comparativamente meno allungate e meno asciutte che non nella specie susseguente; minore è pure nella rana temporaria la differenza fra la tibia e la lunghezza della testa: essa non giunge mai a misurare due volte la lunghezza di questa; nei giovani tuttavia questa differenza è molto più piccola che non negli adulti.

Tibia metri	0,039	Lunghezza della testa metri	0,0023
»	0,037	» »	0,020
»	0,0165	» »	0,010
»	0,038	» »	0,022
»	0,009	» »	0,007
»	0,009	» »	0,008

Paragonando la lunghezza del tronco con quella delle zampe posteriori vediamo che quella giunge sempre all'articolazione tibiotarsea, e che in moltissimi casi la oltrepassa, ciò che non succede nella rana agile.

Nei maschi le zampe posteriori sono alquanto più tozze che non nelle femmine; in queste la lunghezza del tronco oltrepassa di poco l'articolazione tibiotarsea; in quelle invece l'oltrepassa notevolmente: la differenza giunge non raramente a m. 0,007.

Tubercoli sottoarticolari molto sviluppati; il tubercolo del primo cuneiforme un po' meno cospicuo di quello della rana agile, molto meno poi di quello della rana esculenta; il tubercolo, che nelle altre specie si trova costantemente alla base del quarto dito, negli adulti generalmente manca: esiste quasi sempre, sebbene poco sviluppato, nei giovani; pare quindi che col crescere scompaia. Palmature un po' più estese che non nella rana agile, più nei maschi che non nelle femmine.

Pelle liscia e sottile; i rigonfiamenti laterali del dorso più o meno prominenti; meno tuttavia che non nella rana agile, molto meno poi di quelli della rana esculenta: sono un po' più sviluppati nei giovani; in certi individui vecchi si notano delle piccole verrüche sul dorso e sulle zampe posteriori; le parti inferiori liscie; poche granulazioni sotto le coscie e nei contorni dell'ano, queste nei giovani relativamente più spiccate e numerose che non negli adulti.

Questa specie presenta numerose varietà di colore, più abbondanti fra le rane di montagna che non fra quelle della pianura, le quali hanno in generale colorito più stabile e uniforme. Nella pianura predominano le tinte bigiorossastre o giallognole; nelle Alpi, le brune e le nere: per questo rispetto notiamo che nelle vallate di Valsavaranche, di Viù e di Susa presentano tinte più cariche che non quelle delle vallate poste a mezzogiorno della vallata di Susa: non ripeteremo qui quello che abbiamo già detto altrove sul variare dei colori col variare delle altitudini sul livello del mare. Per procedere con ordine dividiamo, come abbiamo fatto per la rana esculenta, tutte le varietà in due sezioni a seconda della tinta fondamentale predominante.

Tinta fondamentale rossastra.

a) Macchie piccole e poco numerose; macchia temporale poco sviluppata; fascie brune delle zampe posteriori poco evidenti; macchia alla regione inferiore della spalla spiccata; parti inferiori immacolate.

Questa varietà è comune in pianura e nelle colline; non rara a Casteldelfino e nella vallata di Susa.

b) Macchie dorsali grandi e interamente brune; la macchia in forma di Λ fra le omoplate spiccatissima; fianchi e zampe posteriori quasi senza macchie; parti inferiori biancastre con numerose macchie brunogrigie; non rara in montagna, a Casteldelfino, Ceres, Viù, Valsavaranche.

c) Macchie nere numerose e cospicue anche sui fianchi e sulle zampe posteriori, nella massima parte orlate di bianco sporco; parti inferiori grigiastre con numerose macchie nerognole; meno comune della precedente in montagna: valli di Susa, di Viù, di Valsavaranche.

d) Tinta fondamentale chiara bigiorossastra, con chiazze leggermente verdognole; macchie cospicue ma sbiadite e sfumantisi colla tinta fondamentale; parti inferiori bianche o giallastre senza macchie; comune assai nelle colline; rara in montagna.

Tinta fondamentale predominante grigia o bruna.

a) Tinta fondamentale uniformemente grigia; macchie piccole e non molto numerose; macchia temporale e fascie brune delle zampe posteriori molto spiccate. Non rara in montagna, specialmente a Casteldelfino e a Valsavaranche.

b) Tinta fondamentale del dorso, del capo, e delle zampe anteriori e posteriori brunointensa; macchie poche, nerissime, e con qualche riflesso dorato; rigonfiamenti laterali dorati; macchia temporale confondentesi colla tinta fondamentale; parti inferiori brunogrigiastre, un po' rosee nella parte ventrale, fittamente macchiettate di bruno grigio più intenso; macchia nella parte inferiore della spalla molto spiccata. Questa varietà non è rara nelle Alpi a notevole altezza: si trova qualche volta a Valsavaranche (Tavola II fig. 12, 13).

c) Dorso, capo, zampe anteriori e posteriori di color bigio più o meno intenso; macchie nere numerose e più o meno cospicue; tutte le regioni superiori dell'animale sparse di macchie irregolari biancogiallognole, spiccatissime ed elegantissime; parti inferiori ora più ora meno macchiate di bigio. Questa curiosa varietà è meno frequente delle precedenti; ne venne trovato qualche individuo nelle valli di Valsavaranche (Tavola II fig. 14).

d) Tinta fondamentale del capo, del dorso e delle zampe anteriori e posteriori di un bigio alquanto rossiccio; macchie del dorso numerose, piccole e rotondeggianti; fascie nelle coscie e sulle zampe posteriori molto spiccate e regolari (Tavola II fig. 20). Questa varietà non è molto comune: ne ho trovato alcuni individui nelle vallate di Viù e a Casteldelfino.

I giovani di questa specie non ci presentano varietà così numerose e spiccate come quelle della rana esculenta. Appena compiuta la metamorfosi sono di un bruno nerognolo più o meno intenso con macchie più o meno cospicue e spiccate; qualche tempo dopo assumono tinte più chiare, rossiccie o brune, e le macchie si fanno più distinte; in quasi tutti si notano fascie brune regolari nelle zampe posteriori; le parti inferiori sono in generale biancastre (Tavola II fig. 16, 17, 18).

Intorno a questa specie il De Betta dice [1]) senza riferire date, ch' essa « si accoppia

[1]) *Erpetologia delle provincie venete* pag. 296.

molto più tardi della esculenta, siccome più tardi depone quindi il parto ». Oppostamente il Fatio (1) si esprime così: « L'accouplement de la rana temporaria a lieu une fois par an, et à des époques très-variables, suivant les localités et la nature des eaux; mais toujours beaucoup plus tôt, en plaine, que celui de l'esculenta ».

In Piemonte, secondochè già sopra abbiamo detto, la cosa va come in Svizzera e nel modo dichiarato dal Fatio, ed oppostamente a quello che avverrebbe nelle provincie venete secondo l' affermazione del De Betta.

La rana temporaria mi ha presentato poi nello stato di girino una particolarità degna di essere riferita. In Casteldelfino, paese, come già ho detto, situato in capo alla valle della Varaita, all' altitudine di 1310 metri sul livello del mare, a pochi passi di distanza dalle prime case a destra della strada vi è un pubblico lavatoio costituito di due o tre pozze d'acqua limpida e rinnovantesi, in cui non manca, ma non abbonda, la vita vegetale. Il giorno 5 agosto del corrente anno (1876) visitando quella pozza la trovai brulicante di girini della rana temporaria, già molto inoltrati nello sviluppo; molti in sul punto di trasformarsi, e ranocchietti già trasformati. Ma fra quei girini incominciai a scorgerne qualcuno senza colore, di un bianco uniforme, lattiginoso ed opaco. Raccolsi con curiosità questi girini in stato di albinismo, ma in breve mi accorsi che essi non erano per nulla una rarità in quel luogo. Quel giorno e i seguenti mi trattenni a lungo presso quell'acquicella, ed ebbi campo ad accertarmi che i girini albini erano numerosi. Ne raccolsi parecchi; ma molto più avrei potuto raccoglierne, e fra i raccolti tre in diverso grado di sviluppo sono disegnati nella Tavola II fig 8, 15, 19.

Ho detto che in quella pozza la vegetezione non era abbondante, e soggiungerò ora che la superficie dell' acqua era al tutto sgombra di lente palustre, o altre acquatiche pianticelle, e che la luce cadeva direttamente in quell' acqua, e ne lasciava ben scorgere il fondo. Fra i pochi ranocchietti pur mo' trasformati non ne vidi nessuno bianco o bianchiccio; uno, vicinissimo alla trasformazione, conservava il suo colore bianco; del resto, i trasformati erano in quel punto così pochi, che non si può trarre conclusione. Non vi erano più adulti intorno a quella pozza, e nessun adulto albino ho trovato fra i molti raccolti in quel contorno. Non ho trovato i girini delle acque circostanti e dei laghetti, nè là nè altrove. Non ho trovato negli autori nessun cenno intorno all'albinismo dei girini. Il Fatio dichiara raro l'albinismo negli anfibî anuri, e parla di un solo caso da esso osservato in un individuo adulto del *Bombinator igneus* Laur., nel quale trovò la pelle quasi al tutto mancante di cellule pigmentali come è il caso appunto pei nostri girini albini.

Il signor Augusto Duméril riferì all'Accademia delle scienze di Parigi (seduta 11 aprile 1870) il fatto di un axolotl albino di cui gli fu fatto dono, e i tentativi impresi per averne una razza bianca. Qualche ulteriore osservazione intorno a questo albinismo spero di poter io pure proseguire.

(1) Op. citat. pag. 332.

Rana agilis (Thomas)

Rana agile. — Nome vernacolo: *Rana Sauta trabuc* (Venaria reale).

Rana temporaria. Millet. *Faune de Maine et Loire* t. II pag. 664.
Rana agilis. Thomas. *An. des Sc. Nat.* 4me série, Zool. t. IV p. 365 pl. 7.
Rana gracilis. Fatio. *Rev. et Mag. de Zool.* 2me série t. XIV p. 81 pl. 6, 7.
Rana agilis. Fatio. *Faune Suisse* III pag. 333.
Rana temporaria v. p. Schreiber. *Herpet. Europaea* pag. 125 (1875).
Rana agilis. Cornalia. *Osser. sul Pelobates fuscus e sulla Rana agilis trovate in Lombardia.* Atti Soc. Ital. Scienze natur. vol. XVI (1873).
Rana agilis. De Betta. *Fauna dell'Italia. Rettili ed anfibî* pag. 65.
Rana agilis. Leydig. *Anuren Batrachier der deutschen Fauna* pag. 143 (1877).

Pelle generalmente sottile e liscia. Rigonfiamenti laterali del dorso relativamente poco sviluppati.— Primo dito delle zampe anteriori più lungo del secondo e un po' più corto del quarto.— I sacchi vocali del maschio sono interni.— Generalmente una macchia bruna intensa nella regione temporale.— La lunghezza del tronco comparata colla lunghezza delle zampe posteriori non raggiunge nel maggior numero dei casi l'articolazione tibiotarsea. — I fianchi privi di grandi macchie brune. Dimensioni medie: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,050, ♀ m. 0,059.

Dimensioni massime

	maschi	*femmine*
Lung. del corpo (dall'apice del muso all'ano).	metri 0,058	metri 0,065
» delle zampe anteriori (dalla spalla all'apice del terzo dito). . . .	» 0,037	» 0,039
» della zampa posteriore (dall' ano all'apice del 4° dito)	» 0,103	» 0,121
» del piede (sino all' apice del 4° dito)	» 0,0465	» 0,053
» della tibia	» 0,0365	» 0,040
Larghezza della testa	» 0,017	» 0,020

In generale gli individui piemontesi sono un po' più piccoli di quelli di Nantes e di quelli della Svizzera.

Testa triangolare un po' più depressa che non nella *Rana temporaria*; nei maschi e in generale nei giovani la lunghezza è eguale alla larghezza; nelle femmine spesso la larghezza è un po' maggiore.

Lunghezza metri 0,0255	Larghezza metri 0,021
» 0,022 ♀	» 0,023 ♀
» 0,015	» 0,016
» 0,014	» 0,012
» 0,018 ♀ (Nantes)	» 0,019 ♀ (Nantes)

L'angolo che fanno fra loro incontrandosi gli archi mascellari è in questa specie più acuto che non in tutte le altre da noi considerate, e varia entro a limiti assai ristretti, fra 50° cioè e 56°. Nel massimo numero dei casi si trova 55°, o 55°,5.

Pare che nelle femmine sia alquanto più ottuso che non nei maschi; non vi è a questo riguardo grande differenza fra gli adulti ed i giovani.

I gruppi di denti del vomere sono collocati un po' al disotto degli orifizî nasali interni, e si prolungano notevolmente in basso; l'angolo che fanno fra loro i due gruppi è variabile: tuttavia in generale più ottuso che non quello della *Rana esculenta*. Raramente e solo nei giovani mi venne fatto di trovare individui in cui i gruppi sopradetti mancassero.

La lingua è in massima parte come quella della rana temporaria: si può dire tuttavia che in generale è un po' più allungata. Il labbro superiore notevolmente più prolungato in avanti che non l'inferiore.

Occhio grande, sporgente; palpebra convessa. Le distanze fra l'occhio e l'angolo delle mascelle e fra l'occhio e l'apice del muso eguali fra loro nelle femmine, un po' maggiore la seconda della prima nei maschi e nei giovani. Paragonando il massimo diametro dell'occhio colla larghezza della testa vediamo che esso in generale è eguale ad un terzo, in qualche raro caso, anche ad un quarto di questa.

Lunghezza della testa	metri 0,019	Massimo diam. dell'occhio	metri 0,006
» »	0,022	» »	0,0065
» »	0,019	» »	0,005
» »	0,018	» »	0,006

Il timpano è sempre ben evidente, e in generale di forma circolare; misura presso a poco il diametro massimo dell'occhio, la differenza varia fra metri 0,001 e metri 0,002.

Timpano metri	0,0045	Diam. mass. dell'occhio metri	0,006
»	0,0045	» »	0,0055
»	0,005	» »	0,007
»	0,0035	» »	0,005
»	0,0004 (Nantes)	» »	0,006 ♀ (Nantes)

Si mostra relativamente più sviluppato nei giovani che non negli adulti.

L'angolo posteriore della apertura boccale giunge alla metà circa del timpano, e qualche volta la supera anche.

Tronco compresso nella parte posteriore; dorso largo e come gobbo nel mezzo.

Le zampe anteriori sono relativamente tozze; paragonate colla tibia troviamo che esse sono in generale eguali a questa; nei giovani non raramente sono più lunghe; lo stesso fatto si verifica pure, sebbene più raramente, anche negli adulti.

Zampe anteriori	metri 0,033	Tibia	metri 0,031
» »	0,040	»	0,041
» »	0,037	»	0,038
» »	0,034 ♀ (Nantes)	»	0,0355 ♀ (Nantes)
» »	0,026	»	0,0265

Sono, come in generale nelle altre specie, un po' più tozze nei maschi che non nelle femmine.

Il primo dito è più lungo del secondo e poco più corto del quarto. La differenza è maggiore nelle femmine. Molto sviluppati sono in generale i tubercoli sottoarticolari. Alla base delle dita, meno che del secondo, vi ha un tubercolo ben evidente

ed allungato; quello che è alla base del primo dito si riveste nel tempo della riproduzione di scabrosità brunoverdastre.

Nel tempo della riproduzione le scabrosità costituenti la spazzoletta copulatrice ricoprono la parte dorsale, laterale esterna e inferiore del primo dito, e il tubercolo che è alla base di esso. Non ho trovato nessun individuo in cui le scabrosità si estendessero anche al secondo dito; le papille sono di piccola mole, e la pelle in molti casi pare liscia. Il colore di queste spazzolette non è mai così intenso come nelle altre rane e nei rospi; per lo più è grigio o brunoverdastro.

Zampe posteriori relativamente molto allungate ed asciutte; più robuste nei maschi che non nelle femmine. Paragonando la lunghezza della tibia colla lunghezza della testa troviamo che quella è circa il doppio di questa.

Tibia metri	0,041	Lunghezza della testa metri	0,021
»	0,031	» »	0,016
»	0,032	» »	0,017

Paragonando la lunghezza delle zampe posteriori con quella del tronco vediamo che questa non oltrepassa mai l'articolazione tibiotarsea: in molti casi la differenza è di metri 0,004.

Evidentissimi i tubercoli sottoarticolari. Il tubercolo del primo cuneiforme allungato e un po' meno sviluppato che non nella rana esculenta. Il tubercolo alla base del quarto dito poco sviluppato e non raramente mancante affatto. Gioverà notare che le rane agili del Piemonte presentano in generale il tubercolo del primo cuneiforme meno sviluppato che non quelle di Nantes. Le palmature sono un po' meno ampie che non nella rana temporaria, e più sviluppate nei maschi che non nelle femmine.

La pelle è sottile e liscia salvo sotto le coscie, e nel contorno dell'ano, in cui vi hanno delle piccole granulazioni bianchiccie. Nella regione dorsale notiamo come nella rana esculenta due rigonfiamenti longitudinali, ma molto meno cospicui; un po' più, tuttavia che non nella rana temporaria; non raramente si incontrano due rigonfiamenti disposti in forma di Λ fra le omoplate. Sulla parte inferiore del tarso trovasi, come nella rana esculenta, ma meno prominente, una ripiegatura che dall'articolazione tibiotarsea si porta all'apice del quinto dito (Tav. V fig. 10). La rana agile ci presenta nei suoi colori maggior costanza che non la specie precedente.

I maschi ci presentano in primavera una tinta generale grigia più o meno intensa con piccole macchiette e punticini bruni; raramente si osserva una linea dorsale mediana chiara; i cordoni laterali dorati e fiancheggiati da due altre strisce brunonere ora continue ora interrotte; macchia temporale cospicua, ed oltrepassante di circa metri 0,0035 l'angolo posteriore delle mascelle. Notiamo pure sul muso e lungo il mascellare superiore, negli adulti sovra tutto, una colorazione grigia con molti punticini dorati; nella maggior parte dei casi dall'angolo anteriore degli occhi partono in ciascuna parte del muso due linee una nera, l'altra dorata, che si portano in avanti fino all'apice del muso stesso, unendosi qualche volta con altre linee brune che dall'apice del muso corrono lungo i mascellari superiori. Sul dorso poi, fra le omoplate, è costante negli individui del Piemonte una serie di macchie disposte in guisa da formare un Λ. Sui fianchi al di là dei cordoni laterali si nota una

striscia longitudinale brunonera che prende origine sfumandosi un po' al disopra delle zampe anteriori e si continua fino alla regione inguinale, si sfuma poi in grigio andando verso la parte addominale, in violetto generalmente presso le zampe anteriori, e in giallocitrino presso le posteriori. I fianchi presentano pure più o meno numerose le macchie brune, ma queste rarissimamente si anastomizzano fra loro come si osserva frequentemente nella rana temporaria. Sul dorso, sulla testa, sulle palpebre ed anche qualche volta sulle zampe anteriori e posteriori si hanno numerosi punticini grigionerastri. Le zampe anteriori si presentano del colore del dorso con qualche macchia bruna e con riflessi dorati più o meno cospicui. Le posteriori generalmente sono pure della tinta del dorso, ed hanno macchie brunoverdastre per lo più disposte in fascie regolari. Le parti inferiori sono biancogiallognole sotto la gola e nell'addome, giallocitrine nella regione inguinale, e sotto le coscie sono sempre immacolate; sotto la gola e sul ventre tuttavia si osservano dei tratti nerognoli che, come dice benissimo il Fatio, « seraient comme des rayures dans une pâte ».

Noterò poi ancora, che in moltissimi casi le ascelle si presentano di un bel giallocitrino analogo a quello che colora le parti inguinali. Osserviamo finalmente due macchie brune su ciascuna palpebra, che qualche volta si uniscono sulla testa e formano così una striscia bruna trasversale, e una macchia allungata nella regione inferiore della spalla assai spiccata e costante.

Le femmine ci presentano in generale una tinta rossastra; le macchie nere sono meno estese, i riflessi dorati più cospicui. La macchia della regione del timpano molto dorata, quella della spalla, brunonera meno intensa che non nei maschi. Pel resto sono sensibilmente somiglianti ai maschi. Nel tempo della riproduzione le parti inferiori si rivestono in generale di elegantissime tinte gialle ed arancio. Non ho trovato mai femmine colle parti inferiori macchiettate di brunonero.

I giovani non presentano notevoli differenze dagli adulti: le tinte sono tuttavia meno vivaci e più indecise le macchie.

Questa specie, ripeto, anche in Piemonte come in Svizzera varia poco nei colori e nelle proporzioni.

L'anno scorso (1875) per la prima volta mi venne fatto di accertarmi della esistenza di questa specie in Piemonte: ebbi i primi esemplari dalla R.ª Mandria presso la Venaria reale, poi la trovai nel contorno di Torino, in Vanchiglia e quindi presso Rivoli, e più in alto a Rosta in val di Susa. Ho potuto verificare la differenza del suo gridare da quello delle specie affini, appunto come il Fatio descrive.

Pelobates fuscus (Wagler)

Pelobate fosco. — Nome vernacolo: *Babi, Baget* (Vigevano).

Bufo fuscus. Laur. *Synops. reptil.* pag. 20, 10 (1768).

Bufo aquaticus *allium redolens maculis fuscis.* Roesel. *Hist. nat. ranar. nostrant.* Lect. IV pag. 69 tab. XVII a XIX.

Rana vespertina. Pall. *Reise d. versch. Prov. d. russ. Reich.* I pag. 458,15 (1771).

Rana fusca. Meyer. *Synops. reptil.* pag. 10 (1795).

Bufo vespertinus. Schneid. *Histor. amphib.* I pag. 225 XVI (1799).

Rana alliacea. Shaw. *Gener. Zool.* III pag. 146 tab. 41, 42 (1802).

Bombinator fuscus. Fitzing. *Neue Classificat. d. Reptil.* pag. 65, 3 (1826).
Bombina marmorata. Sturm. *Deut. Fauna* III (1828).
Pelobates fuscus. Wagler. *Natürl. Syst. d. Amphib.* pag. 206 (1830).
Cultripes minor. Müller. *Isis.* XXV pag. 538 (1832).
Pelobates fuscus. Bonap. *Fauna Ital.* et tab. — Dum. et Bibr. *Erpét. gén.* VIII pag. 477. — Günther. *Cat. Batrac.* p. 40. — Fatio. *Faune Suisse* III pag. 376.—Balsamo Crivelli. *Nota sul Pelobates fuscus* ecc. Rendiconto del R. Istituto lombardo, vol. VI pag. 174 (1873). — Cornalia. Atti Soc. Ital. Scienze nat. vol. XVI (1873). — De Betta. *Fauna Italica. Rettili ed anfibî* pag.71. — Schreiber. *Herpt. Europaea* pag.91 (1875).— Leydig. *Anuren Batrachier der deutschen Fauna* pag. 77 (1877).

Nessuna ghiandola auricolare. — Timpano non visibile esternamente. — Pupilla allungata e verticale. — Nessun sacco vocale nei maschi.— Pochi o nessun tubercolo sottoarticolare. — Un tubercolo metatarseo molto sviluppato ed in forma di coltello tagliente e corneo. — Pelle liscia o quasi liscia. Dimensioni medie: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,045, ♀ m. 0,047.

Dimensioni massime

	maschi	*femmine*
Lunghezza del corpo (dall'apice del muso all'ano)	metri 0,058	metri 0,054
» della zampa anteriore (dalla spalla all'apice del 3° dito)	» 0,035	» 0,032
» della zampa posteriore (dall'ano all'apice del 4° dito)	» 0,077	» 0,076
» del piede (fino all'apice del 4° dito)	» 0,038	» 0,036
» della tibia.	» 0,011	» 0,011
Larghezza della testa.	» 0,012	» 0,012

Capo leggermente convesso e rigonfio longitudinalmente nella parte posteriore: la sua larghezza è non molto maggiore della sua lunghezza.

Larghezza massima	metri 0,0205	Lunghezza	metri 0,017
»	» 0,015	»	» 0,015
»	» 0,022	»	» 0,018
»	» 0,016	»	» 0,013

I denti del vomere sono disposti in due gruppi separati e collocati su di una linea retta che unirebbe i margini anteriori degli orifizî nasali: qualche volta hanno una posizione un po' convergente verso la metà della volta palatina; variano nelle dimensioni da m. 0,001 a m. 0,002.

Lingua per lo più circolare ed intiera: in qualche individuo però si osserva una leggiera intaccatura nel margine posteriore.

L'angolo che fanno fra loro incontrandosi gli archi mascellari varia fra limiti meno estesi che non nel *Bufo viridis* e nel *Bufo vulgaris*.

angolo massimo 73°
» minimo 64°,5

Non si osserva, almeno in tutti quegli individui che mi venne fatto di esaminare, quella maggiore acutezza di quest'angolo nei giovani come nel *Bufo vulgaris* e nel *Bufo viridis*.

L'occhio è, sia nei giovani che nei vecchi, collocato più vicino all'apice del muso che non all'angolo delle mascelle. Paragonando il diametro maggiore dell'occhio colla larghezza massima della testa troviamo che esso misura poco meno del terzo di questa.

Diametro maggiore metri	0,006	Larghezza massima metri	0,022
» »	0,005	» »	0,018
» »	0,0045	» »	0,014
» »	0,006	» »	0,019

Il timpano nel massimo numero dei casi è invisibile esternamente, tuttavia negli individui vecchi, in cui la pelle è molto aderente alle ossa sottostanti, si può scorgere facilmente la sua impronta.

Ghiandole auricolari mancanti.

Le zampe anteriori sono presso che eguali alla lunghezza del tronco: misurano un po' meno di due volte la lunghezza della tibia.

Tibia metri	0,017 ♀	Zampe anteriori metri	0,029 ♀
» »	0,020 ♂	» »	0,035 ♂
» »	0,011 juv.	» »	0,020 juv.

Si osserva un tubercolo abbastanza grosso alla base del primo dito, e uno di mole minore, che qualche volta è appena visibile, alla base del terzo dito.

Nel tempo della riproduzione si osserva nella regione del braccio una ghiandola ovale e sulla parte anteriore del braccio stesso una serie di ghiandolette, come ha fatto osservare il Cornalia, rialzate, e disposte ora in una ora in due file (1).

Gioverà notare che io le ho trovate sempre più numerose di quelle che si osservano nel disegno del Cornalia, e che si scorgono anche sulle dita; queste ultime però più piccole delle altre. Zampe posteriori tozze: comparando la loro lunghezza con quella del tronco troviamo un rapporto molto più variabile che non nel *Bufo vulgaris* e nel *Bufo viridis;* nella maggior parte degli adulti la lunghezza del tronco eguaglia la lunghezza del femore, della tibia e giunge nel piede tra il 1° ed il 2° dito, nei giovani non giunge frequentemente che fino al tubercolo del primo cuneiforme.

Lunghezza del tronco metri	0,056	Lung. delle zampe posteriori metri	0,072
» »	0,054	» »	0,076
» »	0,032	» »	0,045

Il primo cuneiforme porta una sorta di tubercolo semicircolare, coperto da una lamina cornea, che negli individui che sono stati un po' a lungo nell'alcool debole si può facilmente staccare; il colore di questa è per lo più giallognolo: qualche volta tuttavia brunastro. Il tubercolo è lungo presso a poco quanto la distanza che separa fra loro le narici; paragonandolo colla tibia si trova che questa è eguale a quattro volte, o più, la lunghezza di quello.

Tubercolo metri	0,0045	Tibia metri	0,020
» »	0,004	» »	0,016
» »	0,003	» »	0,0125

Pelle generalmente liscia e sottile; aderente alle sottostanti ossa nella sommità della testa; si vedono perciò, specialmente nei vecchi, benissimo le asperità delle ossa

(1) Op. cit. pag. 7 tav. II fig. 8.

stesse; non ci presenta vere verruche come nel *Bufo vulgaris* o nel *Bufo viridis* ma delle piccole protuberanze sparse qua e là sul dorso e sulle zampe posteriori: generalmente queste protuberanze sono più numerose nei giovani che non nei vecchi. Le parti inferiori sono liscie; granulosi si presentano i contorni dell'ano e la parte inferiore delle coscie. In molti individui, specialmente giovani, troviamo che una parte di queste granulazioni si dispone in modo da formare linee regolari, come si vede nella Tav. V fig. 45.

Le parti superiori sono per lo più di color grigiobiancastro o giallognolo con più o meno numerose macchie brune; le parti inferiori sono bianchiccie, o giallognole, immacolate o sparse di numerosissime e piccole macchiette grigiastre. Fra le macchie possiamo notarne due, regolari e abbastanza costanti, sulle palpebre, e due altre sul muso disposte in modo da formare un Λ. Le zampe posteriori presentano per lo più due macchie brune disposte trasversalmente od oblique; si notano poi sparsi su tutto il corpo, non raramente numerosi, punticini rossi e biancastri.

Fino ad ora non mi venne fatto di osservare in Piemonte che le seguenti due varietà.

a) Macchie brune molto grandi e disposte in guisa da formare due striscie longitudinali; parti inferiori fittamente macchiettate di grigio (non rara).

b) Macchie piccole numerose, sparse irregolarmente; parti inferiori immacolate, giallognole.

Questa varietà comune sia nei giovani sia negli adulti.

Di questa specie trovata dal Cornalia in Lombardia nel 1873 e diligentemente descritta nel lavoro ripetutamente citato, mi vennero l'anno dopo inviati esemplari dal Vercellese.

Più tardi lo trovai presso Settimo Torinese, nei contorni di Vigevano, a Rivoli, a Testona presso Moncalieri e finalmente alle porte di Torino in Vanchiglia.

La vita tutta notturna di questo animale, lungo la giornata sempre appiattato, spiega come per tanto tempo esso abbia potuto passare inosservato; solo al tempo della riproduzione se ne può fare con speranza di buon esito la ricerca.

Bufo vulgaris (Laurenti)

Rospo comune.— Nomi vernacoli: *Babi*, *Pitte* (Vigevano).

Rana bufo. Linneo. *Mus. reg. Fred.* pag. 48 (1754).

Bufo terrestris. Roesel. *Hist. natur. ranar. nostrant.* pag. 85 sect. V tab. 20, 21 (1758).

Rana erubeta. Linneo. *Fauna suec.* pag. 276, 101 (1761).

Bufo vulgaris. Laur. *Synops. reptil.* pag. 28 e 125 (1768).

Bufo cinereus. Schneid. *Hist. amphib.* I pag. 185 (1799). Bufo salsus. l. c. pag. 213 VII.

Bufo roeselii. Latr. *Hist. nat. rept.* II pag. 108 (1800).

Bufo spinosus. Daud. *Hist. nat. d. rept.* VIII pag. 199 (1803).

Bufo ferruginosus. Risso. *Hist. nat. d. princ. prod. de l'Eur. mérid.* III pag. 94, 36 (1826).

Bufo tuberculosus. l. c. pag. 94, 37.

Bufo alpinus. Schinz. *Natur. u. Abbild d. Reptil.* pag. 236 tab. 96 fig. 5 (1833).

Bufo palmarum. Cuvier. *Reg. anim.* 2ª edizione II pag. 111.

Bufo vulgaris. Dum. et Bib. *Erpét. gén.* VIII p. 670.—Bonaparte. *Fauna Ital.* et tab.

Phryne vulgaris. Fitzing. *Syst. reptil.* I pag. 32 (1843).

Bufo commutatus. Steenstrup. *Ber. üb. d.* 24 Pers. deutsch. Naturf. p. 134 (1846).

Bufo vulgaris. De Betta. *Erpet. delle Provin. Venete e del Tirolo merid.* pag. 303. — Tschudi. *Classif. Batrach.* pag. 88. — Massal. *Saggio* pag. 41. — Günther. *Cat. Batrac.* pag. 55. — Fatio. *Faune Vetr. Suisse* III pag. 387. — De Betta. *Fauna d' Italia. Rettili ed anfibî* p. 73. — Schreiber. *Herpetologia Europaea* p. 134 (1875). — Leydig. *Anuren Batrachier der deutschen Fauna* pag. 12 (1877).

Pelle molto tubercolosa. — Nessuna grossa ghiandola prominente sulla gamba. — Nessuna ripiegatura sul margine interno del tarso. — Ghiandole auricolari cospicue o sporgenti. — Nessun sacco vocale nei maschi. — Secondo dito delle zampe anteriori più corto del quarto. — Dita delle zampe posteriori semipalmate. Dimensioni medie dell' adulto in Piemonte: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,080, ♀ m. 0,110.

Dimensioni massime	Piemonte		Sicilia	
	maschi	*femmine*	*maschi*	*femmine*
Lunghezza del corpo (dall' apice del muso al naso). .	metri 0,090	metri 0,140	metri 0,170	0,155
» della zampa anteriore (dalla spalla all'apice del 3° dito) . . .	» 0,065	» 0,077		
» della zampa posteriore (dall'ano all'apice del 4° dito)	» 0,125	» 0,160		
» del piede (fino all' estremità del 4° dito)	» 0,059	» 0,074		
» della tibia	» 0,0335	» 0,043		
Larghezza della testa	» 0,029	» 0,042	metri 0,033	0,032

Testa raccolta, depressa posteriormente: la larghezza massima è maggiore della lunghezza, per lo più di un terzo di questa: in alcuni individui vecchissimi talora la larghezza massima è quasi eguale al doppio della lunghezza: minore di un terzo è la differenza nei maschi, minore ancora che non nei maschi è la differenza nei giovani, e ciò per la maggiore acutezza del muso.

Largh. massima	metri 0,045 ♀	Lunghezza	metri 0,023 ♀
»	» 0,045 ♀	»	» 0,030 ♀
»	» 0,030 ♀	»	» 0,020 ♀
»	» 0,027 ♂	»	» 0,022 ♂
»	» 0,012	»	» 0,010
»	» 0,007	»	» 0,006

La testa, infine, è meno lunga della tibia.

Narici poste sempre più vicino all' apice del muso che non all' angolo anteriore dell' occhio.

Bocca fessa fin sotto il margine anteriore delle ghiandole auricolari.

L'angolo che i due archi mascellari superiori fanno fra di loro incontrandosi è più acuto negli individui giovani che non nei vecchi; a mano a mano che l'animale cresce l'angolo si fa più ottuso: ciò tuttavia non succede con egual misura in tutti poichè non è raro trovare fra esemplari di grande mole alcuni in cui l'angolo sopradetto misura 90°,5 ed altri in cui misura solamente 78°,5.

Gli individui di media mole hanno un angolo che varia fra i 68° ed i 75°: nei giovani è sempre un po' più acuto: tuttavia, non trovai nessun individuo in cui quest'angolo fosse minore di 68°.

Possiamo quindi stabilire pel *Bufo vulgaris* due forme distinte, vale a dire:

Bufo vulgaris acutirostris

» *obtusirostris*

Lingua ellittica e col margine posteriore non intaccato.

Occhio di mediana grandezza; negli adulti è collocato più vicino all'apice del muso che non all'angolo delle mascelle; nei giovani si trova a distanze pressochè eguali dall'un punto e dall'altro, e ciò è in rapporto colla maggiore acutezza del muso. Il diametro maggiore è eguale, o un po' minore, ad un quarto della larghezza massima della testa.

Diam. mag. dell'occhio metri	0,010	Larg. mass. della testa metri	0,045
» »	0,0105	» »	0,046
» »	0,007	» »	0,025
» »	0,0045	» »	0,018
» »	0,002	» »	0,0075

La pupilla è allungata orizzontalmente (1).

Timpano di forma variabile assai, ora circolare, ora ellittico, ora poligonale: spesso nascosto dalle granulazioni della pelle, e ciò sopratutto negli individui molto vecchi.

Diamo qui qualche misura del timpano comparandola col massimo diametro dell'occhio; l'unita lunghezza del tronco dà un'idea della mole dell'animale.

Lungh. del tronco m.	0,070	Timp. m.	0,002	Mass. diam. dell'occhio m.	0,0065
»	0,090	»	0,003	» »	0,008
»	0,050	»	0,002	» »	0,0045
»	0,130	»	0,004	» »	0,0010

Quando è visibile, il timpano non oltrepassa mai il margine anteriore delle ghiandole auricolari.

Ghiandole auricolari grosse, prominenti e più sviluppate che non nel *Bufo viridis*, per lo più liscie; talora però, sopra tutto negli individui giovani, si presentano coperte di piccole verruche. Molto numerosi e cospicui sono i pori: ma non mi venne fatto di incontrarli disposti in linee regolari, come si osserva in qualche individuo appartenente al *Bufo viridis*. Il massimo diametro delle ghiandole auricolari si presenta nel maggior numero dei casi eguale alla distanza che è fra il loro

(1) Il De Betta nella sua *Fauna d'Italia. Rettili ed anfibi*, pubblicata in Milano dal Vallardi, nota come carattere di famiglia dei bufonidi la pupilla *verticale*: in vero questi anuri hanno pupilla orizzontale.

margine anteriore e l'apice del muso; negli individui vecchi è talora anche molto più grande.

Massimo diametro metri 0,026; distanza fra il margine anteriore delle ghiandole auricolari e l'apice dei muso metri 0,016.

Il massimo diametro è inoltre nella maggior parte dei casi alquanto lungo più di due volte la massima larghezza. Molto vario è l'aspetto delle ghiandole auricolari in questa specie; si presentano generalmente o traviformi, o fagioliformi. Non sono rari i casi, finalmente, in cui nello stesso individuo esse presentino fra loro un diverso grado di sviluppo.

Le zampe anteriori misurano, in generale, dalla spalla fino all' apice del 3° dito, un po' meno di due volte la lunghezza della tibia: questo rapporto tuttavia è più variabile che non nel *Bufo viridis.*

Zampe anteriori metri	0,045 ♀	Tibia metri	0,077 ♀
» »	0,040 ♀	» »	0,081 ♀
» »	0,032 ♂	» »	0,061 ♂
» »	0,023 ♂	» »	0,045 ♂
» »	0,019 juv.	» »	0,011 juv.
» »	0,013 juv.	» »	0,07 juv.

Il quarto dito è ordinariamente un po' più grande del secondo: la differenza fra l' uno e l' altro non supera, in generale, metri 0,001.

Nel tempo della riproduzione il primo, il secondo, il terzo dito, ed il tubercolo che è alla base del primo vengono ricoperti dalla così detta spazzoletta copulatrice; son rari i casi in cui essa si estenda anche sul quarto dito. I tubercoli plantari anteriori son molto ben sviluppati; troviamo un largo tubercolo circolare nella regione posteriore, ed un altro più piccolo alla base del primo dito.

Le zampe posteriori sono robuste: comparando la loro lunghezza con quella del tronco si trova che quest' ultima (dall'apice del muso all'ano) eguaglia la lunghezza del femore, della tibia e del tarso, e giunge, nel maggior numero dei casi, fin presso al secondo dito: dobbiamo dire tuttavia che il rapporto fra queste due misure non è così costante come nel *Bufo viridis.* Non trovai, però, nessun individuo nè giovane nè vecchio in cui la lunghezza del tronco non raggiungesse almeno il 1° dito, o superasse il terzo.

Tronco metri	0,110	Zampe posteriori metri	0,140
» »	0,115	» »	0,126
» »	0,031	» »	0,049

Nei maschi le zampe posteriori sono in generale più lunghe che non nelle femmine.

La tibia ha sempre una lunghezza maggiore di quella della testa: questa differenza, gioverà notare, è minore nei giovani che non negli adulti.

Tibia metri	0,040	Lunghezza della testa metri	0,030
» »	0,037	» »	0,030
» »	0,033	» »	0,026
» »	0,012	» »	0,009
» »	0,08	» »	0,006

Manca interamente la ripiegatura cutanea che si osserva così evidente sul margine interno del tarso nel *Bufo viridis*. Dirò a questo proposito che non raramente mi venne fatto osservare in individui di media mole (lunghezza del tronco metri 0,053) un certo numero di verruchette disposte in modo da ricordare la ripiegatura sopradetta. (Tav. V fig. 40).

I tubercoli sottoarticolari sono in generale poco cospicui. Il tubercolo del primo cuneiforme è sempre ben sviluppato e per lo più di color bruno. Meno sviluppato è il tubercolo posto alla base del quarto dito, qualche volta anzi manca interamente.

Le palmature sono spesso più ampie nei maschi che non nelle femmine.

Pelle grossa e molto verrucosa: i maschi in generale meno verrucosi che non le femmine: sono piene di verruche, per lo più, le ghiandole auricolari, il vertice della testa, e il margine dei mascellari superiori.

Rispetto alle verruche possiamo stabilire le varietà seguenti:

a) Verruche non molto numerose, ma cospicue, disposte irregolarmente: alcune formano due linee regolari divergenti fra le ghiandole auricolari: parti inferiori con grosse granulazioni; i gruppi verrucosi posti al disotto delle ghiandole auricolari molto sviluppati (comune in tutto il Piemonte).

b) Verruche molto numerose e cospicue con una grossa spina nel mezzo; parti inferiori intieramente coperte di verruche colle loro spine come nella parte superiore.

Questa varietà è meno comune della precedente, tuttavia non è rara nel contorno di Torino, dove si presenta in individui di grande mole. Sopra individui presentanti questa varietà il Bosc fondò il suo *Bufo spinosus*.

c) Verruche molto numerose: alcune delle più grosse disposte in modo da formare due linee dorsali regolari (non rara).

I giovani sono in generale più lisci, e in essi le verruche sono meno cospicue che non negli adulti; le parti inferiori sono granulose. I colori sono molto variabili, meno tuttavia che non nel *Bufo viridis*. Nel tempo della riproduzione, come è a tutti noto, si fanno più vivaci e relativamente più eleganti.

Rispetto al colore, possiamo stabilire le varietà seguenti:

a) Color generale del dorso brunocinereo, o verdastro, sparso di chiazze giallastre e di macchie brune irregolari; striscie brune sotto le parotidi ben evidenti, ma di piccole dimensioni (molto comune in tutto il Piemonte).

b) Color generale del dorso; striscie brune sotto le parotidi sviluppatissime e prolungantisi sui fianchi fin presso le coscie.

Questa varietà non è molto comune in Piemonte, e si osserva per lo più in individui di media mole. Duméril e Bibron descrivono una varietà consimile del Giappone (1), di cui hannosi esemplari nel museo di Torino.

c) Color generale del dorso come nella varietà *a;* macchie brune molto numerose e disposte in modo da formare come una rete: parti inferiori parimente con numerose e cospicue macchie nerognole disposte a mo' di rete.

Questa varietà è poco frequente in Piemonte; ne trovai alcuni individui nei contorni di Saluzzo e di Mondovì.

(1) *Herpét. gén.* VIII pag. 675.

d) Color generale del dorso ferrigno più o meno intenso; macchie brune numerose e irregolarmente disposte.

Si trova questa varietà raramente nelle femmine adulte. Ne trovai parecchi esemplari anche nel contorno di Torino.

I giovani ci presentano colori abbastanza costanti; sono in generale sul dorso di color bruno cinereo chiaro sparso di punticini rossicci; le parti inferiori sono giallastre, e per lo più con numerose macchiette nerognole; le striscie brune sotto le ghiandole auricolari sempre più evidenti e più estese che non negli adulti.

Il rospo comune è abbondantissimo in tutto il Piemonte: nelle calde sere estive questo rospo fa sentire, in ogni parte del contorno di Torino, in mezzo al gracidare clamorosissimo dei ranocchi, il dolce e modulato suo suono.

Acquista talora grandi dimensioni, più che non in Svizzera secondo che si ricava dalle misure date dal Fatio (1), non mai tuttavia quanto in Sicilia. Il volgo delle campagne ha una sorta di rispetto superstizioso non scompagnato da una certa superstiziosa paura per quei rospi che hanno acquistato dimensioni enormi, e, rinunziando alla riproduzione, non si discostano più affatto dal luogo di loro dimora.

Il contadino del Piemonte, del resto, è abbastanza benevolo ai rospi. Alla periferia della città di Torino lungo la cinta della linea daziaria, questi animali hanno a persecutori ferocissmi i monelli, che vi si aggirano oziando giorno e notte, futuri facinorosi che colle crudeltà su questi ed altri animali preparan l'animo ai delitti dell'età adulta. In qualche parte del Canavese i contadini credono che dal corpo di un rospo morto provengano tante minute spine pericolose poi a chi cammini a piedi nudi.

Non è difficile verificare qui sovente i fatti menzionati dagli autori intorno allo ardore sessuale furioso dei maschi al tempo degli amori. Talora dopo l'atto riproduttivo muore la femmina, più spesso muoiono i maschi.

Il Bonelli, che sovente denominava una specie appena trovatala, riservandosi a descriverla più tardi, ciò che non sempre la troppo breve sua vita gli concesse di fare, denominò *Bufo pigmeus* una specie del contorno di Torino, forse quella stessa che il Bonaparte riferisce allo stesso Bonelli colla denominazione di *Bufo minutus*. Nel catalogo dei rettili del museo di Torino è registrato al n. 195 questo *Bufo pigmeus* del Bonelli; ma nelle collezioni questo numero non si trova, nè si trova un qualche esemplare cui si possa applicare. Nelle esplorazioni del contorno di Torino non ho trovato nulla che possa confermare lo asserto del Bonelli.

Bufo viridis (Laurenti)

Rospo smeraldino. — Nomi vernacoli: *Babi*, *Sciatt* (Vigevano).

Rana variabilis. Pall. *Spicileg. zoolog.* VII pag. 1 tab. 6 fig. 1, 2 (1767).
Bufo schreberianus. Laur. *Synops. reptil.* pag. 27, 7 (1768).
Bufo viridis. Laur. l. c. pag. 27, 8.
Rana sitibunda. Pall. *Reise d. versch. Prov. d. russ. Reich.* I pag. 458, 16 (1771).
Rana bufina. Müller. *Zool. elar. prodom.* pag. 293 (1776).

(1) Opera citata.

Rana bufo. Gmel. *Syst. nat.* I pag. 1047 (1790).

Bufo sitibundus. Schneid. *Hist. amphib.* I pag. 225 XV (1799).

Rana viridis. Schaw. *Gener. zool.* III pag. 153 (1802).

Bufo variabilis. Merr. l. c. pag. 183, 12 (1820).

Rana picta. Pall. *Zoogr. rosso-asiat.* III pag. 9 (1831).

Bufo crucigera. Eichw. *Zool. spec. Ross. et Polon.* pag. 167, 3 (1831).

Bufo viridis. Bonap. *Fauna Ital.* et tab. — Dum. et Bib. *Erpét. gén.* VIII pag. 681 (exclus. var. Calamita). — De Betta. *Erpet. Venet.* pag. 313 (exclus. var. Calamita); *Fauna d'Italia. Rettili ed anfibî* pag. 74. — Günther. *Cat. Batrac.* pag. 8. — Fatio. *Faune Suisse* III pag. 410.

Bufo variabilis. Schreiber. *Herpt. Europaea* pag. 138 (1875).

Bufo variabilis. Leydig. *Anuren Batrachier der deutschen Fauna* p. 29 (1877).

Pelle meno tubercolosa che non nella specie precedente. — Nessuna grossa ghiandola prominente sulla gamba. — Una ripiegatura cutanea ben spiccata sul margine del tarso. — Ghiandole auricolari meno cospicue e meno sporgenti che non nella specie precedente. — Un sacco vocale interno nei maschi. — Il secondo dito delle zampe posteriori è più lungo del quarto. — Le palmature delle zampe posteriori alquanto più estese che non nel *Bufo vulgaris*. Dimensioni medie dell'adulto in Piemonte: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,68, ♀ m. 0,078.

Dimensioni massime

	maschi	*femmine*
Lunghezza del corpo (dall'apice del muso all'ano)	metri 0,075	metri 0,082
» della zampa anteriore (dalla spalla all'apice del 3° dito)	» 0,041	» 0,049
» della zampa posteriore (dall'ano all'apice del 4° dito)	» 0,088	» 0,101
» del piede (fino all'apice del 4° dito)	» 0,040	» 0,049
» del tibia	» 0,0265	» 0,029
» della testa	» 0,023	» 0,0275

Testa depressa e meno convessa che non nella specie precedente: la larghezza massima maggiore della lunghezza; per lo più questa è i tre quarti di quella; nei giovani la differenza è minore, avendo generalmente muso più acuto.

Lunghezza metri 0,009	Largh. massima metri 0,011
» » 0,013	» » 0,016
» » 0,020	» » 0,027
» » 0,022	» » 0,029

La testa è, in ultimo, più corta della tibia.

Narici poste più vicino all'apice del muso che non all'angolo anteriore dell'occhio.

La fessura della bocca va poco più in là dell'angolo posteriore dell'occhio.

L'angolo che i due archi mascellari fanno incontrandosi fra di loro varia presso a poco nella stessa guisa in cui varia nel *Bufo vulgaris;* nei giovani è minore che non negli adulti. Anche qui, come nella specie precedente, troviamo negli adulti diversi gradi di acutezza del muso; nei vecchi non ho trovato nessun individuo in cui l'angolo oltrepassasse 90°,5; negli individui di media mole oscilla fra i 70° e

gli 80°; nei giovani fra i 60° e i 70°. Gioverà notare che nemmeno nelle femmine più vecchie non ho trovato mai l'angolo sopradetto così ottuso come nella specie precedente. Anche qui possiamo stabilire negli individui adulti una forma *acutirostris* ed una forma *obtusirostris*.

Lingua ellittica col margine posteriore non intaccato.

Occhio di media grandezza; negli adulti è collocato più vicino alla estremità del muso che non all'angolo delle mascelle; nei giovani invece queste distanze sono per lo più eguali, e qualche volta anzi l'occhio più vicino all'angolo delle mascelle che non all'apice del muso, e ciò è in rapporto colla maggiore acutezza del muso stesso. Il diametro maggiore è un po' minore del terzo della lunghezza dalla testa.

Diam. maggiore dell'occhio	metri 0,007	Lungh. della testa	metri 0,024
»	» 0,006	»	» 0,020
»	» 0,005	»	» 0,015
»	» 0,004	»	» 0,011
»	» 0,008	»	» 0,027
»	» 0,008	»	» 0,032 ♀ (rara)

La pupilla è allungata orizzontalmente.

Timpano non mai molto grande, e in generale sempre più visibile che non nella specie precedente; la sua forma è varia, tuttavia, nella maggior parte dei casi, ellittica, oltrepassa il margine anteriore delle ghiandole auricolari; negli individui giovani è frequentemente invisibile esternamente; è sempre un po' minore della metà del maggior diametro dell'occhio.

Timpano	metri 0,003	Diametro maggiore	metri 0,007
»	0,002	»	» 0,005

Ghiandole auricolari meno prominenti di quelle del *Bufo vulgaris;* di lunghezza variabile è il loro diametro longitudinale, per lo più alquanto più corto della distanza che è fra il margine anteriore delle ghiandole stesse e l'apice del muso; nei giovani sono meno ben sviluppate e si presentano di una lunghezza costantemente più corta che non negli adulti; sono consuetamente più larghe anteriormente che non posteriormente; fra il margine anteriore di esse e il margine posteriore delle palpebre vi è in generale un intervallo liscio, o leggermente rugoso; in molti individui però questo non esiste; nel massimo numero dei casi queste ghiandole sono liscie; in qualche raro individuo si osservano delle verruchette munite di una spina bruna. Molto numerosi i pori, per lo più disposti qua e là a caso, alcuna volta però in modo da formare varie linee regolari.

Le zampe posteriori hanno una lunghezza, misurata dalla spalla all'apice del 3° dito, un po' minore di due volte quella della tibia.

Zampa anteriore	metri 0,030 ♂	Tibia	metri 0,023 ♂
»	» 0,040 ♂	»	» 0,024 ♂
»	» 0,040 ♂	»	» 0,0265 ♂
»	» 0,052 ♀	»	» 0,028 ♀
»	» 0,039 ♀	»	» 0,026 ♀
»	» 0,033 ♀	»	» 0,021 ♀
»	» 0,021 juv.	»	» 0,012 juv.

Il quarto dito è sempre un po' più corto del secondo; questo carattere è assai costante sia nei giovani sia negli adulti; la differenza in generale più spiccata nelle femmine che non nei maschi; in questi non oltrepassa per lo più metri 0,002, in quelle invece non raramente giunge fino a metri 0,003. Il pollice è eguale all'indice nei maschi, un po' più lungo nelle femmine.

Nel tempo della riproduzione il primo, il secondo, il terzo e non raramente un poco anche il quarto dito si trovano coperti da scabrosità di color brunonero costituenti la così detta spazzoletta copulatrice.

Nella zampa anteriore troviamo un tubercolo presso che circolare, molto cospicuo, e che negli individui vecchi prende, come l'apice delle dita, un color bruno. Un altro tubercolo più piccolo e di forma allungata si trova alla base del 1° dito; vario nella mole, cospicuo nei maschi principalmente nel tempo della riproduzione, in cui si riveste esso pure, come il 1°, il 2° e il 3° dito, di scabrosità brunonere.

Zampe posteriori meno tozze che non nella specie precedente; comparando la loro lunghezza con quella del tronco si trova che quest'ultima (dall'apice del muso all'ano) agguaglia la lunghezza del femore, della tibia e del tarso, e giunge nel piede ora presso al secondo, ora presso al terzo dito: non è grande la differenza nei due sessi riguardo a ciò.

Lungh. del tronco	metri 0,064	Lungh. delle zampe posteriori	metri 0,080
»	» 0,065	»	« 0,073
»	» 0,082	»	» 0,101
»	» 0,029	»	» 0,037

La tibia è nei due sessi sempre più lunga della testa; la differenza è minore nei giovani per la maggiore acutezza del muso.

Tibia	metri 0,0265	Lungh. della testa	metri 0,0205
»	0,027	»	» 0,022
»	0,015	»	» 0,012
»	0,0115	»	» 0,010

Ripiegatura cutanea del margine interno del tarso molto evidente e costante; pare tuttavia che nei vecchi si faccia meno prominente; si può già osservare, sebbene non molto sviluppata, negli ultimi stadî della vita di girino. Tubercoli sottoarticolari presenti ma non molto grossi: li ho trovati cospicui in alcune femmine di Sardegna. Tubercolo del primo cuneiforme sempre ben evidente; un secondo tubercolo troviamo alla base del quarto dito; quest'ultimo nei giovani è quasi sempre poco sviluppato, tutti e due poi assumono non raramente, come l'apice delle dita, un colore bruno. Palmature alquanto più estese che non nella specie precedente. Pelle spessa, meno tubercolosa che non nel *Bufo vulgaris;* le verruche meno cospicue, e qualche volta mancanti affatto. Il vertice della testa, il muso, le guancie, le palpebre, meno qualche raro caso, sono lisci. Pare che nel tempo della riproduzione le verruche si facciano più numerose e prominenti. Numerosi sono i pori di cui è cosparsa la pelle; si possono, in generale, osservare in maggior quantità sul vertice del capo, sul muso, sulle guancie e sulle palpebre: sono meno numerosi sul dorso e sui fianchi. La regione inferiore è cosparsa di molte granulazioni assai cospicue, specialmente sulle

coscie; nelle femmine adulte, e piùraramente anche nei maschi, si continuano anche sulle gambe; negli individui giovani e di media età, le grandi sono liscie.

Possiamo per rapporto alle verruche stabilire le varietà seguenti:

a) Pelle liscia; qualche verruca nella regione lombare; parti inferiori granulose; non rara.

b) Verruche numerose, ma non molto cospicue, alcune disposte in modo da formare due linee che partendo un po' sotto alle ghiandole auricolari si dirigono in basso e si continuano sui fianchi (Tavola V fig. 36).

Questa varietà non è molto comune in Piemonte; ne ho trovato individui nei contorni di Saluzzo, di Torino, di Vigevano.

c) Il dorso ed i fianchi cosparsi di verruche di grandezza fra loro pressochè eguali munite di una piccola spina nera nel mezzo. Comune, specialmente nei maschi.

d) Verruche numerose e cospicue; granulazioni della parte inferiore molto sviluppate; le zampe anteriori e le posteriori pure coperte di grosse e numerose verruche; non rara nei maschi vecchi.

I giovani hanno in generale la pelle più liscia che non gli adulti: si notano in essi, non infrequentemente, due linee regolari formate da verruchette liscie che ricordano quelle descritte per la varietà *f*. Le parti inferiori sono pure meno granulose che non negli adulti.

I colori sono molto più variabili di quelli del *Bufo vulgaris;* per lo più abbiamo un fondo chiaro di tinte diverse con macchie brune o verdi più scure; vi ha una macchia generalmente ben evidente in forma di V molto aperto sul muso fra gli occhi; un'altra macchia abbastanza costante si ha pure nella regione inferiore ed esterna del timpano, il quale non raramente è tutto ricoperto da essa; meno costanti sono le macchie sulle palpebre; spesso le macchie sono marginate di bianco e sparse di punticini di tinta più carica; i fianchi sono macchiati come il dorso, le macchie tuttavia sono più piccole; le parti inferiori sono di color biancastrogiallognolo e per lo più senza macchie; la gola poi sempre immacolata. I giovani sono in generale più costanti nelle tinte e nella disposizione delle macchie che non gli adulti; le macchie sono più numerose e relativamente più cospicue; più numerosi e vivaci sono pure i punticini rossi.

Possiamo negli adulti, avuto riguardo ai colori ed alla disposizione delle macchie, stabilire le varietà seguenti:

a) Tinta fondamentale grigia, più o meno intensa a seconda delle stagioni; macchie verdi non molto numerose e cospicue, numerosi i punticini rossi sparsi su tutto il corpo.

Questa varietà non è rara specialmente fra i maschi dei contorni di Saluzzo, Cuneo, Vigevano, Mondovì.

b) Le macchie sopra la regione della nuca incontrantisi in modo da formamare grossolanamente una croce di sant'Andrea; color fondamentale tendente al rosso.

Questa varietà è molto affine a quella che l' Eichwald descrisse col nome di *Bufo crucigera;* non è molto comune in Piemonte: ne trovai alcuni individui nei contorni di Vigevano e di Torino.

c) Color fondamentale giallognolo più o meno intenso, più o meno puro secondo

le stagioni, macchie di color verde grandi e numerose disposte regolarmente: verruche più o meno numerose; comunissima in tutto il Piemonte sia fra i maschi sia fra le femmine.

d) Color fondamentale bruno grigio uniforme; nessuna macchia sul dorso, sui fianchi, sulle zampe anteriori e sulle coscie; poche e poco distinte sulle gambe posteriori; non rara fra i maschi specialmente dei contorni di Torino (Rivoli, Venaria reale).

e) Color fondamentale come nella varietà precedente; macchie piccole e numerosissime; non rara in tutto il Piemonte.

f) Color fondamentale grigio o giallognolo; macchie numerose; presenza di una linea dorsale chiara, meno ampia e meno regolare che non quella del *Bufo calamita*. Non rara in Piemonte specialmente fra i maschi.

g) Color fondamentale grigio, o giallognolo; macchie cospicue e disposte in modo da formare due linee non interrotte sul dorso; verruche disperse in due linee regolari sui fianchi.

Questa varietà non è molto comune in Piemonte; fino ad ora non ne ho trovato che qualche individuo nei contorni di Torino, di Vigevano e di Saluzzo.

Sebbene non tanto comune quanto il precedente, questo rospo, che i contadini in generale non distinguono dall'altro, è pur esso molto comune in Piemonte, e più variabile nei suoi colori; ma tuttavia in modo che non lascia riconoscere una qualche norma del suo variare da una regione ad un' altra. Pare più sensitivo rispetto alle variazioni atmosferiche, e impressionabile dal caldo e dal freddo, e non acquista mai le enormi dimensioni cui arriva non raramente il rospo comune.

Hyla viridis (Laurenti)

Raganella. — Nomi vernacoli: *Ranet de' San Giovan* (Biella), *Ranin de San Gioan* (Vigevano), *Rana martina*, *Rana dë San Martin* (contorno di Torino).

Rana dryphytes. Rondel. *Pisc. palustr.* lib. 1 cap. VII pag. 225 (1554).
Rana arborea. Schwenkf. *Theiriotroph.* pag. 153 (1605).
Ranunculus viridis. Gesner. *Quadrup. ovip.* pag. 49 (1617).
Rana hyla. Linneo. *Syst. nat.* I pag. 213, 15 (1758).
Rana viridis. Linneo. *Fauna suec.* pag. 102, 280 (1761).
Hyla viridis. Laur. *Synops. reptil.* pag. 33, 26 (1768).
Calamita arborea. Schneid. *Hist. amphib.* I pag. 20, 1 (1830).
Dendrohyas arborea. Tschudi. *Classificat. d. Batrach.* pag. 74, 12 (1839).
Hyla viridis. Bonaparte. *Fauna Ital.* et tab. — Dum. et Bib. *Erpét. gén.* VIII pag. 581. — De Betta. *Erpet. Venet.* pag. 279. — Fatio. *Faune Suisse* III pag. 423. — De Betta. *Fauna d'Italia. Rettili ed anfibî* pag. 61. — Schreiber. *Herpetologia Europaea* pag. 106.
Hyla arborea. Leydig. *Anuren Batrachier der deutschen Fauna* pag. 94 (1877).

Estremità delle dita tanto delle zampe anteriori quanto delle posteriori ingrossate a mo' di dischi. — Parotidi mancanti. — Pelle liscia nella parte dorsale e granulosa nelle parti inferiori. — Una piccola membrana alla base delle dita delle zampe anteriori. — Dita delle zampe posteriori largamente palmate. — Lingua quasi circolare leggermente intaccata nel margine posteriore. — Un grande sacco vocale

sotto la gola nei maschi. Dimensioni medie: Lunghezza del tronco ♂ m. 0,037, ♀ m. 0,048.

Dimensioni massime.

	maschio	*femmina*
Lunghezza del corpo (dall'apice del muso all'ano)	metri 0,039	metri 0,0505
» » della zampa anteriore (dalla spalla all'apice del 3° dito)	» 0,025	» 0,031
» » della zampa posteriore (dall'ano all'apice del 4° dito)	» 0,055	» 0,069
» » del piede (fino all'apice del 4° dito).	» 0,027	» 0,029
» » della tibia	» 0,017	» 0,020
» » Larghezza della testa	» 0,013	» 0,014

Testa corta: la sua larghezza è un po' meno di un quarto minore della lunghezza.

Lunghezza metri 0,014	Larghezza metri 0,012
» 0,013	» 0,012
» 0,012	» 0,010
» 0,008	» 0,007

questa differenza nei giovani è minore che non negli adulti avendo essi il muso più aguzzo.

Paragonata colla tibia la testa è sempre più corta: in qualche caso la tibia è del doppio più lunga.

Narici molto lontane dall'occhio, e quasi terminali.

Lo squarcio della bocca giunge costantemente fin sotto alla metà del timpano.

I denti del vomere sono poco numerosi e disposti in due gruppi di forma e dimensioni irregolari; in molti casi la forma è ellittica, sono collocati fra gli orifizî nasali, in modo da formare fra loro un angolo ora più ora meno evidente; la loro lunghezza varia fra m. 0,001 e m. 0,0015.

Nei giovani spesso questi gruppi di denti mancano affatto; nei vecchi non è raro trovare individui privi dell'uno o dell'altro gruppo di denti.

Citerò inoltre un caso in cui i due gruppi di denti si sono fusi insieme e ne costituiscono uno solo in mezzo agli orifizî nasali (Tav. V fig. 4).

Lingua quasi circolare, libera almeno per un terzo, e leggermente intaccata nel margine posteriore.

Gioverà osservare che questa intaccatura è variabile nelle sue dimensioni negli adulti; in alcuni anzi manca interamente: nei giovani è relativamente ben sviluppata.

L'angolo che fanno fra loro incontrandosi gli archi mascellari è in questa specie abbastanza costante; molto più costante certamente che non nel *Bufo vulgaris* e nel *Bufo viridis*; non si nota neppure una grande differenza a questo riguardo fra i giovani e i vecchi.

Esso varia fra i 60° ed i 75°; non l'ho trovato mai nè minore di 60°, nè maggiore di 75°.

Occhi grandi e prominenti, collocati, in generale, ad eguale distanza dall'apice

del muso e dall'angolo delle mascelle: negli individui in cui il muso è più acuto la distanza fra l'occhio e l'apice del muso è maggiore dell' altra. Paragonando il diametro maggiore dell'occhio colla larghezza della testa, troviamo che esso è circa un terzo di quest'ultima.

Diam. maggiore dell'occhio	metri 0,004	Larghezza della testa	metri 0,014
»	» 0,005	»	» 0,0155
»	» 0,0045	»	» 0,016
»	» 0,002	»	» 0,0065

Il timpano è sempre ben sviluppato e visibile esternamente, di forma abbastanza costante, per lo più circolare; esso è eguale alla metà od ai due terzi del massimo diametro.

Timpano	metri 0,0025	Massimo diam. dell'occhio	metri 0,0045
»	0,002	»	» 0,003
»	0,0015	»	» 0,003
»	0.001	»	» 0,0025

Nei giovani il timpano è relativamente meno ben sviluppato che non negli adulti.

Le zampe anteriori sono nei due sessi presso che eguali alla lunghezza del piede.

Zampa anteriore	metri 0,031	Piede	metri 0,030
»	0,026	»	0,030
»	0,0215	»	0,023
»	0,017	»	0,0145

Paragonate colla tibia si ha un rapporto molto variabile.

Zampa anteriore	metri 0,015	Tibia	metri 0,0115
»	0,0235	»	0,017
»	0,009	»	0,012

Le dita sono riunite alla base da una membrana, varia di mole, poco evidente nei giovani, ma sempre di piccole dimensioni (Tav. V fig. 1).

Ben evidenti sono i tubercoli sottoarticolari: si nota nella parte posteriore della pianta dei piedi anteriori una specie di rigonfiamento o tubercolo più o meno sviluppato. Si sviluppa di più nei maschi al tempo della riproduzione, e si riveste, come diremo fra breve, esso pure, come nelle altre specie, di scabrosità costituenti la così detta spazzoletta copulatrice.

La presenza delle scabrosità sopradette nei maschi al tempo della riproduzione, analoghe a quelle che si osservano in molte altre specie di anfibî anuri, sfuggì fino ad ora alle osservazioni dei zoologi. In un recentissimo lavoro sopra queste scabrosità il Lataste (1) ha in proposito le seguenti parole: « ..... Sur ces quatorze espèces, quatre: *Hyla viridis, Alytes obstetricans, Pelobates fuscus* et *Pelobates cultripes*, ne possèdent pas de brosses copulatrices.

« La rainette n'en avait pas besoin, les pelotes visqueuses qui terminent ses doits lui rendant avec avantage les mêmes services..... »

Le mie ricerche intorno a ciò mi hanno dimostrato la esistenza delle scabrosità in questione anche nei maschi dell'*Hyla viridis*.

(1) Lataste, *Mémoire sur les brosses copulatrices des batraciens anoures*. Annales des sciences naturelles, 6.me série vol. III tav. 11.

Queste scabrosità ricoprono un po' della parte dorsale, quasi tutta la parte laterale del pollice, e si estendono più o meno nella parte inferiore di esso rivestendo quasi completamente il tubercolo ellittico che si trova alla sua base.

Il colore di queste scabrosità è per lo più giallognolo o roseo, in qualche caso leggerissimamente bruniccio.

Facendo delle sezioni perpendicolari all'asse del dito ed esaminandole al microscopio noi vediamo che la forma delle papille ha molta rassomiglianza con quelle della *Rana esculenta* Linn.; sono tuttavia un po' più tozze: relativamente enormi sono poi le ghiandole mucose. La Tavola V fig. 2 rappresenta schematicamente una dalle sezioni sopra nominate.

La mole delle papille è alquanto variabile non solo nei diversi individui ma in uno stesso individuo a seconda del punto in cui la sezione viene fatta; le papille di maggiori dimensioni sono in generale riunite nella parte media della spazzoletta.

Zampe posteriori allungate e gracili; tibia più lunga della testa; comparando la lunghezza del tronco colla lunghezza nelle zampe posteriori troviamo che quella giunge, negli adulti generalmente fino alla metà del tarso, nei giovani giunge ora fino al tubercolo del primo cuneiforme ora si arresta al tallone; nessun individuo poi ho trovato in cui o fosse inferiore a questo o superiore a quello.

La ripiegatura della pelle lungo il margine intero-inferiore del tarso assai cospicua, anche nei giovani.

Il tubercolo collocato alla base del quarto dito nei giovani per lo più, e qualche volta anche negli adulti, manca in generale sempre poco visibile; molto ben sviluppato è sempre il tubercolo del primo cuneiforme, che ci si presenta per lo più di forma ellittica.

Tronco metri	0,038	Lungh. delle zampe posteriori metri	0,062
»	0,047	»	» 0,064
»	0,022	»	» 0,034
»	0,020	»	» 0,027

Le palmature sempre molto ben sviluppate.

I rigonfiamenti in forma di dischi ben evidenti e di un diametro quasi eguale a quello del timpano: questi rigonfiamenti si possono di già scogere nei girini stessi in uno stadio di sviluppo relativamente non molto inoltrato.

La pelle è nelle parti superiori liscia; nelle inferiori più o meno ricoperta di grosse granulazioni; ci presenta varie ripiegature. Una prima ripiegatura piglia origine dall'angolo posteriore dell'occhio, passa sopra il timpano, e discendendo alquanto in basso si prolunga più o meno sui fianchi; abbiamo una seconda ripiegatura sulla articolazione radiocarpea, ma è varia assai nello sviluppo e meno costante della precedente; una ripiegatura trasversale, finalmente, troviamo nelle parti inferiori, che va da una ascella all'altra.

Le granulazioni, come abbiamo già detto, possono variare sia nel numero sia nella mole: tuttavia questa è la specie fra quelle del Piemonte in cui la pelle è meno, per questo rispetto, variabile.

I colori di questa specie sono variabili non solo nei diversi individui, ma anche in uno stesso individuo fino ad un certo punto a seconda delle condizioni in cui si trova. Si è forse esagerata la sensitività di questo animale al variare della temperatura,

della umidità, della luce: è un fatto tuttavia che questa specie pzesenta in grado più eminente che non le altre da noi considerate la facoltà di mutare a seconda delle condizioni esterne i colori della propria pelle. Questo grado di sensitività, a parer mio, è molto vario nei diversi individui; gli uni prediligono un dato colore, gli altri un altro: citerò in proposito qualche fatto.

Verso il principio di maggio del corrente anno (1876) ricevetti da Saluzzo un sacchetto contenente una cinquantina di raganelle. Quando lo apersi vidi, contrariamente alla mia aspettazione, che molto vario era il colore dei diversi individui: alcuni erano di un bel verde erba, altri grigiastri con macchie verdi irregolari, e più o meno numerose, altri infine di color brunointenso con macchie di un verdecupo e con riflessi cuprei elegantissimi; dopo un'ora circa che erano esposte alla luce, la maggior parte aveva preso un color verde sbiadito: alcune però continuavano a presentare i toni grigi e bruni.

Per tutto il tempo che io le tenni vive queste ultime non deposero mai compiutamente la loro tinta bruna, sebbene io cercassi di metterle nelle condizioni più differenti. Le altre invece, quando erano lasciate per qualche tempo nell'oscurità, assumevano una tinta o grigiastra o verdecupo intensa; l'umidità produceva, sebbene in modo meno spiccato, gli stessi effetti. L'azione diretta dei raggi del sole e gli innalzamenti di temperatura rischiaravano in generale le tinte; quelle raganelle che prima erano di color verde carico diventavano di un color verde gialliccio chiaro, quelle che erano di color bruno intenso pigliavano una tinta grigiastra più o meno chiara, ma, ripeto, non ho veduto mai in queste mie osservazioni nè quelle di color bruno passare al verde, nè quelle verdi assumere la tinta bruna. Per non andare per le lunghe esporrò qui le principali conclusioni a cui io sono giunto, conclusioni che concordano in massima parte con quelle cui giunse pure il Fatio.

1. L'attitudine di cambiare il colore della pelle è varia nei varî individui.

2. Il nutrimento, e le altre condizioni fisiologiche dell'animale, hanno nella intensità di questi mutamenti grande azione.

3. Si nota in certi individui una speciale tendenza ad assumere un colore determinato.

4. Il caldo, la luce, l'asciutto rischiarano le tinte; l'ombra, l'umidità e il freddo le oscurano.

5. Il calore del mezzo in cui l'animale si trova non ha in tali mutamenti grande azione.

Sono necessarî ulteriori studî in proposito, imperocchè non si ha ancora un concetto soddisfacente delle cause che producono questi fenomeni.

Sul colore fondamentale del dorso che, come abbiamo veduto, è assai variabile, spiccano varie macchie brune o nerastre di forma e di posizione abbastanza costanti. Abbiamo una piccola linea nera marginata di chiaro che dall'occhio va alle narici, e una striscia bruna o neraviolacea marginata nella sua parte superiore di bianco argentino, o di giallodorato, che prende origine dall'angolo posteriore dell'occhio, ricopre il timpano e si dirige in basso percorrendo tutto il fianco. Incontriamo finalmente sulla estremità anteriore e sulle posteriori varie piccole macchie brune, marginate e in qualche caso punteggiate di bianco o di giallastro. Rosee si presentano in generale le estremità delle dita.

Rispetto al colore, alla forma e alla disposizione delle sopradette macchie, possiamo stabilire le varietà seguenti:

a) Il tratto nero che dall'occhio va alle narici mancante affatto.

Questa varietà è comunissima principalmente nei contorni di Saluzzo.

b) Macchia temporale piccolissima e in molti casi quasi nulla.

Questa varietà è frequente nei contorni di Saluzzo, nel restante del Piemonte è meno comune.

c) Striscia dei fianchi di un color brunovioletto molto intenso e molto larga.

Si trova in tutto il Piemonte, ma non è comune in nessuna parte.

d) Gola di un color verde analogo a quello del dorso.

e) Parti superiori con numerose macchie e punteggiature brune o violacee o verdecupo: non rara fra le Hyle delle regioni meridionali del Piemonte, Saluzzo, Cuneo. In varî musei questa varietà si trova sotto il nome di *Hyla sarda* Bonelli. Questa varietà non è rara specialmente nelle femmine.

I giovani presentano i colori degli adulti per lo più in un grado meno intenso; il loro verde tende di più al giallognolo, e qualche volta all' azzurro; le macchie sono meno ben evidenti: meno sviluppata che non negli adulti è in essi la facoltà di cambiare colore col variare delle condizioni esterne; mancano per lo più della linea nera che dall'occhio va alle narici.

L'*Hyla viridis* dà opera alla riproduzione dalla seconda metà di aprile a tutta la prima metà di giugno; di questo svelto e grazioso animaletto, caro ai fanciulli, e benveduto anche dai contadini, il giorno sedici di agosto del corrente anno (1876), trovai in una acquicella in Vanchiglia (contorno di Torino) buon numero di girini che ancora avevano ben fuori le branchie. Questo fatto eccezionale mi fece pensare a quello che si credette dell' *Alytes obstetricans* (1) e che par vero pel *Pelodytes punctatus* (2) di una seconda riproduzione in autunno, dopo la prima in primavera. È più probabile che si tratti di individui i quali accidentalmente abbiano incominciato a dare molto tardi opera alla riproduzione.

Nella descrizione di questa specie il De Betta (3) dice che le zampe anteriori hanno dita affatto libere, e che le ova vengono emesse a coroncina. Ciò non è: le dita anteriori sono collegate alla base da una membranella molto meno sviluppata di quella che collega le dita delle zampe posteriori, ma pure visibile (Tavola V fig. 1, 5) e che il Fatio, descrittore diligentissimo, il Duméril e lo Schreiber, per non citare altri, non tralasciano dal menzionare; e le ova sono a mucchi come nelle rane.

Conchiudo ora intorno a tutto quello che sono venuto esponendo, col dire che impresi e proseguirò quanto avrò forze questi studî per la fermissima persuasione che ho, contro il parere di qualche moderno e segnatamente del Van der Hoeven, della somma importanza delle faune locali.

(1) Arthur de l'Isle, *Mémoire sur les mœurs et l'accouchement de l'Alytes obstetricans*. Annales des sciences natur. 6me série t. III, 1876.

(2) Thomas, *Note sur la génération du Pélodite ponctué* etc. Annales des sciences naturelles, 4.me série t. 1 n. 5.

(3) *Erpetologia delle Provincie Venete* pag. 280; *Fauna d'Italia. Rettili ed anfibî* pag. 61.

Intanto parmi aver fatto cosa non al tutto inutile mettendo in chiaro principalmente i fatti seguenti:

La distribuzione geografica, tanto orizzontale quanto verticale, degli anfibî anuri in Piemonte.

Il numero e la copia loro secondo le specie nelle varie regioni.

Le dimensioni diligentemente misurate.

I caratteri differenziali più importanti dei girini e degli adulti nelle varie età.

Gli animali che servono di cibo alle principali specie.

Il materiale alimentare che alcune specie porgono all'uomo in Piemonte.

Il calendario sì pei girini come per gli adulti.

Il variare dello sviluppo a seconda di certi agenti esterni e sovratutto della luce (1).

L'albinismo del girino della *Rana temporaria* Linn.

La presenza della spazzoletta copulatrice nei maschi al tempo della riproduzione nella *Hyla viridis* Laur.

Molte persone cortesi, colleghi naturalisti, studenti di scienze naturali e di medicina, mi diedero aiuto nelle mie ricerche; non ne scrivo i nomi perchè la lista ne verrebbe troppo lunga, ma li prego di voler gradire i miei ringraziamenti. Ma un nome non devo tacere, quello del signor Lorenzo Camerano, studente del terzo anno del corso di scienze naturali, il quale non solo fece tutti dal vero i disegni annessi a questo lavoro, ma mi accompagnò in un grandissimo numero delle mie escursioni, fece escursioni da sè sempre a mio benefizio, e diede pazientissima ed intelligente opera alle misure, alle comparazioni, ed a tutte quelle operazioni, che non hanno merito se non che quando vengon fatte coscienziosamente, e delle quali il valore può solo apprezzare chi abbia data assidua e speciale opera a tal sorta di studî.

(1) Il sig. Schnetzler, nel Bull. Soc. Vaud. XIII pag. 273-275 ha pure trattato dell'influenza della luce sullo sviluppo dei girini delle rane. Non ho potuto, malgrado tutte le ricerche, consultare questo lavoro.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. I. — Carta indicante le regioni in cui, rispetto agli anfibî anuri, vien diviso il Piemonte.

Il color azzurro indica la 1ª regione, o delle risaie: il verde la seconda o delle colline: il porporino la 3ª: il violetto la 4ª: il giallo indica le località nelle quali venne trovato il *Pelobates fuscus* Wagler: il color rosso mattone quelle nelle quali venne trovata la *Rana agilis* Thomas.

» II. — Carta dei contorni di Torino (per la spiegazione dei colori vedi i segni convenzionali).

» III. — Carta indicante la distribuzione verticale degli anfibî anuri.

Rana esculenta Linn.

Fig. 1 — Girino ingrandito visto dalla parte dorsale.
» 2,7 — Femmina.
» 3 — Maschio.
» 4 — Girino ingrandito visto dalla parte ventrale.
» 5 — Girino ingrandito presentante la linea dorsale chiara.
» 6,8 — Giovani (varietà).

Tavola II.

Rana esculenta Linn.

Fig. 1,2,4,5 — Giovani (varietà).
» 3 — Zampe posteriori viste dalla parte inferiore (varietà).

Rana temporaria Linn.

Fig. 6,7 — Varietà.
» 8,15,19 — Girini a diverso grado di sviluppo che presentano il fenomeno dell'albinismo.
» 8 — ingrandito.
» 9 — Girino ingrandito visto dalla parte ventrale.
» 10 — Girino ingrandito visto dalla parte dorsale.
» 11 — Femmina.
» 12,13,14.20 — Varietà.
» 16,17 — Giovani (appena compiuta la metamorfosi).
» 18 — Giovane.

Tavola III.

Rana agilis Thomas.

Fig. 2 — Parte ventrale di un maschio.
» 9 — Femmina vista dalla parte ventrale.
» 11 — Maschio.
» 13 — Femmina vista dalla parte dorsale.

Pelobates fuscus Wagler.

Fig. 6 — Giovane.
» 18,16,24,4 — Girini a diverso grado di sviluppo.
» 21 — Maschio.

Hyla viridis Laur.

Fig. 1,7,15 — Girini a vario grado di sviluppo, ingranditi.
» 3,5 — Giovani.
» 8,14 — Girini ingranditi.
» 17 — Girino di grandezza naturale.
» 10,12,20,22 — Adulti.
» 19,23 — Porzioni di pelle per indicare i varî colori e la varia disposizione delle macchie che in circostanze particolari la pelle dell'*Hyla viridis* può prendere.

Tavola IV.

Bufo viridis Laur.

Fig. 1,18 — Maschi.
» 2,5,10,6 — Girini a vario grado di sviluppo, ingranditi.
» 8 — Giovane.

Bufo vulgaris Laur.

Fig. 4. — Femmina.
» 9,11,3,13,19 — Girini a vario grado di sviluppo.
» 14,7 — Femmine.
» 15 — Giovane (appena compiuta la metamorfosi).
» 16 — Adulto.
» 17,12 — Giovani.

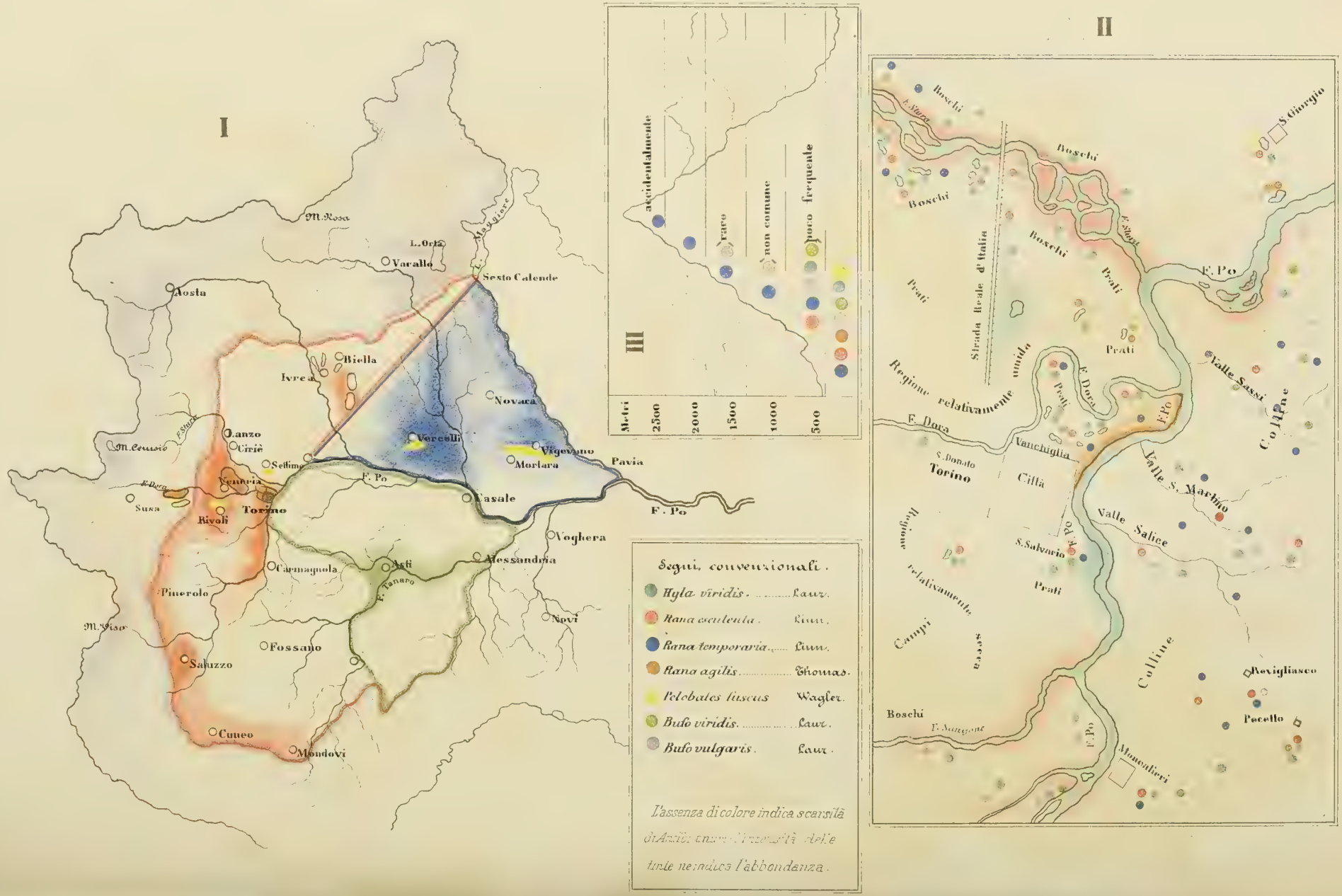
Tavola V.

Fig. 1 — Zampa anteriore *a* spazzoletta copulatrice.
» 2 — Sezione della pelle nella regione della spazzoletta, *a* papille, *b* ghiandole cutanee.

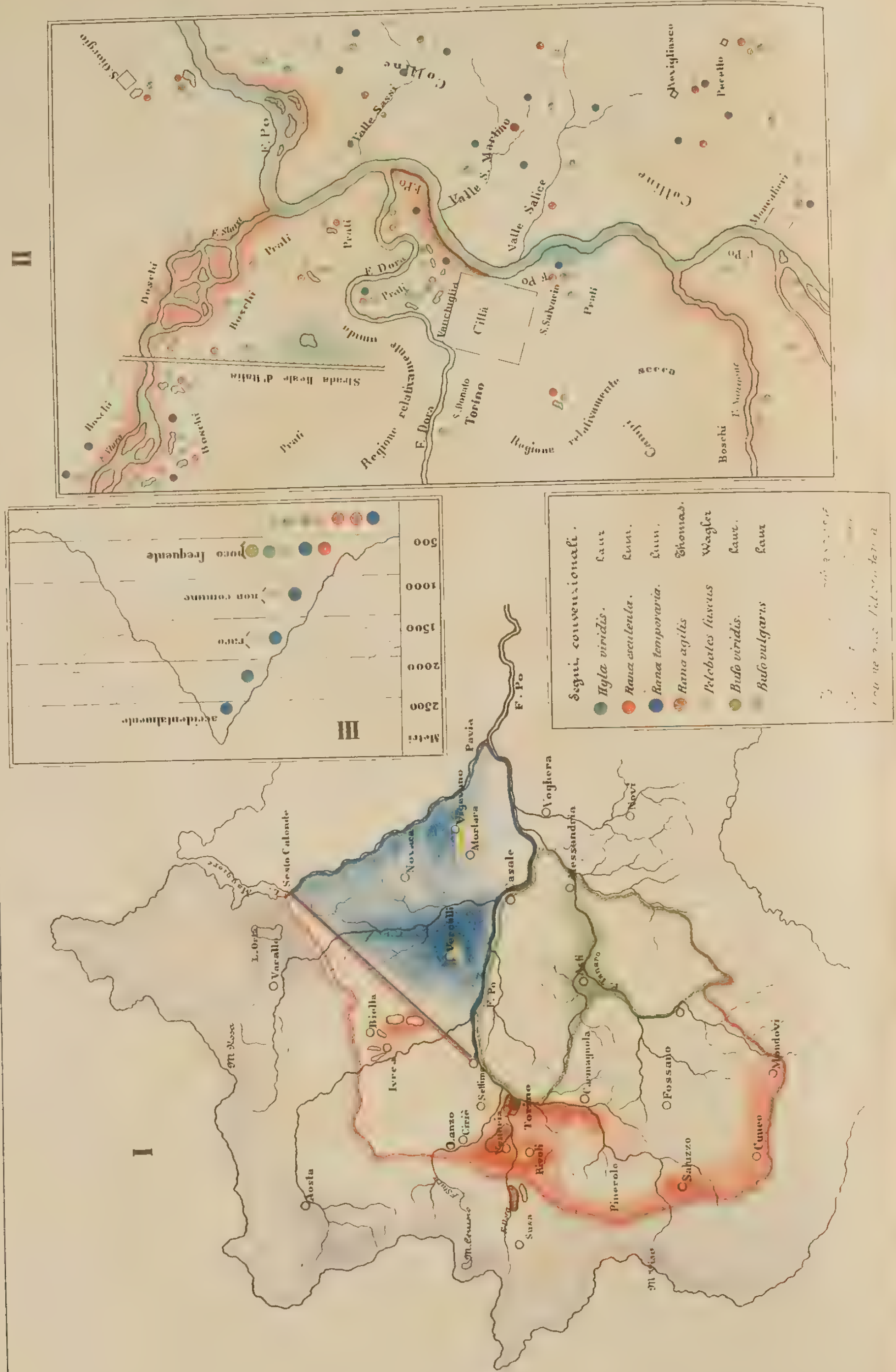
Fig. 3,4 — Denti.
» 5—Zampa anteriore,*a* membrana interdigitale.
» 6,7,8,9 — *Rana esculenta* Linn.
» 10,11,12,13,18 — *Rana agilis* Thomas.
» 14,15 — *Rana temporaria* Linn.
» 16 — Girino di *Hyla viridis* Laur.
» 17 — » » *Rana esculenta* Linn.
» 21 — Zampa posteriore di *Pelobates fuscus* Wagler, *a* tubercolo.
» 22 — Lingua di *Rana esculenta* Linn.
» 23 — Zampa posteriore di *Hyla viridis* Laur.
» 24 — Girino di *Pelobates fuscus* Wagler.
» 25 — Ova di *Bufo vulgaris* Laur.
» 26 — Girino di *Bufo vulgaris* Laur.
» 27 — Ova di *Pelobates fuscus* Wagler.
» 28,20,19 — Girini di *Pelobates fuscus* Wagler per mostrare la disposizione delle cripte.
» 29 — Girino di *Bufo vulgaris* Laur.
» 30 — Lingua di *Bufo vulgaris* Laur.
» 31 — Girino di *Bufo vulgaris* Laur.
» 32 — Membrana caudale di *Rana temporaria* Linn.
» 33 — *a* sacco vocale di *Hyla viridis* Laur.
Fig. 34 — *a* sacchi vocali di *Rana esculenta* Linn.
» 35 — Girino di *Rana temporaria* Linn.
» 36 — *Bufo viridis* Laur. *a* verruche.
» 37 — Girino di *Bufo viridis* Laur.
» 38 — Zampa posteriore di *Bufo viridis* Laur. *a,b* tubercoli.
» 39 — Zampa posteriore di *Bufo viridis* Laur. *a* ripiegatura cutanea.
» 40 — Zampa posteriore di *Bufo vulgaris* Laur. *a* verruche.
» 41 — Zampa anteriore di *Bufo viridis* Laur. *a* spazzoletta copulatrice.
» 42— *Pelobates fuscus* Wagler, *a* gruppi didenti.
» 43 — Zampa anteriore, *a,b* tubercoli.
» 44 — *Pelobates fuscus* Laur. ♂, *a* ghiandola omerale, *b* verrucchette brachiali.
» 45 — Giovane, *a* verruche.
» 46 — Zampa posteriore di *Bufo vulgaris* Laur.
» 47 — » anteriore » »
» 51,52,57,58,59 — *Bufo viridis* Laur.
» 53 — *Pelobates fuscus* Wagler. Lingua.
» 54,86,56,48,49,50 — *Bufo vulgaris* Laur.

INDICE

Introduzione . . . . . pag. 1019
Riproduzione . . . . . » 1035
Descrizione . . . . . » 1058
Rana esculenta Linn. . . . . » 1059
» *temporaria* Linn. . . . . » 1068
» *agilis* Thomas . . . . . » 1074
Pelobates fuscus Wagler. . . . . » 1077
Bufo vulgaris Laur. . . . . » 1080
» *viridis* Laur. . . . . » 1085
Hyla viridis Laur. . . . . » 1090


I
M. Rosa
L. Orta
Varallo
Lago Maggiore
Sesto Calende
Aosta
Biella
Ivrea
Novara
Lanzo
Ciriè
M. Cenisio
F. Stura
Vercelli
Vigevano
Mortara
Pavia
Settimo
F. Dora
Venaria
F. Po
Casale
Susa
Rivoli
Torino
F. Po
Voghera
Carmagnola
Asti
Alessandria
F. Tanaro
Pinerolo
M. Viso
Novi
Fossano
Saluzzo
Cuneo
Mondovì
III
accidentalmente
raro
non comune
poco frequente
Metri
2500
2000
1500
1000
500
Segni convenzionali.
Hyla viridis. ..... Laur.
Rana esculenta. Linn.
Rana temporaria. ..... Linn.
Rana agilis ..... Thomas.
Pelobates fuscus Wagler.
Bufo viridis. ..... Laur.
Bufo vulgaris. Laur.
L'assenza di colore indica scarsità di Anfibi; entro l'area delle tinte ne indica l'abbondanza.
II
Boschi
F. Stura
S. Giorgio
Strada Reale d'Italia
Prati
F. Po
Regione relativamente umida
F. Dora
Valle Sassi
Colline
Vanchiglia
S. Donato
Torino
Città
Valle S. Martino
Valle Salice
S. Salvario
Regione relativamente asciutta
Campi
Sterra
Colline
Revigliasco
Pecetto
Boschi
F. Sangone
Moncalieri

Torino, Lit: Fᵘˡ Doyen



2
3
4
5
6
7
8

... erano dis. dal vero

6
7
8
14
21

5
6
7
12
17
22
23

Lorenzo Camerano dis. dal vero

Torino Lit. F.lli D.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

5
7
6
12
11
15
17
18

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Fig. 1

Fig. 2

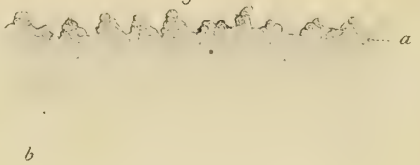


Fig. 3

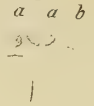


Fig. 4

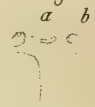


Fig. 10

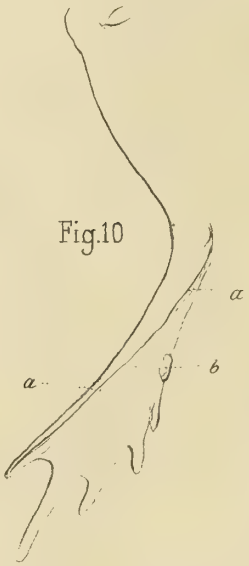


Fig. 11

Fig. 12

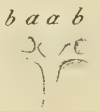


Fig. 13

Fig. 14

Fig. 18

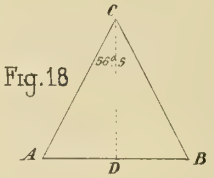


Fig. 19

Fig. 20

Fig. 21

Fig. 22

Fig. 23

Fig. 29

Fig. 30

Fig. 31

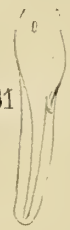


Fig. 32

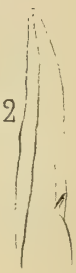


Fig. 37

Fig. 38

Fig. 39

Fig. 45

Fig. 44

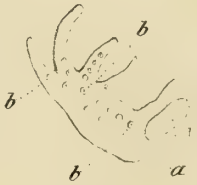


Fig. 53

Fig. 46

Fig. 54

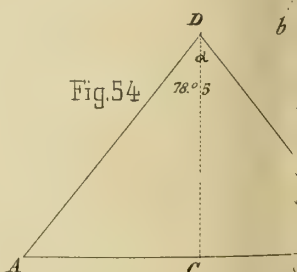


Fig. 6.

Fig. 7.

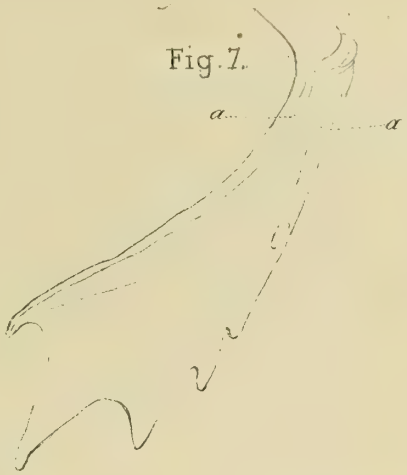


Fig. 8

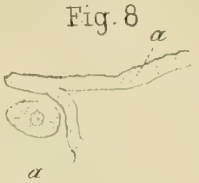


Fig. 9.

Fig. 16

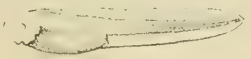


Fig. 17

Fig. 24

Fig. 25

Fig. 28.

Fig. 26

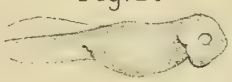


Fig. 27.

Fig. 34

Fig. 36

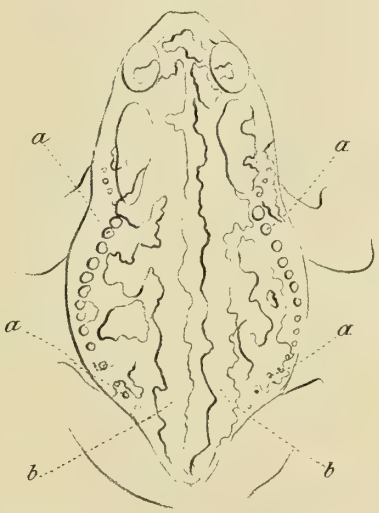


Fig. 35

Fig. 43.

Fig. 41

Fig. 42

Fig. 48

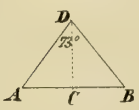


Fig. 49

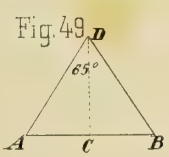


Fig. 50

Fig. 51

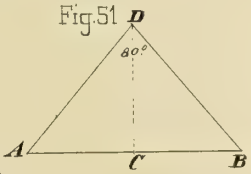


Fig. 52

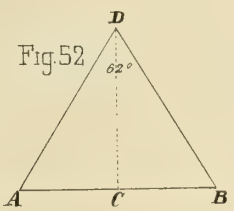


Fig. 55

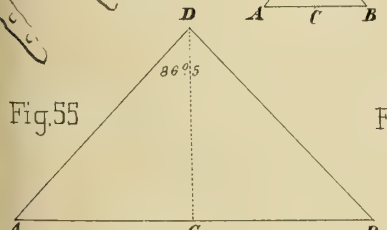


Fig. 56

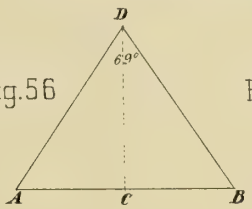


Fig. 57

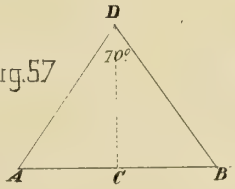


Fig. 58

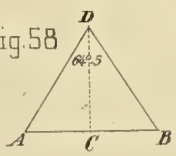
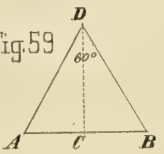
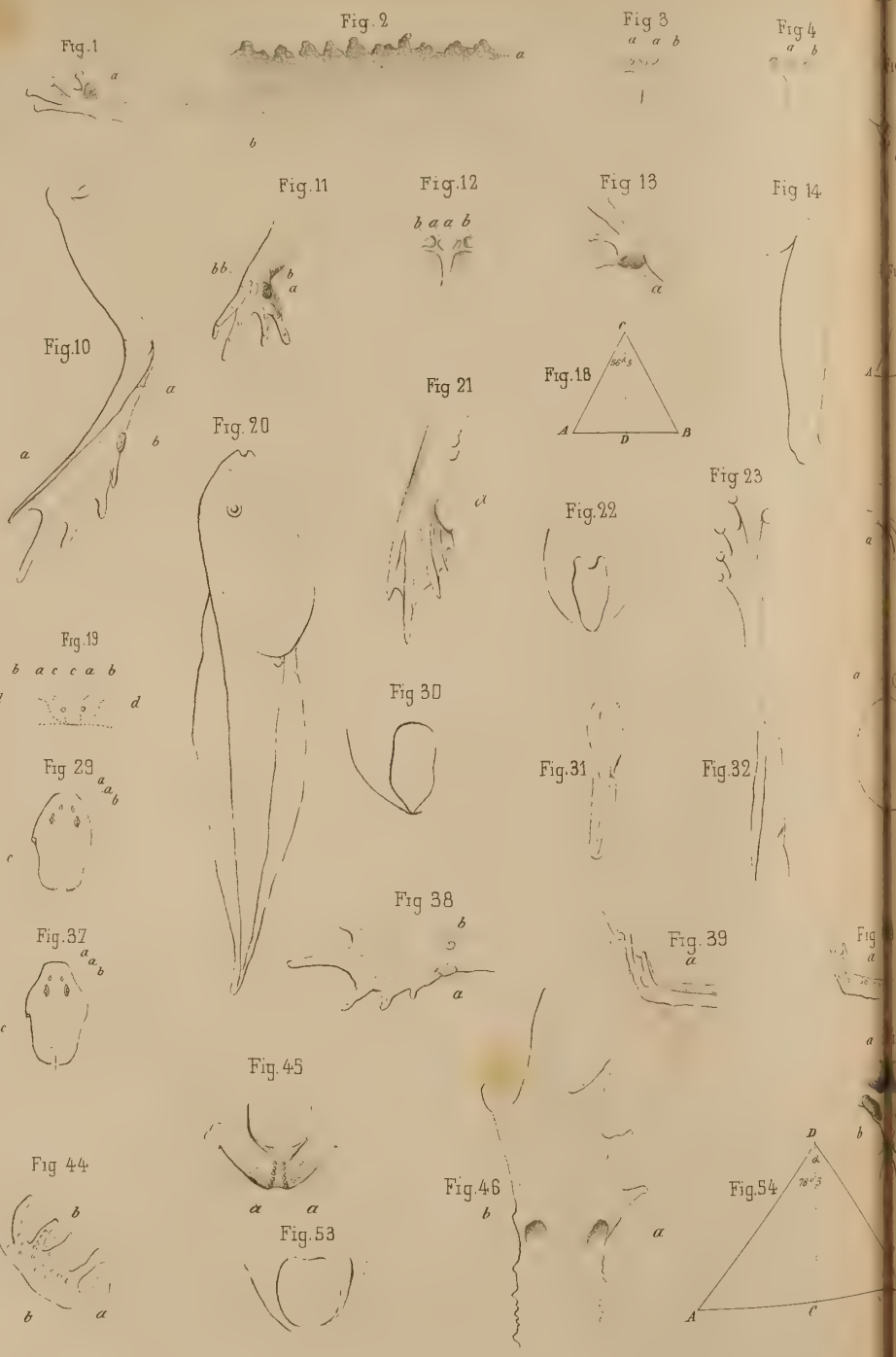


Fig. 59



Torino, Lit. Fl.li Doyen.



Lorenzo Lamerano dis. dal vero.

Torino Lit. Fratelli Doyen.

Delle alterazioni alle quali soggiace il granturco *(Zea mais)* e specialmente di quello che ingenera la pellagra.

Memoria del prof. ANTONIO SELMI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 4 marzo 1877.

Chi fa esperienze accresce il sapere.
Chi è credulo aumenta l'errore.
Prov.° arabo.

PARTE PRIMA

Indagini chimico-analitiche sullo *Zea mais* sano ed alterato.

Il cereale *Zea mais*, che fra noi è la base dell' alimentazione di quasi tutti gli operai campagnuoli e di buon numero di quelli che abitano la città, dovrebbe essere eziandio uno degli argomenti principali del chimico e dell'igienista, pei loro studî, tanto più che è generale opinione sia desso, se non l'unica, almeno una delle cagioni principali che danno origine alla terribile malattia della pellagra, che può considerarsi quella che reca maggiori dissesti organici ed economici nel ceto dei contadini di tutta l'alta Italia e della centrale.

I Chimici italiani, nullameno, non prestarono gran fatto attenzione ad un argomento così importante, e nessuno ebbe il pensiero di volgere le proprie indagini alle alterazioni che subisce ogni qualvolta accada che sia riposto in serbo in condizioni poco favorevoli, ed in istato nel quale le sostanze immediate, che concorrono a formarne la parte alimentare, possono spontaneamente cangiare di costituzione molecolare.

Vivendo noi in un paese, in cui la pellagra va di giorno in giorno più estendendosi e menando strage, naturalmente il nostro primo concetto fu quello di indirizzare gli studî speciali, ai quali ci siamo consecrati, alla natura particolare del granturco, ed alle alterazioni che questo subisce in forza di circostanze esterne, natura ed alterazioni dalle quali dipende, a parere di molti, il danno che ne ritraggono coloro che di questo cereale fanno la base della loro quotidiana alimentazione.

Prima però di metterci allo studio di questo materiale e delle principali alterazioni alle quali soggiace, giudicammo necessario di bene stabilire quale fosse la quantità di principî immediati che entrano nel seme, che crebbe nel nostro clima e sotto l'influenza dei metodi di coltivazione che vengono praticati fra noi.

Nessuno fra coloro che abbiano sentore di pratiche agricole potrà negare come tali circostanze influiscano a rendere il granturco più o meno nutriente, o più o meno

soggetto ad alterazioni; per cui la nostra attenzione fu portata specialmente sulle varietà che si coltivano nella valle del Po, e su di esse praticammo le nostre indagini analitiche. Queste varietà che si coltivano fra noi, possono essere ridotte a tre principali, che sono: il granturco gigante, l'agostano, il quarantino.

La prima, che sembra appartenere a quella dai Botanici classificata coi nomi di

Zea mais eliptica, sulphurea, maxima,

ha un fusto che tocca l'altezza di m. 1,50 a 2; porta spiche grosse e molto allungate, semi voluminosi, un po' allargati o piatti, ma arrotondati alla parte superiore; ha consistenza cornea e poco farinosa; i semi sono tinti in giallo alquanto sbiadito, che aumenta nell'intensità del colore, quanto più si avvicina ai paesi meridionali.

È una varietà che dà molto frutto, ma giunge a maturazione molto tardi, e le sue spiche si asciugano difficilmente, qualora l'aria sia molto umida; il che avviene facilmente al cadere del settembre od al principiare di ottobre, epoca di pioggie per la valle del Po. È una varietà che chiede un'abbondante irrigazione, almeno per due volte nel tempo in cui si compie il suo ciclo vegetativo.

Noi abbiamo eseguita l'analisi di due campioni di questa varietà, raccolti sopra il medesimo podere, ma non sul medesimo campo: l'uno dei campioni era del 1874, l'altro dell'anno agrario 1875.

Segue il quadro della composizione immediata dei due campioni di granturco.

Quadro della costituzione immediata del granturco raccolto nell'anno 1874, 1875

Amido	43,06	43,62
Glutine e zeina (1)	5,00	5,34(2)
Materia grassa	3,29	4,42
Materia resinosa azotata (1).	0,15	0,34(2)
Albumina (1)	4,42	2,20
Caseina (1)	0,53	0,53 (2)
Destrina	3,63	2,43
Zucchero cristallizzabile	3,22	4,52
» glucosio	5,05	5,85
Fibra greggia	17,43	14,93
Materie minerali	1,20	1,80
Acqua	13,02	15,02
Totale	100,00	100,00
(1) Azoto o nitrogeno per 1000	15,58	
(2) Azoto o nitrogeno per 1000		15,02

L'agostano, che fra noi chiamasi volgarmente *pignolino*, è quello che i Botanici distinguono col nome latino di

Zea mais eliptica, lutea;

ha un fusto di m. 1,20 ad 1,30, spica allungata, la quale si sviluppa in tutta la sua lunghezza molto bene; ha semi arrotondati di grossezza media e colore giallo carico.

Anche di questa varietà noi abbiamo eseguite tre analisi, le prime due sulle raccolte ottenute nel medesimo podere, nelle annate agricole 1874-1875, la terza sopra granturco del 1874, ma cresciuto nelle alture di Valleggio e precisamente in un' altura della Villa di Pozzolo. Eccone in un quadro la composizione:

Quadro rappresentante la costituzione immediata del granturco agostano

Sostanze immediate che ne costituivano i semi raccolti nel	1° 1874	2° 1875	3° 1874
Amido	46,92	54,63	45,62
Zucchero cristallizzabile . .	2,16	1,33	8,23
» non cristallizzabile .	5,64	4,23	4,67
Fibra greggia o legnosa . .	10,80	7,18	10,02
Albumina e caseina	9,12	9,58	7,38
Materia resinosa azotata . .	0,38	0,46	0,66
Materia grassa.	4,10	5,47	3,68
Destrina.	6,80	4,76	3,14
Materie minerali	1,32	1,18	1,80
Acqua	12,76	11,18	14,04
Totale	100,00	100,00	100,00
Azoto per 1000	15,20	16,06	12,86

Chiunque si faccia ad esaminare questa tabella, vedrà senza difficoltà, come nell'attribuire al granturco una media di contenenza in sostanza plastica, corrispondente al 16 per 1000 di nitrogeno, non si vada lungi dal vero. Troverà tuttavia che di non poco si allontana la quantità di materia grassa, che il Payen assegna quale media alla costituzione di questo cereale; ma è anche probabile che tale effetto sia dovuto alle circostanze di clima, sotto l' influenza delle quali vegetava, e che non furono ancora ben determinate nelle loro particolarità. Che questo nostro concetto corrisponda in parte al vero, possiamo dedurlo dal fatto, che anche il Salisbury, avendo analizzate parecchie varietà di zea cresciute nell'America, vi trovò sopra 100 p. le seguenti quantità di materia grassa:

Varietà di granturco	Materia grassa	
	per 100	media generale
Granturco dorato	3,44	3,77
» dente di cavallo .	3,88	
» bianco	4,68	
» giallo grosso. . .	3,32	
» di Tuscarora. . .	4,60	
» dell'Ohio	3,90	
» del Kentuky. . .	2,64	
» giallo di Pensilvania	3,68	

Come si vede chiaramente, questa media si avvicina assaissimo a quelle che furono trovate nelle analisi immediate da noi istituite, e le supera di ben poco, non avvicinandosi a quella che è data dal Boussingault, ed all'altra del Payen, il primo dei quali la porta al 7 e l'altro all'8 per % e più.

Probabilmente non poco ancora influisce nella composizione del grano la maggiore o minor fecondità di cui sia fornito il terreno, il che saremo condotti ad ammettere, considerando le circostanze nelle quali la varietà del cereale, da noi esaminate, vegetarono. Così le due varietà erano cresciute, la prima in un prato rotto, la seconda invece faceva parte della rotazione abituale di un campo, concimato però recentemente con circa 12000 chil. di letame di stalla, contenente il 3,5 per 1000 di nitrogeno ed il 2,03 di acido fosforico.

E questo sospetto viene poi confermato eziandio dalle ulteriori ricerche fatte sopra le successive raccolte dell'agostano, la seconda delle quali crebbe sopra un campo che era stato coltivato a trifoglio, mentre la prima succedeva al frumento, e la terza vegetò in terreno ricchissimo di ciottoli, per la maggior parte costituiti da dolomite e frammenti di porfido trascinati dalle correnti del fiume che parte dal lago di Garda.

Questa considerazione, che noi, per quanta importanza abbia, riteniamo pel momento come incidentale, non volendo per ora internarci nella questione della coltivazione del cereale, colla speranza di ritornarvi sopra in momenti più calmi, ed in tempo nel quale si possa, passo passo, tener d'occhio tutte le fasi della vegetazione della pianta, dal momento in cui è affidata al terreno fino alla raccolta, non dovea essere per ora taciuta. Nondimeno, quello che per l'argomento impreso a trattare era necessario di riconoscere, fu la composizione immediata del granturco, per giungere a stabilire poi le modificazioni che i componenti subiscono, e quali influenze queste modificazioni possono spiegare nell'organismo, allorchè il grano soggiace alla fermentazione interna.

Prima di farci a descrivere i risultati ottenuti, noi crediamo indispensabile di esporre per quali vie analitiche si procedette, convinti essere una verità quella, che a

proposito delle esperienze analitiche del Peligot, diceva il Millon. « Il Peligot, scri-
« veva il Millon nel 1850, non ha mancato di dare tutte le più esatte precauzioni
« che pose in opera per eseguire le analisi da lui propostesi: noi siamo del parere che
« questo sia indispensabile. I Chimici che trascurano questa avvertenza cadranno fa-
« cilmente in discussioni inestricabili, la scienza non ne trarrà nessun vantaggio, e
« v'è il pericolo di annoiare mortalmente il lettore. »

Il seme che da noi si analizzava era dapprima essiccato diligentemente in un bagno di cloruro di calcio in soluzione satura, che si manteneva alla temperatura costante di 112°, e facendovi passare una corrente di aria essiccata dapprima sopra uno strato di acido solforico a 66° Baumé, poscia sopra un altro di cloruro di calcio fuso; e quindi perchè l'aria stessa giungesse sul grano priva di qualsiasi polviscolo atmosferico, e col suo passaggio non raffreddasse il cereale, si era combinato in maniera che attraversasse un tubo di vetro ricurvo, e pieno di fiocchi di amianto, che rimaneva immerso nella stessa soluzione di cloruro di calcio.

La perdita in peso che si ottenne in questo caso era considerata semplicemente quale acqua di idratazione, giacchè quella che poteva meccanicamente aderire al seme, veniva previamente eliminata scaldando il grano stesso in bagno di sabbia a 70°, tenendolo in capsula di porcellana, e rimestandolo continuamente con un agitatore di vetro; poscia era lasciato per tutta una notte sotto campana di vetro, le cui pareti erano diligentemente asciugate, ed entro alla quale stava uno strato di acido solforico concentrato.

Il seme così apprestato era poscia macinato con un ordegno a noci metalliche di acciaio, col quale si avea una farina grossolana, ma abbastanza fina da poter essere facilmente aggredita dai reagenti.

La farina così ottenuta si sottometteva di nuovo all'asciugamento nell'apparecchio poc'anzi descritto, e da questa si deduceva poi il quantitativo dell'acqua di idratazione che era nel seme.

Asciugata a 112°, si passava a dispogliarla della materia grassa, coll'aiuto del solfuro di carbonio, in un apparecchio a spostamento, eguale a quello che venne ideato dal Payen, colla differenza che, invece di portare un palloncino che servisse da condensatore, il solvente volatilizzato era liquefatto mediante una serpentina di vetro, che mantenevasi fredda con una corrente di acqua diacciata.

Il liquido che rimaneva nel fondo del pallone, dopo aver reagito sulla farina almeno per 36 ore, era versato in storta tubulata, ed evaporato fino a $^2/_3$ del suo volume; poscia si metteva in capsula di porcellana, e si lasciava disperdere spontaneamente. In tal guisa si separava la materia grassa, priva assolutamente di odore, e consistente in un olio bellissimo, limpido, colorato in giallo ranciato, che possedeva però la proprietà, stando esposto all'aria e mantenuto ad un calore di 35°, di assorbire alcun poco di ossigeno e prendere l'odore di rancido.

Spogliata la farina della parte oleosa, fu tentata con alcool ad 85° dell'alcoolometro di Gay-Lussac. Questo solvente, messo ad evaporare, abbandonò una materia resinoide, bruno-verdastra, che coll'acqua facea emulsione, e, quello che è più, leggermente azotata. All'infuori di quest'ultima sostanza, i materiali immediati furono separati colle seguenti precauzioni.

L'alcool allungato (a 42° dell'alcoolometro centesimale) venne adoperato per togliere alla farina le sostanze solubili, poscia lo zucchero cristallizzabile si separò coll'ajuto del dializzatore, indi si dedusse qual fosse la quantità di glucosio, dalla reazione che presentava il liquido rimasto, mediante il liquore di Fehlyng e Barreswille.

L'amido fu determinato usando una soluzione di diastasi, e con questa saccarificandolo; poi con una soluzione allungatissima di soda caustica, si sciolse la materia albuminoide, per cui rimase la semplice cellulosa isolata. Le ceneri furono separate abbruciando una porzione speciale di farina.

Noi crediamo che questo metodo di analisi immediata sia quello che meglio conviene, quando si applichi alle indagini sulle farine e sui cereali. Solamente una grave difficoltà fu da noi incontrata, allorchè si trattò di separare, nelle sostanze solubili, lo zucchero dalla destrina. Varî furono i processi tentati, fra i quali, quello che sembrava più conveniente, era di ricorrere al dializzatore di Graham; ma non rare volte vedemmo collo zucchero cristallizzabile passare anche il non cristallizzabile attraverso alla membrana, abbandonando la destrina. Ma anche a questa rimaneva unito dello zucchero.

Perciò questo primo saggio non ci persuase, e giudicammo opportuno di tentare altre prove, per vedere se potevasi separare la destrina dal glucosio, e non trovammo processo meglio conveniente di quello che andiamo ad esporre. Mediante la dialisi separavasi lo zucchero, indi il liquido fu diviso in due porzioni eguali: si noti bene che il liquido diviso era quello che rimaneva nell'interno del dializzatore; e questo per assicurarci se tutto lo zucchero avea attraversata la membrana porosa dell'apparecchio. Assaggiando ambedue i liquidi col reattivo di Fehlyng, si vide che riducevano in parte il rame ad ossidulo, e lo precipitavano se scaldati ad 85°. Non si sapeva pertanto se il residuo che rimaneva nel dializzatore fosse composto di destrina pura, ovvero vi fosse associato anche dello zucchero non cristallizzabile. Perciò ad una delle due parti del liquido poc'anzi accennato venne mescolata una piccola porzione di lievito di birra: il liquido si mise in fermentazione, ed emanò una quantità di biossido di carbonio che corrispondeva a 430 centimetri cubici. Si vide allora che una porzione di zucchero era rimasto aderente al liquido stesso, e misto alla destrina: quindi si passò all'esame del liquido fino allora rimasto intatto, e coi metodi conosciuti trasformossi la parte di destrina in glucosio; poi si sottopose anch'esso alla fermentazione: la quantità di biossido di carbonio che emanò, dimostrò chiaramente che la destrina stava allo zucchero rimasto aderente ad essa nella proporzione di 19 a 16.

Stabilita con questo metodo la composizione del granturco ci facemmo allora le seguenti domande:

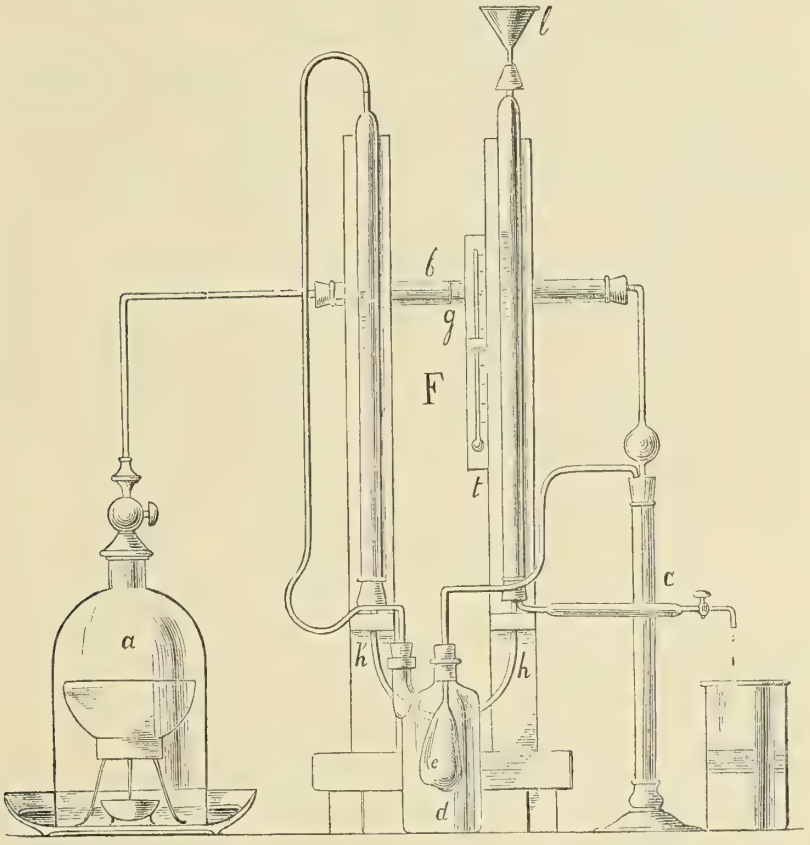
1. Allorchè il granturco soggiace ad alterazioni, le sostanze immediate che lo compongono soffrono tutte dei cangiamenti, ovvero sono alcune soltanto che vanno incontro ai medesimi?

2. E se questo accade, quali sono i prodotti che si formano?

3. Finalmente, se questi prodotti hanno luogo, sono essi tali da recar grave danno all'organismo animale?

È nostra opinione che per rispondere debitamente alle precedenti domande, era necessario anzitutto collocarsi in condizioni identiche a quelle che si verificano

allorquando il granoturco si riscalda da se medesimo e spontaneamente. Fu perciò che, dopo aver tenuto un termometro immerso in una massa di questo cereale, che si era riscaldato, potemmo anzitutto stabilire che nella medesima la temperatura oscillava fra i 32° ed i 35° centigradi.



Descrizione dell' apparecchio

a — bottiglia o campana tubulata
b — tubo con HKO solida e $PbCO_3$
c — provino con BaH_2O_2
d — vaso a tre colli
e — vescica di gomma elastica
F — tubi graduati e comunicanti pel tubo *h h'*
t — termometro

La misura media di questa temperatura fu presa nel modo seguente: preparato un tubo di ferro della lunghezza di 15 centimetri, e chiuso da un lato, si riempiva di mercurio, nel quale si immergeva un termometro che era sostenuto da un tappo di sovero perforato nel centro, e che serviva a chiudere la parte aperta del tubo medesimo. Questo apparecchio così semplice, si immergeva poi nella massa, ed ivi si lasciava per alcune ore. La colonna che indica i gradi della temperatura ascendeva

sempre, dopo quasi un' ora all' incirca, e segnò costantemente un grado che era da 32° a 35°, come abbiamo detto.

Stabilita così la condizione essenziale del punto di calore necessario a che le sostanze immediate del cereale subiscano delle trasformazioni, furono presi quattro chilogrammi di granturco ben scelto, e raccolto in stagione opportuna, due dei quali vennero collocati in fiasca di vetro, che si tappò con turacciolo di sovero, altri due si chiusero in altro recipiente eguale, tappato esso pure con sovero, ma portante al centro un tubo di vetro ripiegato il quale comunicava col tubo *b* (Vedi la figura che rappresenta l' apparecchio nella pagina precedente) contenente fino al punto *g* dei pezzetti di carbonato di piombo, che si sarebbero colorati in nero se si avesse avuto indizio di sviluppo d'acido solfoidrico, e dal punto *g* alla ripiegatura dell'idrato di ossido di potassio (HKO), che avrebbe assorbito il biossido di carbonio. Questo tubo era chiuso all' estremità con altro pure ripiegato e portante un rigonfio. Il tubo pescava nel provino *c* e serviva a lavare il gas che si svolgeva, privandolo di ogni traccia di biossido di carbonio; di là, se avesse avuto origine altro gas non assorbibile dall'idrato di ossido di potassio, e dall' acqua di barita che era nel provino *c*, andava a raccogliersi nella vescica *e* di gomma elastica chiusa nel fiasco a due colli *d*, il quale per la seconda tubulatura comunicava, mediante un tubo, col manometro ad acqua *F*, il cui tubo a sinistra era diviso in centimetri cubici. Questa disposizione dell' apparecchio era destinata ai seguenti scopi:

1. Osservare se oltre al biossido di carbonio, nella fermentazione svolgevansi altri gas.

2. Determinare la qualità dei gas che si formavano nella fermentazione, senza che questi si mescolassero all' aria, nè potessero essere assorbiti dall' acqua che era nel manometro.

Un termometro *t* ed un barometro segnavano i cangiamenti della temperatura e pressione esterne che potessero accadere pel tempo piuttosto lungo che durò l'esperimento, ed il quale non fu minore di 80 giorni: e questo per tener calcolo della quantità di gas che si svolgeva.

Si ebbe la precauzione, allorchè nella bottiglia fu collocato il cereale, di operarvi due o tre volte il vuoto, mediante la pompa di Gay-Lussac, per riempirla poi di aria, alla quale erano state tolte le ultime traccie di biossido di carbonio, e di vuotare esattamente il palloncino di gomma elastica, e con esso tutto l'apparecchio, dell'aria che vi era. Aprendo allora il rubinetto di una campana, si misurava esattamente la quantità di aria che penetrava nell'interno, e che arrivava a litri 1,935. Con questa anche nel palloncino si trovavano 50 centimetri cubici di aria, priva di biossido di carbonio, e nelle condizioni normali di umidità, se fosse a 22.° Si collocò poscia la bottiglia in un bagno-maria dove, per mezzo di un regolatore, la temperatura si manteneva costante dai 34° ai 35°.

Nei primi giorni vi fu assorbimento di gas, ed il manometro segnò una decrescenza di 63 centimetri cubici, ossia di $^1/_{30}$ all'incirca. Noi giudicammo che il gas scomparso dovea essere ossigeno; ed infatti l'aria che era nel palloncino di gomma elastica mostrossi impoverita di un sesto circa del proprio ossigeno, assaggiata che fu col pirogallato di potassio.

Dopo il volgere di otto giorni, sempre mantenendosi costante la stessa temperatura, cominciò il manometro a dar segni di depressione, indizio di svolgimento di gas. Durante i rimanenti 72 giorni, nei quali l'esperimento ebbe luogo, la media quotidiana della produzione gazosa oscillò fra i c. c. 82 ed i 133, essendo lentissima dapprincipio, ma facendosi violenta in seguito, non mai tale però da produrre una vera e propria effervescenza. Cominciammo allora a portare le nostre indagini sul gas che si produceva, e si riconobbe essere desso costituito da una mescolanza di idrogeno e di nitrogeno. La costituzione della mescolanza gazosa veniva esaminata mediante l'eudiometro. Si cominciò anzitutto col mettere in contatto quella che raccoglievasi nel palloncino di gomma elastica (e che si mandava nell'eudiometro di Bunsen pieno di mercurio) con potassa caustica, ed acido pirogallico. Nei primi otto giorni, il gas conteneva sempre alcune traccie di ossigeno, il che era confermato dal diminuire del volume, se nella campanella graduata introducevasi eziandio una pallottolina di fosforo: ma dopo otto giorni all'incirca, ogni traccia di ossigeno era scomparsa, e non rimaneva che la miscela dei due gas sunnominati. Naturalmente essi erano accompagnati da un abbondante sviluppo di biossido di carbonio, la cui quantità fu determinata deducendola dall'aumento di peso dei due condensatori *b* e *c*, il primo dei quali misurava all'incirca 26 centimetri.

Lo sviluppo dell'idrogeno e quello del nitrogeno davano già indizio che il cereale si alterava profondamente ne' suoi elementi immediati, accennando col primo alla formazione dell'acido butirrico, col secondo ad una gravissima metamorfosi nelle sostanze proteiche che ne costituiscono la parte meglio nutriente: e questo fatto poi veniva indirettamente affermato dall'asserto di parecchi agricoltori pratici, i quali tengono la opinione che il granturco che *sobbollì* è molto meno nutriente del ben conservato.

Non venne osservato il minimo annerimento nel carbonato di piombo, il che dimostrò a nostro parere, che idrogeno solforato non formasi durante la fermentazione medesima.

Cessata così la prima prova sperimentale, si giudicò opportuno di sottometterne eguale quantità ad un secondo esperimento, ma variando alcun poco le circostanze.

Questa seconda prova la si eseguì in base delle seguenti riflessioni: una piccola porzione di granturco sperimentato col metodo antecedente venne messa sopra un imbuto di vetro e dilavata con acqua distillata calda a 30°. Osservando al microscopio le deposizioni di quest'acqua di lavacro, si vide che rarissime comparivano le sporule dei micodermi, che ordinariamente accompagnano il granturco guasto, e, come dicesi volgarmente, sobbollito; nell'acqua stessa invece comparivano moltissimi bacterii, e nel corpo del liquido eravi una grande quantità di destroso o zucchero d'uva, che riduceva il liquido di Fehelyng, ed inoltre dava odore manifestissimo di acido butirrico. L'acqua poi presentava una reazione acida che scorgevasi facilmente.

Non vedendo essersi moltiplicati i micodermi, si pensò di aggiungerli artificialmente; ed a tal uopo procuratoci del granturco guasto, gentilmente fornitoci dal D.r Lodovico Ballardini di Brescia, venne questo messo sopra imbuto di vetro, dilavato accuratamente con acqua distillata e tiepida (a 35°), e così spogliato di tutte le muffe che esternamente investivano i semi del cereale che avea sofferto.

L'acqua che scolò era pregna di spore e sporangi, le quali vennero separate

coll'aiuto di un filtro, talchè da un chil. di granturco guasto se ne raccolsero 2 grammi. Quest'acqua fu osservata al microscopio, e si mostrò pregna, come si disse, di seminuli di muffa comune, di frammenti del *sporisorium maydis*, e soprattutto poi di una pianta speciale che non si saprebbe ora ben definire, ma che sotto al microscopio avea tutta l'apparenza di fasci dei rami del triacanto spogli delle foglie, e muniti solamente delle spine.

Tutta la materia raccolta sul filtro, e lavata parecchie volte, fu messa ad essiccare sotto campana di vetro dove stava una capsula con acido solforico. Essiccata e cadendo in polvere, venne sparsa sopra un chil. del frumentone conservato nella bottiglia precedente, e che si era alterato. Sotto alla capsula fu disposto altro recipiente pieno di acqua distillata, ed il tutto collocato sopra un piatto, e ricoperto con campana a chiave che stava aderente al piatto, mediante uno stucco formato con cera vergine e trementina. Perchè poi si fosse sicuri che l'aria esterna non penetrava nella campana, si circondarono le sue labbra con mercurio metallico. Il tutto fu collocato in bagno-maria e tenuto caldo a 34°, avvertendo che il recipiente dell'acqua calda fosse alto così che la luce non potesse penetrarvi, stantechè, per le nostre osservazioni, abbiamo potuto constatare, che le crittogame si moltiplicano colla maggiore facilità, se esse siano mantenute lungi dal contatto della luce.

Bastarono, in questa condizione, due giorni appena per vedere immediatamente che vi era assorbimento di ossigeno, il che fu rapido assai e giunse a c. c. 102.

Anche in questo caso si verificò la emissione dell'idrogeno, del nitrogeno, e del biossido di carbonio, ma pei due primi in dose assai minore, per l'altro invece molto più abbondante, talchè, vedendo come l'acqua di barita contenuta dal provino *c* si intorbidava costantemente, si fu costretti a dividere il tubo *b* e formarne due; il primo della lunghezza di nove centimetri si mantenne pieno di carbonato di piombo, nel secondo di 16 centimetri fu messa della potassa caustica in pezzetti; e fra l'uno e l'altro si pose un condensatore a 5 bolle di Liebig, ripieno di una soluzione al 10 per % di idrossido di potassio.

Allorquando fu passato un tempo eguale a quello in cui era durato l'esperimento precedente, si smontò l'apparecchio e si passò allo studio della costituzione immediata dei due frumentoni sottomessi alla prova. Lo stesso identico processo di analisi immediata venne praticato per separarne i principii *sui generis*, e le osservazioni che facemmo in questo caso furono le seguenti:

1. Una porzione dell'amido, corrispondente al 46,92 della prima varietà dell'agostano, si era resa solubile riducendosi al 45,37; il restante insolubile avea acquisita una singolarissima proprietà, giacchè messo a contatto con una soluzione di idrossido di sodio, contenente il 2,3 per % di materia solida in soluzione, trasformavasi in una bellissima gelatina, avente tutta l'apparenza dei composti pettici.

2. Le materie albuminoidi erano pure in parte scomparse; alcune delle medesime si erano modificate come vedremo in seguito.

3. Vi era pure stato la formazione di una certa porzione di ammoniaca. La composizione del primo grano sottomesso alla prova era la seguente:

Quadro della costituzione immediata del granturco fermentato senza micodermi

		Differenza col grano sano	
Amido	45,37	— 1,55	
Zucchero cristallizzabile	0,00	— 2,66	
» non cristallizzabile	4,62	— 1,02	— 7,46
Fibra greggia	10,80	— 0,00	
Albumina e caseina	(*)7,39	— 2,73	
Materia resinosa azotata	0,82(*)	+ 0,44	
» grassa	5,30	+ 1,20	+ 2,00
Destrina	7,16	+ 0,36	
Materie minerali	1,32		
Acqua esistente previamente nel seme	12,56		
	95,34		5,46(1)
Perdita complessiva colla fermentazione	4,66		
	100,00		
(*) Azoto per 1000	11,82		

(1) È probabile che la differenza in perdita ed in guadagno sia dovuto ad assorbimento di ossigeno e di acqua.

Se però la perdita fu di sole p. 4,66 per 100, il cangiamento molecolare interno e le modificazioni che subirono le sostanze immediate riuscirono assai più singolari. La sola fibra greggia non subì veruna metamorfosi, lo zucchero cristallizzabile era totalmente scomparso ed una parte del non cristallizzabile ancora. L'albumina e la caseina diminuirono d'assai, mentre aumentarono la materia resinosa azotata, e quello che più monta la materia grassa. Crebbe eziandio la destrina, ma quest'ultima circostanza era facile il prevederlo, considerando che l'amido avea anch'esso subita una modificazione speciale, e che una parte era scomparso.

Allorchè noi ci fummo accorti di queste metamorfosi, era naturale che ci domandassimo quali modificazioni e cangiamenti aveano potuto incontrare le sostanze immediate. Quindi la prima cosa alla quale volgemmo la nostra attenzione fu il fatto dell'aumento della materia grassa, e ci domandammo: questa produzione è perfettamente simile a quella che esiste nel frumentone non alterato?

Per conseguenza, dopo averla estratta coll'aiuto dell'acido solfocarbonico, tanto dal frumentone guasto, come dal sano, si lasciava evaporare il solvente, poi lo si saponificava mediante una soluzione di soda caustica. In questo modo si separava l'alcool glicerico.

Rimaneva un liquido che col raffreddarsi dividevasi in due strati, il superiore dei quali conteneva il sapone, l'inferiore rimaneva torbido. Separossi dapprima colla

decantazione una gran parte della materia liquida, poscia si riprese il residuo coll'alcool bollente, che raffreddandosi lasciò depositare una quantità di cristalli appartenenti al sistema clino-rombico, che assaggiati col metodo suggerito da Maurizio Schiff, cioè coll'acido nitrico dapprima, e poscia coll'ammoniaca, mostrò consistere in *colesterina*. In tutto questo nulla di nuovo, giacchè questa sostanza esiste realmente nel granturco, del che fummo ammaestrati da Hoppe Seyler. Ma coi cristalli di colesterina, nel liquido fornito dall'alcool bollente si confondevano eziandio altre forme che ricordano perfettamente quelle di un alcaloide. Tuttavia la quantità che se ne conseguì era così minima da riuscire impossibile il poterne precisare la composizione e le qualità.

Allora le nostre indagini si volsero alla materia grassa che si era separata dal frumentone guasto senza l'intervento dei micromiceti, e la prima cosa che ci apparve chiara fu l'osservazione che l'alcool glicerico separatosi colla saponificazione era ben diverso da quello che si era avuto dal frumentone non alterato. L'odore che presentava questo composto ci diede sospetto che l'alcool glicerico nelle reazioni avvenute avesse subìto una alterazione speciale, e si fosse convertito in aldeide glicerica, od in un suo isomero, e trasformato perdendo porzione del proprio idrogeno ed associandosi invece dell'ammoniaca.

Bisognava però accertarsene, ed ecco il modo che tenemmo per conseguire il nostro intento. Concentrato nell'aria secca il residuo, fu ripreso con etere etilico, e poscia trattato con alcool ammoniacale. Versando nuovo etere si ebbe un precipitato bianco-giallognolo, amorfo, senza odore, che scaldato volgeva al bruno, e decomponevasi interamente se tenevasi immerso in un vaso pieno di acqua bollente, dando odore ben pronunciato di ammoniaca, misto a quello tanto ributtante di acroleina. Il cloruro di platino vi induceva pure un precipitato. Da tutto questo noi crediamo che uno dei cangiamenti che avvengono qualora il granoturco subisca alterazione sia quello che una porzione dell'alcool glicerico, il quale fa parte della materia grassa, sia di cangiarlo in aldeide acrilica, cui forse si associa l'ammoniaca formando dell'*Acroleina ammoniacale.*

Che nelle sopradette alterazioni abbia luogo la formazione di acraldeide ammoniacale, o di principî analoghi, lo possiamo dedurre ancora da altro fatto. La materia solubile nell'alcool era una specie di resina azotata, insolubile nel solfuro di carbonio, e che nell'acqua formava quasi una emulsione. Assaggiata cogli alcali caustici, si scioglieva benissimo in essi, sviluppando del gas ammoniacale, il quale non si manifestava solo all'olfatto, ma si scopriva ancora dirigendo i vapori nel liquore del Nessler. Tentata coll'acido nitrico, coloravasi dapprima in rosso-violaceo, poi in giallo ranciato. Non si discioglieva altro che in piccolissima porzione nell'etere assoluto, e queste reazioni ci aveano fatto sospettare che dessa avesse qualche analogia coll'alcaloide che pel primo venne intravveduto dal Lombroso, e che poscia venne dato come esistente certamente dal Pelloggio e dal Brugnatelli.

Nullameno dobbiamo dirlo: assaggiandone una porzione sulla pelle delle rane, ed iniettandone una piccola quantità emulsionata nell'acqua, nelle vene di un cavia, non potemmo giammai scorgere i sintomi ben caratterizzati dell'avvelenamento degli stricnidi; invece amministrandone una porzione per bocca, si osservava una grande irritazione nelle fauci, susseguita da insalivazione, a cui teneva dietro una specie di movimenti convulsivi, che si manifestavano specialmente negli arti posteriori.

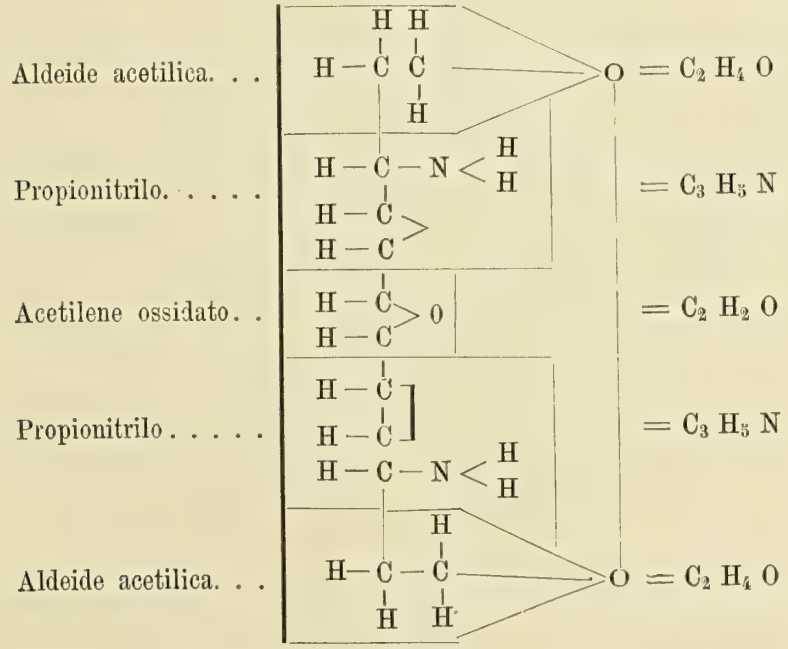
Si volle allora conoscere quali cangiamenti avea subìto la sostanza proteica, e dapprima si osservò che nella fermentazione erasi svolta una certa quantità di gas nitrogeno. Ma era ben piccola a paragone di tutta la quantità di albuminoidi che eransi metamorfizzati, e si sospettò che una porzione si fosse cangiata in ammoniaca. Presi quindi 100 grammi della farina tratta dal grano fermentato, furono collocati in un pallone di vetro, e trattati col processo del Boussingault, quello che il chimico suggerisce per separare dai terreni l'ammoniaca bella e formata. In questo caso l'alcali volatile, che trovavasi nella farina, era in tale quantità da corrispondere presso a poco ad 8,10 degli albuminoidi scomparsi.

Si potrebbe allora domandare: è possibile la formazione dell'acroleina ammoniacale? Noi lo crediamo per le seguenti considerazioni:

Trattando del frumentone fermentato con potassa caustica, e scaldando tutto a 100°, fra i prodotti della distillazione si ebbero sempre traccie di cianuri. D'altronde è cosa facile il dimostrare la possibilità che l'acroleina ammoniacale racchiuda gli elementi dell'aldeide acetilica ($C_2 H_4 O$) del propionitrilo ($C_3 H_5 N$), alla cui associazione farebbe centro una molecola di acetilene ($C_2 H_2$) bivalente, del quale le due atomicità non sature, verrebbero neutralizzate dall'ossigeno, mentre le altre due lo sarebbero dal propionitrilo, il quale alla sua volta verrebbe neutralizzato da due molecole di aldeide acetilica come si può vedere dalla seguente equazione:

$$\text{Acroleina ammoniacale } C_{12} H_{20} O_3 = \begin{cases} 2\, C_2 H_4 O & \text{Aldeide acetilica} \\ C_2 H_2 O & \text{Acetilene ossidato} \\ 2\, C_3 H_5 N & \text{Propionitrilo} \end{cases}$$

Ma questa disposizione molecolare può scorgersi meglio nella seguente formola grafica, la quale dà a divedere presso a poco come possano immaginarsi distribuite le molecole alle quali è centro l'acetilene ossidato.



Fin qui dunque noi abbiamo già un indizio che la fermentazione spontanea del granturco è dannosa per le seguenti ragioni:

1. La materia zuccherina si cangia in parte, ed in parte scomparisce, trasformandosi in sostanze non nutrienti e probabilmente svantaggiose alla salute.

2. L' amido subisce una metamorfosi duplice, parte eliminandosi sotto forme meno complesse, il rimanente acquistando una contestura tale da cangiarsi in una specie di gelatina sotto all'influenza degli alcali, come succede per la fecula di patate.

3. La materia grassa si altera essa pure, e dà luogo alla formazione dell'aldeide acrilica, congiunta coll'ammoniaca, dalla quale non sarebbe forse difficile che nascessero anche dei prodotti cianici.

4. Finalmente una parte degli albuminoidi soffre una profonda alterazione, perdendo del nitrogeno, e cangiandosi parte in ammoniaca.

Ma eziandio con queste conseguenze non si era in condizione di poter sciogliere a dovere il problema, giacchè è noto che il granturco fermentando diminuisce realmente di poter nutriente, cosa che tutti gli agricoltori pratici ammettono come indiscutibile.

Quindi noi ci facemmo la seguente interrogazione: durante la fermentazione ha luogo nessun movimento di germogliazione nell'embrione, e le materie plastiche ed albuminoidi, non subiscono esse qualche cangiamento molecolare da dar luogo alla formazione della diastasi, o di qualche altro corpo che abbia analogia con quest'ultima?

Si pensò allora di esaminare il grano, che avea subìto la fermentazione, con una lente di ingrandimento, per verificare se l'embrione avesse dato segno di germogliare, la qual cosa venne realmente verificata in 20 grani almeno che furono osservati, in 18 dei quali scorgevasi l' embrione in tentativo di sviluppo, essendosi allungato di due millimetri all'incirca; ma giunto a quello stadio sembra rimanesse atrofizzato, probabilmente perchè immerso in un' atmosfera non confacente alle condizioni capaci di favorire l'ulteriore suo sviluppo ed in contatto di liquidi che gli recarono la morte.

Fu dopo questa osservazione che si pensò come gli albuminoidi potessero essersi metamorfizzati, costituendo una materia analoga alla *diastasi,* e per conseguenza la farina di questo grano venne trattata, dapprima quattro volte di seguito con alcool debole (a 47° dell'alcoolometro Gay-Lussac), poscia ripreso il residuo con acqua distillata pura. L'alcool debole avea spogliato la farina dello zucchero e della destrina, l'acqua disciolse le sostanze proteiche. Quest'ultima soluzione venne evaporata a 40°, e ne rimase una sostanza leggermente giallognola, che avea l'apparenza della gomma arabica, e possedeva le seguenti proprietà:

1. Abbruciata sopra una lamina di platino si gonfiava e lasciava un carbone voluminoso, e mandando odore di penne e peli sottomessi alla combustione.

2. Scioglievasi interamente nell'acqua, ma scaldando questa ad 80°, si avea un leggero intorbidamento.

3. Levata dal recipiente pieno di acqua scaldata alla temperatura di 80°, e lasciata raffreddare, depositava alcuni fiocchi, i quali si moltiplicavano se dopo il raffreddamento vi si infondeva dell'acido nitrico.

Tutti questi caratteri dimostravano cotale sostanza appartenente alla famiglia degli albuminoidi; ma due caratteri speciali la rendevano singolare:

1. Messa a contatto con colla di amido alla temperatura di 10° a 15°, non l'alterava, ma se si scaldava per alcune ore a 35°, l'amido diveniva scorrevolissimo, prendeva odore pronunziato di acido butirrico, riduceva in parte il liquore di Barreswille.

2. Aggiungendo all'infusione dell'albumina d'uovo coagulata, e ben scevra di materia grassa, per essere stata previamente dibattuta con etere, e con un peso triplice di zucchero di canna, dopo 12 ore l'albumina si gonfiava, diveniva quasi trasparente, il liquido sviluppava alcune bolle di gas, ed alla superficie vedevansi nuotare delle goccioline microscopiche di una sostanza insolubile, della quale l'etere si impadroniva, e che abbandonava poi coll'evaporazione.

Pare dunque che nella fermentazione del granturco, e specialmente allorquando può accadere che il germe dia qualche indizio di rendere in sè attive le funzioni vitali primordiali, si formi realmente nella metamorfosi degli albuminoidi una sostanza che ha bensì molta analogia colla diastasi, ma che però non è diastasi: per alcuni punti rassomiglia alla *cerealina* del Miège-Mouriès; quantunque superiore alla medesima perchè oltre al rendere scorrevole la colla di amido, possederebbe la proprietà di far volgere le materie albuminoidi ad una specie di degenerazione grassosa, non solamente provocando la formazione dell'acido butirrico, che fa parte della serie degli acidi grassi, ma ingenerando realmente una materia che può essere solubile nell'etere, e che può considerarsi realmente quale una sostanza grassa.

Noi daremo a questa il nome di *zeastasi*. Pare che essa si formi e si accolga principalmente attorno all'embrione, comunicando alla farina varie proprietà che la rendono cattiva, e particolarmente un sapore acre ed amaro. È un fatto certo che questa nostra opinione riceve una quasi conferma dal risultato che andiamo ad esporre.

Furono presi 100 grani di frumentone sanissimi, e disposti nei vacui di una spugna collocata in vaso di vetro, nel quale si era versata una piccola quantità di acqua distillata, che dovea mantenere umidi i semi: il tutto fu poi collocato in istufa dove la temperatura si manteneva costante a 18.° Dopo otto giorni i grani mostrarono tutti un movimento nel germoglio, ad eccezione di tre o quattro. Raccolti, furono collocati sotto l'acqua ed esposti alla congelazione di una mescolanza frigorifera che al termometro segnava — 13°. Con questo si intese di far cessare il movimento germinativo. Non si ricorse, per far che questa funzione venisse meno, ad un'alta temperatura, perchè si temeva che il calore potesse far cangiare le proprietà e la disposizione molecolare nelle sostanze preesistenti nel seme che germogliava ed attorno all'embrione; e questa è la ragione per cui si usò questa precauzione, ottenendo la morte del seme colla violenta lacerazione del tessuto.

Dai grani rammollitisi durante il tempo in cui stettero a contatto colla spugna, ed aveano cominciata la germogliazione, si potè separare agevolmente l'embrione, e se ne ebbero infatti circa 96, quattro dei semi non avendo dato cenno di muoversi. Forse il germe in questi era abortito. Furono questi lavati con alcool a 47° dell'alcoolometro, asciugati, poi messi a contatto con colla d'amido e mantenuti in tubo da prova in bagno caldo a 35° centigradi. Bastarono 24 ore perchè il liquido cangiasse, divenisse scorrevole e prendesse una reazione acida pronunziata. Aggiungendo allora alcuni

pezzi di albume d'uovo coagulato dal calore, e ben dibattuti coll'etere, si vide questo disciogliersi quasi per intero, ed abbandonare al liquido una piccola porzione di globuli che al microscopio si mostrarono costituiti da materia grassa.

Da questo fatto l'altra conseguenza che: « nel primo stadio della fermentazione l'embrione del seme di granoturco tende a svilupparsi; ma soffocato poi, o per l'atmosfera in mezzo della quale tende a germogliare, o pei corpi che vi si formano attorno, lascia luogo a che abbia origine una sostanza, che nata a spese degli albuminoidi, rassomiglia moltissimo alla diastasi, quantunque non sia diastasi; rammenta alcune reazioni della cerealina, e tuttavia ne differisce anche da questa, perchè nella fermentazione induce la ingenerazione dell'acido butirrico, e di altre materie grasse in tenue quantità ». A questa noi diamo il nome di zeastasi.

Rimane ora da discutere una seconda questione, ed è: allorchè il frumentone o *zea mais* nel fermentare lascia che si sviluppino tutti que'microfiti che ne accompagnano ordinariamente l'alterazione nei nostri granai, permette che si formino eguali prodotti, ovvero que' che nascono sono differenti?

Per rispondere equamente a questa domanda, era naturale di portare le indagini sul granturco ammuffito, che ci forniva il Ballardini di Brescia, e nell'altro che si era fatto ammuffire artificialmente, valendoci dell'apparecchio descritto nelle pagine precedenti.

Ecco quale ne era la costituzione immediata. La prima colonna rappresenta la composizione del granturco provato da noi, la seconda quello guasto che ci mandò il Ballardini.

	1°	2°	Differenza fra il grano			
			sano	ammalato	—	+
Amido	43,55	42,26	46,92	43,55	2,47	0,00
Zucchero cristallizzabile . .	0,00	0,00	2,16	0,00	2,16	0,00
» non cristallizzabile	6,03	5,92	5,64	6,03	0,00	0,28
Albumina (1).	6,93	6,47	9,12	6,93	2,19	0,00
Fibra legnosa	10,20	11,23	10,80	10,20	0,60	0,00
Materia resinosa azotata (1).	1,05	1,15	0,38	1,05	0,00	0,67
Materia grassa.	5,72	6,12	4,10	5,72	0,00	1,62
Destrina	8,23	7,64	6,80	8,33	0,00	1,43
Materie minerali	1,32	1,38	1,32	1,32	0,00	0,00
Acqua.	16,97	17,83	12,76	16,97	0,00	4,11
Totale . .	100,00	100,00	100,00	100,00	7,42	8,11
Azoto per 1000	11,09	10,35	»	»	»	»

Prendendo a considerare i numeri espressi in questa tabella, che rappresentano i risultati delle analisi immediate, si vede chiaramente che sotto all'influenza dei

micromiceti il granturco si altera anche più profondamente di quello che avrebbe fatto senza l'intervento dei medesimi.

Anzitutto l'ammoniaca che si svolse, allorchè la farina fu trattata col metodo del Boussingault, era in dose maggiore di quella che esisteva nel grano non ammuffito. Inoltre la materia albuminoide, che noi chiamiamo attualmente col nome di zeastasi, era assai più efficace nella propria azione; e finalmente l'aldeide acrilica ammoniacale vi si trovava in dose più elevata.

Aggiungeremo che avendone distillata una piccola quantità con acqua ed acido fosforico, per separare gli acidi volatili, si ebbe un liquido avente odore pronunziatissimo di muffa, ricco di acidi butirrico ed acetico, e di qualche traccia di alcool.

Fu allora che noi pensammo di indagare se la zeastasi potesse avere qualche influenza diretta sulle preparazioni di granturco che si apprestano quale alimento, e fra gli altri la così detta polenta ed il pane.

Per questo si prese della farina sanissima, e la si divise in due porzioni eguali: coll'una fu fatta una polenta con acqua distillata e sale, l'altra venne preparata coll'acqua di lavacro della farina da cui era stata tolta la materia grassa mediante il solfuro di carbonio, e che proveniva dal frumentone alterato.

Queste due polentine vennero rovesciate sopra due piatti di porcellana, coperte finchè erano calde, con campane di vetro, ed abbandonate a se medesime per 18 ore. La prima, che era confezionata con acqua stillata semplice e sale, si mantenne intatta e prese tutte le forme che ha la polenta stantia di qualche giorno. Aveva spezzatura rugosa, presentava una superficie abbastanza granulosa e con una semplice pressione del dito cadeva in minuzzoli. Assaggiata non presentava nessun sapore amaro; era anzi dolce e gustosa.

La seconda invece spezzavasi con difficoltà, non già che presentasse maggior resistenza, ma mostravasi molto elastica, la spezzatura era pellucida ed ineguale, insomma mostravasi come quella che è fatta con farina cattiva e che i nostri contadini dicono che *fa le fila*.

Questi saggi di polenta furono nuovamente abbandonati a se medesimi pel torno di 72 ore, poi vennero asciugati a 95° in una corrente di aria secca, che lasciavasi operare fino a perfetta siccità. Queste due sostanze venivano poi polverizzate e trattate con acido solfo-carbonico: da questo si conobbe chiaramente che la polenta confezionata con acqua che teneva disciolta la supposta *zeastasi*, era un po' più ricca di materia grassa dell'altra, mentre una porzione dell'amido si era reso solubile nell'acqua, e l'estratto che abbandonava coll'evaporazione avea la proprietà di rendersi nero, lasciato che fosse esposto all'aria per poco tempo.

Non ci fu possibile preparare del pane alla guisa che fanno i nostri contadini, ma avendone fatte due pagnotte del diametro di un decimetro, e cotte al forno, vedemmo che quella che era stata confezionata con acqua e sale soltanto, la si conservò lungamente senza dar segno di ammuffire, ed un porcellino d'India la mangiava avidamente, come senza difficoltà si cibò colla polenta che era stata preparata colle medesime precauzioni.

L'altra pagnotta invece che era stata impastata con acqua che teneva in soluzione gli albuminoidi della farina del granturco guasto, dopo tre giorni mostrossi

coperta di muffe, e non della sola muffa comune, ma eziandio a questa era associato l'*Oidium aurantiacum*, colle sue sporangi di color d'oro, e con altre di colore rossastro. — Il sapore ne riusciva ributtante ed amaro; ed un altro cavia stentò lungamente prima di adattarsi a mangiarne; la fiutava, e poi come disgustato se ne allontanava senz'altro, talchè stette circa 12 ore senza toccarla. Spinto poi dalla fame ne mangiò una lieve porzione; tutta la giornata dopo mostrò di soffrirne un malessere generale che si traduceva specialmente nel muovere la testa quasi come un pendolo. Il giorno susseguente però se ne cibò, se non di buona voglia, con qualche apparenza almeno di miglior appetito e così fece per cinque giorni di seguito. Questo per la pagnotta; la polenta invece fu rifiutata sempre. È vero che essa contava più di una settimana dacchè era stata preparata.

Fu allora che ci risovvenne alla memoria un costume adottato da non poche famiglie del contado lodigiano e piacentino, per cui risolvemmo di fare un secondo esperimento.

Nei contadi poc'anzi nominati, ordinariamente al così detto famiglio da spesa, od operaio colonico obbligato a lavorare il podere, oltre al danaro ed altre somministrazioni in natura, usasi comunemente assegnargli del secondo vino, ottenuto dalla fermentazione dei graspi dai quali venne già estratto il vino schietto. Ebbene essi sogliono ordinariamente procurare che questo vino prenda, come dicesi lo *spunto*, ossia converta quel poco di alcool etilico che può contenere in acido acetico.

A prima vista sembra stranissimo questo costume e lo si giudicherebbe condannabile; ma a noi nacque il sospetto che l'istinto avesse suggerito ai medesimi di osservarlo per neutralizzare i cattivi effetti del pane e della polenta di granturco guasto. Perciò prendendo della polenta che era rifiutata dal cavia, la lavammo con acido acetico diluito, cioè ad $^1/_{50}$ della soluzione, e vedemmo allora che l'animale si adattava a mangiarla senza renitenza.

Esaminando le acque di lavacro, le si videro pregne di spore, ricche di sostanze solubili estrattive, fra le quali una che si coagulava a 50° all'incirca. Quest'acqua poi non ebbe la proprietà di suscitare nelle spore la facoltà di cangiare lo zucchero cristallizzabile in quello che riduce il liquore di Fehelyng, come lo possedevano quelle che erano state esportate coi lavacri di acqua semplice dal frumentone guasto favoritoci dal Ballardini. Non fu possibile stabilire quale azione l'acido acetico abbia nella *zeastasi*, ma diremo che l'acqua stessa che si trasse dal granturco guasto, acidulata con un ventesimo di acido acetico non presentava più le reazioni che scorgemmo coll'acqua semplice.

Anche un latte di calce, contenente un grammo dell'ossido idrato di questo metallo in un litro di acqua, fu capace di far perdere l'odore di muffa e quello anche più ributtante di acido butirrico che si svolgeva dai grani fermentati, purchè la miscela si portasse a 100°, ossia all'ebullizione. Sembra che la calce col far sviluppare l'ammoniaca, neutralizzi l'acroleina, modifichi e renda inerte la *zeastasi*, principî che noi crediamo essere i più nocevoli alla salute di coloro che si alimentano con granturco fermentato. E questo si renderebbe credibile anche pel fatto, che da quanto ne assicura il Mantegazza, si danno dei paesi nei quali base dell'alimentazione è il granturco, e null'ostante non si osserva che quivi si verifichino i danni che noi vediamo nelle nostre plaghe, e delle quali diremo nella 2ª parte della Memoria.

Non giudicammo opportuno di occuparci nella ricerca dell'alcaloide che vuolsi si formi durante la fermentazione, e la cui esistenza è ammessa dal Lombroso, dal Duprè e da Carlo Erba; fu poscia segnalata dal Pelloggio, e con ricerche più diligenti e meglio acconcie dallo Zinoni e dal Brugnatelli.

Sulla fede di questi abili esperimentatori non esitiamo ad accettare che nel granturco guasto esista un alcaloide, ma dobbiamo dirlo, senza punto metter dubbio sulle prove che essi adducono, dobbiamo pur confessare che l'azione dell'alcaloide in questione non spiegerebbe parecchi sintomi della pellagra. Perciò siamo dell'opinione che lo agire del granturco guasto sia più esteso di quello che a minime dosi potrebbe operare un alcaloide, e sia dovuto ad influenze maggiormente complicate. È quanto procureremo di dimostrare nella 2ª parte della presente Memoria.

PARTE SECONDA

Applicazione degli studî precedenti in relazione all'origine della pellagra.

La pellagra che mena tanta strage nel ceto de'nostri operai campagnuoli, è, al dire di Ambrogio Tardieu, una malattia cachetica, soventi volte endemica, talvolta sporadica, che possiede quali distintivi caratteristici la facoltà di dar luogo ad un eritema particolare, ad uno sconcerto nelle funzioni della digestione, ad una perturbazione profonda nel sistema nervoso, ed in particolar maniera delle facoltà intellettuali e ad una alterazione di tutte le forze dell'economia dell'organismo.

Questa grave malattia venne osservata dai medici soltanto all'incirca nella seconda metà del passato secolo, non trovandosene menzione negli scrittori di scienza medica dei secoli precedenti, i quali, come giudiziosamente osserva l'immortale Ballardini, furono mirabilmente esatti nel dipingere l'abito esteriore dei morbi, e nella descrizione delle malattie cutanee ed esterne.

Questa prima considerazione di quel distinto cultore delle scienze mediche ha, secondo la nostra opinione, un grandissimo peso per la dimostrazione razionale del fatto, che all'uso smoderato del granturco devesi imputare particolarmente l'origine del malanno; nella quale sentenza pur convengono col Ballardini un grandissimo numero di medici, che a preferenza degli altri si occuparono ad esaminare le cagioni ed i sintomi del morbo.

La circostanza della comparsa della malattia a Monte-Grimano, segnalata dall'Azzaroli, in coincidenza colla introduzione della coltivazione del granturco, ma sopratutto poi un fatto da noi osservato durante il nostro soggiorno seiennale nelle provincie italiane del mezzogiorno che guardano l'Adriatico, cioè che colà non si verificava giammai un caso ben distinto di pellagra, quantunque quegli operai campagnuoli vivano assai più miseramente di quello che facciano i nostri della valle del Po, sarebbe per noi una conferma che lo attribuire al granturco l'origine della

malattia è opinione molto prossima al vero. L'operaio pugliese si alimenta più male, e scarsamente di quello che non faccia l'operaio della regione padana. Unici suoi cibi sono erbaggi, come foglie di rapa, cicoria e consimili, citrioli più o meno sviluppati, e questo è il loro companatico. Base principale dell'alimentazione a quella povera gente è una mistura di farina d'orzo, di ceci, di fava che essa fa macinare contemporaneamente, e scotta mettendola ad imbrunire nel forno con qualche gocciola d'olio, portandola seco in sacchetti alla campagna dove per pascersene, la diluisce e ne fa una polta liquida con acqua, la quale non rare volte è torbida, e quasi putrefatta, nè viene corretta nemmanco col calore scaldandola fino all'ebullizione.

È vero che questi poveri lavoratori soggiaciono ad altre malattie, fra le quali endemica è in loro la paraplegia, morbo non meno fatale, e forse più tormentoso della pellagra, ma casi di quest'ultima affezione morbosa nei paesi meridionali, dove il granturco non è usato non sono conosciuti.

Se non che, contro l'opinione che il granturco ingeneri la pellagra, stanno casi di questa malattia non procedenti da alimentazione maistica, casi che vennero con estrema diligenza raccolti dal prof. Lussana, ai quali si può aggiungere un altro bene studiato e riconosciuto nell' Ospedale di Mantova dal dott. Giuseppe Quintavalle protomedico, ed a cui puossi prestare intera fede conoscendone la lunga pratica nell'esercizio della professione e la scrupolosa diligenza che mette nell' istituire le diagnosi. Questi narra di aver curato quale pellagroso un individuo, che durante la sua vita non fu costretto giammai di alimentarsi, e realmente non si alimentò con prodotti maistici sospetti, eppure era un individuo pellagroso.

Questo caso congiunto a quelli che il sopralodato Lussana annovera, dovrebbe costringere ad ammettere che la pellagra propriamente detta può incontrarsi anche senza che l' individuo siasi esclusivamente alimentato con prodotti maistici. Se non che è da considerarsi come talvolta nell'esercizio dell' arte medica s'incontrino dei casi così complicati, da essere con estrema facilità condotti in errore; da altra parte bisogna pure ammettere col Lombroso la possibilità della trasmissione di questa malattia per eredità, ed accettare con esso la probabilità che la pellagra stessa vada qualche fiata confusa coll'alcoolismo. Che se poi riflettiamo come quest'ultimo malore può alla sua volta complicarsi colla pellagra ereditata, ne verrebbe anche la spiegazione, e dei casi citati dal Lussana e di quell' unico che accenna il medico mantovano.

Queste riflessioni noi le facciamo semplicemente allo scopo di far conoscere quale sia il nostro parere sul morbo, che fu oggetto principale della nostra discussione, cioè che lo riteniamo ingenerato dall'abuso del granturco, e particolarmente di quello che ha sofferto la fermentazione, e questa opinione è confortata non solamente dal Costallat, dal Roussel e da qualche altro medico di oltrealpi, ma sopratutto propugnata dai medici italiani, i quali più degli altri ebbero mezzi e comodi di studiarlo, cominciando dal Fanzago e dal Facheris e discendendo nei nostri giorni fino al Lombroso, ed a quella gloria vivente che è, crediamo, il Seniore de' medici italiani Lodovico Ballardini.

La pellagra è solitamente chiamata nei nostri paesi col nome di *male della miseria,* e su codesto nome volgare fondano parecchi il parere che il terribile morbo,

più che ad altro, debba imputarsi alla deficienza di alimenti sani e pienamente consoni alle esigenze dell'organismo umano, non che alla mancanza di pulitezza e di ventilazione degli abitati, malanni i quali non rare volte si verificano fra noi in quella classe di operai campagnuoli che vivono alla giornata, passando la maggior parte del loro tempo nella stagione fredda e piovosa in stalle caldissime e mal aerate, fortunati di avere un po' di polenta per saziare la fame. A questa opinione, sembra si sottoscriva il Lussana il quale vorrebbe attribuire la pellagra ad insufficienza di riparazione plastica.

Mentre conveniamo collo stesso Lussana, che non ci persuadono interamente i concetti dei fisiologi di Zurigo, Flich e Wislicenus, i quali pretenderebbero che tutto il potere dinamico degli alimenti che traducesi in lavoro esterno, sia dovuto alla combustione dei glicogenici (amido e zucchero) che trovansi negli alimenti, poco concedendo alle materie grasse, nulla alle proteiche, non possiamo tuttavia ammettere col Lussana che una così terribile malattia debba a questa circostanza essere imputata.

Che il granturco sia alimento poco nutriente, od a parlare più esattamente, che nel medesimo i glicogenici e gli albuminoidi non si trovino nelle proporzioni che la fisiologia ha dimostrate meglio consone alle proprie esigenze, noi non lo metteremo in dubbio; ma crediamo che da questo lato siansi alcun poco esagerati i precetti che logicamente discendono da poche osservazioni fisiologiche, forse non sempre bene interpretate. Nessuno negherà, crediamo, che le dottrine del Liebig sulla Chimica Agraria, non abbiano un fondo di vero e di reale, ma tutti oggi sono convinti che per essere accettate ed applicate alla pratica, debbono venir modificate grandemente. Così succedette e succederà eziandio delle dottrine chimiche in rapporto alla nutrizione, che dobbiamo al chimico di Giessen, e le quali molti fisiologi ed igienisti accolgono quali principî che non ammettono discussione, quando si vedrà che la pratica costante di parecchi popoli viene ad infirmare le applicazioni delle preaccennate dottrine.

« Autorità scientifiche incontestabili hanno dichiarato, che per condurre una « vita normale, l'uomo dovrebbe consumare quotidianamente gr. 250 di carne, e « per conseguenza 90 chil. di carne all'anno. Nessun popolo verifica questa cifra, « e dalle statistiche vediamo che il consumo annuo presso i popoli de' quali si reca « il nome è il seguente:

« Spagna	Annui chil. 11	Belgio	Annui chil. 30
« Italia	15	Francia	31
« Svezia	24	Germania meridionale	35
« Prussia	25	Meclemburgo	38
« Austria	26	Inghilterra	82

« Vedendo questo quadro nasce subito l'idea: chi oserebbe sostenere che fra « lo spagnuolo e l'inglese rapporto alle forze fisiche, la differenza sta fra i due « estremi 82: 11? D'altronde in nessun paese la media di 90 chil. viene raggiunta: « non si oltrepassa altro che nelle due grandi capitali che sono Parigi e Londra, le « quali certo non presentano rapporto alla sanità ed alle forze fisiche dei loro abi- « tanti una superiorità che equivalga sopra tutta la popolazione di queste due « nazioni ».

E più oltre, l'autore che citiamo dice: « Malgrado tutto questo, i modi di dire « che si riferiscono ai precetti del regime igienico sono troppo vaghi, e nulla hanno « di preciso. Confrontando fra loro la composizione del frumento e dell' avena, si « giunge a ritenere che il primo è più nutriente della seconda. Ebbene, chiedetene « informazione ad un cavallo che sia abbiadato con questi semi, ed egli vi rispon- « derà: fra i due alimenti il più nutriente è quello che ripara completamente l'energia « morale e le forze fisiche ; col nutrire di più, il frumento, che fra parentesi nutre « troppo, rende il motore meno acconcio a compiere l'ufficio cui è destinato, e l'avena, « col nutrire meno, conserva meglio intatte le potenze dell'animale che se ne ciba ».

Queste riflessioni che noi prendiamo parola per parola da Eugenio Guyot, il quale le diceva scrivendo di una pubblicazione dello Zundel, sembra a noi che si attaglino ottimamente anche alla questione dell'uso del granturco quale alimento. La predilezione che i nostri operai mostrano per questo cereale, fino talvolta a privarsi del frumento toccato loro in compenso, per comperarne del primo, anche qualora per la esiguità della raccolta abbia sul mercato un valore che molto si approssima al prezzo di quello, è un fatto che dovrebbe essere fonte di gravi riflessioni per tutti coloro che condannano l'uso dell'alimento in questione, pel suo scarso poter nutriente.

Noi siamo del parere che l'istinto abbia meglio degli stessi dati forniti dalla scienza, suggerito alle popolazioni il genere che meglio conviene per farne la base della loro alimentazione, e che la introduzione nelle abituali nostre rotazioni agrarie, della coltivazione dello *zea mais* sia stata veramente provvidenziale, perchè nel sistema, oltre ai glicogenici ed ai proteici, esso fornisce una certa abbondanza di materia grassa che altri cereali non contengono. Noi vediamo infatti l'operaio inglese e tedesco preferire il burro per condire i proprî alimenti, il croato e lo slavo valersi quale concia del sego, mentre l'operaio italiano della valle del Po non rare volte limita il proprio alimento alla semplice polenta di granturco, cui fa unico condimento un poco di sale, e rende più appetitosa, abbrustolendola al fuoco, e cangiando così una parte dell' amido in destrina. D'altronde l'uso del granturco non rende meno robusti gli individui ; e parecchie volte viaggiando nei paesi finitimi all'Italia, dove per esecuzioni di ferrovie, od altri lavori pubblici convengono non pochi lavoratori dei nostri paesi, abbiamo sentito come questi siano i prediletti degli assuntori, perchè sanno riunire le tre prime qualità di un buon esecutore cioè, esattezza nel compimento dell'opera, sollecitudine nel lavoro, e grande sobrietà nella vita comune. Havvi, diceano a noi alcuni ricchi del Voralberg, una notevolissima differenza fra il Trentino, e l'abitante del Tirolo tedesco, chè il primo riesce sempre più diligente, esatto e sobrio del secondo.

È nostra opinione pertanto che la ragione principale dell'essere il granturco ritenuto un cereale prezioso, sia principalmente da imputarsi al fatto che è ricco di materia grassa a preferenza degli altri, e che questo grasso sia l'elemento principale che viene consunto ogni qualvolta si tratti di cangiare l'energia interna in lavoro dinamico esterno. E questa opinione per noi appare sostenibile pei fatti seguenti: è una osservazione costante che in coloro i quali accudiscono a gravissime fatiche, giammai si sviluppa enormemente il sistema adiposo; è noto egualmente quanto narra il

Boussingault del faticoso lavoro cui si assoggettano i muli che vengono adoperati nelle miniere argentifere del Messico, alle quali fatiche non resisterebbero se non fossero abbiadati col cereale in discorso. Si sa pure egualmente come i cavalli di un reggimento di lancieri in Francia non potessero resistere ad un cangiamento di regime alimentare, nel quale all' avena era sostituito l'orzo; e sebbene quest'ultimo fosse più ricco di azoto, era tuttavia più povero di grasso di quello che fosse il seme che era stato sostituito, cosa che pure si verificò per gli equini da fatica del Creuzot.

Noi professiamo pertanto l'opinione, che il granturco considerato per se medesimo non sia poi un cereale che, anche servendo qual base all'alimentazione, induca in chi se ne ciba una deficienza assoluta di riparazione plastica; e tanto più ci confermiamo nella nostra opinione allorchè ci facciamo a considerare che dei cereali alimentari, il granturco non è forse il meno provveduto, e può dirsi che un chilogrammo di farina del medesimo corrisponda esattamente ad egual peso di pane comune, mentre poi alla sua volta supera quest' ultimo in contenenza di fosfati. Le analisi poi che abbiamo istituite sulle varietà del medesimo grano ci dimostrano chiaramente come quelle che il Lussana riferisce, e che non sono sue certamente, non possano accettarsi. V' ha troppa differenza fra le une e le altre per non dover muovere un dubbio sulla loro esattezza.

D'altronde a noi sembra che il difetto di riparazione plastica non si possa tradurre in un malore, che ha caratteristiche ben definite, e tutte sue speciali, e non presenta giammai veruno di quei sintomi che accennano ad assoluta mancanza di osservazione dei precetti fisiologici di un' alimentazione razionale. È noto, e questo eccitava non rare volte la meraviglia dei medici, che i morti per pellagra ordinariamente presentano la singolarità di organi abbastanza nutriti; della qual cosa ci sono testimonî lo Strambio, il Ballardini e non pochi altri; mentre si sa che il difetto reale di riparazione plastica fa che tutto l'organismo se ne risenta, e la prima cosa che si osserva è un cangiamento assoluto nella quantità di urea che fa parte delle secrezioni. Ma dappoichè questa secrezione non vedesi alterata nella quantità media che emettono i pellagrosi (Lombroso) bisogna dunque concludere che non si possa credere come questa fosse tale, se la malattia procedesse realmente da insufficienza di riparazione plastica.

D'altronde se veramente si dasse cotale insufficienza, questa la si manifesterebbe non solo con deficienza normale di urea nelle secrezioni, ma eziandio per un altro segno caratteristico il quale dimostra chiaramente il nostro assunto. Al dire del Voit e del Frerichs, gli animali che muoiono di inanizione perdono moltissimo del loro peso; i tessuti anch'essi deperiscono più o meno lentamente, ma sopratutto poi quello che svanisce in maggior copia è il *tessuto adiposo*. Ma noi invece troviamo i cadaveri dei pellagrosi piuttosto ricchi di grasso, anzi la si verifica tante volte, che lo Strambio non esitava a scrivere: *Obesitas et corpulentia non raro ad mortem usque perseverant.*

Nè potrebbe dirsi che questo grasso fosse dovuto all' eccesso che riscontrasi naturalmente nel granturco, ovvero a quello che ingenerasi cogli amidacei, che pure predominano nello stesso cereale. Riguardo a questi ultimi è cosa probabilissima, che una porzione dell'amido passi per gl' intestini senza aver subìto alterazione; è noto

che tanto la *ptialina*, o *diastasi salivare*, quanto la *pancreatina* posseggono la proprietà di saccarificare l'amido; ma esse, quali corpi azotati, debbono avere origine dagli albuminoidi o sostanze plastiche dello stesso organismo. Ora queste secrezioni saranno in proporzione della quantità di proteina ingerita, e per conseguenza, così la saliva come il succo pancreatico dovranno essere poveri di tali materie metamorfizzanti, quando non ne entrino molte nell'alimento. Questo che noi sospettiamo avrebbe una quasi certezza nel fatto che andiamo a descrivere.

Due porcellini di India (cavia) di peso quasi eguale vennero per alcuni giorni appastati con farina di grano turco, e ne consumarono all'incirca il 9 per % del loro peso. Tenuto conto del nitrogeno che gli alimenti contenevano, un decimo della razione venne per uno degli animaletti sostituito con albume d'uovo coagulato, e sbattuto con etere, e si osservarono gli escrementi. Quello che si cibava con alimento dove non eravi albumina, emise sempre una quantità notevole di granelli di amido, il quale non solamente si manifestava al microscopio, ma eziandio all'azione dell'iodio.

Non è nemmanco da ritenersi che provenga dall'eccesso del grasso, che il granturco contiene. Si sa che alla insufficienza di riparazione plastica va ordinariamente congiunta una depressione nelle funzioni assimilatrici, e noi possiamo aggiungere che nel caso dei due cavia, dei quali si esaminarono gli escrementi, trovammo sempre meglio ricchi di materia grassa quelli dell'animale che si nutriva di farina senza aggiunta di albume coagulato.

Tutte queste riflessioni, sembra a noi che conducano alla conseguenza diretta della non ammissibilità dell'opinione, che la pellagra sia dipendente dal fatto di insufficienza di riparazione plastica.

Sarebbe per questo meglio accettabile la opinione professata dal Lombroso nella sua bellissima Memoria, giustamente premiata dal R. Istituto lombardo, che dessa avesse origine piuttosto da una specie di intossicazione dovuta alle sostanze che si formano, allorchè il frumentone soggiace a quei cangiamenti interni che si manifestano quando fermenta?

Prima di discutere questa opinione, ci è d'uopo spiegare quello che intendiamo per intossicazione od avvelenamento. *Noi riteniamo tossico o velenoso quel corpo il quale, operando in piccole quantità sull'organismo animale, ne altera talmente tutto il sistema, od una parte di esso, da condurre in un lasso di tempo più o meno prolungato alla morte, qualora non si sia solleciti a recarvi con altro composto un rimedio che ne neutralizzi l'azione, e lo elimini dall'organismo.*

Noi ci domandiamo perciò: è possibile collocare la pellagra nel numero delle malattie provocate da intossicazione? Ecco sotto quale aspetto consideriamo la questione. L'organismo che viene scosso da una sostanza velenosa, può benissimo assuefarsi all'azione della medesima, amministrata che sia sotto certe forme, ed in certe dosi. Non ignorano i medici che allorquando si assoggetta un ammalato alla cura degli *stricnici*, di tanto in tanto è necessario elevare la dose del medicamento, perchè coll'andar del tempo la macchina vi si è assuefatta, e non presenta più i fenomeni che si scorgevano dapprincipio, e per rinnovarli fa d'uopo calcare la mano nell'ordinazione. Tutti sanno esservi alcune popolazioni che usano a tenui dosi l'arsenico,

senza punto soffrirne, attribuendo anzi a questo costume la robustezza della quale fruiscono. Oggidì non v' ha, quasi diremo, persona la quale non adoperi tabacco, che pur contiene una forte dose di nicotina, e ciò senza che la salute per questo ne deperisca. Che il granturco guasto e fermentato possa recare seco lui un corpo capace di produrre i fenomeni che si verificano colla stricnina, noi lo discuteremo un po' più innanzi, quantunque sulla esistenza problematica del medesimo fondi il Lombroso le ragioni principali per ammettere una specie di *intossicazione maistica;* ma quand'anche cotale sostanza rassomigliante all' alcaloide estratto dagli *stricnos,* realmente esistesse nel granturco infetto, possiamo noi attribuire esclusivamente alla sua presenza il fatto di dare origine alla pellagra? Anzitutto a noi sembra che i sintomi, e l'azione fisiologica che presenta un avvelenamento per stricnina, siano ben lontani da quelli che presenta la pellagra, e pensiamo che ben difficilmente un medico potrebbe confondere gli uni cogli altri; d'altronde lo attribuire all' esistenza di una speciale sostanza alcaloidea que'profondi dissesti organici, e meglio nervosi, che si verificano, non pare fondatissimo.

Che il granturco fermentando abbia lasciato formare in lui un alcaloide speciale, non lo metteremo in dubbio. Quando ce lo attestano il Carlo Erba ed il Pelloggio, allorchè questo fatto viene controllato dal Brugnatelli e dallo Zinoni, il dubitare dell'esistenza di quel corpo non è cosa conveniente; quantunque nei nostri esperimenti e nelle nostre prove non abbiamo giammai potuto isolarlo. Diremo anzi senza più, che apparendoci invece costantemente l'acraldeide ammoniacale, sospettammo sempre che fosse questo corpo il quale avesse tratto in errore i Chimici; ma non avendo di questo prove sufficienti, allontanammo questo sospetto da noi, come non ragionevole.

Tuttavia, anche accettando come certa la esistenza dell' alcaloide presunto, possiamo credere che ad esso debbansi imputare realmente i malvagi effetti che danno origine alla pellagra?

Alcune riflessioni basteranno, noi crediamo, a rendere ragione dei nostri dubbî, ed a mostrarli non fuori di luogo.

Nessuno dei Chimici sopralodati, colle loro pazienti e prolungate indagini, giunse ancora ad isolarne una quantità che bastasse per farne un' analisi quantitativa, e nemmanco ad ottenerne sali cristallizzati ben definiti. La prova che adducesi a meglio convincere dell'esistenza dell'alcaloide è la sua azione speciale e caratteristica sulle rane, che il Pelloggio, e prima di lui il Lombroso, affermano di aver osservato, e che apparirebbe identica a quella della stricnina. Ma contro questo fatto si erigerebbero le osservazioni del Brugnatelli e dello Zinoni che affermano di non aver potuto verificare tale fenomeno sugli stessi batraci.

Può darsi benissimo però che l'uno e gli altri abbiano ragione, qualora si consideri che il Pelloggio non operò sui medesimi materiali che furono argomento dello studio de'Chimici pavesi. Questi esaminarono 30 chil. di pane che lasciarono ammuffire, non che una certa quantità di maiz guasto; ma convengono che la porzione di alcaloide, la quale potè essere isolata, fu tanto minima, che per giungere a conseguirne abbastanza da darne i caratteri, bisognò che il pane fosse in tutta la sua massa invaso dalle muffe. Tutto questo a noi appare fonte di gravissime riflessioni: al dire del tossicologo di Dorpat, il Dragendorff, la stricnina può essere riconosciuta per le reazioni

che le sono particolari in una proporzione corrispondente a gr. 0,00015 ed anche meno; e siccome agendo sopra 15 chil. di pane di maiz ammuffito, il Brugnatelli e lo Zinoni ne riconobbero bensì parecchie reazioni caratteristiche e vi riscontrarono la presenza del nitrogeno, non giunsero tuttavia a procurarsene a sufficienza da poterne dare i caratteri fisici più spiccati, è da ritenersi che questo nel pane ammuffito non si elevi al di là di qualche milligramma. E tutto questo nel pane che era interamente invaso dalle muffe, cioè in quello che anche un affamato rifiuterebbe. Nel nostro soggiorno prolungato nei paesi della valle del Po, dove il pane di granturco è l'alimento quotidiano del contadino, abbiamo infatti dovuto osservare non rare volte, come il pane di quei paesani facilmente ammuffisca, ma osservammo eziandio che in questo caso, cercavano di eliminare le macchie verdognole e giallastre che nel pane comparivano, rigettando la parte che mostravasene offesa. Pare quindi che la natura e l'istinto suggeriscano loro di non introdurre nel proprio organismo queste muffe che ritengono dannose. Il pane pertanto, che si lasciò ammuffire completamente dai Chimici pavesi, non sarebbe stato mangiato da nessuno.

D' altronde la quantità di alcaloide che entra nella sua composizione, e che quei Chimici hanno potuto separare, era così tenue che, se potesse recare i danni sospettati, come da parecchi si ammettono le teorie della medicina omeopatica, si dovrebbe eziandio concedere che si diano gli avvelenamenti omiopatici. Di più le quantità minime assorbite dovrebbero essere eliminate, se l' alcaloide rassomiglia per le azioni alla stricnina, per la via delle orine. Ammettiamo pure che i 15 chil. di pane esaminati dal Brugnatelli contenessero fino a gr. 0,01 dell' alcaloide, e che un uomo li possa consumare nel periodo di una settimana, la dose che ne prenderebbe quotidianamente si eleverebbe tutto al più a milligrammi 1,42, mentre si sa che per ottenere un effetto dalla stricnina, i medici prescrivono ordinariamente da 4 a 6 milligrammi in una pillola e ne danno di queste due al giorno (Orosi), proseguendone l'amministrazione fino a sei giorni.

Non pochi che soffrono di malattie alla spina, vengono assoggettati a questa cura, e per quanto si sa, nessuno dei sintomi della pellagra si è mai nei medesimi manifestata durante e dopo la cura; che più? il Lombroso accenna quale sintomo una alterazione profonda nelle funzioni digestive: pel sapore amarissimo che le è proprio, per quell' azione che esercita quale eccitante sul sistema nervoso, parrebbe che le funzioni di digestione non potessero patire detrimento. Noi dovremmo quindi concludere che, mentre il Lombroso è, a nostro parere, nella piena ragione, allorchè attribuisce al granoturco guasto ed ammuffito la causa principale della pellagra, non sembra poi nella piena verità, quando giudica che i gravi disturbi organici che ingenerano la malattia siano provocati dall' alcaloide supposto ed incriminato.

Un' altra opinione, che veramente più delle altre, a nostro vedere, si approssima al vero, anzi lo tocca e vi si combacia, è quella la quale venne professata, ed anche oggidì ritenuta dai medici i più celebrati, e la quale dobbiamo a quella tanto modesta quanto sapiente gloria italica che è il dott. Lodovico Ballardini di Brescia.

L' altissimo merito di questo venerando ed illustre bresciano, per noi, non è soltanto nell' aver additata la causa principale del malanno, ma quello eziandio di averla dimostrata con esperimenti, che pei tempi nei quali furono eseguiti, non poteano più

oltre essere spinti; ed anche oggidì in cui il metodo sperimentale può disporre di mezzi assai più efficaci, le prove dell'illustre italiano rimangono sempre esempio di lavoro coscienziosissimo e di alta moralità scientifica.

Il Ballardini attribuiva esclusivamente la causa della pellagra alle muffe che accompagnano quasi costantemente il granturco guasto e fermentato. La Botanica crittogamica allora non era sviluppata così vivamente come lo è nell' epoca attuale: le fermentazioni non aveano ancora ottenuto che L. Pasteur, il vero creatore della scienza in codesto ramo, avesse loro rivolto lo sguardo. Noi crediamo perciò che anche sotto questo aspetto, il Ballardini abbia un merito insigne, essendo stato uno dei più solleciti a richiamare l' attenzione degli scienziati sopra un argomento, che fino allora era quasi interamente sfuggito alle loro indagini. Era noto il fatto che un cavallo il quale avea mangiato del pane ammuffito, dopo poche ore era morto con sintomi di avvelenamento; l' istinto avvertiva che le sostanze coperte di muffa non erano sane, e perfino lo stesso volgo le rifiutava, ma fu un lampo di genio quello che illuminò il Ballardini, allorchè pensò di attribuire a que' minimi esseri il principio di quel morbo fatale, che mena tanta strage nelle nostre campagne.

Ben è vero che si potea ragionevolmente obiettare al Ballardini delle considerazioni gravissime, ma anche queste non tolgono che il principio fondamentale non sia nel vero. Si disse difatto che non potea essere lo *Sporisorium* accennato dal barone Cesati, e che il Medico Bresciano giudicò quale causa prima, quello che facea nascere la pellagra, e ciò per la rarità dello stesso fungillo, il quale ben di rado riscontravasi nel granoturco che avea sofferto; e lo stesso Ballardini in uno scritto posteriore d'assai a quello col quale accennava all' importantissima sua scoperta, non esitava a confessare che, come egli attribuivalo all' esistenza dello sporisorio, potea benissimo essere anche dovuto ad un pennicillo, e ciò colle seguenti parole: « Per-
« locchè richiamandosi la tesi da noi sostenuta essere la degenerazione fungosa del
« grano la causa efficiente del morbo pellagroso, non si esita punto ad ammet-
« tere che non il solo *sporisorio* ma e il pennicillo, ed altre forme di fungo, possano
« guastare in guisa il granoturco da renderlo deleterio e ingeneratore del male pella-
« groso in chi incautamente, o per bisogno è tratto ad alimentarsi di esso ».

Se non che un' altra obiezione potrebbesi pure mettere innanzi alla dottrina del Medico Bresciano ed è la seguente, la quale piuttosto che obiezione propriamente detta, potrebbe riassumersi in una domanda, ed è: I fungilli, sporisorî o pennicilli, sono essi dannosi per se medesimi, ovvero lo riescono, perchè vivendo a spese delle sostanze immediate che formano il granturco, le modificano colla loro vegetazione in maniera da scemare in esso la facoltà di nutrire normalmente?

Le parti che compongono le muffe o fungilli intaccano il seme del mais, allorchè questo trovasi in un ambiente umido, nel quale all' umidità va congiunto un certo grado di calore che si spinge fino a 35°, sono divisibili in filamenti, sporangi, e spore. Codeste due ultime parti, allorquando il granturco viene macinato, si mescolano alla farina e vengono ingerite colla medesima allorchè questa prese forma di cibo.

Le spore introducendosi nello stomaco possono avere un' azione speciale sull'organismo, o meglio sui liquidi che trovansi nel ventricolo, ma ben difficilmente

penetrano con questi nel circolo. La loro presenza fa che que' liquidi si alterino facilmente.

A dimostrare la loro intensità di azione noi abbiamo operata la seguente esperienza: presi 20 gr. del granturco alterato e ricchissimo di fungoidi, l'abbiamo, ad esportare meccanicamente la polvere verdastra che vi era aderente, lavato con acqua distillata, la quale difatto mostrossi torbidissima.

Le spore che quivi nuotavano erano di molti generi, e certamente vi abbondavano i pennicilli. Presa una porzione di quest' acqua, 150 c. c., vi si infusero 15 gr. di zucchero candito. Il liquido appena preparato era neutro; ma dopo tre giorni mantenuto alla temperatura di 28°, mostrò anzitutto una reazione acida pronunziatissima, cui fece seguito qualche bollicina di gas. Dopo otto giorni si separò il liquido dalle spore coll'aiuto del filtro, e lo si trovò ricco di acido lattico, e di acetico, il secondo dei quali lo si potè separare agiatamente colla distillazione. Una parte dello zucchero però era rimasta intatta, e soltanto da cristallizzabile che era, si cangiò in glucosio, avendo acquistata la facoltà di ridurre il liquore di Fehelyng.

Ma un fenomeno anche più curioso ci fu offerto da un altro miscuglio che andiamo a descrivere. Si presero 300 c. c. di acqua ricca di spore, si mescolò alla medesima trentaquattro grammi di zucchero candito, un mezzo grammo di fosfato di ammonio, altrettanto di carbonato di calcio precipitato col mescolare nelle debite proporzioni cloruro di calcio e carbonato di ammonio, e finalmente preso l' albume di un uovo venne coagulato, poi essiccato a 100°, indi lavato con etere, essiccato di nuovo e polverizzato, fu aggiunto alla mescolanza precedente nel peso di gr. 1,5. Questa mescolanza posta in bagno a regolatore che segnava 33°, non tardò molto a presentare dei fenomeni abbastanza notevoli. Si vide anzitutto uno sviluppo sufficiente di gas, che riscontrossi una miscela di biossido di carbonio e di idrogeno, mentre palesamente si osservò che il carbonato di calcio andavasi sciogliendo in maniera da vederne i cristallini microscopici essere sollevati dal fondo, per emettere una bollicina di gas.

Ma raccolto tutto il gas sviluppatosi, col mezzo della vescichetta di gomma elastica, in un apparecchio analogo a quello che descrivemmo nella prima parte della presente Memoria, si osservò che la quantità di biossido di carbonio era presso a poco quella che si era sviluppata dal carbonato di calcio disciolto; mentre l' altro gas era idrogeno puro, misto ad una leggerissima quantità di *idruro di metilo* o gas delle paludi. L' albumina intanto si gonfiava, diveniva gelatinosa, ed a poco a poco incorporossi nel liquido. Una quantità ingente di bacterî si fece subito manifesta al microscopio, ed il residuo salino che si era formato mostrossi costituito quasi totalmente di acido butirrico; tanto è vero che trattato con solfato di etilo diede manifestamente il noto odore di frutta, che caratterizza il butirato di etilo. Stando a questi fatti, parrebbe che le spore, le quali accompagnano il granturco guasto, penetrando nello stomaco, diano luogo alla formazione di sostanze ben lontane dall'essere assimilabili.

La produzione poi della sostanza acida, aumentò ancora, se invece di mettervi l' albumina coagulata e dilavata con etere, si aggiungeva dopo averle fatto subire l' azione della pepsina, talchè divenisse gelatinosa. Allora lo sviluppo di idrogeno, e di idruro di metilo faceasi maggiore, e non mancavano traccie di idrogeno solforato.

Le spore pertanto delle fungoidi che trovansi nel maiz guasto hanno sicuramente un'azione speciale sui liquidi nutritivi, che si formano nello stomaco durante la digestione, dando luogo a materiali che alla loro volta agiscono sulle pareti dell'organo digerente, ne alterano le funzioni, e ne fanno degenerare le sostanze che diverrebbero assimilabili. Anche più energicamente esse spore operano sopra il succo gastrico artificiale. Presa della pepsina, di quella che fu preparata nel laboratorio di Carlo Erba a Milano, diluita nell'acqua, acidulata con sei o sette gocciole di acido idroclorico purissimo, e due o tre di acido lattico, e mettendovi dei pezzetti di albumina coagulata, questa gelatinizzavasi dopo poche ore, se mantenevasi al calore di 35°; ma se vi si mescolavano delle spore, l'azione era assai più lenta, ed il liquido prendeva un odore acre e nauseabondo. Dobbiamo però confessare che in nessun caso ci avvenne di osservare coll'albuminoide, o peptone che si era formato, di riscontrare in esso il potere di rendere scorrevole la colla di amido, come lo facea la *zeastasi,* che ha tanta somiglianza colla *cerealina,* e meno la comparsa dell'acido butirrico; non si scorgeva giammai formazione di acido grasso che assumesse le forme e le proprietà dell'acido sebacico, od altro.

Tuttavia, anche ammettendo che le spore rechino tutti questi disturbi, i quali spiegherebbero i sintomi dei rutti, di peso al ventricolo, di bruciore, esse dovrebbero a questo limitare la loro azione. Le spore non si disciolgono, nè vengono assorbite; per cui non entrano nel circolo per le vie dello stomaco. Quindi non potrebbero ingenerare quegli effetti di alterazione profonda nelle funzioni, che si verificano negli organi più delicati ed essenziali alla vita, e fra gli altri in quello pel quale si fa manifesto il pensiero. Il Kühn infatti ha parecchie volte osservato come gli escrementi di vacca siano ricchi di spore di criptogame, e vi riconobbe dei seminuli di *puccinia graminis,* di *puccinia comunis,* di *uromyces apiculata;* e noi pure, in base a questa osservazione, non ritardammo di fare gli stessi rilievi sugli escrementi di un cavia, che per 15 giorni nutrimmo con granoturco preso dal verderame, ed in ogni caso ci si presentarono sempre spore e frammenti di pennicilli in buonissima dose, come pure frammenti di una pianticella somigliante ad un fascio di spine, e che fu già rammentata. L'economia animale sembra dunque si sforzi ad eliminare questi corpi per le vie escrementizie. La loro sfera però sarebbe limitata alle funzioni digestive dello stomaco, e forse non riuscirebbe così pronunziata se si verificasse che ad un certo grado di calore venisse meno in loro la vitalità. È quello difatto che noi trovammo, giacchè le spore scaldate a 100°, cessavano di agire con energia, e, sebbene non si potesse pienamente accertare che fossero del tutto prive di vita, perchè la saccarosi cangiavasi, sotto alla loro influenza, in glucosi, più debolmente nondimanco; non si osservavano più gli effetti della fermentazione, nè quelli sull'albumina coagulata, e non gli altri sulla pepsina. È noto d'altronde che tutte le criptogame, ed i loro seminuli perdono ogni efficacia di azione a quella temperatura, come egualmente si sa che gli alimenti confezionati con granturco, prima di essere ingeriti, vanno assoggettati ad una temperatura che molto si avvicina alla surreferita.

L'azione pertanto delle spore, stanti le condizioni da noi accennate, dovrebbe veramente essere quella di qualsiasi veleno, e quindi esse opererebbero per la sostanza di cui sono realmente composte, e quindi verrebbe in iscena nuovamente il concetto

del Lombroso che imputa i mali di cui è feconda la pellagra, all' esistenza di un alcaloide, che sarebbe quello del quale venne riconosciuta l' esistenza dall' Erba, dal Pelloggio, e dal Brugnatelli e Zinoni.

Ma noi abbiamo già osservato che, quand' anche si ammetta l' esistenza di questo corpo, ed il negarlo, dopo gli studî di que' diligentissimi sarebbe un assurdo, non è possibile spiegare con quello le profonde alterazioni che reca seco il malore di cui discorriamo. Sono tutte le funzioni di nutrizione che trovansi alterate, quelle della pelle egualmente subiscono profondi e dannosi cangiamenti, come non ultima purtroppo è l' altra che si riferisce ai principali centri nervosi. Casi di intossicazione che abbiano cotale analogia, non pensiamo se ne diano parecchi, se la loro origine si dovesse attribuire all' uso esclusivo di un alcaloide in tenuissima quantità.

È d' uopo in conseguenza, cercare altrove la ragione di una così profonda perturbazione organica. Il Ballardini avea pienamente indovinato, allorchè affermava che la comparsa dei fungilli nel granturco era una delle cause impellenti della malattia. Egli quindi fu uno dei primi, nell' epoca in cui può dirsi che il microscopio era più che altro uno strumento a dimostrazione di teorie fisiche, e non di applicazione, a segnalare l'influenza di questi nemici, tanto più temibili, quanto più sfuggono alla osservazione che non sia minuziosissima e diligentissima, e lo si può contare con orgoglio fra i fondatori della teoria delle malattie parassitiche, o da fermento. Naturalmente, anco allo scopritore delle verità prime, sfuggono non di rado parecchie conseguenze fra le più brillanti; così accadde eziandio al Ballardini, che forse non intravide egli stesso la fecondità immensa della sua scoperta. Nè vi ha da far le meraviglie. Chi avrebbe detto ad Alessandro Volta, allorchè per comporre la sua pila, metteva assieme dei dischi di zinco, di argento e di panno bagnato nell'acqua salsa, che quella sua scoperta avrebbe creata la luce elettrica ed il telegrafo? Così il Ballardini, vedendo come nel granturco guasto si moltiplicavano i fungilli, indicò questi quale cagione principale della pellagra, mentre noi invece crediamo che essi siano un segno speciale che dimostra come il cereale che ne è affetto possa creare le sostanze che danno luogo alla malattia. È da questo punto di vista che noi differiamo nell' opinione dell'illustre Medico di Brescia, seppure v' ha differenza di parere fra quanto noi opiniamo e quello che ne disse l' autore citato. Noi crediamo che i fungilli nel granturco guasto siano un segno, non la causa efficiente per cui si ingenera il morbo, e riteniamo che la loro presenza non sia essenziale, perchè il granturco guasto non debba egualmente ingenerare la pellagra. Esaminiamo la cosa. Quali sono le sostanze che si formano durante la fermentazione del cereale? Ne segnalammo due principalmente: l'*acroleina ammoniacale* e la *zeastasi*.

Tutti sanno quale sia l' azione energica che sulle mucose dispiega l' acroleina. Basta che poche gocciole del suo vapore si spandano nel laboratorio di chi la prepara, per provare una delle più dolorose irritazioni agli occhi ed ai polmoni. Noi ignoriamo ancora fin dove si spinga l' azione deleteria di tale sostanza, allorchè agisce sull' organismo, ma nessuno potrà negare come essa abbia un' azione quasi diremo caustica ed irritante sulla mucosa dello stomaco, la qual cosa ci spiegherebbe i fenomeni di bruciori allo stomaco ed altri così bene indicati dal Lombroso.

Ma l' acroleina ammoniacale non è la sola sostanza che si formi nel granturco

fermentato. Notammo eziandio come contemporaneamente gli albuminoidi subiscano una alterazione, e diano luogo perciò alla formazione della *zeastasi;* questa sostanza ha la proprietà di rendere scorrevole l'amido, di convertire lo zucchero cristallizzabile in glucosio, e di farlo convergere ad acido butirrico, ed altri acidi della serie grassa. Penetrando essa nel circolo, e lo può a guisa dei peptoni e della pepsina, può essere assorbita; obbedendo alla dialisi delle membrane, suscita nel suo passaggio attraverso al sangue le reazioni da noi accennate, e sopratutto poi quella di aumentare la materia grassa, od almeno si oppone alla preesistente di consumarsi. È questa noi crediamo la ragione per cui l'organismo de' pellagrosi presenta il fenomeno cui accennammo, e pel quale i medici facevano le meraviglie osservando i cadaveri dei colpiti da quel morbo, sempre in condizione di sufficente nutrizione.

Due a nostro parere sono le cause per le quali questo eccesso di grasso riscontrasi nei cadaveri de pellagrosi, quantunque pei patimenti cui soggiacquero, dovrebbero contenere ben altro che dell'adipe. Il granoturco, come avvertimmo, è sempre uno dei cereali che in materia grassa supera tutti gli altri, compresa eziandio l'avena. Ma questo grasso, sotto all'influenza della fermentazione, si acidifica in parte ed irrancidisce, e quindi il succo pancreatico non può agire su di esso e passa negli escrementi, se non tutto almeno in parte. La seconda è la presenza della zeastasi, che passata nel circolo fa volgere alcune materie glicogeniche e qualche albuminoide, ed anche una parte del tessuto nerveo a degenerazione grassosa.

Concludendo quindi questa seconda parte dello scritto presente, crediamo si possa riassumere nelle seguenti conclusioni:

1. Non sembra sostenibile la tesi che imputar si debba la pellagra ad insufficienza di riparazione plastica, della quale si accuserebbe il granoturco.

2. Pare che il concetto di ammettere la esistenza di un alcaloide nel granturco fermentato, non dia una spiegazione dei fenomeni morbosi i quali si manifestano nella pellagra, abbenchè questo alcaloide sembra che esista realmente, seppure non si confonde coll'acraldeide ammoniacale.

3. Esistendo realmente l'acraldeide ammoniacale nel granoturco fermentato, unitamente ad una sostanza che ha qualche analogia colla diastasi, moltissima colla cerealina, sembra che a queste si debba imputare le perturbazioni che prime si manifestano nelle funzioni stomacali, e quelle che poi seguono per la degenerazione che l'ultima provoca nei tessuti, e particolarmente nel tessuto nervoso.

4. Il concetto del Ballardini, che si attribuisca la cagione della pellagra alla presenza dei fungilli che trovansi nel granturco, è pienamente giusto, quando s'intenda nel senso che questi sono un segno non equivoco della alterazione profonda cui soggiacquero i semi, per apprestare gli elementi vitali delle criptogame a spese del grano.

5. Ad ogni modo, ogni qualvolta si verifichi che il granturco ha sofferta la fermentazione, è indispensabile toglierlo dal commercio e vietare ai contadini di farne uso quale alimento.

Ma qui sorge una domanda: dovremo dunque rigettarlo, mentre negli anni scarsi di ricolto può presentare una grande risorsa alle popolazioni? È a questa domanda cui risponderemo nella terza parte del presente scritto.

PARTE TERZA

Precauzione da prendersi nel commercio del granturco e nell'apprestazione degli alimenti a base di questo cereale. Considerazioni economico-agricole.

Il Ballardini pel primo, il Lombroso poscia, nelle loro varie opere che si conoscono per le stampe, diedero savissimi precetti di igiene e suggerirono precauzioni tali, che, rigorosamente osservate, ridurrebbero ben presto il numero degli assaliti dal flagello della pellagra. Non sapremo quindi far altro che ripetere quanto cotai benemeriti esposero; ma crediamo non sia fuori di luogo la dimostrazione della razionalità delle avvertenze che esposero nei varî loro scritti, e come possa trovarsi la convenienza di seguirle, anche parlando nel senso della economia rurale.

Ed anzitutto noi opiniamo che il granturco guasto, o per presenza di micodermi, facilissimi a discoprirsi anche ad occhio nudo, per il colore verdastro che assumono, od anche semplicemente fermentato, dovrebbe essere escluso assolutamente dall'uso quale alimento. Ma sorge subito contro a questo primo suggerimento una gravissima obiezione: chi può mettere un freno a che il granturco guasto corra in commercio? Una sorveglianza attiva ed energica per parte di coloro che sono preposti alla sorveglianza delle materie alimentari che vengono sui mercati, sarebbe certamente di un qualche aiuto; ma è d'uopo prima di riprometterci un sostegno da questo lato anteporre un'osservazione. Tutti i municipî, più o meno numerosi di popolazione, hanno oggidì un ufficiale che incombe a questa funzione di sorvegliare le annone, questa però la si limita alle ortaglie, alle frutta ed a qualche alimento già confezionato, ed ordinariamente nemmanco a tutti quelli che si potrebbero classificare sotto questa partita.

Noi non abbiamo giammai sentito che succedesse un caso di veder sequestrata una certa quantità di cereali perchè avessero formentato; e probabilmente se si volessero eliminare dal commercio, non si avrebbe tutta la ragione per farlo. I cereali, oltre al servire di alimento, possono essere fonte di altre industrie, come confezione di amido, trasformazione di questo in glucosio per averne poi alcool, nel quale ultimo caso le flemme o residui della distillazione si convertono in materia alimentare pel bestiame. Perciò, quand'anche un commerciante di granaglie portasse sul mercato una partita di granturco guasto, non sappiamo con quanto di diritto gli si potesse vietare di venderlo, potendo sempre addurre la ragione che ei lo esita perchè serva alla distillazione ed alla fabbricazione dell'amido; nè manco si potria vietare all'acquirente di comperarlo potendo egli affermare che ne fa l'incetta per questo oggetto, ed anche per darlo da mangiare al bestiame. Quantunque non sarebbe fuor di luogo, nell'ultimo caso di tenerlo in avvertenza, perchè il cereale che ha sofferto è meno nutriente, e che non di rado gli animali lo rifiutano, e se ne cibano soltanto qualvolta vi siano spinti dalla fame, nè possano avvantaggiarsene, soffrendone anch'essi non poco, tuttavia una prescrizione che divietasse di commerciare il granturco guasto

per micodermi, o fermentato, non sarebbe guari osservata, od almeno non sarebbero poco numerosi i casi nei quali si trascurasse.

Lo eliminare pertanto dal commercio il granturco guasto, o *sobbollito* come volgarmente si chiama, quando questo cereale ha sofferto colla fermentazione, non è, e non sarà cosa facile, fino a tanto che non si facciano persuasi quelli che dirigono le aziende rurali che il somministrare del frumentone guasto agli operai è un attentato alla loro salute ed anche alla loro vita. Se costoro conoscessero quale danno recano ai proprî simili, costringendoli a cibarsi del cereale che ha sofferto, impedirebbero in ogni caso che la gente ne usasse, tanto più riflettendo che dal medesimo si può trarre qualche prodotto industriale che ripaga il grano scartato quasi allo stesso prezzo, come se si usasse quale alimento.

Tutto al più la pubblica sorveglianza, perchè non si mettessero in commercio, e non si diffondessero nelle famiglie grani e farine avariate, potrebbe essere esercitata nei mulini, e dai mugnai medesimi; ma diciamolo come sta: possiamo noi ripromettere una specie di esercizio di pulizia medica, che tale sarebbe, da gente grossolana, e che ben difficilmente si persuaderà del danno che seco reca l'uso, quale alimento, del granturco guasto? E quand' anche essi ne siano persuasi, potranno poi innestare le loro convinzioni nei clienti che recano a macinare questo cereale? Meglio a noi sembra, potrebbesi affidare tal sorveglianza ai medici condotti, aumentando loro lo scarso stipendio, perchè oltre al prestar le loro cure gratuite esercitassero eziandio quella di tutelare la pubblica igiene.

Il rimedio migliore di tutti però, sarebbe quello che di granturco guasto e fermentato non se ne avesse, e se per disgrazia se ne potesse incontrare qualche partita, la si liberasse dal malanno coll' aiuto di alcune precauzioni, le quali potrebbero riuscire a togliere ogni timore.

Per conseguenza la prima cosa a cui si dovrebbe pensare è quella di lasciare che il seme maturi completamente, perchè le sostanze le quali costituiscono il grano si conservino meglio, nè subiscano ulteriori cangiamenti. È stato osservato fra noi come il granturco raccolto nell'epoca in cui le spiche hanno ancor verdastre le foglie, portino così il seme, come il torso, maggiormente ricco di nitrogeno, e possiamo affermare che due spiche raccolte sulla stessa pianta e cresciute da nodi vicini, i semi della prima che fu raccolta dieci giorni precedentemente all' altra, accusavano una quantità di nitrogeno corrispondente al 16,1 per 1000, ed il torso invece una quantità che era rappresentata dal 6,23 e quando fu asciugata non giunse che a 6,02. Nè questa differenza deve recar le meraviglie, poichè la stessa si verifica egualmente nel frumento, nell' avena, nella segala e nell' orzo più o meno maturi. Ma quello che più importa da sapersi è, che durante l' epoca della maturazione, l'albumina decresce, mentre alla sua volta aumenta la caseina, sostanza che possiede un potere meno regrediente, ossia ha maggior durata nello stomaco e si assimila assai più lentamente.

Inoltre la maturazione completa elimina sempre una certa porzione dell'acqua di idratazione, la qual cosa fa che la fermentazione non avvenga altro che con maggior difficoltà, ed il seme si conservi.

Un costume che noi abbiamo veduto praticato largamente nel contado vicentino, e nel padovano, non che in alcuni altri paesi, ci parve sempre lodevole, e

consiste nel raccogliere le spiche, lasciare ad esse attaccate le spate, rovesciare queste ultime, fare dei mazzi delle panocchie medesime, e sospender questi al piovale del tetto, esponendole al sole per molti giorni di seguito, fino a che non si riconoscano bene asciutte; raggiunto questo scopo si depongono nel granaio, levando le foglie e lasciando intatti i semi, unitamente al torso. Abbiamo detto che questo costume noi lo troviamo buono, ed eccone la ragione. La parte del grano dove risiede l'embrione, non sente per nulla l'influenza dell'umidità esterna e dell'aria, quindi si trova impedito a germogliare; la parte resinosa che dà origine all'acroleina, o che ne è parte, non si forma, come non può aver luogo la vegetezione dei micromiceti, altro che nel caso in cui il torso siasi conservato umido, ovvero il raccolto sia stato riposto in locale non bene asciutto.

Il costume di lasciar il granturco in panocchie fino a che sia venuto il tempo di macinarlo, quando le spiche siano ben asciugate, è ottimo anche nel senso che nei mucchi l'aria vi circola assai più liberamente, e quindi lo si mantiene meglio asciutto. Si ha solamente in questo caso l'incomodo di dover sgranarlo ogniqualvolta se ne voglia condurre una partita al mulino, ma a questo inconveniente, nei paesi dove si osserva tal costume, si mette riparo impiegandovi gli uomini nelle lunghe serate invernali, e meglio ancora adoperando uno sgranatoio a macchina, che in poche ore compie l'opera, la quale in tutt'altro modo esigerebbe un buon numero d'uomini.

In questa maniera si ha sempre il granturco sanissimo, e che difficilmente fermenta.

Però, anche con siffatta precauzione, non si evita con tutta la possibile sicurezza il guaio della fermentazione, anzi in alcuni casi può darsi che le crittogame si moltiplichino, per trovare nel torso un tessuto assai più molle, per cui vi si attaccano molto facilmente. È d'uopo osservare difatto come la maturazione del seme di granturco avvenga sempre a calore decrescente e per conseguenza si incontri grave difficoltà per spogliarlo interamente dell'acqua di idratazione. Ed è questo il primo incentivo della fermentazione alla quale soggiace il granturco; tanto è vero che il moltiplicarsi dei casi di pellagra, ordinariamente lo si verifica negli anni nei quali la raccolta fu dovuta riporre nel granaio, non anco bene stagionata, perchè in quella epoca la stagione corse piovosa.

Noi crediamo pertanto che dandosi non pochi anni di seguito il fatto che la stagione autunnale corra sempre piovosa, la miglior precauzione da prendersi, dovrebbe essere quella di sottomettere il granturco raccolto ad un'essiccazione artificiale.

I contadini della Borgogna, tengono a quest'uopo un metodo, che a noi sembra lodevolissimo, ed il quale così ci viene descritto dal Ballardini:

« Appena condotto a casa il ricolto, si mettono da parte le panocchie più belle per la semente, si gettano ai polli le imperfette, e si passano al forno quelle destinate al nutrimento dell'uomo. Siccome si opera sopra grandi masse, si hanno dei vasti forni che si scaldano quasi come per la cottura del pane (200°). Una più elevata temperatura avrebbe l'inconveniente di carbonizzare il grano, o darebbe una farina troppo bruna.

« Scaldato il forno e nettato, vi si immettono le panocchie, che si distendono con una pala di ferro alquanto ricurva. Chiusa la bocca del forno la si riapre dopo un'ora, portando all'indietro quelle che erano nel davanti, e al di sotto quelle che stavano sopra. Dopo qualche tempo si rimescolano di nuovo. Al termine di 24 ore la disseccazione suole essere completa.

« Così preparato il grano non richiede alcun' altra cura, e può restare per più anni nei granai, nelle botti, ed anche nelle navi senza provare la menoma avaria, mentre i processi ordinarî di conservazione richiedono grande vigilanza, cure continue, e sono ben lungi dal preservare questo prezioso cereale in un paese come il nostro. Il sapore e l' odore del grano, e della farina torrefatti non sono punto ingrati ».

Questo processo, suggerito dalla pratica che si usa nella Borgogna, al nostro Ballardini, a noi sembra uno dei migliori e più acconci all' uopo. Solamente per alcune nostre esperienze particolari diremo, che la temperatura alla quale si spinge il forno la giudichiamo troppo elevata da un lato, e dall'altro non necessaria per raggiungere il medesimo intento di conservazione.

È noto che il pane cuoce bene soltanto allorchè il forno è scaldato a 250° o 260°. Ammettendo che il *quasi* del Ballardini indichi una diminuzione di 50° o 60°, vuol dire adunque che le spiche toccano 200° di temperatura, o poco meno.

Ora tal grado di calore altera profondamente il seme. Una porzione dell'amido si converte in destrina, lo zucchero subisce una specie di caramelizzazione e forma una sostanza di sapore lievemente amaro; le materie proteiche si rendono interamente insolubili. Si potrà con tutto questo asserire che il grano ha conservato le medesime proprietà nutrienti?

Sicuramente, se in questo caso le spiche tengono in sè dei germi di fungilli, questi vanno totalmente distrutti, e non è più il caso che possano nuovamente svilupparsi; ma questo non toglie che se le sporule de' fungilli siano sparse nell' aria, od attaccate alle pareti del granaio, non possano alla loro volta cadere sul granturco e quivi, trovando il mezzo propizio, riprendere la vita ed alterarlo.

D'altronde il profondo cangiamento che il cereale subisce a 200° deve mettere in diffidenza. Noi abbiamo compiuta l' analisi di una data quantità di granturco scaldato a 200°, e la riportiamo, mettendola in confronto ai dati fornitici da altra fatta sullo stesso cereale scaldato a 112° e raccolto nel 1875.

Analisi del granturco	Scaldato		
	a 112°	a 200°	
Amido	42,62	23,82	
Glutine (zeina?)	5,34	4,75	
Materie grasse	4,42	3,87	
Materie resinose azotate	0,34	0,00	
Albumina	2,20	1,71	
Caseina	0,53	0,32	
Zucchero cristallizzabile	2,43	0,00	
Glucosio	4,52	7,37	
Destrina	5,85	19,15	
Fibra greggia	14,93	13,08	
Materie minerali	1,80	1,20	Differenza
Acqua	15,02	»	
	100,00	75,27	24,73

La perdita in peso è gravissima, nè è da imputarsi a sola acqua di idratazione, ma ancora ad alcuni principî eminentemente utili, quali il principio albuminoide che in parte scomparisce, come la sostanza resinosa azotata che va pure dispersa. Ma quello che sopratutto ne soffre, è la materia grassa, la quale pare che sotto all'influenza di quella temperatura subisca un'alterazione profonda. Svolgesi una certa quantità di un gas idrocarburato; l'acqua è tinta in nerastro ed ha reazione acida: anche lo zucchero cristallizzabile scompare; l'amido cangiasi per buona parte in destrina. E questo profondo cangiamento lo si provoca per allontanare la probabilità che i fungilli si riproducano, e non abbia luogo la fermentazione.

Noi crediamo che i medesimi effetti si possano conseguire ricorrendo ad una temperatura inferiore, a quella cioè che non oltrepassi i 120°. Allora l'amido non si altera, gli albuminoidi rimangono quello che sono, la materia grassa non subisce cangiamenti, mentre le sporule dei micodermi muoiono inesorabilmente. Soltanto quell'acqua che era aderente, invece di rimanere per così dire annullata, viene espulsa, ma semplicemente nella dose del 14,5 p. %.

D'altronde il cangiamento dell'amido in destrina può essere dannoso, se non al grano intatto, almeno alla farina. L'eccesso di destrina rende la farina igrometrica, e questa malamente custodita, come succede presso i nostri contadini, può coll'umidità che condensa, accogliere nel suo seno le sporangi dei fungilli che fanno parte del limo atmosferico; e quand'anche in esso limo non figurino quelle dello sporisorio, od altre dei varî pennicilli, non è ancora dimostrato che questi esseri malefici, non si convertano gli uni negli altri, a seconda che trovano più o meno propizio il mezzo dove vanno a svilupparsi.

Ottenere la essiccazione al grado di calore che noi accenniamo (120°) non è cosa facile, valendosi del forno comune; con questo è probabile od averla troppo elevata, ovvero minima. Torna assai meglio valersi di un forno Rolland, nel quale la temperatura può essere regolata come si desidera, moderando il fuoco, ed in cui un termometro può accennare quando la temperatura si eleva di troppo, o si abbassa oltre il dovere. In questo caso, non le spiche sole, ma anche il grano staccato dal torso può benissimo essiccarsi senza soffrire detrimento.

Nell'esposizione universale dell'industria tenuta a Parigi nel 1866, il Touaillon aveva esposto una macchina mediante la quale si disseccavano le farine, riducendole ad una contenenza normale di acqua ascendente al 6 per %. Purtroppo l'apparecchio era di un prezzo troppo elevato, e le operazioni erano troppo lunghe per poter contare di applicarle all'essiccazione del granturco, prima di rimetterlo nel granaio. D'altronde, ben difficilmente i nostri possidenti penserebbero ad ottenere l'intento, gravandosi, nell'acquisto della macchina, di un dispendio che forse oltrepasserebbe le loro risorse finanziarie. Non havvi dunque da pensare a questo, e forse meglio torna che essi facciano ricorso al forno comune, scaldato al calore che tiene allorchè si toglie da esso il pane già cotto.

Ma quand'anche sia bene asciutto nel momento di riporlo, non si è certi di riuscire nell'impresa di ben conservarlo, tenendolo nei soliti granai. Questi dovrebbero essere ben ventilati; ma la ventilazione come la si intende fra noi, non è quella che esige il granturco. Per locale ben ventilato volgarmente si intende, non già un

ambiente dove l'aria si cangi ad ogni momento, ma un locale dove per moltiplicità di finestre specialmente, penetri o possa penetrare molta luce e molt'aria. Invece la vera ventilazione, quella che il cereale domanda, è che l'aria sia ad ogni istante cangiata, e possibilmente assuma un grado di calore così elevato da non riuscire satura di umidità, della quale si imbeve attraversando i mucchi di grano, e spogliandone questi ultimi. Così il grano si mantiene costantemente asciutto, e non fermenta.

Noi pensiamo che per raggiungere questo intento non bisogni pensare, nelle condizioni in cui si trova la nostra agricoltura, nè ai Silòs, nè ai granai Desvoux od altro. Per avere di questi grandi stabilimenti, sarebbe d'uopo che si formassero estese associazioni di coltivatori, il che per ora non accenna di penetrare nei nostri costumi.

Però, fra i pensieri che andiamo nutrendo, ve nè ha uno che non crediamo indegno di considerazione, e sarebbe quello di avvantaggiarsi del calore perduto che esce dai condotti del fumo de' focolari domestici. Supponiamo che il serbatoio del granturco sia, come si trova ordinariamente, collocato nel piano della casa più elevato; che la cucina dove si appresta il cibo quotidiano della famiglia trovisi ad un piano inferiore, e finalmente che il focolare sia formato da due lastre di ghisa, l'una delle quali costituisca il piano, l'altra vi si unisca perpendicolarmente e formi colla prima un angolo retto.

Sotto queste lastre si formerebbe un vuoto, a guisa di quello che gli stufisti chiamano *casse d'aria*, che riceverebbe l'aria stessa dal di fuori, o dal pavimento, la riscalderebbe, e mediante un condotto quest'aria andrebbe a sfogare nel granaio, mantenendo così una ventilazione naturale. E poichè è probabile che essa aria penetri nel granaio calda a 40°, mentre quella dell'ambiente sarà dai 15° ai 20°, basterebbe che l'aria si cangiasse nel granaio due o tre volte nella giornata, perchè, se questo avesse la capacità di m. c. 200, si esportassero in una giornata chil. 18 all'incirca di acqua in vapore. È questa una prova che con lievissima spesa potrebbero fare i coltivatori, avvertendo che i condotti dovrebbero essere muniti di valvola che permettesse all'aria di entrare quando havvi fuoco nel focolare, e non oltre, e di più che le bocche fossero chiuse da reti metalliche per ovviare a che si introducessero insetti ed altri animaletti parassiti di penetrare nell'ambiente dove si serba il grano.

Un altro desiderio pure raccomandabile, ed è quello di separare dalla farina, nell'atto di macinare il germe od embrione. Gli agricoltori che si sono occupati del granturco, convengono che l'embrione, misto alla farina, comunica alla medesima un sapore acre ed amaro. Ecco, a questo proposito quello che ne dice Antonio Ronna nella sua pregevole opera *Les industries agricoles*: « il faut triturer le grain sans atteindre l'embryon, dont la mélange avec les autres parties donne un goût amer et acre à la semoule et à la farine ».

Questo difetto è poi tanto più grandemente manifesto, se il seme ha subìto un principio di fermentazione; e noi crediamo che sia dovuto al formarsi di una piccola quantità di acroleina ammoniacale, come avvertimmo nella parte che riguarda l'analisi del cereale. Perciò col mezzo di questa precauzione non solamente si toglie quanto v'ha di disgustoso, ma anche di pericoloso nella farina che serve da alimento.

Ad ottenere questo intento sarebbe d' uopo cangiare il metodo di macinazione? Non possedendo molta pratica di quest' arte, non è in nostro potere il giudicarne. Sappiamo però, dall' opera poc' anzi citata, come il sig. Betz-Penot mugnaio ad Ulay, in prossimità a Nemours in Francia (dipartimento Senna e Marna), sia l'inventore del processo di spogliare dell' embrione, e produrla lasciando sotto forma di ovulo l'embrione medesimo, che andrebbe mescolato alla crusca.

Sarebbe desiderabile che il Ministero di Agricoltura e Commercio si facesse iniziatore di questa pratica, cotanto vantaggiosa, mandando qualcheduno che fosse incaricato a verificare i risultati, e ne potesse poi a suo tempo, col mezzo degli Impiegati del Macinato, farla conoscere ai mugnai.

Persuadere i contadini che l' uso esclusivo del granturco, quale base dell' alimentazione, torna poco vantaggioso, riuscirà cosa oltremodo difficile, anzi diremo quasi moralmente impossibile. Abituati come sono, pel maggior numero, a considerarlo quale parte essenziale della loro cibaria, non varrebbero certamente gli argomenti fisiologici che si adducessero a sostegno del proprio assunto; ed una prova noi l'avemmo nel caso del 1874, epoca di scarso ricolto, che il granturco ebbe, per alcuni momenti, un valore sul mercato che di poco si allontanava dal prezzo del frumento, quantunque ognuno sappia che per poter nutriente il frumento stesso supera di un quinto almeno, e talvolta eziandio di un quarto e più il frumentone. E noi possiamo citare ancora un caso speciale, sotto questo rapporto, che deve persuadere anche i più restii, della ostinatezza degli operai agricoli, nel considerare come il più prezioso degli alimenti il granturco medesimo; ed è che non rare volte il contadino, il quale riceve del frumento quale porzione di ricompensa delle proprie fatiche, non esita un momento a cangiarne parte in frumentone, senza curarsi molto di osservare se questo è ben conservato.

Uno dei mezzi che noi giudichiamo meglio acconci ad ottenere l'intento, sarebbe quello di restringere alquanto la coltivazione di questo cereale, cosa che noi reputiamo eziandio una necessità economica nel senso più lato della parola, cioè tanto nell' agronomico, quanto nell' alimentare. Faustino Malaguti, discorrendo innanzi alla Commissione di inchiesta agricola che fu istituita sotto l' Impero in Francia, non esitava a proclamare che, a suo parere, il sistema agricolo attualmente seguìto in Europa avrebbe condotto all'estrema ruina. Quello che disse l'illustre Chimico-agronomo di Rennes, lo si può anche a maggior ragione applicare alle coltivazioni che si praticano nella valle del Po, e particolarmente in non poche provincie della destra e della sinistra, dove l' alternanza delle piante coltivate si restringe quasi interamente ai cereali frumento e granturco. E mentre da un lato si chiede molto al terreno, dall' altro poco o nulla gli si restituisce, ond' è che se non si incontrano anni di carestia, se ne hanno almeno di scarsi ricolti assai spesso.

Le cifre che il Ministero di Agricoltura del Regno sta per pubblicare sulle condizioni agricole del nostro paese, e la rendita in cereali, ci si presentano veramente desolanti: l' Italia, nella produzione del frumento, è quella che rende meno di tutte le altre nazioni dell' Europa, non dando che una media di ettolitri 11,07 per ettara, mentre l' Inghilterra, paese di pascoli piuttosto che granifera, ne segna 32, la Francia 15, la Germania 26. Noi opiniamo che questo abbassamento nella rendita sia

dovuto alla troppo estesa coltivazione del granturco, che nella sua rendita ascende ad ettolitri 18,33 in media, ma che ha una massima assai elevata.

Il granturco coltivato allo scopo di averne seme è pianta depauperante, cosicchè esaurisce il terreno di una quantità di letame, che (presi grano e paglia in proporzione) corrisponde a chil. 340 per ettolitro di semi raccolto. Concedendo al granturco, come si usa ordinariamente, un terzo del podere, questo esige per se medesimo tale quantità di letame, che bisognerebbe avere nella stalla un capo di bestiame grosso per ettara.

Noi non abbiamo giammai prestato pienissima fede alle cifre statistiche forniteci dal Ministero, sapendo quanto sia difficile il poterle raccogliere col carattere della loro piena esattezza; ma mettendo a confronto quello che un animale può produrre di concime, ed il numero degli animali che possediamo, e quanto si raccoglie fra noi di frumento e granturco, siamo costretti a confessare che le misere cifre della produzione, corrispondono anche alla meschina quantità di letame del quale l'agricoltura italiana è in condizione di disporre.

Con questo non intendiamo però di suggerire che la coltivazione del granturco venga eliminata dai nostri sistemi di coltivazione; esso è una risorsa grandissima, ed anche, se lo si considera quale alimento, fu quello che allontanò dai nostri paesi le carestie che nei secoli passati si ripetevano assai di frequente, recando esso ai paesi meridionali il benefizio che ai nordici ha recato la patata.

E crediamo ancora che col restringere la coltivazione del granturco per averne seme, se ne potesse trarre un grande giovamento anche sotto altro aspetto agricolo, giacchè è fuor di dubbio oggidì che esso può presentare una grande risorsa, se lo si coltiva quale foraggio, da serbarsi nello stato fresco, o lievemente fermentato in fosse sotterranee, come si è cominciato ad operare in Francia.

Il Lecouteux ultimamente richiamò l'attenzione degli agricoltori sull'uso del mais coltivato quale foraggio, e fece osservare che qualora non si fosse avari di letame e di ingrassi artificiali usando per ogni ettara

Letame	chil. 30000
Superfosfato di calcio	300
Solfato di ammonio	100

su quell'estensione di terreno si potevano conseguire chil. 18000 di segala verde e 120000 di mais foraggio. Questa quantità di materia pabulare di cui il bestiame si nutre a meraviglia, contenendo chil. 329 di nitrogeno, può dirsi corrisponda a chil. 19000 di fieno, che può tradursi in 700 chil. di carne, od in 15 a 16000 litri di latte, talchè giustamente l'agronomo Goffart rifletteva che, qualora si attendesse veramente all'agricoltura, moltiplicando i foraggi, un piccolo podere potrebbe dare un reddito che nulla avrebbe da invidiare a quello di un buono studio notarile di provincia.

Per noi che siamo in paesi dove le pioggie si fanno lungamente desiderare, nel luglio e nell'agosto, talchè abbiamo poi qual conseguenza gli scarsi raccolti del guaime, e non di rado anche carestia di fieno, la pianta del granturco, sarebbe una provvidenza, commutata che fosse, almeno in parte, a fare le funzioni di pianta da foraggio. E tanto più poi la pratica riuscirebbe vantaggiosa, in quanto che si avrebbe così elevato il livello di fertilità del terreno, pel concime che si produrrebbe, col far consumare quella grande quantità di foraggio, che sarebbe tradotto

in letame, e ne uscirebbero non meno di 40000 chil. della stessa materia fecondatrice, coadiuvati da quella che il granturco medesimo si assimila dall'atmosfera, e che il Grandeau fa ascendere a chil. 64 di nitrogeno, che rappresentano non meno di 14000 chil. di letame, ossia una buona concimazione ordinaria per la produzione di 42 quintali di granturco, semi e paglia.

Questo sarebbe certamente anche il mezzo per ottenere quanto è desiderato dal Ballardini, e co'suoi voti affretta anche il Lombroso « che i contadini lombardi, i più decimati dalla pellagra, correggessero il loro sistema di alimentazione usuale introducendo nel medesimo un uso più largo di cibi animali, e particolarmente di latte e latticinî ».

Quel podere che oggi mantiene appena un mezzo capo di bestiame grosso per ettara, potrebbe allora avere la sua stalla ben fornita, portandola al quadruplo, con quanto vantaggio, solo chi sa fare della buona agricoltura, può giudicarlo.

Un altro suggerimento del Ballardini, molto razionale, merita pure di essere commentato. Il Medico Bresciano consiglia di non apprestare il pane de' contadini di solo granturco, ma di aggiungervi $^2/_3$ o poco meno di farina di frumento, o di segala. Questo sarebbe ottimo, qualora il contadino si trovasse nella condizione di poterlo fare; sventuratamente ben di rado egli può usare della farina di frumento; meno fors'anco di quella di segala, che può dirsi scomparsa dal novero delle piante volgarmente coltivate fra noi, e che costituiscono l'usuale avvicendamento. Se si fa eccezione dei paesi montuosi, dove la segala sostituisce in parte il frumento, perchè pianta più rustica, e meno temente la rigidezza della stagione, pensiamo che pen pochi siano i campi seminati a segala, che si presentano agli occhi dei peregrinanti per oggetto agricolo nella valle del Po. In parecchie provincie, nel Piacentino specialmente, il pane di granturco non si confeziona altro che mescolandovi prima un terzo di farina di fava. Parrebbe a prima vista che questo costume fosse lodevole.

La farina di fava contiene tanto di materia plastica da equivalere per questa, in poter nutriente, al triplo di quella di granturco. Infatti la fava conta il 45 per 1000 di nitrogeno, il granturco soltanto il 15 all'incirca. Perciò, se un uomo per vivere ha bisogno quotidianamente di 23 a 26 gr. di nitrogeno sotto forma di albuminoide, non potrebbe trovarli altro che in chil. 1,50 ad 1,70 di farina di granturco; questa convertita in pane, come lo fanno i nostri contadini, andrebbe a formare un peso di chil. 2 almeno, ed acquisterebbe un volume sproporzionato alla capacità dello stomaco. Mescolando invece gr. 700 di farina di granturco con 300 di quella di fava, si ha il quantitativo di nitrogeno desiderato dall'organismo, diminuisce la quantità di carbonio, che nel solo granturco sarebbe sproporzionata, non decresce di molto la sostanza grassa, ed il volume riducesi a $^2/_3$ e poco più. Questo può essere dimostrato colle seguenti cifre. Ammettendo che un uomo debba inghiottire sotto la forma di albuminoidi e glicogenici gr. 26 di nitrogeno e gr. 300 di carbonio, si hanno:

Farina sola di granturco chil. 1,7 contenente		Nitrogeno gr.	27
		Carbonio »	660
Mescolanza farina di granturco	gr. 700	Nitrogeno »	10,5
		Carbonio »	308,0
» farina di fava	gr. 300	Nitrogeno »	12,5
		Carbonio »	120,0

Quel piccolo eccesso di carbonio non recherebbe danno sicuramente, anzi è probabile si riscontri vantaggioso: tanto è vero che una porzione consimile la si osserva nelle razioni apprestate al soldato prussiano, che in tempo di guerra riceve coll'alimento le seguenti proporzioni di

Nitrogeno gr. 25
Carbonio » 466

e le campagne del 1870 hanno ben lasciato vedere come questo soldato possa resistere alla fatica.

Il costume pertanto, ragionandola sotto questo aspetto, sembrerebbe lodevole e da consigliarsi anche a preferenza di quello di mescolarvi farine di segala o di frumento. Ma in realtà non lo è. Anzitutto il pane, che stenta già a lievitare quando ad $^1/_3$ di farina di frumento se ne aggiungono $^2/_3$ di quella di granturco, non lievita quasi nulla con questa mescolanza. La sostanza acre ed amarognola, che sembra per la sua natura avvicinarsi al tannino, rende inerti le sporule de saccaromiceti che eccitano la lievitazione, o fermentazione panaria, o meglio ne attutisce di molto l'energia. Una prova della nostra asserzione, la si può avere col seguente semplice esperimento.

Si prenda una soluzione di zucchero candito che contenga il 12 per $^0/_0$ di questa materia, vi si aggiungano gr. 0,125 di fosfato di ammonio, e gr. 6 di lievito di birra, in maniera da formare all'incirca c. c. 300 di liquido, si collochi il tutto in luogo dove la temperatura si mantenga costante a 22° centigradi; il liquido non tarderà ad entrare in fermentazione dopo 7 od 8 ore. Se allora si è preparata una decozione di semi di fava in proporzione tale da far cuocere in 300 gr. di acqua stillata 50 gr. di seme di fava stessa, o di fagioli, si aggiunga questo decotto, separato dai semi e filtrato, al liquido in fermentazione; questa cessa tantosto, e non riprende che dopo qualche tempo, mentre alla superficie si forma una pellicola in cui figurano le spore del *mucor mucedo* e dell'*oidium aurantiacum;* il liquido diventa acido, e non succede più vivace lo sviluppo del biossido di carbonio.

E quello che avviene in questa circostanza lo si verifica pure nel pane in cui siano associate farina di granturco e fava. Nella stagione calda due giorni bastano perchè le pagnotte si coprano di muffe, particolarmente al centro, dove la temperatura non giunge giammai ad essere troppo elevata quando si cuoce. In seno a quelle forme di pani, malissimo cotti, le crittogame non tardano a svilupparsi, e non di rado fu segnalata una leggerissima dose di cianuro d'ammonio. Come avvenga che si formi questo corpo è ancora un problema che meriterebbe di essere studiato con moltissima cura e diligenza; ma che si formi realmente, possiamo attestarlo, avendo osservato che nei prodotti della distillazione del pane così formato e dopo ammuffito, trattato con acido fosforico diluitissimo, si avea costante un lieve precipitato di cianuro di rame. Che poi si formi ammoniaca, fu constatato cogli ordinarî processi, e non ne mancava giammai.

Quello poi che si può asserire con certezza è che, mentre le pagnotte formate con farina di frumento mista a quella di granturco, nell'ammuffire coprivansi di sole pianticelle del *mucor mucedo*, quelle nelle quali al granturco era associata la fava presentavansi subito colle spore dell'*oidium aurantiacum.* Noi crediamo egualmente che l'uso quasi esclusivo della polenta, anche fatta con farina sanissima, non torni

granfatto igienico, molto meno poi, se preparata in un giorno, la si conserva in luogo caldo per 24 ore. Ordinariamente nelle famiglie numerose, si suole preparare questa polta in grande, per la qual cosa i principî che trovansi nella farina non vengono abbastanza modificati dal calore e non riescono assimilabili. La materia grassa, ad esempio, sfugge per una buona parte all'azione del succo pancreatico, e passa intatta negli escrementi; così succede dei granuli di amido. La cottura diligentissima della polenta, che sarebbe una delle condizioni essenziali per rendere il prodotto del granturco efficacemente digeribile, non è giammai fatta molto bene, per cui chi se ne ciba, a mettere riparo alle perdite che fa l'organismo, necessariamente è costretto ad ingollarne una quantità esuberante, che dà una estensione anormale alle pareti dello stomaco, e finisce col rendere questo meno acconcio alle funzioni della digestione. Finalmente ogni qualvolta si nutra anche il più minimo sospetto che il grano sia fermentato, prima di adottarlo quale alimento, sarà precauzione indispensabile di fargli subire una preparazione preliminare.

Nel Messico si suole trattare il granturco colla calce, e questo è certamente un metodo razionale. L'azione della calce, unita all'acqua, opera sui componenti immediati che costituiscono il seme, sposta l'ammoniaca che può essersi formata, rende inerti le sporule dei micodermi, e risana la farina od il seme, talchè possono allora essere impunemente mangiati.

È vero che fra gli albuminoidi e la calce formasi una sostanza dura e cornea, che sembra poco accessibile all'azione digerente dei succhi gastrici; ma la maggior parte di quell'ossido terralcalino si combina colla sostanza resinosa, e colla materia grassa che siasi irrancidita, formando colle medesime un sapone il quale tutto al più possiede un'azione lievemente purgativa sul tubo gastro-enterico, ma non agisce minimamente sullo stomaco e le funzioni di digestione.

Nell'isola della Maddalena, sogliono invece far bollire il granturco guasto colla cenere. Noi crediamo anche migliore quest'uso, perchè allora gli albuminoidi non soffrono detrimento, mentre alla loro volta, resina e materia grassa irrancidita vengono egualmente saponificate, e la zeastasi si modifica anch'essa.

Prendendo un pollo del peso di gr. 482, fu messo al regime di granturco fermentato, ma nel primo giorno rifiutò di mangiarne; nel secondo, spinto dalla fame ne mangiò, e così fece per sei giorni di seguito; al termine dello sperimento era diminuito di gr. 27 di peso.

Allora cominciossi ad appastarlo con granturco guasto, ma fatto bollire preventivamente in una soluzione di carbonato di sodio, contenente due grammi di questo sale per ogni litro di acqua. E perchè non rimanesse il sapore alcalino al liquido residuo, non che al seme bollito, si avea la precauzione di neutralizzare la reazione alcalina con alcune gocciole di acido idroclorico, il quale cangiava in sal comune il carbonato, che potea esser rimasto aderente. Il pollo cominciò allora a mangiare avidamente la specie di polta apprestatagli, e dopo sette giorni avea ripreso il peso primitivo.

Lo stesso esperimento fu ripetuto per un cavia, e se ne conseguirono i medesimi risultati.

Questo perciò noi lo giudichiamo un rimedio sovrano per eliminare i pericoli

che potrebbe recar seco il mais guasto, per cui non esitiamo un momento a consigliarlo anche allorquando questo stesso cereale, e nelle identiche condizioni di alterazione, lo si volesse apprestare al bestiame quale elemento. L'abbiamo già accennato, e lo ripetiamo; anche gli animali, ben faticosamente si adattano a cibarsi con granturco che abbia sofferto, e non se ne avvantaggiano giammai.

Tutti coloro che esperimentarono sugli animali, il Ballardini, il Lombroso ecc., convengono che il mais alterato non nutre che malamente, e gli animali che se ne cibano subiscono una perdita di peso, una specie di forzata inanizione. Correggere anche per essi la materia alimentare, con pochissima spesa, come fu da noi suggerito, sarà sempre un utile, ed il profitto che se ne trarrà ripagherà di molto il dispendio che si incontrasse nella manipolazione.

Sopra il midollo spinale ed il lobo elettrico della torpedine.

Nota di MAX REICHENHEIM presentata dal Socio TOMMASI CRUDELI

nella seduta del 7 gennaio 1877.

Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia e Fisiologia comparata
della R. Università di Roma IX.

I. Sopra il midollo spinale della torpedine.

Quando si denuda nella torpedine dalla parte dorsale l'insieme dei centri nervosi, si trova, riguardo all'anatomia grossolana del midollo spinale, quanto appresso:

Il midollo spinale si congiunge colle masse più grandi dell'organo centrale nervoso, situate nella cavità del cranio cartilagineo, per mezzo di un midollo allungato, il quale, come in tutti i vertebrati, è sviluppato in tutti i diametri più che non il midollo spinale istesso. Dovendosi determinare il limite del midollo allungato verso il midollo spinale, sarebbe opportuno stabilire questo limite negli individui adulti alla distanza di un centimetro dall'estremità posteriore del lobo elettrico; imperocchè appunto per questo tratto giace il midollo allungato su quel pezzo cartilagineo unico ed a forma di pala, il quale corrisponde alla parte basilare dell'osso occipitale. Soltanto ad un centimetro dall'estremità posteriore del lobo elettrico termina questo pezzo cartilagineo non diviso, e quivi si annettono le singole vertebre cartilaginee della colonna vertebrale, le quali seguono a decorrere regolarmente fino alla punta della coda.

Dalla porzione dell'asse cerebro-spinale, denominata midollo allungato (il quale trovasi circoscritto in basso dal midollo spinale propriamente detto ed in alto dal lobo elettrico), hanno origine numerose radici nervose, le quali escono dalla teca cartilaginea degli organi centrali, per mezzo dei forami che esistono nel sopramenzionato pezzo cartilagineo. Il loro numero è molto variabile, e difficile perciò ad essere con sicurezza stabilito. Il numero delle anteriori (inferiori) apparisce essere superiore a quello delle posteriori (superiori). Delle anteriori, in un medesimo individuo, se ne contavano tredici, delle posteriori dieci.

Il midollo spinale propriamente detto, nella sua parte superiore, fa regolarmente uscire per ogni forame intervertebrale un pajo di radici fino alla 27ª vertebra. Dalla 28ª vertebra in poi questo rapporto cambia ed i nervi che escono dal midollo spinale vengono ad essere separati, non più da uno, ma da due corpi di vertebre. Questo rapporto resta costante fino alla 59ª vertebra. Al di là della 59ª vertebra

fino all' apice della coda, non fu più possibile costatare alcuna uscita di radici nervose, benchè il numero delle piccole vertebre, fino all'estremo termine della colonna vertebrale, sia di 40 all'incirca. In questo modo viene stabilito che la colonna vertebrale della torpedine è composta da circa 100 singole vertebre, delle quali solo 43 danno passaggio a radici nervose: di queste 43, le prime 27 si trovano tra le prime 28 vertebre, e le 16 successive tra la 28ª e la 59ª vertebra.

Un taglio sottile trasverso della porzione superiore della midolla spinale indurita, trattato cogli ordinarî e ben conosciuti metodi per l'esame microscopico degli organi centrali del sistema nervoso, fa vedere la seguente struttura microscopica, rappresentata dalla fig. 1.

Il taglio trasverso del midollo spinale rassomiglia ad un triangolo equilatero con angoli arrotondati. Precisamente nel mezzo della figura si trova il canale centrale *Cc* rivestito da un molle epitelio. Il midollo spinale ha il suo maggiore diametro trasverso nella porzione anteriore (inferiore). Verso la sua superficie posteriore (superiore) questo diametro decresce continuamente. Così avviene che la superficie anteriore, ed ambedue le superficie laterali del midollo spinale, corrispondono alla base ed ai lati del triangolo equilatero, e la superficie posteriore corrisponde all'angolo della punta, il quale è più dei due altri arrotondato. Molto caratteristica è l'immagine del taglio trasverso, che risulta dalla distribuzione speciale della sostanza grigia e bianca. Quasi la metà del midollo spinale viene occupata dai cordoni bianchi anteriori fortemente sviluppati, i quali respingono la sostanza grigia dalla superficie anteriore del midollo spinale, verso la sua parte posteriore.

Come in tutti i vertebrati, la sostanza grigia è divisa nelle due parti nettamente distinte che si chiamano corna anteriori e corna posteriori. Queste corna di sostanza grigia si mettono in comunicazione fra loro per mezzo di molteplici prolungamenti della medesima sostanza grigia, i quali attraversano specialmente la regione dei cordoni laterali.

Le corna anteriori *Ca* incominciano al lato del canale centrale *Cc* sotto forma di strette liste, le quali dopo un breve decorso laterale, arrivate al mezzo di ciascuna metà laterale del midollo spinale, si allargano per formare una considerevole espansione. In questa regione le cellule ganglionari, grandi e piccole, trovansi molto fitte e quasi in immediato contatto l'una coll'altra. Il loro più forte addensamento, come mostra la fig. 10, si trova nella vicinanza immediata ed al di sotto dell'epitelio del canale centrale, ove paiono situate le più grandi. In queste cellule ganglionari, le quali furono studiate esclusivamente nei tagli trasversi e giammai coi metodi d'isolazione, si vedono le particolarità rappresentate nelle due figg. 10 e 9, la quale ultima contiene una scelta di singole cellule: le cellule possiedono un grosso nucleo ellittico, nel quale, nei preparati fatti con materiale indurito, non è visibile un nucleolo. I corpi delle cellule sono granulati e di forma fortemente allungata e fusiforme. Gli assi lunghi di queste cellule fusiformi coincidono quasi sempre con il taglio trasverso della midolla spinale.

Sono molto rare quelle cellule ganglionari, il corpo delle quali ha uno sviluppo marcato nel suo diametro trasverso. Sopra il numero dei processi non si hanno dati positivi, essendosi limitate le ricerche all'esame dei soli tagli trasversi. Quello però

che si può rilevare si è, che i processi per la massima parte escono dai poli delle cellule ed hanno tendenza a decorrere nel piano della sezione trasversa del midollo spinale: almeno, nei singoli tagli trasversi, si possono seguire i prolungamenti di cellula per un tratto molto lungo. Inoltre è rimarchevole il decorso fortemente serpiginoso dei prolungamenti cellulari.

Dalla massa centrale di ciascuna metà laterale del midollo spinale, ove è accumulata fortemente la sostanza grigia, e la quale rappresenta la regione principale delle corna anteriori, originansi le radici anteriori, le quali come tante strie fibrillari sottili, delicate, con decorso ondoso, attraversando la sostanza bianca dei cordoni anteriori, si dirigono verso la periferia del midollo spinale, donde escono da ambedue gli angoli laterali del taglio trasverso triangolare. Nel taglio trasverso rappresentato nella fig. 1, le radici anteriori sono tracciate da un lato solo.

Le corna posteriori del midollo spinale della torpedine, per il preponderante sviluppo dei cordoni anteriori e delle corna anteriori, sono spinte nella angusta sezione posteriore del midollo spinale ed occupano i centri delle metà posteriori del midollo. Non trovansi in alcun rapporto con il canale centrale. Invece sono messe in comunicazione colla massa principale delle corna anteriori, e fra di loro, per mezzo di molte e fine trabecole di sostanza grigia. Così la regione dei cordoni laterali, ed anco più quella dei cordoni posteriori, viene attraversata da una densa rete di sostanza grigia, della quale i due centri vengono rappresentati dalle corna posteriori. Le cellule ganglionari, le quali popolano le corna posteriori ed il reticolo della sostanza grigia che ne esce, sono straordinariamente piccole e poco appariscenti, cosicchè sulla loro forma non è possibile dare un esatto ragguaglio. Qualche volta, si vedono nella regione delle corna posteriori anche grandi cellule ganglionari, il carattere anatomico delle quali corrisponde per intiero alle sopra descritte proprietà delle cellule ganglionari delle corna anteriori.

Le radici posteriori, essendo le corna posteriori direttamente situate alla periferia della midolla spinale, hanno un decorso intramidollare breve, il quale però non riesce facile a determinarsi, perchè esse non attraversano il midollo spinale nel senso trasversale, ma con un decorso obliquo; esse non sono state riprodotte nel taglio trasverso della fig. 1. Il loro egresso non trovasi molto lontano dalla superficie posteriore del midollo spinale.

La letteratura sul midollo spinale della torpedine è la stessa di quella sul midollo spinale dei selaci che, come si sa, è molta scarsa.

Charles Robin (1) ha dimostrato e Stannius (2) l'ha confermato, che nella coda delle raje una radice anteriore ed una posteriore corrisponde sempre a due vertebre diverse: attraverso l'arco di una vertebra esce la radice anteriore; per quello della vertebra successiva esce la radice posteriore.

Fino ad oggi il solo Stieda (3) ha eseguito delle ricerche col metodo di Stilling

(1) Annales des sciences naturelles (Zoologie). Paris 1847, 3e série tome VII p. 224.

(2) *Das peripherische Nervensystem der Fische.* Rostock 1849, p. 115.

(3) *Sul cervello e sul midollo spinale delle Raje e degli Squali.* Rendiconto della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, 12 dicembre 1872. — *Ueber den Bau des Rückenmarks der Rochen und Haie.* Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, XXIII p. 435. 1873.

sul midollo spinale dei pesci cartilaginei, ed in esse ha descritto e raffigurato anche il taglio trasverso del midollo spinale della torpedine, in un modo poco differente dalla descrizione data di sopra. Forse le piccole differenze fra le due descrizioni si possono spiegare con questo che Stieda ha preso per base delle sue ricerche non la porzione superiore ma quella inferiore più larga del midollo spinale.

II. Sopra il lobo elettrico della torpedine.

1. *Introduzione.*

Non sono i soli organi elettrici, per la esistenza dei quali i tre pesci elettrici, Torpedo, Malopterurus e Gymnotus si distinguono da tutti gli altri animali ed in ispecie dai loro più vicini parenti, dalle raje, dai siluri e dalle anguille non elettriche. Oltre agli organi elettrici caratteristici, ognuno dei tre pesci elettrici possiede anco dei nervi elettrici che gli sono particolari ed i cosidetti organi elettrici centrali, i quali, come gli organi elettrici stessi, non trovano nessuna omologia nell'anatomia degli individui più affini ai pesci elettrici.

Quello che da più lungo tempo è conosciuto è l'organo elettrico centrale della torpedine. Già da un pezzo si conosce l'esistenza di un lobo particolare a questo pesce, situato nella fossa romboidale, fra il midollo allungato, il cervelletto ed i corpi quadrigemini. Questo lobo, della grandezza all'incirca di una fava, è caratterizzato per il suo bel colore di limone, e dà origine da ambedue i lati ai cinque grossi tronchi nervosi che sono destinati agli organi elettrici. Inoltre si sa, già quasi dal principio dell'istologia scientifica, che questo lobo elettrico - come fu chiamato - è composto principalmente da cellule ganglionari di straordinaria grandezza. Le loro dimensioni soverchiano notevolmente quelle delle cellule ganglionari di tutti gli altri animali sprovvisti di organi elettrici; ed è precisamente per questa qualità che queste cellule non hanno mai cessato di essere per gli istologi un argomento di vivo interesse e di accurato esame.

Più rimarchevole ancora dell'organo elettrico centrale della torpedine è quello del Malopterurus. Secondo la scoperta di Teodoro Bilharz (1) quest'organo bilaterale è formato da una cellula ganglionare unica e colossale, situata nella porzione superiore del midollo spinale; da essa nasce il nervo elettrico, che originariamente non consiste che in un unico e colossale cilindro assile. Del resto, dopo la pubblicazione della celebre monografia del Bilharz, il pajo delle cellule ganglionari che rappresenta l'organo elettrico centrale del Malopterurus, non è stato più esaminato da nessun altro istologo.

Sull'organo elettrico centrale del Gymnotus le nostre conoscenze sono le meno soddisfacenti. Soltanto con grande riserva Max Schultze (2) parla di grandi cellule

(1) *Das elektrische Organ des Zitterwelses.* Leipzig 1857.

(2) *Zur Kenntniss der elektrischen Organe der Fische.* Erste Abtheilung: Malopterurus. Gymnotus. — Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Halle. Vol. IV, 1858.

ganglionari distribuite per tutta la lunghezza del midollo spinale, che dovrebbero essere considerate come gli organi centrali dei nervi elettrici, e che si incontrano in tutta la lunghezza del midollo spinale. È necessario però di fare ulteriori ricerche per verificare meglio queste asserzioni che sono incerte, perchè lo Schultze non ebbe a sua disposizione che preparazioni conservate in spirito di vino, le quali per la soluzione di tali quistioni lasciano molto a desiderare.

Lo scopo della presente monografia è quello di dare una esatta descrizione del lobo elettrico della torpedine, di stabilire la sua composizione anatomica, la sua configurazione topografica ed i suoi rapporti anatomici colle rimanenti parti del sistema nervoso centrale. Per raggiungere questo scopo fu adoperato il metodo di Stilling, cioè l'esame al microscopio di una serie continua di tagli traversi e longitudinali successivi. Questo metodo, quantunque basti per risolvere le prime due parti del problema, riesce però impotente a schiarire completamente anche la terza e più importante quistione. Se per mezzo di esso si può stabilire con esattezza e precisione la composizione anatomica e la topografia del lobo elettrico, non si arriva però a determinare in un modo completo e definitivo le connessioni ed i rapporti anatomici esistenti fra l'organo elettrico centrale, e le rimanenti regioni del sistema nervoso centrale della torpedine. Una soluzione definitiva di quest'ultimo problema richiede, come base naturale e necessaria, la completa conoscenza anatomica degli altri centri nervosi della torpedine stessa, ed inoltre una esatta conoscenza comparativa degli organi nervosi centrali delle altre specie ad essa più affini, cioè delle raje non elettriche. L'anatomia comparata deve considerare l'organo nervoso centrale della torpedine come un organo centrale di selacio modificato, il quale per l'intercalazione d'un nuovo centro di natura specifica, cioè del lobo elettrico, ha subìto profonde alterazioni anatomiche che mancano agli altri selaci, e che non possono essere apprezzate nel loro significato anatomico e fisiologico, se non comparandole col cervello degli altri selaci non elettrici. Adesso però è ancora impossibile di istituire una tale comparazione, perchè finora la scienza non ci fornisce conoscenze abbastanza esatte sugli organi nervosi centrali dei selaci. È dunque evidente, che la quistione dei rapporti anatomici e fisiologici del lobo elettrico colle rimanenti regioni del sistema centrale nervoso, non può essere risoluta che in un modo molto incompleto: perchè manca la condizione fondamentale della sua soluzione definitiva, cioè la conoscenza esatta della struttura e delle connessioni degli altri centri nervosi, che stanno in rapporto col lobo elettrico.

2. *Letteratura.*

Il medico toscano Stefano Lorenzini, scolaro del celebre Francesco Redi, è il primo anatomico che abbia fatto menzione del lobo elettrico della torpedine. Nella sua monografia anatomo-fisiologica sulla torpedine, pubblicata nell'anno 1678 (1), l'organo nervoso centrale di questo pesce viene per la prima volta completamente descritto e raffigurato. I due lobi olfattori fusi in una sola massa tondeggiante vengono descritti come *tubercolo grande*. I retrostanti emisferi cerebrali sono, nella terminologia

(1) *Osservazioni intorno alle torpedini.* Firenze 1678.

del Lorenzini, il primo pajo di tubercoli. La massa centrale dei centri nervosi, la quale posteriormente si fonde con questi, costituita dai grandi corpi quadrigemini e dal cervelletto, viene paragonata dal Lorenzini al cervelletto dei mammiferi. Il lobo elettrico, suddiviso in due metà da un solco mediano, che sta dietro a questa massa centrale, viene dal Lorenzini distinto con il nome di secondo pajo di tubercoli. Con molta precisione poi il Lorenzini descrive l'origine, che da questo lobo hanno i grossi tronchi dei nervi elettrici: chiama il quinto pajo la parte inferiore di essi, paragonandola al nervo trigemino dei mammiferi, mentrechè annovera come pajo sesto i tronchi posteriori, facendoli corrispondere al pajo ottavo ossia al nervo vago dei mammiferi.

Quantunque con questa scoperta del Lorenzini, la conoscenza del lobo elettrico come di una parte anatomica speciale dell' encefalo della torpedine rimonti sino al XVII secolo, pure un più profondo e giusto apprezzamento anatomico di esso, quale organo unico nel regno animale non appartiene che al nostro secolo. Un tale concetto anatomico comparativo non poteva formarsi, che allora quando, in seguito ai grandi progressi fatti nell'anatomia comparata, erano già stabiliti i principî fondamentali che determinano la morfologia del sistema nervoso centrale dei vertebrati.

Alessandro di Humboldt fu il primo che fece rilevare il lobo elettrico, come una particolarità anatomica speciale propria alla sola torpedine. Appena che egli aveva posto il piede sul continente americano e mentre stava tutto intento a fare i suoi preparativi pel viaggio nell' interno del paese (1799), a Parana gli fu portata una torpedine, che egli subito si mise a dissecare per accertarsi della sua identità anatomica con quelle altre torpedini a lui ben note, del mare Mediterraneo. Fu in questa circostanza, che egli dissecando l'encefalo fu sorpreso dalla presenza del lobo elettrico al quale accenna con le seguenti parole: « dans lequel (cioè cerveau) il y a - ce qui est sans doute bien extraordinaire - dans la substance médullaire du cerveau deux tubercules (corpora clavata) d'un beau jaune de citron [1] ». È evidentemente da queste parole di Alessandro di Humboldt che ha preso origine il nome di lobo citrino, che allato a quello di lobo elettrico qualche volta si ritrova nella letteratura posteriore; almeno non mi è riuscito di rinvenire un altro dato che fornisca migliore certezza sull'origine di questo nome.

Quasi contemporaneamente ad Humboldt nell' anno 1809 in Italia Jacopi [2] descrisse il lobo elettrico come una particolarità caratteristica dell' encefalo della torpedine, che lo distinguerebbe da quello di tutti gli altri pesci. Egli scrive, che « dietro il cervelletto, la dove in tutti gli altri pesci si continua il midollo oblungato, nella torpedine, invece, vi ha un ingrossamento di sostanza cinerea, il volume del quale supera presso che quello del cervelletto e degli emisferi insieme riuniti ». Lo stesso Jacopi descrive anche con molta esattezza l'origine dei nervi elettrici dal lobo elettrico.

[1] Recueil d'observations de Zoologie et d'Anatomie comparée par A. v. Humboldt et A. Bonpland. Deuxième livraison, Paris 1804 (l'opera completamente pubblicata porta l'anno 1811) p. 53.— Beobachtungen aus der Zoologie und vergleichenden Anatomie. Stuttgart 1807-1809.

[2] *Elementi di Fisiologia ed Anatomia comparata.* Milano 1809, p. 234.

Quantunque così, da due differenti parti, venisse già accennato a questa particolarità unica e caratteristica dell' encefalo della torpedine, pure dovette trascorrere un certo tempo, prima che il lobo elettrico fosse generalmente riconosciuto come un centro nervoso che non avesse il suo omologo in tutta la serie dei vertebrati. Ancora nelle *Philosophical transactions* dell' anno 1832 si trova un lavoro di John Davy, nel quale l'autore pubblica una esatta figura dei centri nervosi della torpedine, compreso il lobo elettrico, senza però fare motto nel testo del suo scritto, del significato anatomico speciale di questo organo (1).

G. Carus (2) e Arsaky (3), i quali egualmente pubblicarono figure del sistema nervoso centrale della torpedine, non hanno fatto avanzare la conoscenza del lobo elettrico. Per quanto io ho avuto mezzo di conoscere, fu il valente anatomico napoletano delle Chiaje (4), il quale a questo lobo, che fino al suo tempo non aveva avuto nome che, o dalla sua forma (corpora clavata), o dal suo colore (lobus citrinus), diede il nome che poi gli è rimasto, cioè di lobo elettrico, nome che è preferibile perchè corrisponde alle sua funzione caratteristica. Come A. di Humboldt, la scoperta del quale non sembra essere stata nota a lui, anche delle Chiaje rimase impressionato da quel colorito caratteristico e particolare al lobo nello stato fresco, che descrive come pagliarino. Per dimostrare i rapporti del lobo elettrico col midollo allungato, sul quale è appoggiato, il delle Chiaje dà a piccolo ingrandimento la figura esatta di un taglio trasverso dell' organo centrale della torpedine: è però strano che, con tutto ciò, ad un dissettore tanto valente come lui sia sfuggito il fatto che i nervi elettrici prendono la loro origine dalla sostanza del lobo elettrico; egli crede piuttosto che essi nascano dal midollo allungato, e combatte risolutamente quanto aveva già ammesso il Jacopi sulla connessione di essi col lobo elettrico stesso.

Questo errore di delle Chiaje fu finalmente rettificato nell'anno 1844 da Paolo Savi, il quale nella sua celebre monografia sul sistema nervoso e sull'organo elettrico della torpedine (5) stabilì in una maniera definitiva tutto ciò che riguarda l'anatomia macroscopica del lobo elettrico. Savi rivendica al lobo elettrico la funzione esclusiva di servire come centro d'origine ai nervi elettrici, il valore anatomico e fisiologico dei quali per la prima volta in questa monografia viene stabilito con esattezza perfettà: perchè il Savi, quantunque ritenga nella sua nomenclatura ancora

(1) *Researches anatomical and physiological.* London 1839, vol. I.

(2) *Versuch einer Darstellung des Nervensystems und insbesondere des Gehirns nach ihrer Bedeutung, Entwickelung und Vollendung im thierischen Organismus.* Leipzig 1814, taf. II fig. 25-27.

(3) Apostoli Arsaky Epirotae Commentatio de piscium cerebro et medulla spinali, scripta auspiciis et ductu Johannis Frederici Meckelii, denuo edita fragmentis de eadem re additis a Gustavo Guglielmo Minter. Lipsiae 1836, taf. III fig. 7 (Prima edizione. Halle 1813).

(4) *Anatomiche disamine sulle Torpedini.* Atti della R. Società Borbonica delle Scienze. Tornata del 10 aprile 1839 Napoli. Non ho potuto raccapezzare se il nome « lobus electricus » fosse non già occorso in una anteriore pubblicazione di delle Chiaje: secondo il Valentin il delle Chiaje pubblicò già nell'anno 1836 una figura del sistema nervoso centrale della torpedine nelle sue *Istituzioni di notomia comparata.* Napoli 1836, tomo III tav. XXVII fig. 5 e 8.

(5) *Études anatomiques sur le système nerveux et sur l'organe électrique de la Torpille.* Vedi Matteucci, *Traité des phénomènes électrophysiologiques des animaux.* Paris 1844.

gli antichi nomi del Lorenzini, e chiami ramo del Quinto il tronco anteriore, e rami del Vago i quattro tronchi posteriori del nervo elettrico, fa pure rilevare che tutti questi cinque nervi debbono essere considerati come nervi perfettamente nuovi, sopraggiunti al sistema nervoso della torpedine per servire ad una funzione nuova, e che per questo non trovano nessuna analogia nel sistema nervoso degli altri vertebrati.

Frattanto si era incominciato anche l'esame microscopico del lobo elettrico. Al Valentin (1) spetta il merito di avere pel primo adoperato il microscopio per lo studio di questo organo: egli descrive la sostanza del lobo elettrico come esclusivamente composta da cellule nervose colossali, separate l'una dall'altra per mezzo di guaine reticolate, e disposte come in una specie di intreccio. In modo simile si pronunziò pochi anni dopo anche il Savi sulla composizione microscopica del lobo elettrico.

Da Harless (2) nell'anno 1846 incomincia poi una nuova epoca nella storia scientifica del lobo elettrico, che può essere chiamata l'istologica. Questo scienziato fu il primo a richiamare l'attenzione sulle particolarità istologiche delle cellule ganglionari colossali scoperte dal Valentin, e a fare rilevare i molti e grandi vantaggi (per es. la loro facile isolazione ecc.) che appunto queste cellule ganglionari offrono nella ricerca istologica. D'allora in poi queste cellule sono rimaste l'oggetto prediletto di tutti quelli osservatori, che si occuparono dell'istologia del sistema nervoso. Rodolfo Wagner coi suoi scolari Billroth e Meissner (3) stabilì pel primo in un modo non ambiguo la connessione delle fibre nervose midollari colle cellule ganglionari. Più tardi Max Schultze (4) fondava su di esse la sua teoria sulla struttura fibrillare dei cilindri assili e della sostanza delle cellule ganglionari. J. Kollmann (5) cercò di dimostrare in esse, cosa che aveva tentato già anche Harless, la connessione del nucleo col cilindro dell'asse. Ultimamente F. Boll (6) si è occupato dello studio istologico di queste cellule.

Mentrechè i suddetti micrografi si dedicarono esclusivamente allo studio delle quistioni istologiche fondamentali, che si collegano a queste cellule ganglionari, io in un'altra pubblicazione già da qualche tempo venuta alla luce (7) mi diressi per una via diversa, tralasciando tutte le quistioni puramente istologiche, e limitandomi

(1) *Beiträge zur Anatomie des Zitterales.* Neue Denkschriften der allgem. Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Vol. VI 1842. — Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Vol. I p. 266, articolo: *Elektricität der Thiere.*

(2) *Briefliche Mittheilung über die Ganglienkugeln der lobi electrici von Torpedo Galvanii.* Müller's Archiv 1846.

(3) Nachrichten der G. A. Universität und der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1851 n. 14.

(4) *Observationes de structura cellularum fibrarumque nervearum.* Akademisches Programm. Bonn 1868.

(5) *Ueber den Kern der Ganglienzellen.* Sitzungsberichte der königlich bayr. Akademie der Wissenschaften zu München 1872.

(6) *Neue Untersuchungen zur Anatomie und Physiologie von Torpedo.* Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. 1875, p. 710.

(7) *Beiträge zur Kenntniss des elektrischen Centralorgans von Torpedo.* Reichert und du Bois-Reymond's Archiv 1873, p. 751.

di istituire una ricerca secondo il metodo dello Stilling, per stabilire con precisione la composizione anatomica e la topografia del lobo elettrico, risolvendo così un problema che dai sopradetti autori era stato quasi per intiero trascurato. Con questa prima pubblicazione però non potei che incompletamente risolvere il problema che mi era posto. D'allora in poi ho continuato lo studio del lobo elettrico col metodo di Stilling, facendo ed esaminando non solo dei tagli trasversi come aveva fatto esclusivamente nel mio primo lavoro, ma anche un gran numero di tagli longitudinali; cosicchè mi trovo adesso in grado non solo di correggere qualche errore contenuto nella mia prima pubblicazione, ma di potere presentare ai micrografi una monografia anatomica del lobo elettrico, che può dirsi quasi completa (1).

3. *Osservazioni generali sull'anatomia del lobo elettrico.*

Il lobo elettrico della torpedine si frappone tra il midollo allungato, i corpi quadrigemini ed il cervelletto, e cuopre completamente negli organi centrali veduti dal di sopra, la regione della fossa romboidale, la quale, nella torpedine, come formazione speciale anatomica, propriamente non esiste. Mercè questa frapposizione del lobo elettrico, le parti che nell'encefalo degli altri selaci si trovano in immediato contatto (cioè il midollo allungato da una parte, ed i corpi quadrigemini e cervelletto dall'altra parte), vengono considerevolmente allontanate l'una dall'altra ed appaiono nella loro relativa posizione, trasfigurate in un modo che non trova veruna analogia nell'anatomia comparata.

Visto dal di sopra, il lobo elettrico si presenta precisamente sotto la forma caratteristica riprodotta nel disegno schematico della fig. 2. Per procurarsi questa veduta completa della sua forma, bisogna togliere via prima le porzioni del cervelletto e dei corpi quadrigemini che cuoprono e circondano, superiormente e dai lati, la sua parte anteriore. Senza questa preparazione soltanto i due terzi posteriori del lobo elettrico si presentano completamente liberi: il suo terzo anteriore viene coperto e nascosto all'occhio da porzioni del cervelletto, che vi si sovrappongono.

Le dimensioni del lobo elettrico, in individui adulti e lunghi 35-40 centimetri, sono un centimetro di larghezza ed un centimetro e mezzo di lunghezza.

Molto particolare è negli individui adulti il colore del lobo, il quale condusse Alessandro di Humboldt e delle Chiaje a chiamarlo il lobo giallo di limone o il lobo pagliarino. Questo speciale colorito è dovuto al pigmento olivastro, che si trova deposto in forma di granuli nella sostanza delle cellule ganglionari, il quale per la sua natura ed il suo aspetto, risulta identico al pigmento che si trova nelle grandi cellule ganglionari delle corna anteriori del midollo spinale nei mammiferi adulti.

(1) Quanto ai dettagli del metodo di ricerca è da notarsi che gli organi nervosi centrali, presi sempre da animali appena uccisi, furono induriti parte nel liquido di Müller e nel bicromato di ammoniaca, parte nell'alcool. I tagli trasversi e longitudinali furono fatti col rasoio a mano libera e colorati col carminio (in molte diverse combinazioni e concentrazioni) e coll'ematossilina (specialmente i preparati nell'alcool).

Vi è uno solo, o vi sono due lobi elettrici? Il lobo elettrico è diviso nella linea mediana, e composto da due metà anatomiche eguali e simmetriche, come il cervello dei mammiferi, ovvero deve essere considerato come un unico organo centrale nervoso, entro il quale le vie e le trasmissioni nervose trapassano la linea mediana? Questa dimanda ebbe diverse risposte dai differenti autori. Lorenzini, il quale chiama il lobo il secondo pajo di tubercoli, sembra di avere ammesso la seconda versione. Anche Humboldt scrive di due tubercoli, Valentin e Harless di lobi elettrici; dall'altra parte tanto Jacopi quanto delle Chiaje parlano di un solo rigonfiamento. All'opinione di questi due si dichiarano espressamente contrarî Savi e St. Sihleanu (1). Io stesso, quando pubblicai la mia prima Memoria, era decisamente dell'avviso, che vi fossero due lobi elettrici divisi da una fenditura mediana, come mi sembrava esser dimostrato in un modo non equivoco dalle mie preparazioni microscopiche. A questo mio modo di vedere corrisposero anche tutti i disegni pubblicati da me, i quali rappresentano il lobo sempre suddiviso in due metà eguali e simmetriche. Fui adunque molto sorpreso, quando vidi una preparazione del professore Ciaccio di Bologna, nella quale nettamente si scorgeva che le due metà del lobo erano riunite nella linea mediana. La preparazione del professore Ciaccio era fatta dal lobo elettrico di una torpedine marmorata, mentre tutte le mie preparazioni provenivano dalla torpedo narke: credetti dunque che questa diversità potesse forse essere ascritta ad una differenza di specie, e che si dovesse attribuire alla torpedo marmorata un lobo non diviso ed unito nella linea mediana, ma due lobi bilaterali e simmetrici alla torpedo narke. Ma anche questa mia opinione non poteva reggere: perchè dopo essermi procurato materiale fresco in Viareggio della torpedo narke, ed in Porto d'Anzio della torpedo marmorata, risultò che in ambedue le specie il lobo elettrico forma un solo organo fuso nella linea mediana e mai diviso. Però l'unione nella linea mediana è così debole e delicata, e si rompe tanto facilmente, che ordinariamente la sola apertura della cavità del cranio basta a rompere la continuità dei tessuti nella linea mediana, e così si presenta la falsa immagine di un lobo elettrico doppio. Soltanto quando gli organi centrali sono preparati ed induriti colla massima cura, si ottengono tagli trasversi come quelli che sono figurati nelle tavole aggiunte, e nei quali il lobo appare come un organo unico, composto però da due metà simmetriche, saldate insieme nella linea mediana da un rafe di tessuto interstiziale, che esce dalla circonferenza del canale centrale. Se nel primo lavoro non ottenni mai tale preparazione, si deve forse ascrivere a questo, che tutti i centri nervosi dei quali mi servii come materiale di ricerca, erano esclusivamente tolti da animali, ai quali, per iscopo di sperienze fisiologiche, era stata aperta *intra vitam* la cavità del cranio e scoperto il lobo elettrico.

Sui rapporti del lobo elettrico colla pia madre è da osservarsi quanto appresso: La superficie libera del lobo è rivestita da un epitelio a corte cellule, composto da

(1) St. Sihleanu, *De' pesci elettrici e pseudo-elettrici*. Dissertazione libera presentata per ottenere la laurea in scienze naturali. Napoli 1876. Una compilazione sull'anatomia e fisiologia dei pesci elettrici e pseudo-elettrici che deve essere consultata con una grandissima precauzione: quella erronea affermazione che ho citata, è il solo risultato di ricerche indipendenti e proprie dell'autore, che si trovi in tutto il contesto della Memoria.

elementi molto delicati e deperibili, non vibratili. La pia madre cuopre superiormente il lobo senza però entrare in qualsiasi unione o continuità colla sostanza di esso: fra essa e l'epitelio, che riveste il lobo, rimane sempre uno spazio intermedio libero. Là, ove la superficie del lobo si continua con quella delle altre parti dell'encefalo (midollo allungato, corpi quadrigemini, cervelletto), la pia madre che riveste queste parti, entra in connessione coll' epitelio che riveste la libera superficie del lobo, come se ivi si continuasse immediatamente in questo. Si potrebbe adunque ritenere che la pia madre, che inviluppa l' intiero sistema centrale nervoso, rivestisse anche la superficie libera del lobo elettrico ; non però nella sua solita forma di membrana connettivale ricca di vasi, ma trasformata in una membrana sottile priva di vasi e di tessuto connettivo. Altrettanta ragione ha forse però una seconda ipotesi, secondo la quale l'epitelio, che riveste la superficie libera del lobo, dovrebbe considerarsi come una continuazione dell' epitelio del canale centrale. All' estremità anteriore del lobo elettrico, ove esso tocca i corpi quadrigemini, ed ove ha il suo sbocco il canale centrale, la continuità di questi due epitelî può essere dimostrata con grande evidenza.

4. *Tagli trasversi successivi del lobo elettrico.*

Dalla ricca serie di tagli trasversali del lobo elettrico, eseguiti con il metodo di Stilling, basta sceglierne sei per descriverli e raffigurarli. La configurazione anatomica del lobo elettrico non si modifica tanto rapidamente da non poter illustrare tutte le essenziali particolarità anatomiche dell'organo con questa, quantunque ristretta, scelta di figure.

Per meglio intendere quello che verrà in seguito esposto, è utile immaginare il lobo elettrico suddiviso in sei eguali sezioni, incominciando a numerarle dal midollo spinale in avanti.

Di queste sei sezioni, le quattro mediane sono caratterizzate dalla presenza delle radici del nervo elettrico. I tagli trasversi della prima di queste sezioni, che giace vicino al midollo spinale allungato, e quelli della sesta, che è a contatto coi corpi quadrigemini, mancano delle radici del nervo elettrico, le quali caratterizzano invece tutti i tagli trasversi presi nelle quattro sezioni medie.

Il primo disegno da descriversi (fig. 3) è un taglio trasverso fatto verso il mezzo della prima delle sei sezioni.

L'asse cerebro-spinale, al quale il lobo elettrico si sovrappone, presentasi in questo taglio per la maggior parte composto da cordoni di sostanza bianca, trasversalmente tagliati, i quali occupano tutta la porzione inferiore del midollo allungato da ambedue i lati del rafe mediano. Il canale centrale *Cc* in questa regione del midollo allungato non occupa più il centro, come nel midollo spinale, ma è marcatamente ravvicinato alla superficie superiore : tra questo e la superficie dell'asse cerebro-spinale trovasi un sottile strato di sostanza grigia. Questa sostanza grigia contiene grosse cellule ganglionari solo nelle parti più prossime al canale centrale, ove formano un nucleo nervoso *N* il quale trovasi anche nei tagli successivi, quantunque ripetutamente modificato, tanto nella forma quanto nella ubicazione topografica. Per completare finalmente la figura che presenta il taglio trasverso dell' asse

cerebro-spinale, è da notarsi ancora la esistenza di un lungo fascio di fibre nervose il quale sorte lateralmente dal nucleo nervoso *N* ed arriva fino al margine superiore laterale del midollo allungato. Questo fascio di fibre longitudinali limita superiormente la sostanza bianca tagliata trasversalmente e la separa dalla massa molecolare grigia.

Il lobo elettrico in questo taglio trasverso non mostra alcun legame organico coll'asse cerebro-spinale; esso sovrapponesi semplicemente alla faccia superiore di quest'ultimo, rimanendo però separato dalla sua sostanza per una membrana, la quale trae origine dalla pia madre, e che si frappone fra questi due organi. Nel piano mediano, il lobo elettrico mostra una depressione a forma di sella, ma non un rafe mediano. L'altezza del lobo sul piano mediano, in questo taglio trasverso corrisponde a 17 cellule ganglionari situate una sovra l'altra.

Il taglio trasverso raffigurato nella fig. 4 deve considerarsi come fatto all'incirca nella parte mediana della seconda delle sei sezioni; esso mostra alcune non lievi differenze da quello sopra descritto. L'asse cerebro-spinale continua ad esser formato per la maggior parte da sostanza bianca; esso possiede lungo i due lati del rafe, che lo dimezza, una unica serie di cellule ganglionari *M*, le quali da ambedue le parti mandano fuori delle fibre trasversali.

Il canale centrale *Cc* è avvicinato alla superficie superiore e giace precisamente tra l'asse cerebro-spinale ed il lobo elettrico. Il gruppo delle cellule ganglionari *N* si rinviene anche in questo taglio trasverso, ha però cambiato la sua posizione, perduto ogni immediato contatto con il canale centrale e ha preso una posizione più laterale: da esso partesi un grosso fascio di fibre nervose *N*1 il quale entra nel grosso ramo *NE* che in questo taglio trasverso esce dal lobo elettrico.

Il lobo elettrico è divenuto più largo e più alto, la sua altezza in questo taglio trasverso corrisponde nel piano mediano a 25 cellule ganglionari. La depressione a sella esistente nella sua linea mediana è divenuta più stretta e meno profonda: un rafe mediano di tessuto connettivo non è ancora dimostrabile. Dal lobo elettrico in un modo del tutto caratteristico, ha origine il grosso nervo elettrico *NE*, origine la quale ripetesi sempre ed in un modo quasi identico in tutti i tagli che vengono fatti nella 2ª, 3ª, 4ª, e 5ª delle sei sezioni nelle quali fu diviso il lobo elettrico.

Nei tagli molto sottili, i quali possono venire osservati anche con forti ingrandimenti, questa origine delle radici del nervo elettrico rappresenta una figura molto caratteristica ed elegante. Da una parte possono essere seguìti, fino entro la massa intima della sostanza del lobo, fasci più o meno grossi di fibre nervose, mentre dall'altra singole cellule ganglionari ed anche delle serie intiere formate da esse si spingono avanti nella massa riunita del nervo elettrico, il quale già si è formato in un cordone regolare.

Non rinviensi in tutto il regno animale forse un'altra regione, come la suddescritta, ove si possa con tanta facilità ed evidenza dimostrare il fatto fondamentale della fina anatomia dei nervi, cioè il passaggio del prolungamento del cilindro assile nelle fibre nervose. La figura 12 disegnata con forte ingrandimento (Hartnack VIII, 3) fornisce una immagine molto istruttiva di questo rapporto. Il numero straordinario delle fibre nervose prive di origine che si riscontrano nella figura facilmente si spiega pensando alla differente direzione sulla quale può essere portato un taglio, che non può cadere

sempre parallelo al decorso dei nervi, i quali spesso camminano ondeggianti per arrivare a cellule ganglionari poste o più superficialmente o più profondamente. Vi è poi da tenere conto della circostanza, che quei nervi che nascono nel piano del taglio ma più lontani, per raggiungere la sortita comune, debbono scorrere fra le cellule più vicine a questa.

Finalmente in questo taglio trasverso, deve essere notata anche la presenza di un accumulo di sostanza molecolare oscura *O*, il quale nel taglio già rappresentato con la figura 3, non esisteva ancora e che per questo deve essere considerato come un nuovo elemento anatomico sopraggiunto nella seconda delle sei sezioni del lobo elettrico. Questa massa presenta sul taglio trasverso una figura triangolare con un angolo arrotondato a forma di arco, che è situato al lato esterno del nervo elettrico *NE* che esce dal lobo. Con un piccolo ingrandimento questo accumulo apparisce come composto da una sostanza molecolare, ed anche con più forti objettivi non si osservano in esso che cellule ganglionari molto piccole, molto scarse, e di secondaria importanza. Da questa massa originasi un fascio di fibre nervose *O*1 il quale viene ad applicarsi alla superficie esterna del nervo elettrico *NE*, e con questo unitamente decorre, come il fascio nervoso *N*1 proveniente dal nucleo nerveo *N*, si accosta alla superficie interna del nervo elettrico e lo accompagna nel suo decorso.

Il taglio trasverso che segue adesso (fig. 5) è stato condotto nella maggior larghezza del lobo elettrico. Questo punto non corrisponde precisamente al mezzo del lobo ma si trova un poco al di dietro, cosicchè questo taglio trasverso deve essere considerato come condotto nella porzione anteriore della terza sezione.

Nella regione dell'asse cerebro-spinale appaiono quasi inalterate le parti situate fra il rafe ed il lato interno del nervo elettrico: la sostanza bianca, in questo nuovo taglio, appare allargata, rimanendo del resto inalterata nella sua posizione e nei suoi rapporti anatomici. Egualmente quasi inalterata si presenta la serie *M* di singole cellule ganglionari che sono disposte lungo il rafe. Soltanto il nucleo nervoso *N* che si trova in questa regione si mostra notevolmente dislocato: esso appare ancora di più allontanato dal canale centrale e spinto verso la parte laterale, essendo anche più fortemente sviluppato come nel taglio trasverso ultimamente descritto. Il fascio nervoso *N*2 che parte da esso ha subìto una modificazione di direzione che è molto caratteristica: invece di essere riunito al decorso del nervo elettrico *NE* e di mostrare una direzione discendente, come nella fig. 4, esso nella fig. 5 forma quasi un angolo retto colla direzione del nervo elettrico e si dirige in su. Infatti, con un ingrandimento più forte ed in tagli molto sottili, riesce possibile di seguire singole fibre appartenenti a questo fascio nervoso per l'intreccio formato dalle fibre del nervo elettrico e di vederle arrivare perfino fra le cellule ganglionari del lobo elettrico.

Sul lobo e sul grosso nervo elettrico, che da esso parte, non c'è nulla da dire in questo taglio trasverso, che non risulti già dalla figura, cioè che il lobo elettrico qui è arrivato alle sue più grandi dimensioni, tanto in larghezza quanto in altezza, la quale corrisponde a 33 cellule ganglionari.

È rimarchevole che in questo taglio trasverso per la prima volta appare distintamente un rafe mediano, il quale divide il lobo in due metà simmetriche: nella linea mediana al di sopra del canale centrale *Cc* non si trova nemmeno una

cellula ganglionare, ma tutte appaiono poste dall'uno o dall'altro lato, lasciando nel mezzo uno spazio pieno di un tessuto interstiziale molto ricco di vasi. Nelle preparazioni fatte anteriormente da me questo tessuto delicato si era rotto, dando in tal modo luogo al concetto erroneo, che esistessero due lobi elettrici divisi da una fenditura longitudinale. Dalle preparazioni fatte adesso con un materiale migliore risulta con certezza che il canale centrale è dapertutto chiuso e che una volta arrivato alla superficie dell'asse cerebro spinale mantiene la sua posizione fra l' asse cerebro-spinale ed il lobo elettrico per tutti i successivi tagli trasversi fino alla cessazione completa di quest'ultimo. Come dimostra la fig. 11 disegnata con più forte ingrandimento, il taglio trasverso del canale centrale rappresenta una fenditura bislunga. È rimarchevole che soltanto la sua parete inferiore, che guarda l'asse cerebro-spinale, mostra un vero epitelio cilindrico, mentre nella sua parete superiore, che guarda il lobo elettrico, non si trovano che cellule molto basse e mancanti di qualunque carattere epiteliale.

Rimangono per il taglio trasverso rappresentato nella fig. 5 ancora da studiarsi le parti situate alla parte esterna del nervo elettrico, le quali, comparate col taglio trasverso della fig. 4, hanno preso un considerevole sviluppo.

Il campo *O* di massa molecolare, descritto già nel taglio trasverso della fig. 4 esiste ancora in questo taglio trasverso della fig. 5, avendo però sensibilmente modificato la sua forma e posizione; anche il fascio nervoso *O*, che accompagna il nervo elettrico si riconosce facilmente. Pare evidente che ad esso appartengano anche i fasci nervosi *O*2 che ne sembrano scostati perchè decorrono obliquamente. Oltre di questo campo *O* e dei fasci nervosi *O*1 e *O*2 che stanno in comunicazione con esso, appaiono in questa fig. 5, al lato esterno del nervo elettrico, due nuovi organi, che non erano ancora visibili nell'anteriore fig. 4. Sono questi il campo *Q*, che è formato da sostanza bianca tagliata in direzione trasversa, ed un nastro ristretto *P* di massa grigia molecolare, il quale circonda a guisa di corteccia il campo *Q*. Questo nastro *P* viene suddiviso, per mezzo di vasi sanguigni che entrano dalla periferia, in una serie di pezzi paralleli.

Il taglio trasverso, che adesso segue (vedi la fig. 6) è condotto sul mezzo della quarta sezione. In esso la regione, nella quale le dimensioni del lobo elettrico sono più grandi, è già stata trapassata. Quantunque la sua altezza sia rimasta la stessa e corrisponda anche a 34 cellule ganglionari, come nel taglio precedente, è però notevolmente diminuita la sua larghezza. Anche in questo taglio esiste un rafe mediano distinto che parte dal canale centrale. Il nervo elettrico appare quasi più grande che nella sudescritta fig. 5.

Le parti dell'asse cerebro-spinale che si trovano situate al lato interno del nervo elettrico, hanno subìto delle modificazioni considerevoli. È scomparso completamente il gruppo *M* di cellule ganglionari ed il nucleo nervoso *N* col fascio *N*2 che da esso parte è vicino a scomparire. Invece incomincia a comparire un sistema di fibre trasversali, il quale trapassando per il rafe mediano mette in comunicazione le due metà dell'asse cerebro-spinale. Inoltre compare alla base dell'asse cerebro-spinale un nuovo nucleo *R* di cellule ganglionari. I campi *O*, *Q*, *P*, situati al lato esterno del nervo elettrico, continuano ancora a persistere in posizione e forma poco modificata. Ad essi si associa un organo nuovo che li ricuopre, il campo *S* composto di sostanza

grigia, lo strato corticale del quale, precisamente come il campo *P* sudescritto, viene suddiviso in sezioni regolari dai vasi sanguigni che entrano dalla periferia.

Delle modificazioni molto sensibili si ritrovano nella fig. 7 che è tolta dalla quinta sezione del lobo elettrico. Il lobo ritiene anche qui un volume piuttosto considerevole e l'identica altezza di 34 cellule ganglionari come nei due ultimi tagli; quanto alla larghezza però appare piuttosto ristretto. Il fatto caratteristico, pel quale questo taglio trasverso essenzialmente si distingue dal taglio anteriore, è lo scomparire del nervo elettrico il quale non è dimostrabile che in forma di un fascio ristrettissimo *NE* e per un tratto assai breve.

Nella regione dell'asse cerebro-spinale hanno avuto luogo delle modificazioni molto considerevoli. Il sistema delle fibre trasverse che passa per il rafe si è fortemente sviluppato; lo stesso è accaduto del nucleo nervoso *R* il quale ha cambiato la sua posizione allontanandosi dalla periferia ed avvicinandosi sempre più al centro. L'asse cerebro-spinale non trovasi più interrotto dal decorso del nervo elettrico: esiste una continuità perfetta fra la massa principale dell'asse cerebro-spinale e la sostanza bianca del campo *Q* che prima rimaneva separato da esso per mezzo del nervo elettrico (vedi la fig. 6). Il campo *O* è intieramente scomparso; esiste ancora lo strato corticale *P* che circondava la sostanza bianca, quantunque modificato nella forma e nella posizione.

La più forte divergenza dalla fig. 6 è mostrata dal campo *S*. Questo campo arriva adesso all'altezza del lobo stesso ed offre una struttura molto complicata: si ritrovano in esso la massa molecolare grigia, fasci di fibre nervose tagliate in senso trasverso ed in senso longitudinale, inoltre nel suo apice accumuli di granuli, i quali rassomigliano moltissimo a quelli del cervelletto e della retina nei mammiferi. Un fascio nervoso *S*, che parte da questo organo s'incrocia nel suo decorso verticalmente coll'ultimo rimasuglio del nervo elettrico.

La fig. 8 illustra l' estremo del lobo elettrico. Quest' organo prima tanto grande ed importante qui appare compresso e quasi dominato dal campo *S*, l'altezza del quale adesso sorpassa considerevolmente quella del lobo elettrico. In questa sezione l'altezza del lobo corrisponde soltanto a 16 cellule ganglionari; un nervo elettrico non è più visibile. Al lobo elettrico serve come base l'asse cerebro-spinale omogeneo, nel quale le fibre trasverse si sono sempre più sviluppate. Il gruppo di cellule ganglionari *R* è scomparso. La sostanza corticale grigia *P* si è conservata quasi nello stesso modo. Il campo *S* appare quasi intieramente composto da quei granuli, che furono già menzionati nella descrizione del taglio antecedente. Il fascio nervoso *S*1 che da esso parte, si aggiunge adesso nel modo più evidente alle fibre trasverse dell'asse cerebro-spinale.

In tutta questa sua ultima e sesta sezione il lobo elettrico, compresso già dai due campi *S* che lateralmente gli sovrastanno, viene coperto superiormente dalla massa dei corpi quadrigemini, che occupa tutto lo spazio che rimane libero fra i due campi *S*. Questa massa dei corpi quadrigemini non è stata riprodotta nella fig. 8, non avendo alcun legame organico coll'insieme anatomico rappresentato in questa figura. Essa rimane separata dalla superficie libera del lobo per mezzo di uno spazio libero piuttosto considerevole, mentre fra essa e gli apici dei due campi laterali *S* si frappongono delle pliche formate dalla pia madre.

5. *Tagli longitudinali successivi del lobo elettrico.*

La direzione ed il piano del primo taglio longitudinale, rappresentato dalla fig. 13, si rilevano dal diagramma fig. 2. I fasci del nervo elettrico tagliati trasversalmente occupano una parte relativamente grande della figura, mentre la massa delle cellule ganglionari ne occupa una più piccola; fatto che facilmente comprendesi se si immagina che un piano ideale longitudinale divida tutti i sei tagli trasversi adesso contemplati. È anche facile il comprendere che le fibre dei nervi elettrici, le quali decorrono obliquamente, non saranno mai tagliate parallelamente al loro decorso ma sempre obliquamente. In questa figura devesi ancora rilevare la distribuzione regolare delle fibre del nervo elettrico, che formano dei numerosi tronchi più o meno grossi: fatto anatomico che non sarebbe mai risultato dal solo studio delle figure dei tagli trasversi.

Nel taglio longitudinale rappresentato dalla fig. 14, invece i fasci del nervo elettrico scompaiono quasi intieramente dinanzi al potente sviluppo delle cellule ganglionari del lobo, l'intiera massa del quale viene pressochè ad essere occupata da esse. Corrispondentemente al piano nel quale venne fatto il taglio (vedi la figura schematica 2) non si riscontrano che al margine inferiore del lobo delle fibre nervose, le quali ivi si raccolgono per formare i tronchi del nervo elettrico. Deve poi essere preso in considerazione il sottile cuneo di sostanza grigia *N*, contenente un gran numero di cellule ganglionari, il quale si frammette tra il lobo elettrico e l'asse cerebro spinale che quivi si trova tagliato lungo il suo asse longitudinale. Questo cuneo non è altro che il nucleo *N* ben noto dallo studio dei tagli trasversi: ed è evidente che la sua figura longitudinale corrisponde alla persistenza, con la quale questo nucleo accompagnava i varî tagli successivi trasversi.

Le cellule ganglionari che compongono questo nucleo, quando vengono studiate con un ingrandimento più forte (Hartnack VII, 3) appaiono elementi anatomici di una struttura molto particolare, che differiscono assai da quelle che si trovano nelle corna anteriori del midollo spinale, e che furono riprodotte nella fig. 9. All'opposto di queste, le cellule ganglionari le quali formano il nucleo *N* (fig. 16 a f) presentano una figura molto allungata ed un corpo molto assottigliato. Il loro nucleo ellittico si trova quasi sempre nel centro della cellula fusiforme. Queste cellule ai loro estremi si prolungano in processi estremamente fini ed allungati e per la maggior parte ramificati (1).

Un'altra, ma parimente caratteristica immagine di questo nucleo *N* offre l'ultimo taglio longitudinale raffigurato nella fig. 15 (vedi la figura schematica 2). Quivi chiaramente si vede come il nucleo possiede il suo principale accumulo sotto l'estremità posteriore del lobo elettrico, stendendosi da una parte, sotto forma di un cuneo stretto, anteriormente, e mandando dall'altra parte tre lunghe file di cellule ganglionari, le quali si dirigono indietro e penetrano tra i cordoni del midollo allungato.

Non è difficile ad essere compreso come in questo taglio, che fu condotto nella vicinanza immediata del piano mediano (vedi la figura schematica 2), non si trovi

(1) Disgraziatamente, solo con tagli trasversi di preparati induriti, ho potuto stabilire le proprietà di queste interessanti cellule; mai ho adoperato il metodo dell'isolazione.

traccia del nervo elettrico, il quale (come già insegna l'esame dei tagli trasversi) non arriva mai abbastanza vicino alla linea mediana per rendersi appariscente sopra uno di tali tagli longitudinali, così vicini alla medesima. Avviene dunque, come infatti si vede nella fig. 15, che un taglio, il quale corre su questo piano, non può presentare nessuna altra immagine tranne quella di un vasto campo, il quale è riempito da cellule ganglionari in un modo omogeneo.

6. *Risultati anatomici e fisiologici.*

La descrizione dei tagli trasversi e longitudinali successivi, fatta nei due precedenti capitoli, basta a fornire una idea completa della configurazione e della composizione del lobo elettrico. La sua struttura è oltremodo semplice: in esso non esiste, come fu supposto da Harless, una diversità delle cellule ganglionari che lo compongono: consiste invece da un grandioso numero di cellule ganglionari colossali (il loro diametro è di 0,11 mm. all'incirca negli individui adulti) di forma e grandezza completamente identica. Ognuna di queste cellule possiede un prolungamento assile, il quale esce dal lobo costituendo il cilindro-asse di una fibra del nervo elettrico. Oltre a queste fibre nervose, alle cellule ganglionari, dalle quali prendono origine, ed al sistema dei prolungamenti ramificati che escono dalle cellule ganglionari, non esistono nella sostanza del lobo elettrico altri elementi anatomici di natura ganglionare. Non contiene altro che vasi sanguigni ed un tessuto connettivo molto scarso: rappresenta adunque un centro nervoso di semplicità straordinaria.

È interessante determinare quante cellule ganglionari possano esistere nel lobo elettrico. Già Boll ha fatto un tale calcolo, il risultato del quale però non è completamente esatto, avendo egli dovuto limitarsi ad adoperare il metodo molto imperfetto di annoverare direttamente sotto il microscopio il numero delle cellule contenute nei singoli tagli del lobo. Io, per lo stesso scopo mi sono servito del metodo più objettivo di annoverare le cellule non sulle preparazioni microscopiche stesse ma in fotografie [1] che mi volle eseguire, colla solita sua gentilezza e maestria, l'illustrissimo signore abate conte Francesco Castracane, al quale mi è grato di porgere qui i miei più vivi ringraziamenti. Questo metodo offrì il vantaggio di potere segnare ogni cellula già annoverata con un puntolino, cosicchè i due modi possibili di sbagliare, cioè di non annoverare una cellula o di annoverarla due volte, vengono egualmente esclusi.

Con questo metodo ho potuto stabilire che nell'estensione della 2ª, 3ª, 4ª, e 5ª sezione ogni taglio trasverso contiene almeno 800 cellule da ogni lato della linea mediana e sovente anche più (p. e. 826). Nel più lungo diametro longitudinale del lobo si contano 108 cellule, cosicchè la spessezza di ognuna delle sei sezioni sarebbe eguale a $108:6 = 18$ cellule. Si ottiene il contenuto della figura stereometrica delle quattro sezioni mediane, figura che si avvicinerebbe presso a poco ad un cilindro, quando si moltiplica la sua base cioè un taglio trasverso $= 2 \times 800$ cellule con l'altezza $= 4 \times 18$ cellule del diametro longitudinale. Questo calcolo dà:

$$2 \times 800 \times 4 \times 18 = 115200.$$

[1] Queste medesime fotografie furono utili anche per disegnare le figure che accompagnano questa monografia.

Per la prima e l'ultima delle sei sezioni il contenuto da aggiungersi a questa cifra sarebbe:

$$2 \times 800 \times 2 \times 18 = 57600.$$

Si deve però tener conto del fatto che il lobo si assottiglia tanto nella direzione del midollo spinale quanto in quella dei corpi quadrigemini. Per questo sembra giusto, di ridurre a metà la somma che darebbero queste due sezioni e di mettere in conto non 57600 ma solo 28800. Questa cifra aggiunta a quella superiore di 115200 dà 144000.

In cifra rotonda adunque il numero delle cellule ganglionari contenute nel lobo elettrico può essere determinato eguale a 150000. Questa determinazione deve destare una riflessione, istruttiva sì ma dolorosa, sul poco che si sa di positivo sulla fisiologia delle cellule ganglionari e sulla incertezza di tutte le conclusioni che vengono tratte dal numero delle cellule ganglionari che esistono in un dato posto. Se vi ha un fatto certissimo nella fisiologia del sistema nervoso, è l'identità funzionale dei due organi elettrici centrali del Malopteruro e della torpedine: ma nel primo caso lo stesso scopo viene raggiunto con un unico pajo di cellule ganglionari, mentre nel secondo abbisognano cento e cinquanta mila elementi cellulari.

Quanto al Malopteruro non si sa se le due cellule ganglionari situate ai due lati del midollo spinale possiedono o no una connessione anatomica. Nella torpedine però le cellule ganglionari, che fanno l'innervazione degli organi elettrici bilateralmente simmetrici, formano una sola ed indivisa massa, entro la quale un rafe mediano è visibile su molti sì, ma non su tutti i tagli trasversi. Forse, questa unità anatomica dell'organo elettrico centrale della torpedine garantisce la sempre contemporanea innervazione dei due organi elettrici, dei quali un solo forse non entra mai in attività isolatamente. Sarebbe a desiderarsi che su questo argomento si facesse qualche esperienza.

L'interessantissimo significato che hanno per l'anatomia comparata gli organi elettrici centrali fu già esposto di sopra, e fu già fatto rilevare, come per la loro proprietà i pesci elettrici dai loro parenti non elettrici si distinguano in un modo non meno caratteristico che per il possesso degli organi elettrici stessi. Lo stesso ragionamento, che di sopra fu applicato agli organi elettrici centrali, deve però essere esteso ancora ad un'altra parte del sistema nervoso: è evidente che nei pesci elettrici, oltre i nervi elettrici e gli organi elettrici centrali, devono trovarsi ancora altre strade nervose particolari, cioè quelle strade di innervazione che mettono in comunicazione i loro organi elettrici centrali colle rimanenti regioni del sistema nervoso centrale, coi centri della volontà e dell'azione riflessa. Poichè in tutti i pesci elettrici la scarica dipende dalla volontà; in tutti i pesci elettrici, quando sono avvelenati colla stricnina, l'organo elettrico risponde all'irritazione riflessa. Queste strade, per mezzo delle quali l'innervazione volontaria e riflessa viene comunicata alle grandi cellule ganglionari degli organi elettrici centrali, sono evidentemente altrettanto caratteristiche per il sistema nervoso centrale dei pesci elettrici come lo sono gli organi elettrici centrali stessi.

Ma quali sono queste strade e ove decorrono? Nel Malopteruro e nel Ginnoto non si sa nulla di esse. Invece nella torpedine con grandissima certezza il nucleo *N* ed il fascio nervoso *N*2, che da esso parte, devono essere considerati come gli organi che comunicano l'innervazione volontaria e riflessa all'organo elettrico centrale e per mezzo di quello all'organo elettrico stesso. La prova di questa asserzione viene fornita

dall'esclusione di tutte le altre possibilità: essendo adesso esaminato colla più minuta esattezza l'organo elettrico centrale della torpedine, ed essendosi stabiliti tutti i suoi rapporti e connessioni colle parti affini del sistema nervoso centrale, non si è trovata che una sola strada nervosa, alla quale potrebbe attribuirsi la funzione di comunicare l' innervazione; e questa strada non è altro che il fascio nerveo *N*2 che parte dal nucleo nerveo *N* e penetra nella sostanza del lobo elettrico stesso. Si debbono dunque considerare le particolari cellule ganglionari del nucleo *N*, le quali si trovano rappresentate nella fig. 16, come gli organi di comunicazione, per mezzo dei quali l'innervazione tanto degli impulsi automatici della volontà, quanto di quelli involontarî prodotti dall' azione riflessa, viene trasportata nella direzione di quei prolungamenti di queste cellule, i quali sortono dal nucleo *N* nella direzione del fascio nerveo *N*2 per entrare nella sostanza del lobo elettrico stesso e per distribuirsi poi nel suo interno, come di sopra fu già descritto. Simili considerazioni, basate sul metodo di esclusione conducono inoltre al risultato, che le fibre decorrenti nel fascio *N*2 entro il lobo devono entrare in una connessione diretta cogli stessi prolungamenti ramificati delle cellule ganglionari grandi: perchè come di sopra fu già posto in rilievo, nella sostanza del lobo, oltre le grandi cellule ganglionari, non esistono altre cellule ganglionari minori. La connessione adunque delle grandi cellule ganglionari con altre strade di innervazione, che è un fatto richiesto dalla fisiologia con necessità assoluta, non può essere immaginata sotto altra forma che quella di una comunicazione immediata dei prolungamenti ramificati delle grandi cellule ganglionari colle fibre nervose che decorrono per la strada del fascio nerveo *N*2.

Così il nucleo *N* potè essere riconosciuto con certezza come il centro, il quale mette in comunicazione l'organo elettrico centrale della torpedine col rimanente del suo sistema nervoso e si potè anche stabilire che questa comunicazione ha luogo per mezzo del fascio *N*2. Molte altre quistioni però che riguardano il nucleo *N* non potevano essere risolute: non essendo fin qui riuscito di trovare le diverse strade, per le quali questo nucleo comunica colle differenti regioni dell'encefalo, col cervello, col cervelletto e col midollo spinale.

È necessario di menzionare ancora una particolarità speciale del nucleo *N*. È evidente che esso non serve esclusivamente alla funzione che testè gli fu attribuita, ma esercita in parte ancora un' altra funzione, colla quale sta in rapporto il fascio nervoso *N*1, che sorte dal nucleo *N*.

Fu già detto di sopra che nei primi tagli trasversi, che ascendendo dal midollo spinale vengono condotti a traverso del nucleo *N*, esso si mostra in connessione con un fascio nervoso *N*1, il quale si applica al lato interno del nervo elettrico ed insieme con esso allontanasi dal lobo. Soltanto sui tagli trasversi che seguono poi, appare il fascio nervoso *N*2 che prende una direzione verticale a quella del nervo elettrico e finisce per penetrare nella sostanza del lobo elettrico stesso.

Si domanda: quale può essere la funzione fisiologica di questo fascio *N*1, il quale si associa al nervo elettrico ed esce insieme con esso dai centri nervosi? In via di ipotesi sarebbe da rispondere, che in questo fascio siano contenuti i nervi motori per i muscoli delle branchie, i quali nervi secondo la scoperta del Savi escono dal centro nervoso insieme col nervo elettrico.

Se questa ipotesi è giusta, il nucleo *N* così prolungato serve nella sua posteriore e nella sua anteriore porzione a due diverse funzioni. La porzione anteriore sarebbe destinata a formare un centro speciale che servirebbe come « centro di comunicazione » all'organo elettrico centrale; la sua porzione posteriore invece avrebbe la funzione di fornire le radici motrici per l'innervazione dei muscoli delle branchie. Con questo concetto sarebbe in pienissimo accordo il fatto che il nucleo *N* tocca colla sua estremità il canale centrale e trae dunque la sua origine da quella regione, la quale, nel midollo spinale, è la sede delle corna anteriori e motrici (vedi la fig. 3).

Una simile quistione come quella sulla funzione del fascio nervoso *N*1 si solleva anche per i fasci nervosi *O*1 e *O*2 che nascono dal centro *O*. Essi, come fa il fascio *N*1 col lato interno, si associano al lato esterno del nervo elettrico ed escono insieme con esso dall'organo centrale. Forse questi fasci devono essere considerati come i nervi sensitivi delle branchie, i quali, come fu trovato dal Savi, decorrono insieme col nervo elettrico. Questa ipotesi ammessa come vera condurrebbe al concetto che la parte respiratoria del nervo vago si trovi in una intima connessione col nervo elettrico già dentro il centro nervoso, e che alla superficie interna di questo nervo si associ la parte motoria, a quella esterna la parte sensitiva del nervo vago. La prima di queste nascerebbe dalla porzione posteriore del nucleo *N*, la seconda dal campo *O*. Disgraziatamente in questo momento ci manca ancora un elemento essenziale per poter risolvere questa quistione con certezza; manca cioè la conoscenza dell'origine dei nervi branchiali presso gli altri selaci più affini alla torpedine.

Delle altre parti, che si ripetono nei differenti tagli successivi del lobo poco o nulla si sa. L'asse cerebro-spinale, che in tutti i tagli trasversi cambia forma e grandezza si trova, sino al di là del mezzo del lobo elettrico, composto da fibre di sostanza bianca tagliata in senso trasverso. È rimarchevole l'aspetto elegante che mostra questa sostanza bianca, essendo suddivisa in piccoli campi per mezzo dei fasci contenenti tessuto connettivo e vasi. Nella quarta delle sei sezioni, nell'asse cerebro-spinale incomincia a comparire un sistema di fibre trasversali che andando avanti da taglio trasverso a taglio trasverso si sviluppa sempre più; questo sistema corrisponde evidentemente all'incrociamento delle fibre nervose che si osserva nel ponte umano.

Sul significato dei nuclei *M* e *N* che si trovano nella regione dell'asse cerebro-spinale non oso nemmeno emettere una ipotesi.

Le formazioni *P* e *S* che cominciano a comparire sul mezzo del lobo elettrico, al lato esterno del nervo elettrico, e che verso la fine del lobo mostrano uno sviluppo tanto considerevole, appartengono, come risulta dall'esame microscopico, al cervelletto, il quale nella torpedine si estende in forma di un processo allungato abbastanza lontano lungo i due lati del lobo.

Sul significato delle sue singole parti e degli elementi istologici che lo compongono non si può dir nulla, perchè ci manca una condizione essenziale cioè la conoscenza della fina anatomia del cervelletto nei selaci non elettrici.

Il fascio nerveo *S*1, che si riscontra nelle figure 7 e 8, corrisponde evidentemente al *Processus cerbelli ad pontem*.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Ingrandimento 15. Taglio trasverso dalla porzione superiore del midollo spinale della torpedine. *Cc*: canale centrale. *Ca*: corno anteriore. *Cp*: corno posteriore.

Fig. 2. — Ingrandimento 2. Disegno schematico del lobo elettrico di una torpedine adulta visto dal di sopra dopo avere allontanate le parti dei corpi quadrigemini e del cervelletto, che lo cuoprivano di sopra e dai lati. Le linee segnate fig. 1, fig. 4, fig. 5, fig. 6, fig. 7, fig. 8, fig. 13, fig. 14, fig. 15 indicano la direzione nella quale sono stati condotti i tagli trasversi (figg. 3-8) ed i tagli longitudinali (figg. 13, 14, 15) del lobo elettrico.

Fig. 3. — Ingrandimento 15. Taglio trasverso del lobo elettrico condotto pel mezzo della prima delle sei sezioni. *Cc*: canale centrale. *N*: nucleo di sostanza grigia con considerevoli cellule ganglionari, situato nella sostanza del midollo allungato.

Fig. 4. — Ingrandimento 15. Taglio trasverso del lobo condotto pel mezzo della seconda delle sei sezioni. *Cc* e *N* come nella fig. 3. *N*1: fascio nervoso che parte dal nucleo *N* e che nel suo ulteriore decorso s'associa al nervo elettrico *NE*. *O*: campo di sostanza grigia situato al lato esterno del nervo elettrico *NE*. *O*1: fascio nervoso che da esso parte e si associa al lato esterno di *NE*. *M*: una semplice fila di cellule ganglionari situata al lato del rafe esistente nell'asse cerebro-spinale.

Fig. 5. — Ingrandimento 15. Taglio trasverso fatto per la maggiore larghezza del lobo, vicino all'estremità anteriore della terza delle sei sezioni cioè quasi sul mezzo del lobo intiero. *Cc*, *N*, *NE*, *O*, *O*, e *M* come nella fig. 4. *N*2: un fascio nervoso che parte dal nucleo *N* per entrare nel lobo. *O*2: fasci nervosi che partono probabilmente da *O* come *O*1. *P*: campo falciforme di sostanza molecolare e ricca di vasi sanguigni, appartenente alla formazione del cervelletto. *Q*: campo di sostanza bianca tagliata trasversalmente, situato al lato esterno di *NE*.

Fig. 6. — Ingrandimento 15. Taglio trasverso condotto pel mezzo della quarta fra le sei sezioni. *Cc*, *NE*, *N*, *N*2, *O*, *P*, *Q* come nelle figure antecedenti. *R*: gruppo di cellule ganglionari situate alla periferia dell'asse cerebro-spinale. *S*: cervelletto.

Fig. 7. — Ingrandimento 9. Taglio trasverso della quinta fra le sei sezioni. *Cc*, *NE*, *P*, *N* e *S* come nelle figure antecedenti. *S*1: fascio nervoso che parte dal cervelletto, paragonabile al *Processus cerbelli ad pontem*.

Fig. 8. — Ingrandimento 15. Taglio trasverso condotto vicino all'estremità anteriore del lobo. Le lettere come nelle figure antecedenti.

Fig. 9. — Ingrandimento Hartnack VII, 2. *a* — *h*. Otto differenti cellule ganglionari, tolte dai tagli trasversi delle corna anteriori del midollo spinale della torpedine.

Fig. 10. — Ingrandimento Hartnack VII, 2. Dal midollo spinale della torpedine: La porzione del corno anteriore sinistro, che tocca l'epitelio del canale centrale colle sue numerose cellule ganglionari.

Fig. 12. — Ingrandimento Hartnack VII, 2. Canale centrale nel mezzo del lobo elettrico colle cellule ganglionari che lo circondano.

Fig. 12. — Ingrandimento Hartnack VIII, 3. Gruppo di cellule ganglionari dal lobo elettrico.

Fig. 13. — Ingrandimento 15. Taglio longitudinale condotto vicino alla periferia del lobo elettrico.

Fig. 14. — Ingrandimento 15. Taglio longitudinale condotto sul mezzo di una delle metà del lobo elettrico. *N*: nucleo nervoso come in fig. 4 e segg.

Fig. 15. — Ingrandimento 15. Taglio longitudinale condotto vicino alla linea mediana del lobo elettrico. *N* come in fig. 14.

Fig. 16. — Ingrandimento Hartnack VII, 3. *a* — *f*. Sei singole cellule ganglionari tolte da un taglio trasverso del nucleo *N*.

Fig. 3.

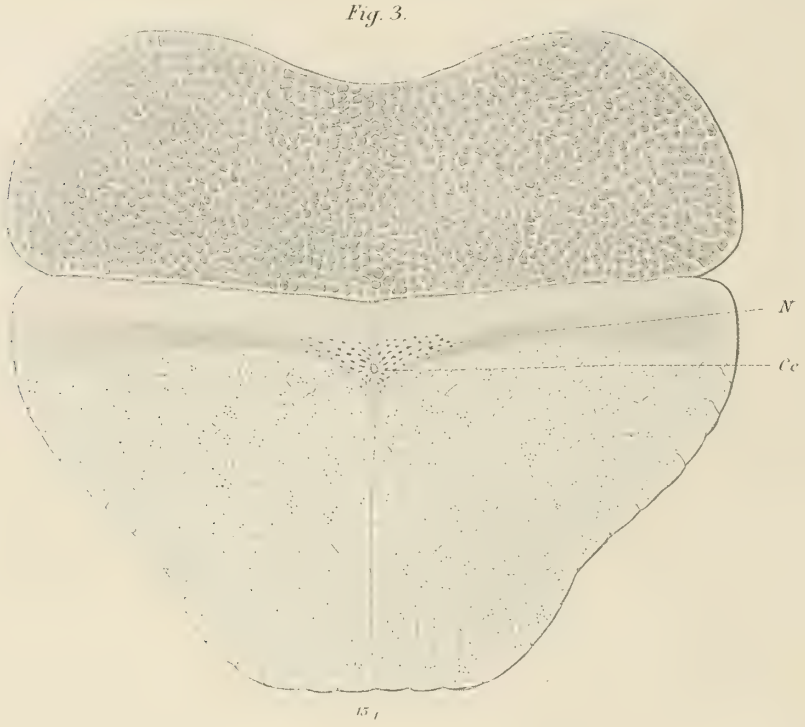
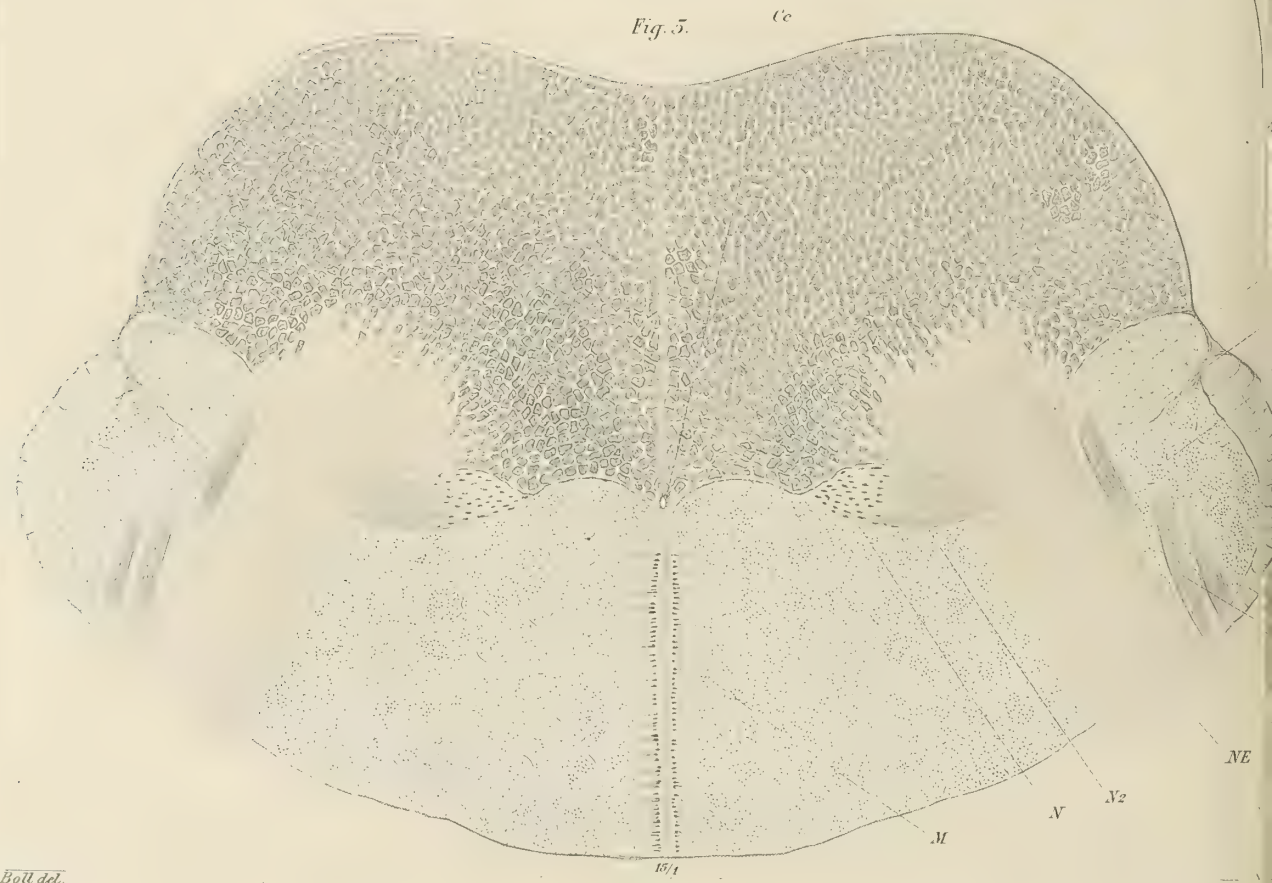


Fig.

Fig. 5.



F. Boll del.

Fig. 4.

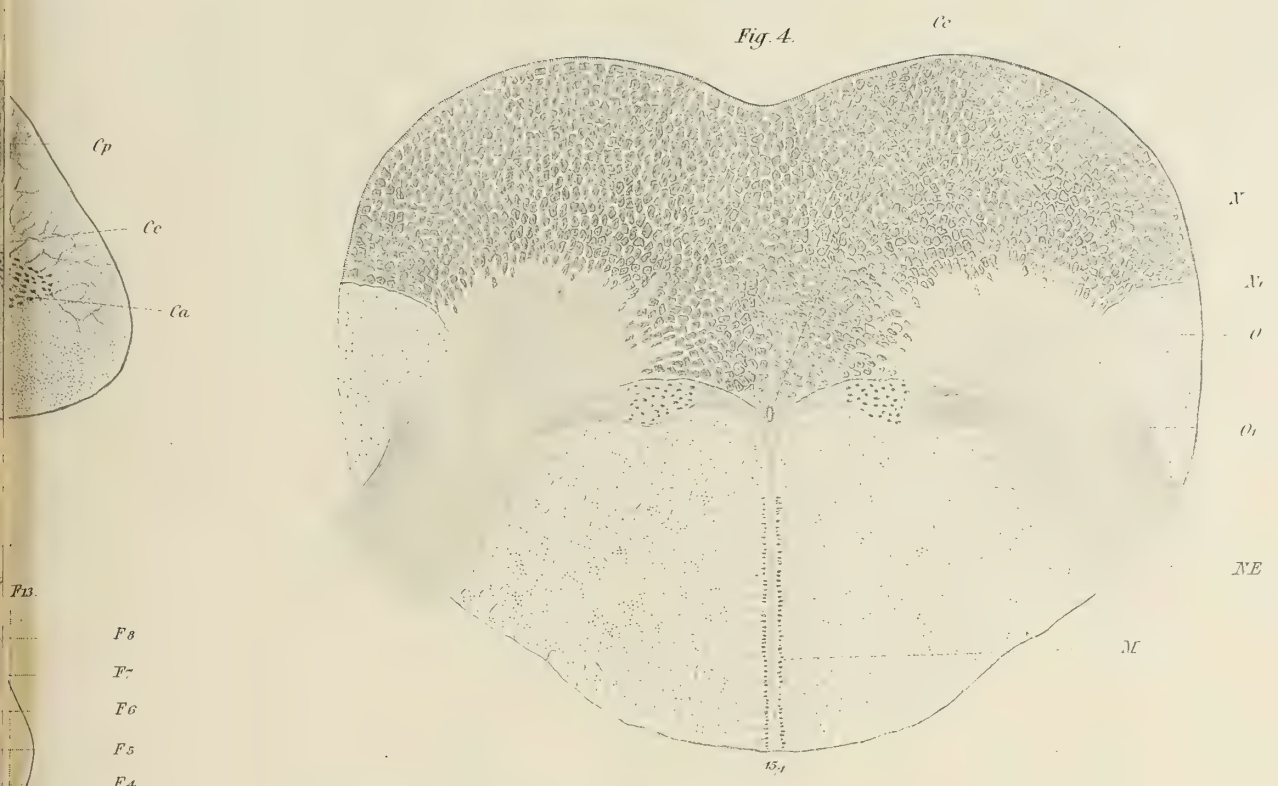
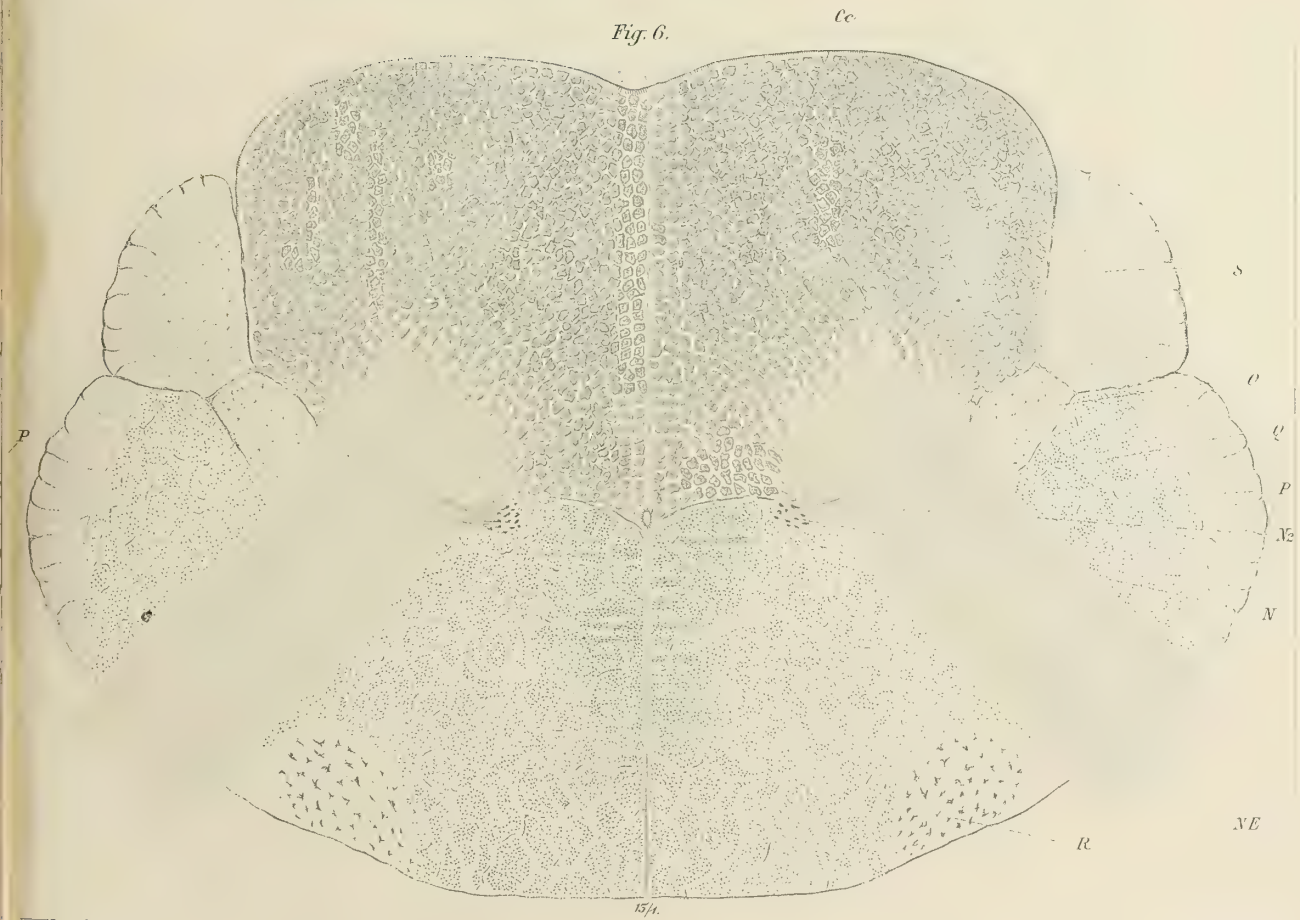


Fig. 6.



W. Grohmann sc.

Fig. 3.

Fig. 1

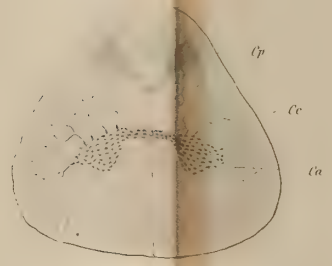


Fig. 2.

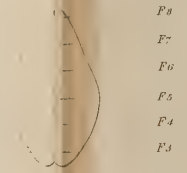


Fig. 4.

Fig. 5.

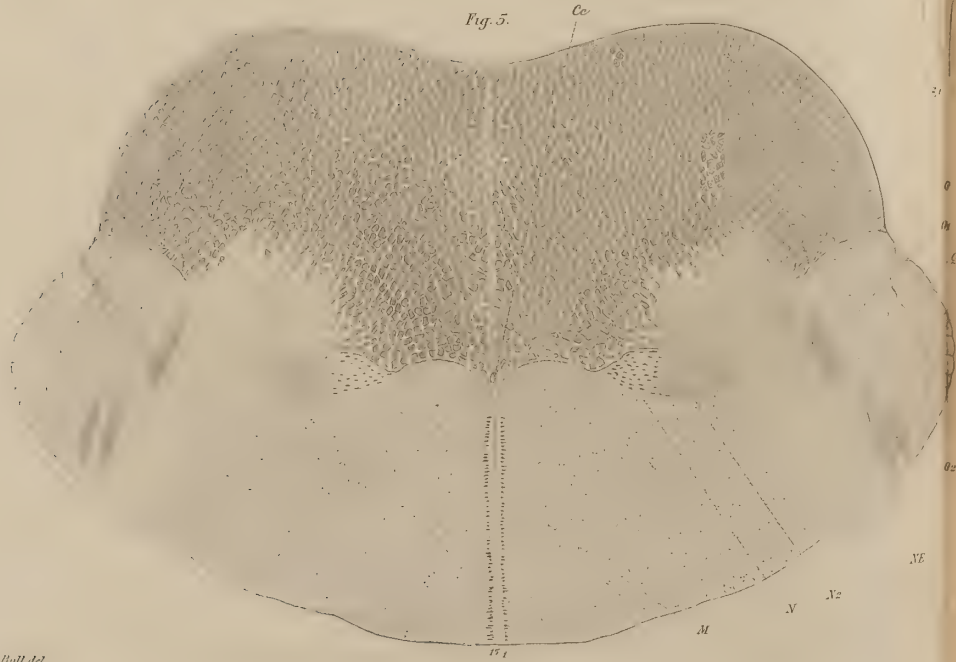


Fig. 6.

Fig. 9

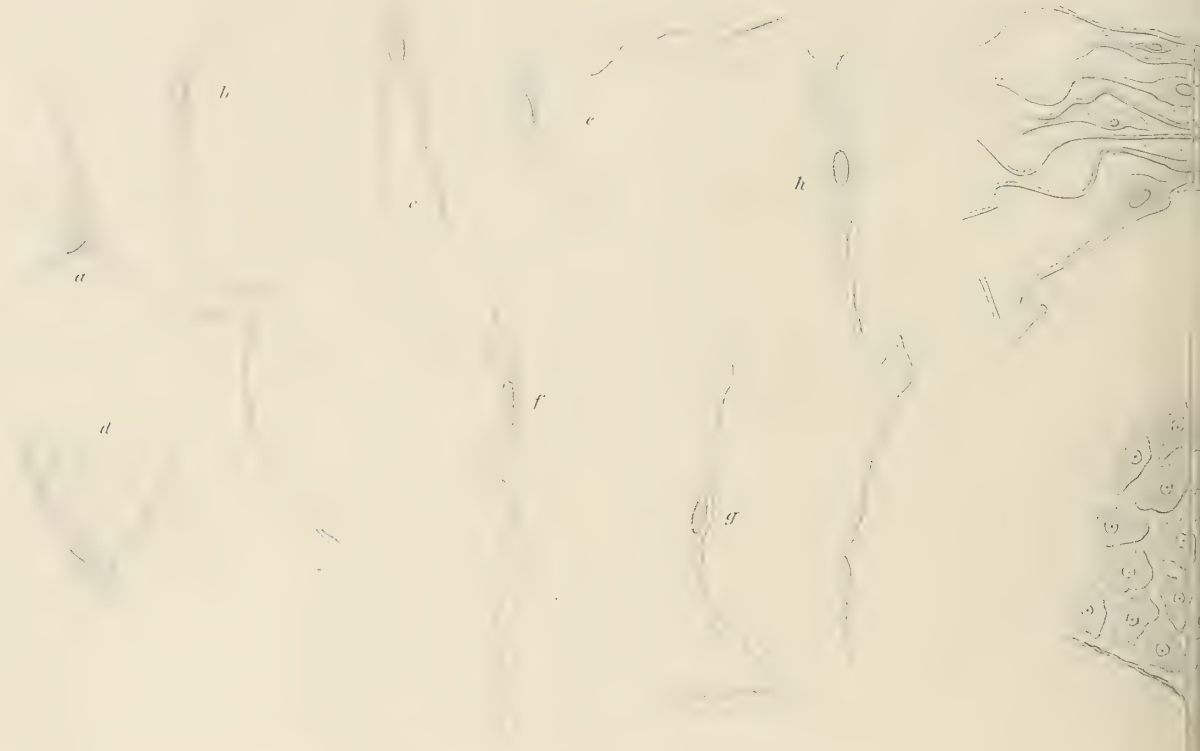
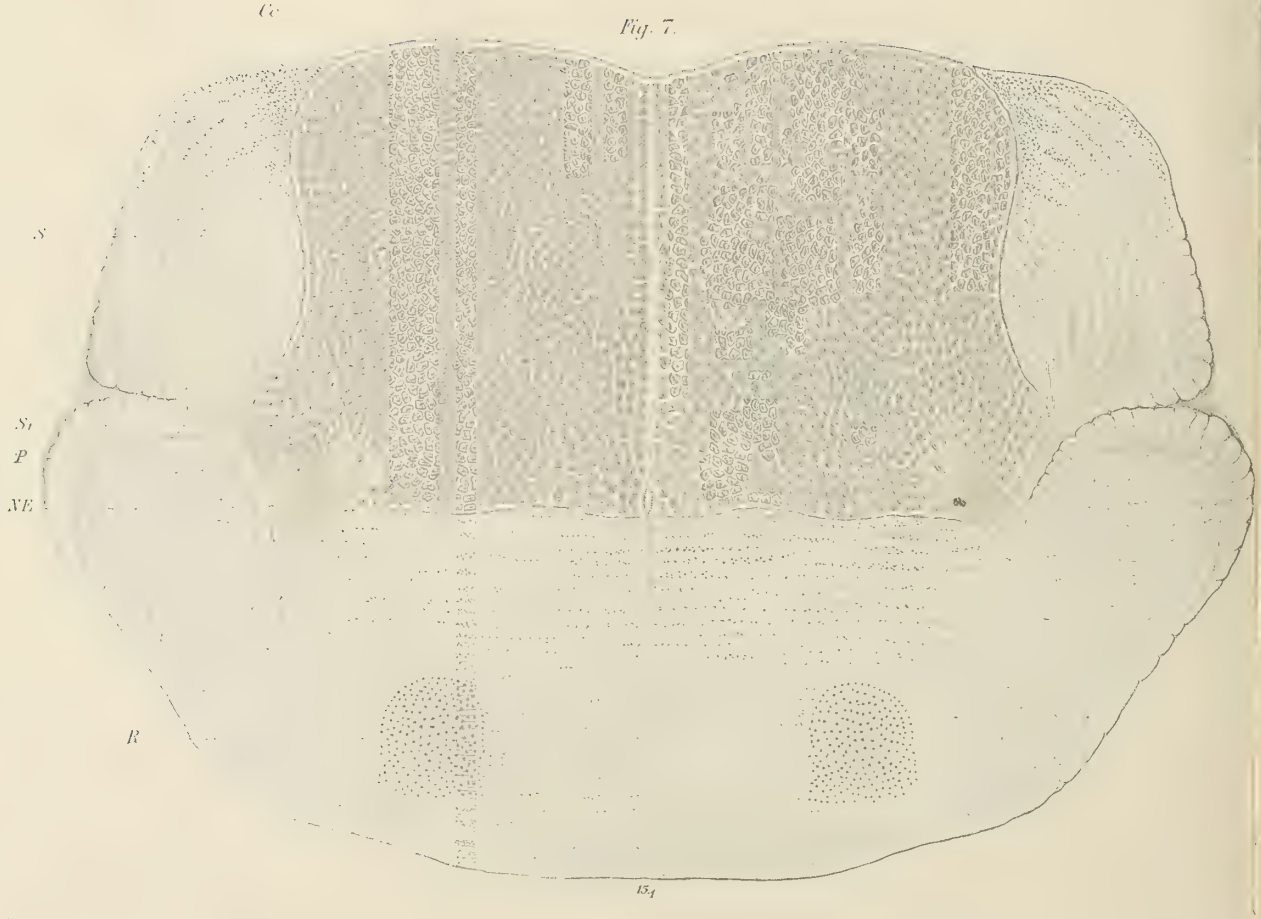


Fig. 7.



Tipoll del

Fig. 12

...10.

...g. 11.

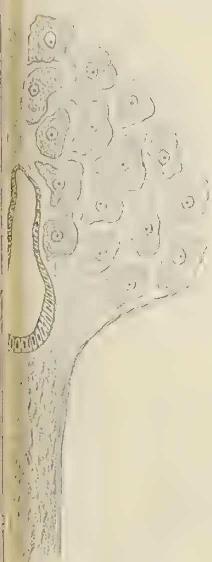
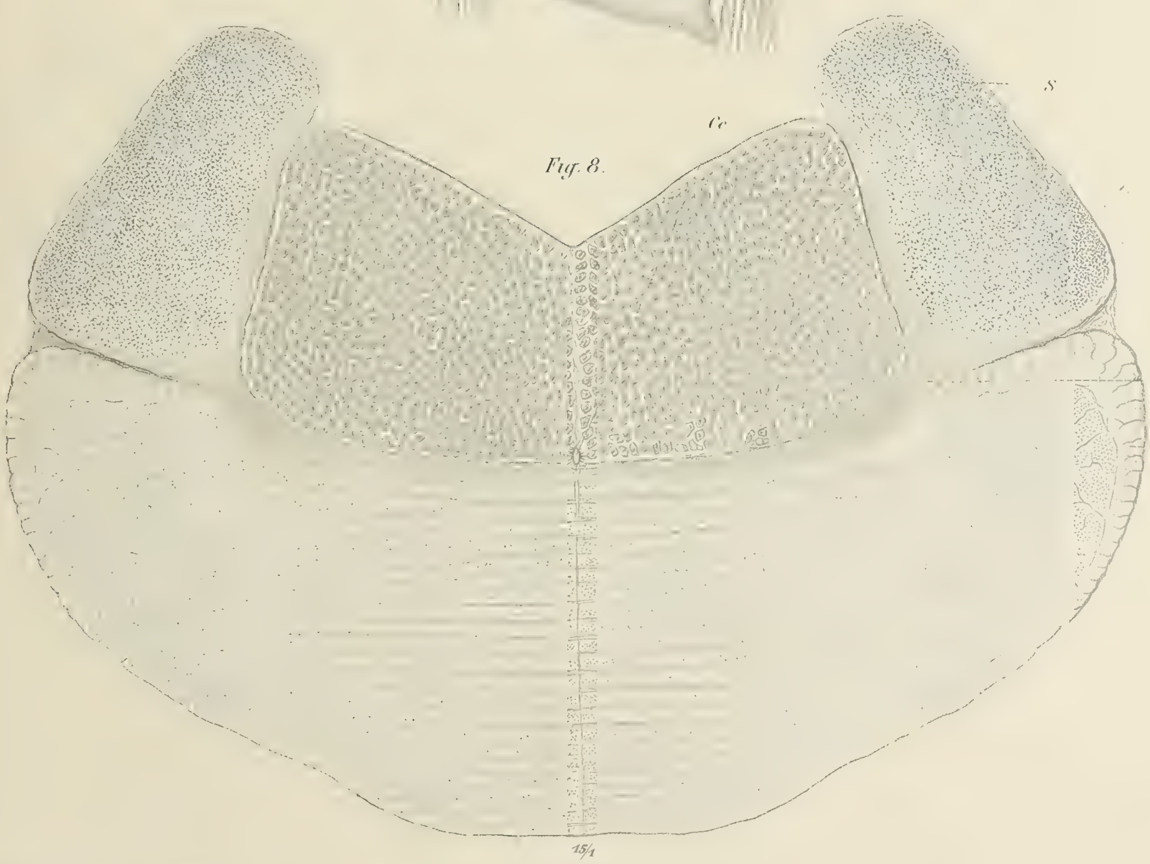


Fig. 8.



W. Grohmann sc.

Fig. 9.

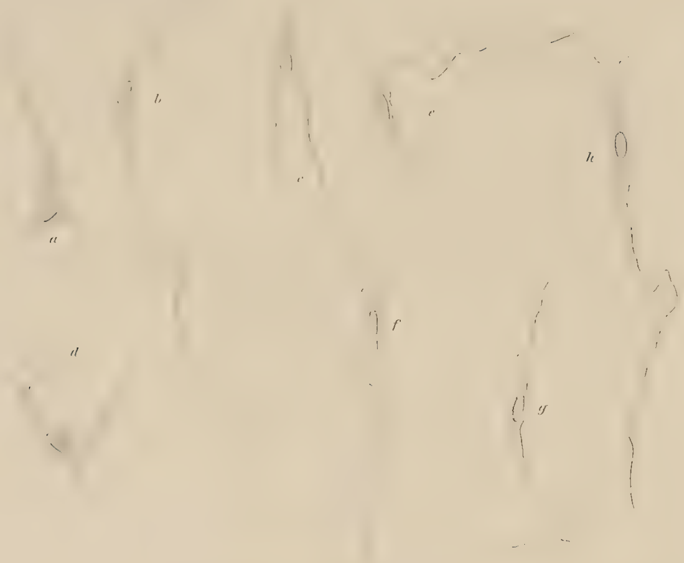


Fig. 10.

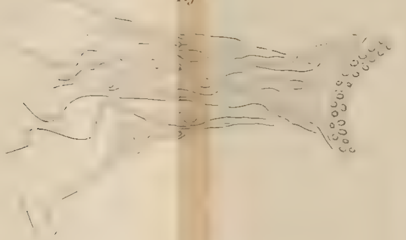


Fig. 11.

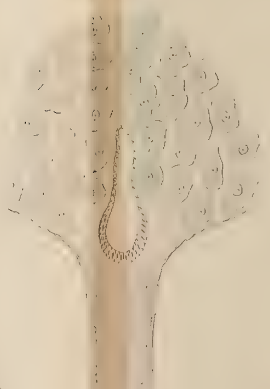


Fig. 12.

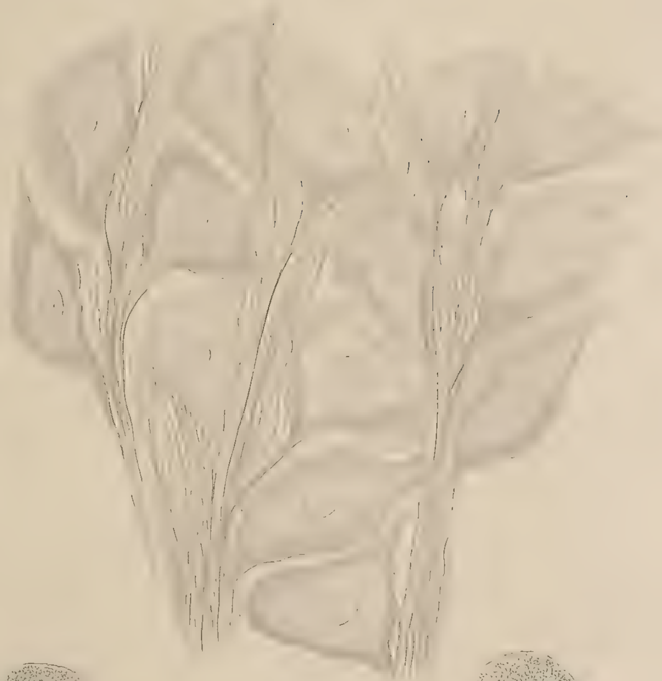


Fig. 7.

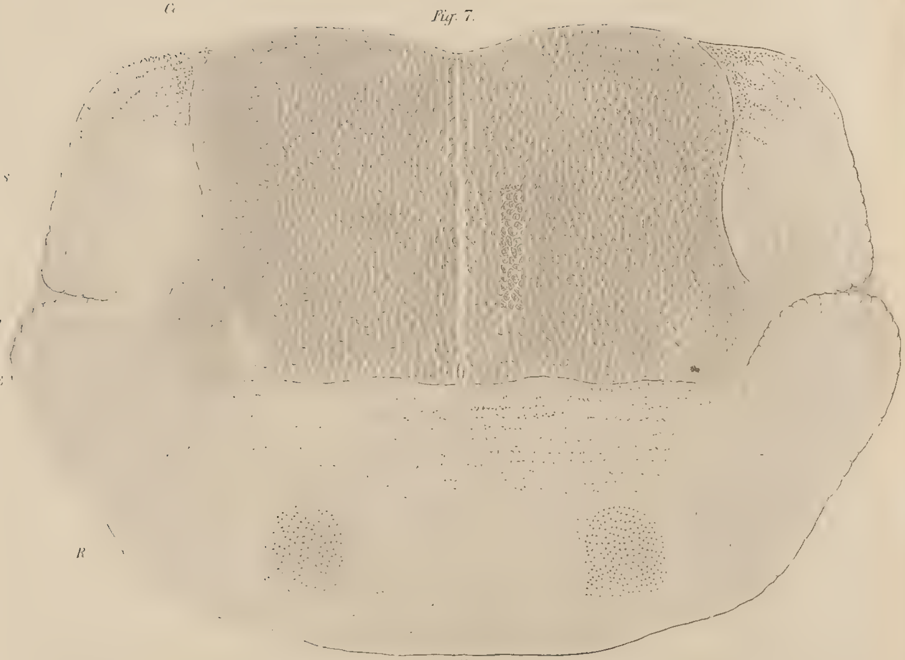


Fig. 8.

J. Vott del. — W. Grohmann sc.

Fig. 16.

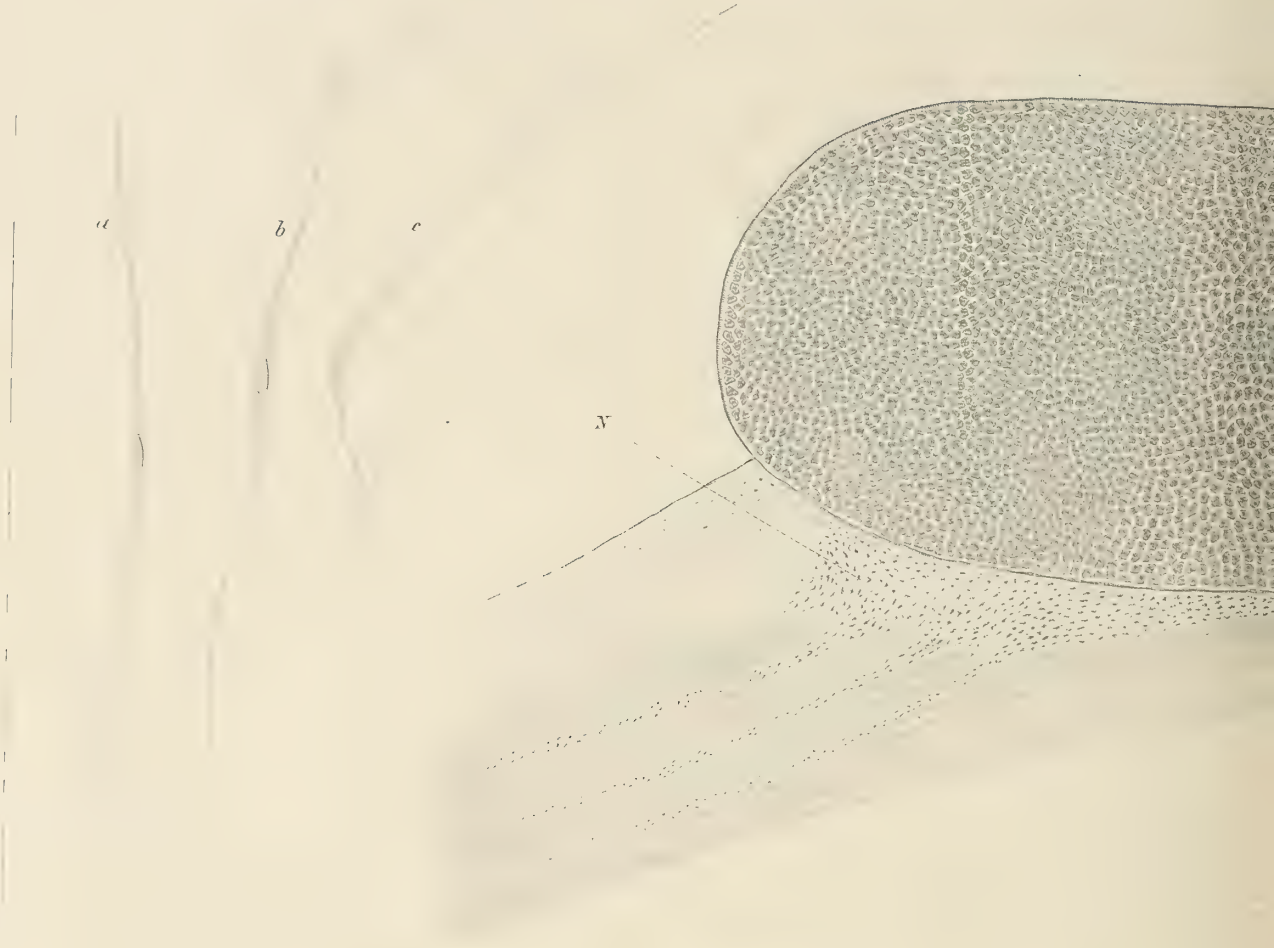


Fig. 14.

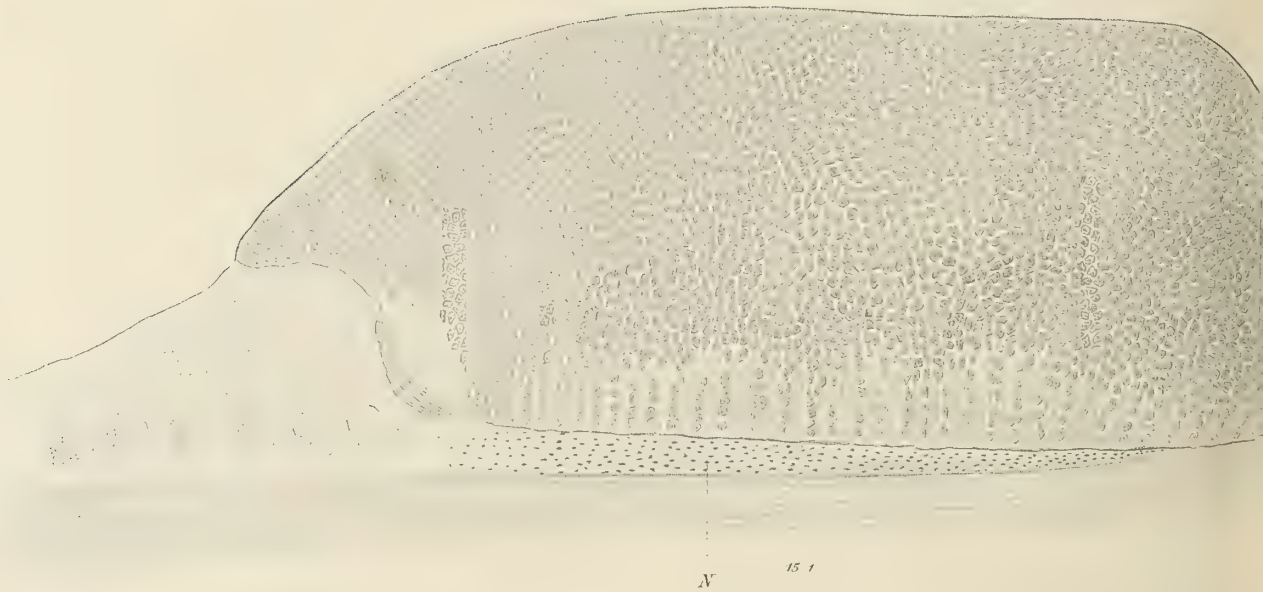
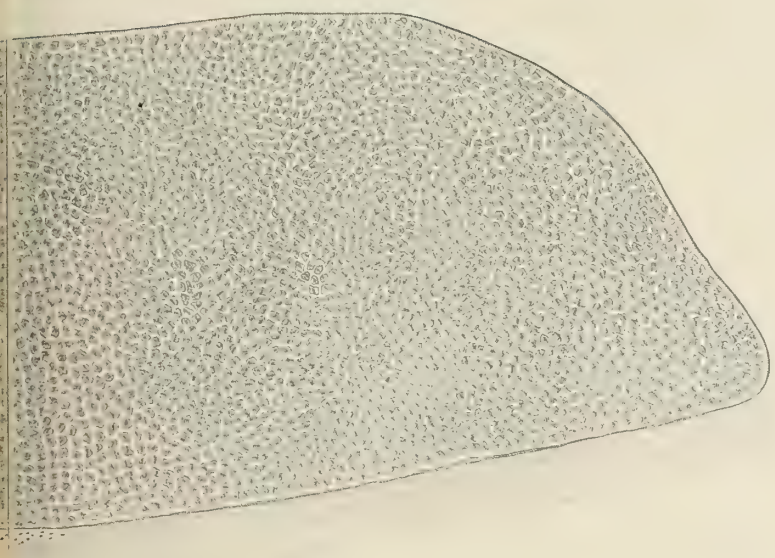


Fig. 16.



d

e

f

Fig. 16.

Fig. 15.

15, 1

W. Grohmann sc.

Fig. 16

Fig. 16.

Fig. 15.

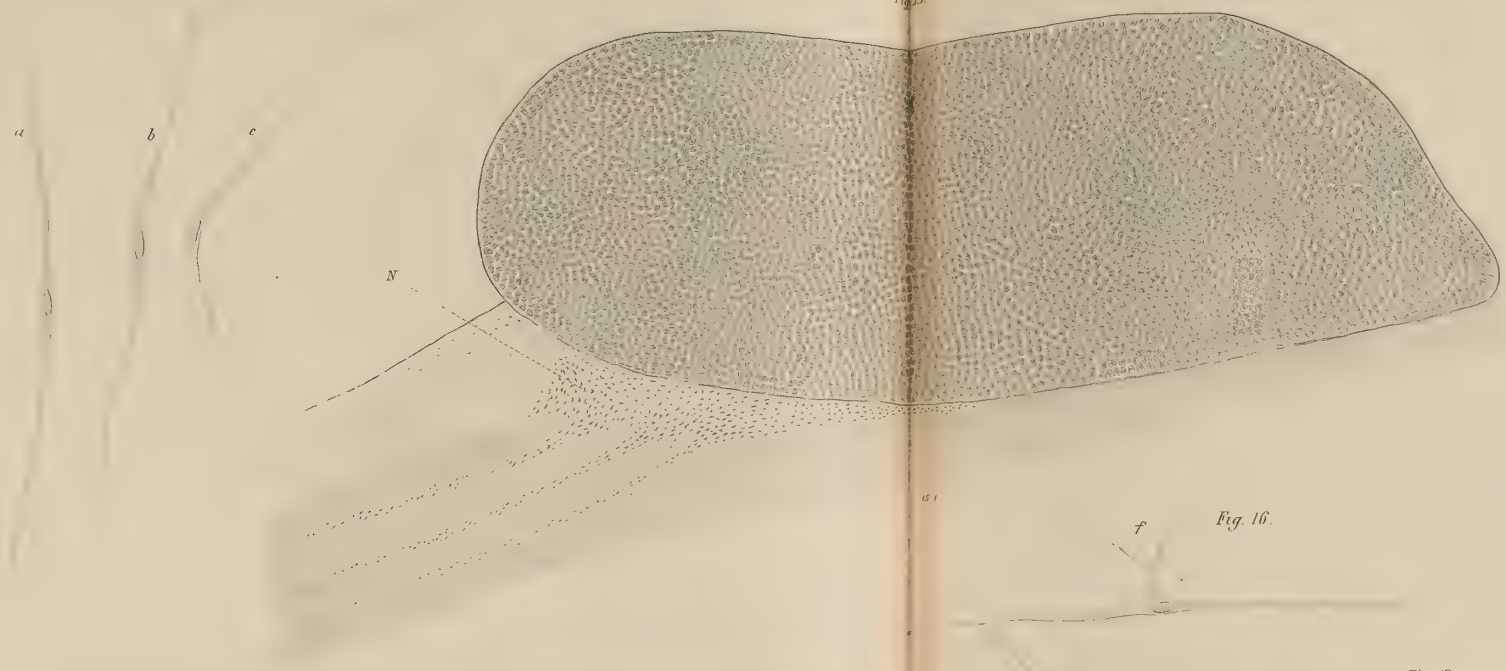


Fig. 16.

Fig. 14

Fig. 13.

Nuculidi terziarie rinvenute nelle provincie meridionali d'Italia.

Memoria di G. SEGUENZA

approvata per la stampa negli Atti dei Lincei
nella seduta del 4 febbrajo 1877.

Nelle abbondanti collezioni di fossili terziarî, formate per mio proprio studio e per mezzo di lunghe ed assidue ricerche imprese in molti luoghi e terreni delle provincie meridionali d'Italia, trovansi raccolti abbondanti materiali della famiglia delle *Nuculidi*, e tra le molte specie e le varietà importanti, che vi si riferiscono, non poche ve ne ha che non furono sinora ricordate pei nostri terreni, e talune affatto nuove, ed altre che richiedono nuovo e più accurato esame; perlochè mi sono proposto di elaborare una monografia, nella quale si contenesse tutto quanto hanno precedentemente scoperto il Philippi, il Calcara, l'Aradas, il Brugnone, il Monterosato ed altri, e tutto quanto io stesso ho potuto raccogliere ed osservare sin'oggi.

L'accurata e recente Monografia del prof. L. Bellardi intorno alle Nuculidi del Piemonte e della Liguria mi dispensa di entrare in troppi dettagli intorno ai caratteri di certe specie comuni ed intorno alla loro sinonimia; per la quale io mi atterrò alle più importanti indicazioni, e specialmente curerò di non trasandare i sinonimi di quegli scrittori, che hanno trattato nelle opere o memorie loro dei fossili dei terreni, di cui mi occupo.

Nell'indicazione delle località, tutte quelle già antecedentemente scoperte precedono il nome dello scopritore; le nuove indicazioni per ciascuno orizzonte geologico vengono segnate le ultime.

L'indicazione dei piani geologici, in cui le specie furono raccolte sarà fatta secondo il sistema del Mayer, siccome il più dettagliato, introducendovi talune necessarie modificazioni, espresse nel seguente quadro:

TERRENI TERZIARÎ

Formazione Pliocenica	Piano	Siciliano	*Doderlein*
	»	Astiano	*Pareto*
	»	Zancleano	*Seguenza* (1)

(1) A scanso di ogni equivoco è necessario far notare che lo Zancleano originariamente fu fondato includendovi tutti gli strati dell'antico plioceno dell'Italia meridionale, depositatisi a grandi profondità, ed allora il Mayer erroneamente ha creduto di vedere in questa formazione i rappresentanti marini degli strati lacustri a Congeria di Vienna, d'Ungheria, di Podolia, della Stiria, di Atene ecc. e ne ha mutato il nome in Messiniano; quindi sin dalla loro origine lo Zancleano ed il Messiniano furono distinti e solo per errore confusi: il primo è pretto plioceno, il secondo costituisce l'ultima zona del mioceno. Gli studî comparativi posteriori fatti in luoghi svariati e lontani mi hanno ammaestrato che un membro superiore del mio Zancleano è esattamente coetaneo al

		Piano Messiniano	*Mayer*
Formazione Miocenica		» Tortoniano	*Mayer*
		» Elveziano	*Mayer*
		» Langhiano	*Pareto*
		» Aquitaniano	*Mayer*
		» Tongriano	*D'Orbigny*
		» Liguriano	*Mayer*
Formazione Eocenica		» Bartoniano	*Mayer*
		» Parigino	*D'Orbigny*
		» Londoniano	*Mayer*
		» Soissoniano	*D'Orbigny*
		» Flandriano	*Mayer*

Il Quaternario in questo sistema di partizione viene costituito dal solo piano Saariano.

Tutte le specie enumerate in questo lavoro sono state raccolte negli orizzonti superiori al Langhiano, cioè dall'Elveziano in poi; in istrati più antichi non ho raccolto che frammenti specificamente indeterminabili; così ancora negli strati dello Zancleano, il più antico plioceno, non ho incontrato veruna specie di questa famiglia.

Famiglia NUCULIDI Gray 1847.

I. Sotto-famiglia NUCULINE Bellardi 1875.

1. Genere **Nucula** Lamarck 1799.

A) Margine crenato o denticolato, superficie levigata o quasi levigata.

1. **Nucula placentina** Lamk. — Sinonimi: 1814. *Arca* (*Nucula*) *nucleus* (parte) Brocchi. *Conch. foss. subap.* p. 480. — 1819. *Nucula placentina* Lamarck. *Anim. s. vert.* vol. VI pag. 60. — 1832. *Nucula italica* Defrance in Deshayes. *Expéd. de Morée* pag. 109 tav. XXIII fig. 4, 5. — 1836. *Nucula placentina* Philippi. *Moll. Sic.* vol. I pag. 65 tav. V fig. 7. — 1841. Calcara. *Conch. foss. Altavilla*

---

plioceno tipico e quindi devesi riferire all'Astiano. Da ciò il sincronismo rigorosamente dimostrato di faune completamente diverse, cioè quella tipica e notissima del comune plioceno dell'alta e media Italia con quella dello Zancleano superiore del Messinese e del Reggiano, la prima littorale, la seconda di mare assai profondo; da ciò la coetaneità degli strati superiori di Altavilla con fauna littorale cogli strati a molluschi, coralli, e cirripedi abissicoli del Messinese e del Reggiano; da ciò riservato il nome di Zancleano al membro più antico e potente del plioceno, il quale membro oltrechè discordante dall'Astiano, offre anch'esso i suoi depositi littorali siccome quelli di mare più o meno profondo (Vedi *Studî paleontologici sulla fauna malacologica dei sedimenti pliocenici depositatisi a grandi profondità* di G. Seguenza. *Introduzione).* Quindi la partizione proposta del plioceno è fondata sopra accurato studio stratigrafico comparativo fatto in molti luoghi e non già a tavolino; i tre piani rappresentano tre distinti periodi successivi di quell'epoca e non già la diversità della zona marina, nella quale i terreni si depositavano, che anzi ciascun piano comprende depositi costituitisi a profondità diversissime. Lo Zancleano infine forma il piano inferiore del plioceno ed è ben distinto dal Messiniano.

pag. 33. — 1844. Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 46. — 1862. Seguenza. *Notiz. succ. sulla costit. geol. Messina* pag. 14. — 1869. Molino. *Geologia di Barcellona* pag. 41. — 1872. Monterosato. *Conch. foss. Monte Pell. e Ficarazzi* pag. 22. — 1874. Seguenza. *Studi strat. s. form. plioc.* (Boll. del R. Comitato geol. n. 3 e 4 pag. 80 n. 11 e 12 p. 342). — 1877. Monterosato. *Catalogo delle conch. foss. di Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. del R. Comitato geol. 1877 n. 1 e 2 pag. 40). — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc. Ital. merid.* (Boll. del R. Comitato geol. n. 3 e 4 pag. 92).

Questa ben nota e grande specie trovasi nell'alta Italia secondo il prof. Bellardi dal miocene medio sino a tutto il plioceno.

Giacimento. — *Elveziano.* Bianchi (rari modelli). — *Astiano.* Altavilla (Calcara, Seguenza); Barcellona (Seguenza, Molino); Calatabiano. — *Siciliano.* Ficarazzi, Monte Pellegrino (Philippi, Monterosato, Seguenza); Girgenti (Philippi); Naso (Seguenza); Nizzeti (Gemmellaro, Lyell). — *Saariano.* Taranto (Philippi).

2. **Nucula Mayeri** Hoernes. — Sinonimi: 1848. *Nucula margaritacea* Hoernes. *Verz. in Czizek's Erlaut. zur geog. Karte von Wien* pag. 28 n. 487 (parte). — 1870. *Nucula Mayeri* Hoernes. *Abh. d. k. k. geolog. Reichsanstalt* tom. II pag. 296. — 1873. Seguenza. *Studi stratigr. sulla form. plioc.* (Boll. R. Comit. geol. fasc. 3 e 4 pag. 96 e 99).

Ho incontrato questa specie coi caratteri assegnati dal Mayer, quindi essa non può venire associata alla *N. placentina* var. A. Bellardi, dappoichè le due fosse ligamentari sono esattamente quali le descrive il Mayer. Ma non posso trasandare una doppia osservazione. Tra i molti esemplari della *N. Mayeri* raccolti negli strati del Tortoniano e del Messiniano taluni se ne osservano, in cui una delle due fossette ligamentari si ristringe e tende a sparire; e per contro la *N. placentina* del plioceno offre individui, in cui si fa vedere l'inizio di una seconda fossetta.

Le due opposte osservazioni, la mia e quella del prof. Bellardi, condurrebbero ad una stessa conclusione: farebbero cioè intravedere una transizione tra le due forme, ma io tuttavia sono ben persuaso che bisogna tenere distinte le due specie.

Giacimento. — *Elveziano.* Monforte e Bianchi (Messinese) (comune ma alterata ed in modelli). — *Tortoniano.* Rometta (rara) (Seguenza); Benestare (rarissima) (Calabria). — *Messiniano.* Zaffaria, Gravitelli, Ritiro presso Messina (Seguenza).

3. **Nucula nitida** Sow. — Sinonimi: 1841. *Nucula nitida* Sowerby. *Conch. Ill. Nucula* n. 29 fig. 20. — 1872. Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* pag. 22. — 1874. Seguenza. *Formaz. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. vol. V pag. 80). — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie, poco comune allo stato fossile, è somigliante alla specie seguente, dalla quale differisce perchè più compressa, più lunga, più transversa e col lato anale quasi acuto.

Giacimento. — *Astiano.* Altavilla (presso Palermo), Messina, Calatabiano, Rometta, Spadafora ecc., Riace, Siderno (Calabria) (rara). — *Siciliano.* Ficarazzi, Monte Pellegrino (Monterosato, Seguenza); Reggio, Monosterace (Calabria) (rara). — *Saariano* Boveto (Calabria) (rara).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

4. **Nucula nucleus** Linneo. — Sinonimi: 1766. *Arca nucleus* Linneo. *Syst. nat.* ed. XII pag. 1143. — 1778. *Glycimeris argentea* Da Costa. *Brit. Conch.* pag. 170 tav. 15 fig. 6. — 1790. *Tellina adriatica* Gmel. *Syst. nat.* ed. XIII pag. 3243. — 1792. *Arca margaritacea* Brug. *Encyclop. meth. Vers.* vol. I pag. 109. — 1814. *Arca nucleus* (*Nucula*) Brocchi. *Conch. foss. sub.* pag. 480 (parte). — 1836. *Nucula nucleus* Philippi *Moll. Sic.* vol. I pag. 64 e 65 tav. V fig. 8. — 1836. Scacchi. *Not. conch. foss. Gravina* pag. 26. — 1840. *Nucula margaritacea* Calcara. *Conch. foss. Altavilla* pag. 32. —

1844. Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 45, 46. — 1862. Seguenza. *Notiz. succ. costil. geol. Messina* pag. 31. — 1872. *Nucula nucleus* Monterosato. *Conchiglie foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* pag. 22. — 1874. Seguenza. *Formaz. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. vol. V pag. 80). — 1877. Monterosato. *Catalogo delle conch. foss. di Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comitato geol. pag. 29). — 1877. Seguenza. *Studî formaz. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie comune allo stato vivente trovasi molto raramente allo stato fossile nell'Italia meridionale, e manca poi affatto negli strati del plioceno antico depositatisi a grandi profondità, dove invece abbonda immensamente la *Nucula sulcata*.

Var. *A* — RADIATA. — Sinonimi: 1823. *Nucula obliqua* Borson. *Oritt. piem.* parte III pag. 123 (non Lamarck). — 1849. *Nucula radiata* Forbes and Hanley. *Brit. Moll.* pag. 220 tav. XLVII fig. 4 e 5; tav. XLVIII fig. 7. — 1863. *Nucula nucleus* var. 1 *radiata* Jeffr. *Brit. Conch.* pag. 144.

Giacimento. — *Elveziano.* Monforte contr. Vignale (rara). — *Tortoniano.* Sampiero, Rometta (rara); Benestare? (Calabria). — *Astiano.* Altavilla (Calcara); Calatabiano (rara). — *Siciliano.* Monte Pellegrino, Ficarazzi (Monterosato, Seguenza); Reggio, Monosterace (Calabria); Messina (rara). — *Saariano.* Boveto (Calabria) (rara). — *Recente.* Messina.

Var. *A* — *Tortoniano.* Sampiero (rara).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

5. **Nucula umbonata** n. sp. Tav. I fig. 4, 4a, 4b, 4c.

Diagnosi: Testa parva, solidiuscula, ovata, parum inflata, obliqua, laeviuscula, lineisque concentricis, tenuibus, irregularibus ornata. Latus buccale breve, subangulatum; lunula ovata, gibba, sed parum distincta. Latus anale rotundatum. Umbones inflati, prominentes, lati, recurvi. Margo pallealis parum convexus, intus tenuissime crenatus. Lungh. 4.2^{mm}, largh. 3.5^{mm}, spess. 1.8^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Nucula umbonata* Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. fasc. 3 e 4).

Gli apici larghi, gibbosi, prominenti distinguono bene questa piccola specie, che somiglia in qualche modo alla *N. tumidula* Malm. ma per la prominenza degli apici, per la minore convessità della conchiglia, che è ancora meno inequilatera e di forma ovata, per la lunula più gibbosa la specie fossile distinguesi bene dalla vivente. Raccogliesi nel plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Spadafora, Rometta, Salice, Gravitelli, Scoppo, Trapani, ecc. (terr. di Messina); Riace (Calabria).

6. **Nucula striatissima** n. sp. Tav. I fig. 1, 1a, 1b, 1c.

Diagnosi: Testa parva, trigona, inflata, solida, laevis, transverse vix rugosa, radiatim tenuissime striata, parum obliqua. Latus buccale breve, subtruncatum: lunula ovata, laevis, ad latera parum excavata, medio inflata. Latus anale curviusculum. Umbones inflati, valde prominentes, conspicue recurvi. Margo pallealis parum convexus. Lungh. 5^{mm}, largh. 4^{mm}, spess. 2.2^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Nucula striatissima* Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. 1877 fasc. 3 e 4).

Questa specie è eminentemente distinta oltrechè per la sua forma trigona e per la sua convessità, pegli apici gibbosi molto sporgenti e fortemente incurvati che la distinguono assai bene dalla precedente e dalle altre.

È propria del plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Rometta e Messina (rara), Salice (comune).

7. **Nucula trigona** n. sp. Tav. I fig. 2, 2a, 2b, 2c.

Diagnosi: Testa parvula, solida, trigona, obliqua, inflata, laevis; rugis transversis concentrice vix signata. Latus buccale brevissimum, truncatum; lunula longa convexa vix distincta, sulcis lateralibus fere destituta. Umbones inflati, valde prominentes subrecurvi. Margo apico-analis curviusculus, obliquus; margo pallealis conspicue convexus. Lungh. 4.5^{mm}, largh. 4.4^{mm}, spess. 2.2^{mm}.

Sinonimi: 1877 *Nucula trigona* Seguenza. *Studi form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. 1877 fasc. 3 e 4).

Questa specie è molto affine alla precedente, dalla quale differisce per essere più alta, cogli apici meno gibbosi e meno incurvi, per la lunula poco distinta, pel margine palleale molto convesso ecc. Per la forma generale somiglia molto alla *N. Jeffreysii* Bell., alla *Nucula glabra* Phil.; ma differisce dalla prima perchè meno obliqua e pel difetto di solchi concentrici, dalla seconda perchè più convessa e pel margine dentato.

Questa specie è anch'essa propria del plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Riace (Calabria) (comune).

B) Conchiglia trasversalmente costulata ovvero rugosa. Margine palleale dentellato.

8. **Nucula sulcata** Bronn. — Sinonimi: 1831. *Nucula sulcata* Bronn. *Ital. tert. Geb.* pag. 109. — 1834. *Nucula compta* Goldf. *Petr. Germ.* vol. II pag. 158 tav. CXXV fig. 20. — 1836. *Nucula Polii* Philippi. *Moll. Sic.* vol. I pag. 63, 64 tav. V fig. 10. — 1841. Calcara. *Conch. foss. Altavilla* pag. 32. — 1844. *Nucula sulcata* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 45, 46. — 1862. *Nucula Polii* Seguenza. *Notizie succinte cost. geol. Messina* pag. 18, 21, 31. — 1869. *Nucula sulcata* Molino. *Geol. di Barcellona* pag. 41. — 1872. Monterosato. *Conch. foss. di Monte Pellegrino e Ficarazzi* pag. 19. — 1872. *Nucula rugosa* Ponzi. *Foss. bac. rom. e fauna vat.* pag. 3. — 1872. *Nucula triquetra* Ponzi. *Foss. bac. rom. e fauna vat.* p. 3. — 1873. *Nucula sulcata* Seguenza. *Breviss. cenni ser. terz. Messina* pag. 20. — 1874. Seguenza. *Formaz. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. vol. V pag. 80). — 1877. Monterosato. *Catal. conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comitato geol. n. 1 e 2). — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie tanto nota è tra le più comuni, che si raccolgono dapertutto nel plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Elveziano.* Monforte, Fondaco nuovo, Bianchi (rara). — *Tortoniano* Rometta (rara). — *Messiniano.* Messina (rara). — *Astiano.* Lamato, Stilo, Santa Severina, Cutro, Cutrone (Calabria) (Philippi); Altavilla (Calcara); Messina, Barcellona, (Seguenza); Annunziata, S. Nicandro, Tremonte, Trapani, Scoppo, Scirpi, Gravitelli, Camaro, S. Filippo, Salice, Gesso, Serro, Rometta, Spadafora, Santa Lucia, Castroreale, Milazzo, Calatabiano ecc. (provincia di Messina), Villa S. Giovanni, Reggio, Valanidi, Bianco, Ardore, Gerace, Siderno, Gioiosa-Jonica, Riace, Monosterace ecc. (provincia di Reggio) (comunissima). — *Siciliano.* Ficarazzi, Monte Pellegrino (Monterosato, Seguenza); Palermo, Sciacca, Militello, Girgenti, Cefali, Nizzeti (Philippi); Messina, Reggio, Naso, Rocca (Seguenza); Monosterace (rara). — *Saariano.* Boveto (presso Reggio) (rara).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

9. **Nucula Jeffreysii** Bellardi. — Sinonimi: 1864. *Nucula rugosa* Conti. *Monte Mario e foss.* pag. 23 e 47 (non Buckl. Bronn. Index pal. pag. 826) (non Buckl). — 1875. *Nucula Jeffreysii* Bellardi.

Monogr. nucul. terr. terz. Piemonte e Liguria pag. 12 tav. I fig. 6 a b). — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie è distintissima per tutti i suoi caratteri e specialmente per essere molto alta, triangolare e concentricamente costata con regolarità.

Giacimento. — *Astiano.* Altavilla (comune).

10. **Nucula Antoniminensis** n. sp.

Diagnosi: Testa parvula, solida, trigona, obliquissima, valde inflata; longitudinaliter concentrice costulata; costulae crebrae, a sulcis angustis separatae, uniformes, subregulares, complanate. Latus buccale brevissimum, subtruncatum; lunula cordato-ovata, medio valde inflata. Latus anale longum subacutum. Umbones inflati, prominentes incurvati. Margo apico-analis subrectus, valde obliquus; margo pallealis parum convexus.

Questa specie è molto affine alla precedente, dalla quale differisce per essere più rigonfia, ancor più obliqua e specialmente per la lunula molto larga e più rigonfia e pegli apici prominentissimi ed incurvati fortemente.

Duolmi non aver potuto figurare questa specie, per essere stata rinvenuta mentre il presente lavoro trovavasi sotto i torchi.

Giacimento. — *Tongriano.* — Zona E. Seg. — Nelle arenarie a *Pecten* e *Clypeaster Antoniminensis* Seg. nelle colline soprastanti ad Antonimina.

C) Superficie levigata, margine palleale sfornito di dentellature.

11. **Nucula decipiens** Phil. — Sinonimi: 1844. *Nucula decipiens* Philippi. *Enum. moll. Siciliae* vol. II pag. 48 tav. XV fig. 15. — 1862. Seguenza. *Notizie succinte terr. terz. messinesi* pag. 18. — 1874. *Nucula tenuis* Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. R. Comitato geol. vol. V pag. 80. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Com. geol. fasc. 3, 4) (non Montagu).

Più maturo esame intorno a questa specie mi fa credere che bisogna tenerla distinta dalla *Nucula tenuis* Mtg. dei mari del Nord. Il sig. marchese di Monterosato ha recentemente (1) disgiunto la specie vivente del Mediterraneo, che veniva sinora riferita alla *N. tenuis* dei mari del Nord, da quest'ultima, rapportandola alla *N. Aegeensis* Forbes. Io da mia parte ritengo che quest'ultima è una varietà della specie del Philippi, ed adotto per la specie la denominazione data da quest'ultimo siccome probabilmente anteriore.

La nucula descritta dal Philippi differisce soltanto dalla vivente per essere di forma alquanto più oblunga e più solida, ed è comune nel plioceno dei mari profondi.

Var. *A* — Aegeensis Forbes. — Sinonimi: 1844. *Nucula Aegeensis* Forbes. *Report of Aegean Invertebrata* pag. 192. — 1872. *Nucula tenuis* Monterosato. *Fossili Ficarazzi Monte Pellegrino* pag. 22 (non Montagu). — 1874. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. pag. 8 del vol. V). — 1877. *Nucula Aegeensis* Monterosato. *Catal. conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comitato geol. 1877 fasc. 1 e 2). — 1877. *Nucula tenuis* Seguenza. *Studî plioc. Ital. merid.* (Boll. Comitato geol. fasc. 3 e 4).

Come dissi la *Nucula Aegeensis* è trasversalmente più breve della *N. decipiens*, e meno solida.

(1) *Catalogo delle conchiglie fossili di Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Bollettino del R. Comitato geologico 1877 fasc. 1 e 2).

Var. *B* — *inflata.*

Chiamo così una valva rotta che risponde nella forma alla Var. *A*; ma tenue, gibbosa e di quadrupla grandezza.

Giacimento. — *Tortoniano.* Rometta (Messinese) (rarissima). — *Astiano.* Valle Lamato (Calabria) (Philippi); Messina, Trapani, Scoppo, Gravitelli, Salice, Rometta, Spadafora (provincia di Messina) (rara); Reggio, Siderno (Calabria) (rara).

Var. *A* — *Astiano.* Altavilla, Calatabiano (rara). — *Siciliano.* Monosterace (Calabria) (rara); Monte Pellegrino, Ficarazzi (Monterosato, Seguenza) (rara). — *Saariano.* Boveto (Calabria) (rara).

Var. *B* — *Astiano.* Monosterace (Calabria) (rarissima).

Abitazione. — Mediterraneo.

12. **Nucula delphinodonta** Migh. Tav. I fig. 5, 5c. — Sinonimi: 1873. *Nucula delphinodonta* Migh. — 1873. H. C. Weinkauff. *Catal. der im europäischen Faunengebiet lebenden Meeresconchylien* pag. 60. — 1877. Seguenza. *Studi plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. fasc. 3 e 4).

Rapporto a questa specie una piccola nucula pliocenica a margine liscio, più piccola degli esemplari viventi del Nord, che devo alla gentilezza del sig. Jeffreys.

Var. *A* — *minor.* Tav. I fig. 5a, 5b, 5c.

È questa la forma più comune, la quale più breve e col margine anale più curvato diviene più rotondata.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (comune); forma tipica e varietà.

Abitazione. — Atlantico, Nord-atlantico.

13. **Nucula corbuloides** n. sp. Tav. I fig. 3, 3a, 3b, 3f, 3h.

Diagnosi: Testa parvula, tenuis, rotundato-ovata, obliqua, inflata; superficies laevis, lineis incrementi paucis signata. Latus buccale breve, rotundatum, acutissimum: lunula nulla. Latus anale longum, acutissimum. Umbones prominentes, inflati, recurvi. Margo apico-analis arcuatus: margo pallealis convexus. Lungh. 3. 1^{mm}, largh. 2. 8^{mm}, spess. 1. 4^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Nucula corbuloides* Seguenza. *Studi plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. fasc. 3 e 4).

Questa specie è distintissima per tutti i suoi caratteri, la sua forma ovata regolarmente, senza indizio di angolosità marginale, coi margini che si congiungono ad angolo molto acuto, soprattutto verso la regione cardinale, il difetto di lunula ed altri caratteri danno tale una fisonomia a questa piccola bivalve da rassomigliare ad una *Corbula,* o meglio per l'uguaglianza delle valve ad una *Mactra.*

Questa specie è esclusiva del plioceno dei mari assai profondi.

Var. *A* — *rotundata.* Tav. I fig. 3c, 3d, 3e, 3h.

Forma più breve e nell'insieme più rotondata della forma tipica.

Var. *B* — *brevior.* Tav. I fig. 3g, 3l.

Questa forma differisce dal tipo per essere più stretta e colla regione cardinale meno curva.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Scoppo, Gravitelli, Salice, Rometta, Spadafora ecc. (provincia di Messina) (comune), Riace (provincia di Reggio) (rara).

Le varietà si raccolgono insieme alla forma tipica.

14. **Nucula glabra** Philippi. — Sinonimi: 1844. *Nucula glabra* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 47 tav. XV fig. 6. — 1877. Seguenza. *Studi formaz. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. 1877 n. 3 e 4).

Questa specie per la sua grande solidità e per la forma triangolare e compressa della conchiglia è distintissima; anch'essa è propria ed esclusiva del plioceno depositatosi a grandi profondità.

Var. *A* — *elata.* Tav. I fig. 6, 6a.

Differisce dalla forma tipica, perchè più alta e quindi l'apice più prominente e più acuminato.

Giacimento. — *Astiano.* Bianco, Valle Lamato (Philippi); Rometta e Salice, (comune) (provincia di Messina); Gioiosa-Jonica, Riace (provincia di Reggio).

Var. *A* — *Astiano.* Rometta, Salice (rara).

Nelle diverse zone del miocene si trovano varî modelli di Nucule (specialmente nel Messinese) che accennano ad altre specie forse distinte, che non si possono per ora descrivere, essendone sconosciuti i più importanti caratteri.

2. Genere **Nucinella** S. Wood 1850.

1. **Nucinella ovalis** S. Wood. Tav. II fig. 8, 8a, 8b, 8c. — Sinonimi: 1840. *Pleurodon ovalis* S. Wood. *Illustr. in Mag. Nat. Hist.* 2d series vol. IV pag. 231 tav. 13 fig. 1. — 1840. *Pleurodon miliaris* S. Wood. *Catalogue.* — 1850. *Nucinella miliaris* S. Wood. *A Monograph of the Crag Mollusca* part. II pag. 73 tav. 10 fig. 4 a-c (non Deshayes). — 1877. *Nucinella ovalis* Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Com. geol. n. 3 e 4).

Non ho esitato a rapportare alla specie del Crag la *Nucinella* raccolta nelle sabbie del plioceno astiano; della quale ho voluto dare anco due figure, per mostrare come la specie d'Italia non può disgiungersi da quella d'Inghilterra, essendochè la forma, il numero e la disposizione dei denti, siccome tutti gli altri caratteri, corrispondono bene.

Questa specie fu trovata sinora nel Crag d'Inghilterra. La specie del bacino di Vienna, che l'Hoernes vi rapporta, deve tenersi distinta.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (rarissima).

2. **Nucinella Calabra** n. sp. Tav. II fig. 7, 7a, 7b, 7c, 7d.

Diagnosi: Testa minima, subovata, obliqua, tumida, laevigata, polita, lineis incrementi concentrice signata. Latus buccale brevissimum, productiusculum. Latus anale longum, subtruncatum. Umbones inflati, prominentes, recurvi. Margo pallealis fortiter arcuatus. Cardo rectus, dentes cardinales 5 irregulares, parum prominentes; dens lateralis lamelliformis, ab aliis distans. Lungh. 1. 8^{mm}, largh. 1. 6^{mm}, spess. 1. 2^{mm}.

La *Nucinella* descritta somiglia molto alla specie scoperta dal Reuss nel bacino di Vienna, che fu dallo scopritore riferita alla specie del Crag, ma dal Deshayes distinta quindi col nome di *Nucinella Reussii* (1). La specie del miocene d'Italia io la credo distinta pei caratteri seguenti: essa è più rigonfia, ha soli cinque denti al cardine, ed il dente laterale è più distante dagli altri, tutti poi sono meno prominenti.

Giacimento. — *Tortoniano.* Benestare (rara) (provincia di Reggio).

---

(1) Deshayes, *Animaux sans vertèbres du bassin de Paris.*

II. Sotto-famiglia LEDINE Bellardi 1875.

1. Genere **Leda** Schumacher 1817.

Prima Sezione (*Leda Schumacher* 1817).

1. **Leda clavata** (Calcara). — Sinonimi: 1826. *Lembulus rostratus* Risso. *Prod. Europ. merid.* vol. IV pag. 320. — 1827. *Nucula rostrata* Sass. *Saggio geol. bac. terr. Albenga* pag. 476. — 1841. *Nucula clavata* Calcara. *Conch. foss. Altavilla* pag. 33 tav. I fig. 10. — 1875. *Leda clavata* Bellardi. *Monogr. nucul. foss. Piem. e Liguria* pag. 14 tav. I fig. 7a.b. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

La *Leda clavata* è forma ben nota e assai distinta pel suo lungo e curvo rostro, pel quale non somiglia a veruna delle specie del Mediterraneo, che spettano ad altre sezioni del genere.

Giacimento. — *Astiano.* Altavilla (Calcara, Seguenza).

2. **Leda Hoernesii** Bell. — Sinonimi: 1831. *Nucula rostrata* Bronn. *Ital. tert. Geb.* pag. 111 (non Lamk). — 1870. *Leda clavata* Hoernes. *Moll. foss. Wien* vol. II pag. 310 tav. 38 fig. 10 (non Calcara). — 1871. Appelius. *Cat. conch. foss. Livorn.* pag. 105. — 1877. *Leda Hoernesii* Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. 1877 fasc. 3 e 4).

Questa specie, affine alla precedente, si distingue bene perchè quasi retta e col rostro più largo, siccome per altre particolarità.

Gli esemplari dell'Astiano di Livorno ricevuti dal Caterini spettano a questa e non alla precedente specie.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (rara) (soli frammenti).

3. **Leda cuspidata** (Phil). — Sinonimi: 1844. *Nucula cuspidata* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 47 tav. XV fig. 8. — 1873. *Leda cuspidata* Seguenza. *Brev. cenni serie terz. prov. Messina* pag. 20. — 1875. Bellardi. *Monogr. nuc. foss. Piem. Liguria* pag. 14. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. 1877 fasc. 3 e 4).

Questa specie è anch'essa affine molto alla *Leda clavata*, dalla quale differisce per le rare linee rilevate, che porta alla superficie e per le due carene striate sul rostro.

Questa specie è esclusiva del plioceno, depositatosi a grandi profondità.

Giacimento. — *Astiano.* Valle Lamato (Philippi); Trapani, Scoppo, Gravitelli, Salice, Rometta, Spadafora (provincia di Messina) (rara).

Seconda Sezione (*Lembulus Leach* in Risso 1826).

A) Conchiglia longitudinalmente ed obliquamente striata, rostro bicarenato.

4. **Leda pella** (Linneo). — Sinonimi: 1766. *Arca pella* Linneo. *Syst. nat.* ed. XII p. 1141. — 1791. *Arca interrupta* Poli. *Test. utr. Sic.* vol. II tav. XXV fig. 4 e 5. — 1819. *Nucula emarginata* Lamarck. *Anim. s. vert.* vol. VI pag. 60. — 1823. *Nucula bicarinata* Bors. *Orlt. piem.* part. III pag. 122 tav. I fig. 1. — 1826. *Lembulus Rossianus* Risso. *Prod. Europ. merid.* vol. IV pag. 320. — 1836. *Nucula emarginata* Phil. *Moll. Sic.* vol. I pag. 64 e 65. — 1836. *Nucula pella* Scacchi. *Not. conch. foss. Gravina* pag. 26. — 1844. *Nucula emarginata* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 45 e 46. — 1872. *Leda pella* Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* pag. 22. — 1874. Seguenza. *Form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. vol. V pag. 80). — 1877. Monterosato. *Catal. conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comitato geol. fasc. 1 e 2). — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. fasc. 3 e 4).

Questa specie è ben nota, per la sua particolare scultura, tra le specie che vivono nel Mediterraneo.

Giacimento. — *Astiano.* Altavilla; Calatabiano e Costa del Sardo (provincia di Messina) (rara). — *Siciliano.* Palermo, Mardolce, Gravina, Militello, Cefali (Philippi); Monte Pellegrino, Ficarazzi (Monterosato, Seguenza); Monosterace (Calabria) (rara). — *Saariano.* Taranto, (Philippi); Boveto (Seguenza) (comune).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico.

B) Conchiglia longitudinalmente costata o striata, rostro unicarenato.

5. **Leda commutata** (Phil.).— Sinonimi: 1792. *Arca pella* Olivi. *Zoologia Adriatica* p. 115.— 1814. *Arca (nucula) minuta* Brocchi. *Conch. foss. subap.* pag. 482 tav. XI fig. 4. — 1826. *Lembulus deltoideus* Risso. *Prod. Europ. merid.* vol. IV pag. 320 tav. XI fig. 164. — 1831. *Nucula striata* Bronn. *Ital. tert. Geb.* pag. 110. — 1836. *Nucula minuta* Scacchi. *Not. conch. foss. Gravina* pag. 26. — 1836. *Nucula striata* Philippi. *Moll. Sic.* vol. I pag. 65. — 1844. *Nucula minuta* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 46. — 1844. *Leda commutata* Philippi. *Zeitschr. für Malac.* pag. 101. — 1862. *Leda minuta* Seguenza. *Not. succ. costil. geol. Messina* pag. 25. — 1869. *Leda minuta* Molino. *Geol. Barcellona* pag. 41. — 1872. *Leda fragilis* Mayer. *Syst. Vertz. Verst. des Helv.* pag. 17. — 1872. *Leda commutata* Monterosato. *Not. conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* pag. 22. — 1874. Seguenza. *Form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. vol. V pag. 80). — 1877. Monterosato. *Catal. conch. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comitato geol. fasc. 1 e 2). — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc. Italia merid.* (Boll. Comitato geol. fasc. 3 e 4).

Questa specie, estremamente comune nel plioceno littorale dell'Italia meridionale, si presenta davvero polimorfa, variando immensamente nella forma e negli altri suoi caratteri. È or depressa ed allungata, or breve e rigonfia; le costole poi sono d'una variabilità estrema: talvolta spesse ed alcune volte sottili, ravvicinate od allontanate, elevate o depresse. Il prof. Bellardi trovò che gli esemplari del Piemonte mancano affatto di quella carena, che divide negli esemplari viventi la lunula in due porzioni concentriche. Nei miei numerosi esemplari ho potuto riconoscere che questo carattere è anch'esso estremamente variabile come tutti quelli di questa specie, e perciò in alcuni la carena manca affatto, in altri vi esiste più o meno distinta, ma sempre poco sviluppata e direi quasi allo stato rudimentario.

Da tante considerevoli differenze tra i varî individui io credo potere stabilire le seguenti varietà per le forme che si presentano nell'Italia meridionale.

Le varietà che distinguo sono contrassegnate da caratteri marcatissimi; ma pure a mio credere non possono disgiungersi come distinte specie, essendochè presentano transizioni graduali verso la forma tipica.

La *L. consanguinea* del Bellardi è a mio credere una varietà meno distinta delle altre.

Var. *A* — consanguinea. — Sinonimi: 1875. *Leda consanguinea* Bellardi. *Monogr. nucul. terz. Piemonte e Liguria* pag. 19 fig. 11. — 1875. *Leda commutata* var. *consanguinea* Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Com. geol. n. 3 e 4).

Distinguesi pel rostro acuto, per le costole concentriche numerose e piccole, per la lunula distintamente carenata.

Var. *B* — *inflata.* Tav. II fig. 9b.

Più breve, molto rigonfia, colle costole prominenti più o meno distanti, colla lunula molto profondata, senza carena o con leggiero indizio.

Var. *C* — *lamellosa.*

Breve, compressa, colla carena sulla regione boccale fortemente sporgente, colle costole concentriche elevate quasi lamelliformi e distanti, colla lunula fortemente carenata.

Var. *D* — *Calatabianensis.* Tav. II fig. 9a.

Conchiglia compressa col rostro meno acuminato e quasi retto sulla regione dorsale o poco curvo, carena sulla regione boccale poco appariscente, costole molto numerose, depresse e disgiunte da un solco esilissimo, che può compararsi ad una linea impressa, alquanto più rilevate sul rostro e specialmente sulle carene, che cingono la lunula, in alcuni individui le costole divengono appena discernibili; la lunula è più o meno carenata.

Questa leda è molto somigliante alla *L. sublaevis* Bell. dalla quale è distinta per il lato anale più breve, e per la carena sulla lunula.

Questa forma è distintissima e potrebbe riguardarsi bene siccome distinta specie se gradazioni non la legassero alla forma tipica.

Giacimento. — *Elveziano.* Bianchi (comune). — *Tortoniano.* Benestare (Calabria) (rarissima). — *Messiniano.* Messina (rarissima). — *Astiano.* Lamato, Cotrone (Philippi), Altavilla (Calcara Seguenza); Calatabiano (comunissima). — *Siciliano.* Palermo, Militello, Sciacca, Gravina, Carrubbare (Philippi); Ficarazzi, Monte Pellegrino (Monterosato, Seguenza); Naso, Barcellona (Seguenza); Monosterace, Villa S. Giovanni (rara).

Var. *A* — *Tortoniano.* Benestare, Bianchi (rara). — *Astiano.* Altavilla (comune).

Var. *B* — *Astiano.* Altavilla (rara), Rocca (rarissima).

Var. *C* — *Tortoniano.* Benestare (rara). — *Astiano.* Altavilla, Calatabiano (rara).

Var. *D* — *Astiano.* Calatabiano (comune).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico.

6. **Leda Bonellii** Bellardi. — Sinonimi: *Nucula costulata* Bonelli. *Catal. M. S.* n. 2894 (non Deshayes). — 1870. *Leda nitida* Hoernes. *Moll. foss. Wien* vol. II pag. 308 tav. XXXVIII fig. 9 (non Brocchi). — 1874. *Leda Bonellii* Ponzi. *Fossili bacin. rom. e fauna vatic.* pag. 3. — 1875. Bellardi. *Monogr. nucul. foss. Piemonte e Liguria* pag. 19 fig. 12. — 1877. Issel. *Appunti paleontologici* pagina 48. — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è ben distinta dalla precedente per essere più larga, per le costole depresse, e scancellate sulla regione mediana e sovente visibili soltanto sul rostro.

I giovani di questa specie sono distintissimi, perchè le costole trasversali sono rare, elevate e disgiunte da larghi e profondi solchi.

Giacimento. — *Tortoniano.* Benestare (rara). — *Astiano.* Altavilla (comunissima).

7. **Leda lamellicostata** Seguenza. Tav. II fig. 10, 10a, 10b, 10c.

Diagnosi: Testa ovali-oblonga, valde inaequilateralis, compressa, longa, angusta, concentrice longitudinaliter costulata; costulae regulares, tenues, elatae, lamelliformes in tota superficie aequales. Latus buccale $^2/_3$ totius longitudinis subaequans, obtusum, tenuiter carinatum, et contra carinam depressum. Latus anale acutum, vix recurvum, fere rectum, contra carinam prominentem, latissime satisque profunde depressum; lunula lanceolato-oblonga, profunda, laevis; carinula prominente, acuta, bipartita. Margo pallealis conspicue convexus. Lungh. 6^{mm}, largh. 3.4^{mm}, spess. 2.1^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Leda lamellicostata* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Com. geol. n. 3 e 4).

Questa specie costante nei suoi caratteri somiglia principalmente alla Var. *C* della *L. commutata,* dalla quale differisce per il lato anale molto più lungo, e con

una depressione molto larga, perchè proporzionalmente più stretta e più depressa, e per le costole in forma di sottili lamelle verticalmente elevate.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (rara).

8. **Leda inaequilatera** Seguenza. Tav. II fig. 11, 11a, 11b, 11c.

Diagnosi: Testa subtriangularis, inaequilatera, navicularis, arcuata, inflata; longitudinaliter concentrice costulata; costulae prominentes, uniformes. Latus buccale $^3/_7$ totius longitudinis subaequans rotundatum: carina prope margine subindistincta. Latus anale acutum, recurvum: lunula lata, ovato oblonga, concava oblique lamellosa-striata; carinula obtusa, parum distincta. Lungh. 9.5^{mm}, largh. 6.5^{mm}, spess. 3.2^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Leda inaequilatera* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Com. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è affine pel generale andamento alla *L. Bonellii*, dalla quale distinguesi per la maggiore larghezza, pegli apici più sporgenti ed incurvi, per le costole uniformi su tutta la superficie, per la lunula più larga, ecc.

La *Leda inaequilatera* forma un vero anello intermedio tra questa sezione e la seguente, essendochè le carene, che circondano la lunula sono poco scabre, questa ha leggiero indizio di piccole carene mediane, siccome la carena sul lato boccale è appena accennata assai presso al margine.

Giacimento. — *Astiano.* Bianco nuovo (Calabria) (rarissima).

Terza Sezione (*Jupiteria* Bellardi 1875).

A) Conchiglia costata o striata trasversalmente.

9. **Leda cretensis** Brugnone. — Sinonimi: 1876. *Leda cretensis* Brugnone. *Miscellanea malacologica* pag. 9 tav. I fig. 8. — 1877. Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegr. e Ficarazzi* (Boll. Com. geol. n. 1 e 2).

È questa la sola specie che io non conosco in natura tra tutte quelle descritte in questa monografia, ciononpertanto dalla descrizione data dall' autore parmi chiaro che essa spetta alla sezione alla quale l' annetto.

Giacimento. — *Siciliano.* Monte Pellegrino presso Palermo.

10. **Leda trigona** Seguenza. Tav. II fig. 12, 12a, 12b, 12c.

Diagnosi: Testa triangularis, subaequilateralis, tumida, longitudinaliter concentrice costulata; costulae prominentes, crebrae, regulares, uniformes, sulcis latioribus separatae super umbones obsoletae. Latus buccale obtusum latum, dimidium longitudinis subaequans. Latus anale acutum, obliquum; carina prominens, obtusiuscula; lunula lata excavata, striata; carinulae rudimento praedita. Lungh. 7.2^{mm}, largh. 5.1^{mm}, spess. 3.6^{mm}.

Sinonimi: 1844. *Nucula striata* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 46 (non Lamk.). — 1862. *Leda striata* Seguenza. *Notizie succinte intorno la cost. terz. prov. di Messina* pag. 18. — 1877. *Leda trigona* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è molto vicina alla *L. concava* Bronn, dalla quale si distingue per essere più gibbosa, specialmente agli apici, per le costole elevate e disgiunte da solchi più larghi, per la lunula più profondata e striata con indizio ben manifesto di una carena, che ricorda la precedente sezione.

La *L. trigona* è propria del plioceno di mare profondo.

Giacimento. — *Astiano.* Cotrone, Valle Lamato (Philippi); Rometta, Salice, Calatabiano (rara), Ardore, Bovalino, Gerace (comune).

11. **Leda concava** (Bronn). — Sinonimi: 1831. *Nucula concava* Bronn. *Ital. tert. Geb.* pagina 110. — 1874. *Leda concava* Seguenza. *Form. plioc. Ital. merid.* (Boll. Com. geol. vol. V pag. 80). — 1875. *Leda concava* Bellardi. *Monogr. nucul. foss. Piemonte e Liguria* pag. 21 fig. 14 e 15. — 1877. Issel. *Appunti paleontologici* pag. 48. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie tanto affine alla precedente è propria dell'Astiano littorale.

Var. *A* — Bellardi.

Anco questa forma si raccoglie nel plioceno.

Giacimento. — *Astiano.* Altavilla (rara), S. Cristina (Calabria) (rara).

Var. *A* — *Astiano.* Altavilla, Calatabiano (rara).

B) Conchiglia senza costole, levigata.

12. **Leda gibba** Seguenza. Tav. III fig. 13, 13a, 13b, 13c.

Diagnosi: Testa minuta, subtriangularis, inaequilatera, globoso-inflata; superficies laevis, vix lineis incrementi raris tenuibusque signata. Latus buccale rotundatum $^2/_3$ longitudinis subaequans. Latus anale rostratum, acutum, obliquum, carina satis prominens, obtusa; lunula lata, parum profunda, laevis; carinula vix notata. Umbones gibbi, recurvi. Margo palleali convexus. Lungh. 4.3^{mm}, largh. 3^{mm}, spess. 2.3^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Leda gibba* Seguenza. *Studî form. p. Dioc.* (Boll. Comit. geol. n 3 e 4).

Questa piccola specie è distintissima per la sua grande convessità e pel rostro acuminato.

Giacimento. — *Astiano.* Rometta, Salice (comune); Ardore, Bovalino (Calabria) (rara).

Quarta Sezione (*Junonia* Seguenza 1876 (M. 3)).

Conchiglia col lato anale sinuoso e rostrato, colla regione della lunula prominente acuta, non profondata e concava, col lato boccale rotondato e senza carena.

A) Lunula distinta, carene che la cingono poco sporgenti.

13. **Leda acuminata** Jeff. Tav. III fig. 15, 15a, 15c, 15e. — Sinonimi: . . . *Leda Messanensis* Seguenza (*M. S.*). Da lungo tempo nella collezione. — . . . *Leda Vaticani* Ponzi. *Tavole inedite dei fossili dei dintorni di Roma* tav. III fig. 8. — 1873. *Leda acuminata* Jeffreys. *Mediterranean mollusca* pag. 5. — 1874. Seguenza. *Form. plioc. Italia merid.* fasc. 11 e 12 pag. 342. — 1873. Seguenza. *Breviss. cenni int. serie terz. prov. Messina* pag. 20. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Com. geol. n. 3 e 4).

Questa specie abissicola per eccellenza trovasi dapertutto abbondantemente nel plioceno, depositatosi a grandi profondità. Essa presenta talune varietà rimarchevoli.

Var. *A* — *brevirostris.* Tav. III fig. 15b, 15e.

Più larga e col rostro più breve della forma tipica.

Var. *B* — *major.*

Più grande, col lato anale più lungo e più declive al margine superiore, colla superficie squisitamente striata.

Var. *C* — *oblonga.* Tav. III fig. 15d, 15e.

Allungata trasversalmente e striata concentricamente sulla regione palleale.

Giacimento. — *Astiano.* Messina (Seguenza); Tremonte, S. Nicandro, Trapani, Scoppo, Scirpi, Gravitelli, Camaro, S. Filippo, Salice, Gesso, Serro, Saponara,

Rometta, Spadafora, Rocca, Zifronte, Milazzo, Barcellona, Costa del Sardo (provincia di Messina); Reggio, Bianco nuovo, Ardore, Bovalino, Gerace, Siderno, Riace, Monosterace ecc. (provincia di Reggio) (comunissima). — *Siciliano.* Gravitelli presso Messina.

Var. *A* — *Astiano.* Rometta, Trapani (rara).

Var. *B* — *Astiano.* Trapani, Salice, Rometta; Riace.

Var. *C* — *Astiano.* Salice, Rometta, Gravitelli; Gerace, Riace.

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

14. **Leda seminulum** Seguenza. Tav. III fig. 14, 14a, 14b.

Diagnosi: Testa minuta, ovato-trigona, tumida, concentrice tenuiter striata. Latus buccale obtusum $^3/_7$ longitudinis subaequans. Latus anale acutum; carina prominula, obtusiuscula; lunula ovato-oblonga, convexiuscula, laevis; carinula distincta. Umbones prominentes, gibbi, recurvi. Margo pallealis valde convexus. Lungh. 4^{mm}, largh. 2.2^{mm}, spessezza 1.8^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Leda seminulum* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è affine alla precedente, o più tosto intermedia tra questa e la *L. gibba*. Differisce dalla prima perchè piccola e molto rigonfia, e pegli apici prominenti e gibbosi, dalla seconda pel rostro retto e non curvo, per minore gibbosità, per la sinuosità sul rostro ecc.

Propria dell'Astiano dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Salice, Rometta (rara); Ardore (Calabria) (rara).

15. **Leda rectidorsata** Seguenza. Tav. IV fig. 19, 19a, 19c, 19d.

Diagnosi: Testa subovata, compressa, tenuissime concentrice striata. Latus buccale obtusum, subangulatum, dimidium longitudinis subaequans. Latus anale dilatatum, angulosum, productiusculum, parum sinuosum; carina obtusissima; margo rectus, margini palleali convexo parallelus. Lunula prominens, laevis, simplex. Umbones parvi. Lungh. 4.2^{mm}, largh. 3^{mm}, spess. 1.8^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Leda rectidorsata* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie somiglia in qualche modo alla *L. acuminata*, ma si distingue benissimo pei piccoli apici, pel margine dorsale, che forma quasi una retta disposta parallelamente al margine palleale e quindi il lato anale riesce molto dilatato siccome nelle *Malletia*.

Var. *B* — *elegans.* Tav. IV fig. 19b, 19d.

Questa forma alquanto più allungata, è ornata di squisite strie concentriche.

Anco questa è del plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Scoppo, Scirpi, Gravitelli, Salice, Rometta ecc. (provincia di Messina) (poco comune).

Var. *B* — *Astiano.* Messina (rara).

16. **Leda peraffinis** n. sp. Tav. III fig. 18 18a, 18b. 18c.

Diagnosi: Testa parva ovato-trigona, subaequilateralis, tumida, concentrice tenuissime striata, lineisque incrementi paucis sed validis gradata; angulum cardinale fere rectum. Latus buccale obtusum, subangulatum, dimidium longitudinis aequans. Latus anale acutum, late sinuosum; carina prominens, obtusiuscula; lunula lata, substriata, simplex. Umbones prominuli. Margo pallealis convexus. Lungh. 2.7^{mm}, largh. 2^{mm}, spess. 1.6^{mm}.

Questa specie miocenica è somigliantissima alla *L. acuminata*, ma si distingue perchè più piccola assai, più gibbosa, più triangolare, essendo l'angolo cardinale meno aperto, per grosse e rare linee di accrescimento, pel lato anale meno sporgente, per la lunula semplice, per le strie esilissime ed alquanto eccentriche della superficie ecc.

Giacimento. — *Tortoniano.* Benestare (provincia di Reggio) (rara).

B) Lunula quasi non distinta
perchè le carene del lato anale sono ottuse quasi rotondate.

17. **Leda Nicotrae** Seguenza. Tav. III fig. 16, 16a, 16b, 16c.

Diagnosi: Testa parva, subovata, subaequilateralis, concentrice tenuissime striata, sulcisque validis incrementi prope marginem signata: angulum cardinale late apertum. Latus buccale obtusum, dimidium longitudinis aequans. Latus anale acutum parum sinuosum: carina obtusissima rotundata; lunula vix distincta, lata, subsimplex, laevis. Margo pallealis valde convexus. Lungh. 3.6^{mm}, largh. 2.3^{mm}, spess. 1.7^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Leda Nicotrae* Seguenza. *Studî formaz. plioc.* (Boll. Comitat. geol. n. 3 e 4).

Questa leda è molto affine alla *L. acuminata* ma piccola, equilatera, trasversalmente più allungata, coll'angolo cardinale più aperto, coi denti proporzionalmente più piccoli, colla carena molto ottusa, quasi rotondata, colla superficie segnata verso il margine da linee di accrescimento considerevolmente distinte ecc. Questi caratteri parmi che la distinguano bene perchè costanti.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (comune).

18. **Leda pustulosa** Jeffreys. Tav. III fig. 3, 3a, 3b.

Diagnosi: Testa subovata, subaequilatera, tumida, concentrice exquisite striata, radiatim tenuiter costata, lineisque incrementi valide impressis signata. Latus buccale obtusum, latum, dimidium longitudinis subaequans. Latus anale acutum, parum sinuosum, carina obtusa: lunula vix distincta, latiuscula, simplex. Umbones prominuli. Margo pallealis valde convexus. Lungh. 3.3^{mm}, largh. 2.3^{mm}, spess. 1.8^{mm}.

Sinonimi: .... *Leda elegans* Seguenza (*M. S.*). — 1876. *Leda pustulosa* Jeffreys. *New and peculiar mollusca* pag. 430. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Com. geol. n. 3 e 4).

Questa distintissima forma era stata da lungo tempo denominata da me *L. elegans*, e così venne descritta in questa monografia; ma posteriormente fu pubblicata dal sig. Jeffreys col nome di *L. pustulosa*.

Questa specie nella forma è somigliante alla *L. acuminata* ed alla *L. Nicotrae;* si distingue dalla prima perchè equilatera e gibbosa, da entrambe poi per l'apice piccolo appena sporgente e per le costelle radianti.

Propria del plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Rometta, Salice (provincia di Messina); Ardore, Bovalino (provincia di Reggio) (rara).

Abitazione. — Atlantico, Nord-atlantico, mari artici (Jeffreys).

Quinta Sezione (*Saturnia* Seguenza 1876. (M. S.)).

Conchiglia trigona, corbuliforme, concentricamente striata. Lato boccale semplice; lato anale prominente angoloso, senza carena e senza lunula distinte.

19. **Leda pusio** (Philippi). — Sinonimi: 1844. *Nucula pusio* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 47 tav. XV fig. 5. — 1862. *Leda pusio* Seguenza. *Not. succ. cost. terr. Messina.* — 1873. Seguenza. *Brevissimi cenni intorno la serie terz. prov. di Messina* (Boll. R. Comit. geol. pag. 20). — 1876. Jeffreys. *New and peculiar mollusca* pag. 430. — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Com. geolog. n. 3 e 4).

Questa specie trovata vivente nei mari del Nord e molto comune nel plioceno dell'Italia meridionale è assai distinta pei suoi speciali caratteri e per essere quasi corbuliforme.

Var. *A* — *Salicensis*. Tav. IV fig. 20, 20a.

Questa insigne varietà si distingue per essere considerevolmente più stretta, coll'angolo cardinale molto aperto, più solida in tutte le sue parti e cogli apici più gibbosi prominenti ed incurvati. Gli esemplari viventi gentilmente donatimi dal signor Jeffreys, convengono meglio con questa varietà.

Giacimento. — *Astiano.* Bianco (Calabria) (Philippi); Messina (Seguenza); Trapani, Scoppo, Scirpi, Gravitelli, S. Filippo, Salice, Rometta, Spadafora, Milazzo, Barcellona, ecc. (provincia di Messina) (comunissima); Reggio, Bianco, Gerace, Ardore, Bovalino, Siderno, Riace, Gioiosa-Jonica, Monosterace (provincia di Reggio).

Var. *A* — *Astiano.* Salice, Rometta (comune); Ardore, Riace (rara).

Abitazione. — Atlantico, Nord-atlantico, mari artici (Jeffreys).

2. Genere **Yoldia** Moller 1832.

1. **Yoldia minima** Seguenza. Tav. V fig. 27, 27a, 27b, 27c.

Diagnosi: Testa minima, orbiculato-subovata, convexa, valde inaequilatera; lineis incrementi tenuibus irregulariter signata. Latus buccale rotundatum $^1/_4$ longitudinis vix excedens. Latus anale latum rotundatum. Umbones parvi, subincurvi. Margo pallealis valde convexus. Lungh. 2^{mm}, largh. 1.8^{mm}, spess. 1^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Yoldia minima* Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è distintissima per la sua forma rotondata e molto obliqua, essa è inoltre fra le più piccole del genere.

Propria del plioceno dei mari profondi.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Scoppo, Scirpi, Gravitelli, Salice, Rometta, Spadafora ecc. (provincia di Messina) (comune).

2. **Yoldia frigida** Torell. — Sinonimi: 1859. *Yoldia frigida* Torell. *Bidrag till Spitzbergens Mollusckfauna.* — *Yoldia nana* Sars. — 1870. *Yoldia frigida* Jeffreys. *Norwegian mollusca* pag. 3. — 1872. Monterosato. *Conch. foss. di Ficarazzi e Monte Pellegrino* pag. 23. — 1874. Seguenza. *Formaz. plioc. Italia merid.* (Boll. Comit. geolog. vol. V pag. 80). — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa mimima ed elegante specie, trovata ora dal marchese di Monterosato, vivente nei mari di Palermo, trovasi più tosto abbondante nel plioceno di mare profondo, tanto vastamente esteso nelle provincie di Messina e di Reggio.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Scoppo, Gravitelli, Salice, Rometta (provincia di Messina) (poco rara); Riace, Ardore (provincia di Reggio) (rara). — *Siciliano.* Ficarazzi (Monterosato); Monosterace (rarissima).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

3. **Yoldia sinuosa** n. sp. Tav. IV fig. 23, 23a, 23b.

Diagnosi: Testa transversa, ovato-oblonga, subaequilateralis, convexa, laevis. Latus buccale obtusum, dimidium longitudinis subaequans. Latus anale late sinuosum, subangulatum, superne carinula rotundata praeditum. Umbones prominuli. Margo pallealis valde convexus. Lungh. 2.4^{mm}, largh. 1.5^{mm}, spess. 1^{mm}.

Questa specie miocenica è molto affine alla precedente, dalla quale pure è benissimo distinta pei suoi varî caratteri. Essa è trasversalmente più allungata, porta una larga sinuosità sul lato anale, che produce quindi presso il margine una piega poco rilevata larga ed ottusa a guisa di una carena; gli apici sono alquanto più sporgenti.

Giacimento. — *Tortoniano.* Benestare (provincia di Reggio) (rara).

4. **Yoldia pellucida** (Philippi). Tav. IV fig. 25, 25a, 25b. — Sinonimi: 1844. *Nucula pellucida* Philippi. *Moll. Siciliae* vol. II pag. 48 tav. XV fig. 9. — 1877. *Leda pellucida* Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Nessuna altra citazione può riferirsi a questo fossile.

Questa specie è stata la causa di molti indebiti ravvicinamenti, perchè bisogna dire che la specie non era stata conosciuta in natura dai malacologi. Quindi l'Hoernes, l'Appelius, il Jeffreys, io stesso ed altri vi abbiamo rapportato specie disparatissime. Recentemente io fui fortunato di potere raccogliere in molti luoghi del lato orientale della provincia di Reggio varî esemplari della specie del Philippi, che possono riguardarsi siccome tipici perchè in parte raccolti a Monosterace, luogo dove il Philippi raccolse la sua specie. D'altronde essi rispondono a capello colle figure e la descrizione dell'autore, ed invece sono differenti della specie del bacino di Vienna, della *Y. lucida* Loven vivente nei mari nord-atlantici, della specie dell'Astiano di Livorno, e di quella che io ho creduto di rapportarvi; perlochè bisogna escludere dalla specie questi fossili di varia provenienza e rapportarvi soltanto la forma tipica, che giace nell'Astiano del versante orientale dei monti reggiani.

Il rinvenimento e lo studio della conchiglia che il Philippi solo aveva veduto e descritto, mi ha dato agio di districare le varie confusioni nate posteriormente. Dai varî esemplari raccolti mi è d'uopo apportare una modificazione alla descrizione data dall'autore. Il Philippi dice esser levigatissima la superficie della conchiglia ed io l'ho trovata molto variabile; dagli esemplari proprio levigatissimi si passa per gradi ad esemplari striati concentricamente e fortemente striati, che costituirebbero una ben distinta varietà.

Giacimento. — *Astiano.* Monosterace (Philippi); Monosterace, Riace, Siderno, Ardore (provincia di Reggio) (rara).

5. **Yoldia lucida** Loven. Tav. V fig. 26, 26a. — Sinonimi: 1846. *Yoldia lucida* Loven. *Index moll. Scandinaviae* pag. 34. — 1870. Seguenza. *Antica distr. geogr. alc. spec. mal. viventi* pag. 10 (parte). — 1877. Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comit. geologico n. 3 e 4).

Questa specie che è rarissima nei terreni dell'Italia meridionale è stata da me stesso confusa colla specie seguente, che è molto affine.

Giacimento. — *Astiano.* Messina, Riace (rarissima).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

6. **Yoldia confusa** Seguenza. Tav. IV fig. 24, 24a, 24b, 24d. — Sinonimi: 1862. *Leda pellucida* Seguenza. *Notizie succinte cost. geol. terr. terz. Mess.* pag. 18. — 1870. *Yoldia lucida* Seguenza. *Antica distr. geogr. alc. sp. malac. viv.* pag. 10 (parte) (non Loven). — 1877. *Yoldia confusa* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie non ha d' uopo d' una dettagliata descrizione essendochè essa è molto affine alla precedente, dalla quale differisce precipuamente per due caratteri: è più gibbosa alla regione mediana, ed ha il lato anale con un'angolosità più acuta e più prominente, questi caratteri quantunque variabili si mantengono pure in tale grado da distinguere le due specie.

Var. *A* — *major.* Tav. IV fig. 24c, 24d.

Questa forma è più grande, col rostro più acuto e più sporgente, colla superficie più o meno squisitamente striata.

Propria del plioceno depositato a grandi profondità.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Scoppo, Salice, Rometta, Spadafora, ecc. (provincia di Messina) (comune); Bianco, Siderno, Ardore, Bovalino, Riace, Monosterace (provincia di Reggio) (rara).

Var. *A* — *Astiano.* Trapani, Salice; Riace, Monosterace.

7. **Yoldia tenuis** (Philippi). — Sinonimi: 1836. *Nucula tenuis* Philippi. *Moll. Siciliae* vol. I. pag. 65. — 1844. *Nucula pygmaea* Philippi. *Moll. Sic.* vol. II pag. 46 e 48 (non v. Munster). — 1872 *Leda tenuis* Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegr. e Ficarazzi* pag. 22. — 1874. *Leda pygmaea* Seguenza. *Form. plioc. Ital. merid.* pag. 80 e 343. — 1877. *Leda (Yoldia) tenuis* Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comitato geologico n. 1 e 2). — 1877. *Yoldia tenuis* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa specie è molto comune nel plioceno recente ed invece molto rara nel plioceno antico.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Salice (provincia di Messina) (rara); Monosterace, Siderno (provincia di Reggio) (rarissima). — *Siciliano.* Palermo, Carrubbare (Philippi); Ficarazzi, Monte Pellegrino (Monterosato, Seguenza) (comune); Gravina (Scacchi); Carrubbare, Naso, Messina (Seguenza); Gravitelli presso Messina, Monosterace (rara).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico, Nord-atlantico.

8. **Yoldia abyssicola** Torell. Tav. V fig. 28, 28a. — Sinonimi: 1859. *Yoldia abyssicola.* Torell. *Bidrag till Spitzbergensis Molluskfauna.* — 1875. *Leda (Yoldia) producta* Monterosato. *Nuova rivista conchigl. mediterran.* pag. 8 — 1876. *Yoldia striolata* Brugnone. *Miscellanea malacologica* pag. 9. — 1877. *Leda (Yoldia) abyssicola* Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Com. geol. n. 1 e 2). — 1877. *Yoldia abyssicola* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitato geolog. n. 3 e 4).

Questa specie molto affine alla precedente, veniva da me con quella confusa, ma essa si distingue per essere più stretta e più convessa.

Questa specie è esclusiva dell'Astiano di mare molto profondo.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani, Scoppo, Gravitelli, Salice, Rometta (provincia di Messina) (comune); Altavilla (provincia di Palermo); Ardore (provincia di Reggio). — *Siciliano.* Ficarazzi (Brugnone, Monterosato).

Abitazione. — Mari nordici, Atlantico.

9. **Yoldia micrometrica** Seguenza. Tav. IV fig. 22, 22a, 22b, 22c.

Diagnosi: Testa minima, oblongo-subtrigona, subaequilateralis, tumidiuscula, laevis; angulus cardinalis late apertus. Latus buccale obtusum, dimidium longitudinis subaequans. Latus anale obtusum, buccali vix strictius. Umbones minimi fere indistincti. Margo pallealis fere rectus. Lungh. 1.6^{mm}, largh. 1^{mm}, spess. 0.6^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Yoldia micrometrica* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa minima specie è ben distinta per la forma trigona molto allungata trasversalmente, e pegli apici piccolissimi non sporgenti, pei quali caratteri non può confondersi con verun'altra delle specie note.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani presso Messina (rara).

10. **Yoldia meridionalis** Seguenza. Tav. IV fig. 21, 21a, 21b, 21c.

Diagnosi: Testa trigona, subaequilateralis, compressa, concentrice longitudinaliter striata. Latus buccale subangulatum, obtusum, dimidium longitudinis subaequans. Latus anale obliquum, subacutum. Umbones prominuli. Margo pallealis parum convexus. Lungh. 3.2^{mm}, largh. 2.1^{mm}, spess. 1.5^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Yoldia meridionalis* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è affine alla precedente ed alla seguente; dalla prima differisce perchè più larga, più acuta dal lato anale, cogli apici più sporgenti, e striata trasversalmente; dalla seconda diversifica perchè molto piccola, più equilatera; ed il margine palleale è poco convesso.

Giacimento. — *Astiano.* Ardore (provincia di Reggio); Calatabiano (rarissima).

11. **Yoldia Philippii** Bellardi. — Sinonimi: 1875. *Yoldia Philippii* Bellardi. *Monograf. nucul. foss. Piemonte e Liguria* pag. 25 fig. 22. — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitato geologico n. 3 e 4).

Specie molto affine alla seguente, propria del mioceno e del plioceno.

Giacimento. — *Elveziano.* Bianchi (provincia di Messina). — *Tortoniano.* Benestare (provincia di Reggio). — *Messiniano.* Gravitelli (rara). — *Astiano.* Altavilla (comune).

12. **Yoldia nitida** (Brocchi). — Sinonimi: 1814. *Arca (Nucula) nitida* Brocchi. *Conch. foss. sub.* pag. 482 tav. XI fig. 3. — 1829. *Nucula nicobarica* Marc. de Serres. *Geogn. terr. terz.* pag. 141. — 1864. *Leda nitida* Conti. *Monte Mario e foss.* pag. 23. — 1875. *Yoldia nitida.* Bellardi *Monograf. nuculidi foss. Piemonte e Liguria* pag. 23. — 1876. Issel. *Appunti paleontologici* pag. 47. — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è benissimo distinta dalle altre e non ha alcuna somiglianza colle viventi dei mari d'Europa, in rapporto alle quali la forma e la scultura la distinguono eminentemente.

Giacimento. — *Elveziano.* Bianchi (rara). — *Tortoniano.* Benestare (rarissima) — *Messiniano.* Gravitelli (rara). — *Astiano.* Altavilla.

13. **Yoldia longa** Bell. — Sinonimi: 1870. *Nucula pellucida* Hoernes. *Moll. foss. Vien* vol. II pag. 303 tav. XXXVIII fig. 5 (non Phil.). — 1875. *Yoldia longa* Bellardi. *Monogr. nucul. foss. Piemonte e Liguria* pag. 22 fig. 17.

La specie che io associo a quella del Bellardi a dire il vero non conviene esattissimamente colla descrizione e la figura dell'autore, ma invece sembrami che convenga esattamente colla forma del bacino di Vienna; per tale ragione io fui sul punto di proporre per la specie messinese il nome di *Y. Hoernesii*, e di separarla così dalla

specie del Bellardi, ma le differenze d'altronde non essendo troppo considerevoli io non ho voluto fare tale disgiunzione senza un più maturo esame, e quindi mi riservo di comparare, tostochè l'opportunità sarà per presentarsi, gli esemplari messinesi con quelli del bacino di Vienna e del Piemonte. D'altronde i miei esemplari presentano un indizio di depressione sulla regione anale nel senso di quelli del Piemonte, e che sembra mancare affatto in quelli del bacino di Vienna, per cui sin da ora la *Yoldia* in esame si presenta siccome intermedia tra la forma di Vienna e quella del Piemonte.

Giacimento. — *Messiniano.* Gravitelli presso Messina (rara).

14. **Yoldia Bronni** Bellardi. — Sinonimi: 1875. *Yoldia Bronni* Bellardi. *Monogr. nuculidi foss. Piemonte e Liguria.* — 1876. Issel. *Appunti paleontologici* pag. 47. — 1877. Seguenza. *Studi formaz. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Di questa specie ho raccolto un solo esemplare deformato dalla fossilizzazione, che credo riconoscere per le linee oblique, che sono sul margine palleale.

Giacimento. — *Astiano.* Contrada Soccorso (provincia di Messina).

3. Genere **Phaseolus** Jeffreys (M. S.).

Di questo nuovo genere io conosco soltanto quanto ne dice il sig. marchese di Monterosato nella sua *Nuova rivista delle conchiglie mediterranee* 1875. D'altronde la specie che io vi rapporto fu dallo stesso riconosciuta siccome identica alla specie tipica che il Jeffreys pescava nelle profondità dell'Atlantico ed il Monterosato nei mari di Palermo.

Questo genere adunque è affine al genere *Yoldia* e la forma tipica stessa somiglia alquanto alla *Y. frigida*. Il carattere generico più rilevante è quello del cardine, essendo i denti in piccol numero, lamelliformi e disposti obliquamente, pressochè come nell'*Arca pectunculoides.*

1. **Phaseolus ovatus** Jeffr. — Sinonimi: 187... *Phaseolus ovalus* Jeffreys (ms.). — 1875. Monterosato. *Nuova rivista conch. medit.* pag. 11. — 1877. Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comit. geol. n. 1 e 2). — 1877. Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geolog. n. 3 e 4).

Questa specie è un importante trovato della fauna pliocenica siciliana, essendochè il genere *Phaseolus*, che forma nella famiglia delle Nuculidi un gruppo ben caratterizzato e distinto, di cui una nuova specie fu trovata dal Monterosato nei mari di Palermo, non era ancora conosciuto tra i generi fossili (1).

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (rara).

Abitazione. — Mediterraneo, Atlantico.

---

(1) Nel tempo della impressione di questo lavoro il Monterosato ha raccolto questa specie fossile nelle argille di Ficarazzi.

III. Sotto-famiglia MALLETINE Bellardi 1875.

1. Genere **Malletia** Desmoulins 1832.

1. **Malletia Caterinii** (Appelius). — Sinonimi: ... *Nucula psammobia* Reyn. e Ponzi. *Foss. Monte Mario e Vaticano* tav. III fig. 6 (inediti e senza data). — 1871. *Leda Caterinii* L. Appelius. *Catal. conch. foss. Livorn. racc. dal Caterini* pag. 105 tav. VI fig. 1, 1a, 1b. — 1872. *Solenella transversa* Ponzi. *Foss. bacin. Romano e faun. vaticana* pag. 3. — 1875. *Solenella transversa* Ponzi. *Cronac. subapenn.* pag. 9. — 1875. *Malletia transversa* Bellardi. *Monogr. nucul. foss. Piemonte e Liguria* pag. 26 fig. 23, 23a, 23b, 23c. — 1876. Issel. *Appunti paleontologici* pag. 47. — 1877. *Malletia Caterinii* Seguenza. *Stud. form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Gli esemplari dell'Astiano di Livorno, che io ebbi da C. Caterini sono affatto identici a quelli del Piemonte e perciò identici alla specie raccolta dal Ponzi nei dintorni di Roma; da ciò ne consegue a mio credere che, per ragione di priorità, devesi adottare il nome specifico imposto dall'Appelius. Il nome di *Solenella transversa* essendo di epoca posteriore, quell'altro di *Nucula psammobia* oltrechè inedito è di data sconosciuta.

Nell'Italia meridionale a questa specie posso riferire soltanto qualche impronta e qualche frammento.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (rarissima).

2. **Malletia Bellardii** Seguenza. Tav. III fig. 11, 11a.

Diagnosi: Testa parva, tenuis, subaequilateralis, depressa, ovato-truncata, laevis, lineis incrementi vix distinctis. Latus buccale subangulatum, obtusum, dimidium longitudinis excedens. Latus anale brevius, latum, subtruncatum, laeviter radiatim depressum. Margo pallealis conspicue convexus. Lungh. 2.1^{mm}, largh. 1.4^{mm}, spess. 0.6^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Malletia Bellardii* Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa piccola e distintissima specie è ben contraddistinta dalla grande brevità del lato anale, che si presenta troncato e molto largo; quindi non ha nessuna specifica somiglianza colla precedente specie, ma la forma depressa, gli apici poco sporgenti, i denti minimi, che costituiscono il cardine, la forma dilatata e troncata del lato anale imprimono alla conchiglia il *facies* proprio del genere, cui spetta.

Giacimento. — *Astiano.* Calatabiano (rara).

2. Genere **Neilo** Adams 1855.

A) Conchiglia a superficie levigata.

1. **Neilo phaseolinus** Seguenza. Tav. III fig. 12, 12a.

Diagnosi: Testa subrhombica, phaseoliformis, parum inaequilatera, convexa, laevis, vix passim sub lente concentrice minutissime striata. Latus buccale dimidia longitudine brevius, obtusum. Latus anale alaeformis, rostratum, aliquantulum sinuosum. Umbones parvi, vix prominentes. Margo apico-analis rectus; margo analis brevis, rectus; angulus apico-analis obtusissimus; margo pallealis valde convexus. Lungh. 2.3^{mm}, largh. 1.7^{mm}, spess. 0.9^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Neilo phaseolinus* Seguenza. *Studî form. plioc.* (Boll. Comit. geolog. n. 3 e 4).

Questa specie è distintissima per la forma di fagiuolo quasi esatta, pel lato anale leggermente sinuoso e fornito di un breve ed ottuso rostro, pegli apici poco sviluppati ed appena sporgenti. Non può confondersi con verun'altra conosciuta.

Questa specie è stata fondata sopra l'unico esemplare, che ho raccolto nel plioceno di mare profondo.

Giacimento. — *Astiano.* Trapani presso Messina (rarissima).

2. **Neilo Scillae** Seguenza. Tav. IV fig. 3, 3a, 3b.

Diagnosi: Testa sobovalis, inflata, valde inaequilateralis, laevis, vix sub lente concentrice tenuissime striata. Latus buccale breve, $^1/_3$ totius longitudinis subaequans, rotundatum. Latus anale alaeforme, dilatatum, depressum, subtruncatum. Margo apico-analis rectus, demum arcuatus; margo pallealis arcuatus; angulus apicalis obtusissimus, fere nullus. Lungh. 3.6^{mm}, largh. 2.6^{mm}, spess. 1.9^{mm}.

Sinonimi: 1877. *Neilo Scillae* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitat. geol. n. 3 e 4).

Questa specie per la forma generale somiglia moltissimo al *N. dilatatus* Phil. dal quale differisce per essere piccola, per la superficie sprovvista di quelle argute strie concentriche, per la forma più decisivamente ovale essendochè l'angolo apico-anale è fortemente rotondato. Questi stessi caratteri e la grande convessità delle valve valgono benissimo a distinguere questa specie dal *N. Isseli* Bell.

Giacimento. — *Astiano.* Rometta (rara).

B) Conchiglia ornata di forti strie concentriche.

3. **Neilo dilatatus** (Philippi). — Sinonimi: 1844. *Nucula dilatata* Philippi. *Moll. Siciliae* vol. I pag. 47 tav. XV fig. 7. — 1862. *Leda dilatata* Seguenza. *Notiz. succ. cost. geol. terr. terz. Mess.* pag. 18. — 1877. *Neilo dilatatus* Seguenza. *Studi formaz. plioc.* (Boll. Comitato geol. n. 3 e 4).

Questa distintissima specie è stata anch'essa confusa con altre, così l'Appelius l'ha creduta identica ad una specie di Livorno, che ho potuto esaminare negli esemplari ricevuti dal Caterini e l'ho riconosciuta identica al *N. Isseli* del Bellardi. La specie del Philippi d'altronde è propria dell'Astiano di mare profondo dell'Italia meridionale, siccome l'ho riconosciuto tra i fossili di Monte Vaticano, essa differisce dal *N. Isseli*, col quale ha maggiore affinità, per le linee concentriche molto regolari, per la maggiore convessità delle valve, per gli apici gibbosi e più prominenti e per altri rimarchevoli caratteri.

Giacimento. — *Astiano.* Valle Lamato (Philippi); Rometta, Salice, Scoppo, Spadafora, S. Filippo di S. Lucia del Mela (prov. di Messina) (rara), Ardore, Siderno, Riace, Monosterace (prov. di Reggio) (rara).

4. **Neilo Messanensis** n. sp. Tav. IV fig. 4.

Diagnosi: Testa ovato-oblonga, inflata, inaequilateralis, naviformis, laevis, prope marginem pallealem concentrice subregulariter striata. Latus buccale obtusum, $^2/_5$ totius longitudinis subaequans. Latus anale alaeforme dilatatum. Margo apico-analis concavus, margo pallealis arcuatus. Lungh. 8^{mm}, largh. 5^{mm}, spess.?

Questa specie è molto affine alla precedente, ma meno inequilatera, meno gibbosa, più stretta, e con poche linee impresse presso il margine palleale. La strettezza della conchiglia, la maggior convessità, la prominenza degli apici ed altri caratteri la distinguono dal *N. Isseli* Bellardi.

Giacimento. — *Tortoniano.* Contrada Batassaro presso i villaggi Masse (territorio di Messina) (rarissima).

C) Conchiglia striata concentricamente col lato anale sinuoso e rostrato.

5. **Neilo excisus** (Philippi). — Sinonimi: 1844. *Nucula excisa* Philippi. *Moll. Sicil.* vol. II pag. 46 tav. XV fig. 4. — 1862. *Leda excisa* Seguenza. *Notiz. succ. costit. geolog. prov. Messina* pag. 18. — 1870. Seguenza. *Sull' ant. distribuz. geograf. di alcun. spec. mal. viv.* pag. 10. — 1876. *Malletia excisa* Jeffreys. *New and peculiar mollusca* pag. 435. — 1877. Monterosato. *Conch. foss. Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. Comit. geol. n. 1 e 2). — 1877. *Neilo excisus* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comitato geolog. n. 3 e 4).

Questa bella e distintissima specie vivente nei mari nordici e non ancora trovata nel Mediterraneo, è propria ed abbondantissima delle marne astiane, depositatesi a grandi profondità nell'Italia meridionale.

Var. *A* — *oblonga.*

Questa varietà si distingue per essere proporzionalmente più stretta.

Giacimento. — *Astiano.* Monterosso, Lamato, Stilo, Cotrone (Philippi); Scoppo, Scirpi, Trapani, Gravitelli, Salice, Rometta, Spadafora, Rocca, Valdina (Seguenza); Barcellona, Milazzo, S. Filippo, Torre, Zifronte, Saponara, Serro, Gesso, Camaro, S. Filippo di S. Lucia del Mela ecc. (prov. di Messina) (comunissima); Reggio, Bianco, Ardore, Bovalino, Gerace, Siderno, Gioiosa-Jonica, Riace, Monosterace ecc. (prov. di Reggio) (comunissima); Calatabiano (rarissima).

Abitazione. — Nord-atlantico, mari artici (Jeffreys).

3. Genere **Tindaria** Bellardi 1875.

1. **Tindaria solida** Seguenza. Tav. IV fig. 5, 5a, 5b.

Diagnosi: Testa ovato-subtrigona, concentrice costulata; costulae regulares minutae, sulcis latiusculis separatae. Latus buccale $^2/_3$ totius longitudinis aequans obtusum, rotundatum. Latus anale inflatum, subrotundatum. Umbones magni valde inflati. Margo pallealis parum convexus. Lungh. 6.8^{mm}, largh. 5.2^{mm}, spess. 3.7^{mm}.

Sinonimi: 1877 *Tindaria solida* Seguenza. *Studi form. plioc.* (Boll. Comit. geol. n. 3 e 4).

Questa specie è certamente molto affine alla *T. arata* del Bellardi, ma io non dubito che essa sia distinta, come fa il Bellardi stesso. Io l'ho già raccolta in molti luoghi dell'Italia meridionale e dapertutto cogli stessi caratteri. La mia specie è sempre più piccola di quella del Piemonte, considerevolmente più solida, di forma più trasversa e più rotondata ai lati, dimodochè risulta di forma ovata con un molto lontano indizio della forma triangolare, che distintamente notasi nella specie del Bellardi.

Propria del plioceno depositatosi a grandi profondità.

Giacimento. — *Astiano.* Rometta, Salice (provincia di Messina) (rara); Ardore (provincia di Reggio) (rara).

QUA

della distribuzione stratigrafica e geografica

Num. d' ordine	GENERI E SPECIE	FO							
		ITALIA MERIDIONALE							
		Tongriano	Aquitaniano	Langhiano	Elveziano	Tortoniano	Messiniano	Zancleano	Astiano
	Genere **Nucula**								
1	*Nucula placentina* Lamk.	..	..	..	+	..	..	..	+
2	» *Mayeri* Hoernes	..	..	..	+	+	+	..	..
3	» *nitida* G. B. Sow.	..	..	..	..	..	..	..	+
4	» *nucleus* (Linneo)	..	..	..	+	+	..	..	+
5	» *umbonata* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
6	» *striatissima* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
7	» *trigona* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
8	» *sulcata* Bronn.	..	..	..	+	+	+	..	+
9	» *Jeffreysii* Bellardi	..	..	..	..	..	..	..	+
10	» *Antoniminensis* Seg.	+	..	..	..	..	..	..	..
11	» *decipiens* Philippi.	..	..	..	..	+	..	..	+
12	» *delphinodonta* Migh.	..	..	..	..	..	..	..	+
13	» *corbuloides* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
14	» *glabra* Philippi.	..	..	..	..	..	..	..	+
	Genere **Nucinella**								
15	*Nucinella ovalis* S. Wood.	..	..	..	..	..	..	..	+
16	» *Calabra* n. sp.	..	..	..	..	+	..	..	..
	Genere **Leda**								
17	*Leda clavata* Calcara.	..	..	..	..	..	..	..	+
18	» *Hoernesii* Bellardi.	..	..	..	..	..	..	..	+
19	» *cuspidata* (Philippi)	..	..	..	..	..	..	..	+
20	» *pella* (Linneo)	..	..	..	..	..	..	..	+
21	» *commutata* (Phil.)	..	..	..	+	+	+	..	+
22	» *Bonellii* Bellardi	..	..	..	..	+	..	..	+
23	» *lamellicostata* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
24	» *inaequilatera* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
25	» *erctensis* Brugnone	..	..	..	..	..	..	..	..
26	» *trigona* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
27	» *concava* Bronn.	..	..	..	..	..	..	..	+
28	» *gibba* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
29	» *acuminata* Jeff.	..	..	..	..	..	..	..	+
30	» *seminulum* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
31	» *rectidorsata* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+
32	» *peraffinis* n. sp.	..	..	..	..	+	..	..	..
33	» *Nicotrae* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+

TTICO

ılidi terziarie dell' Italia meridionale.

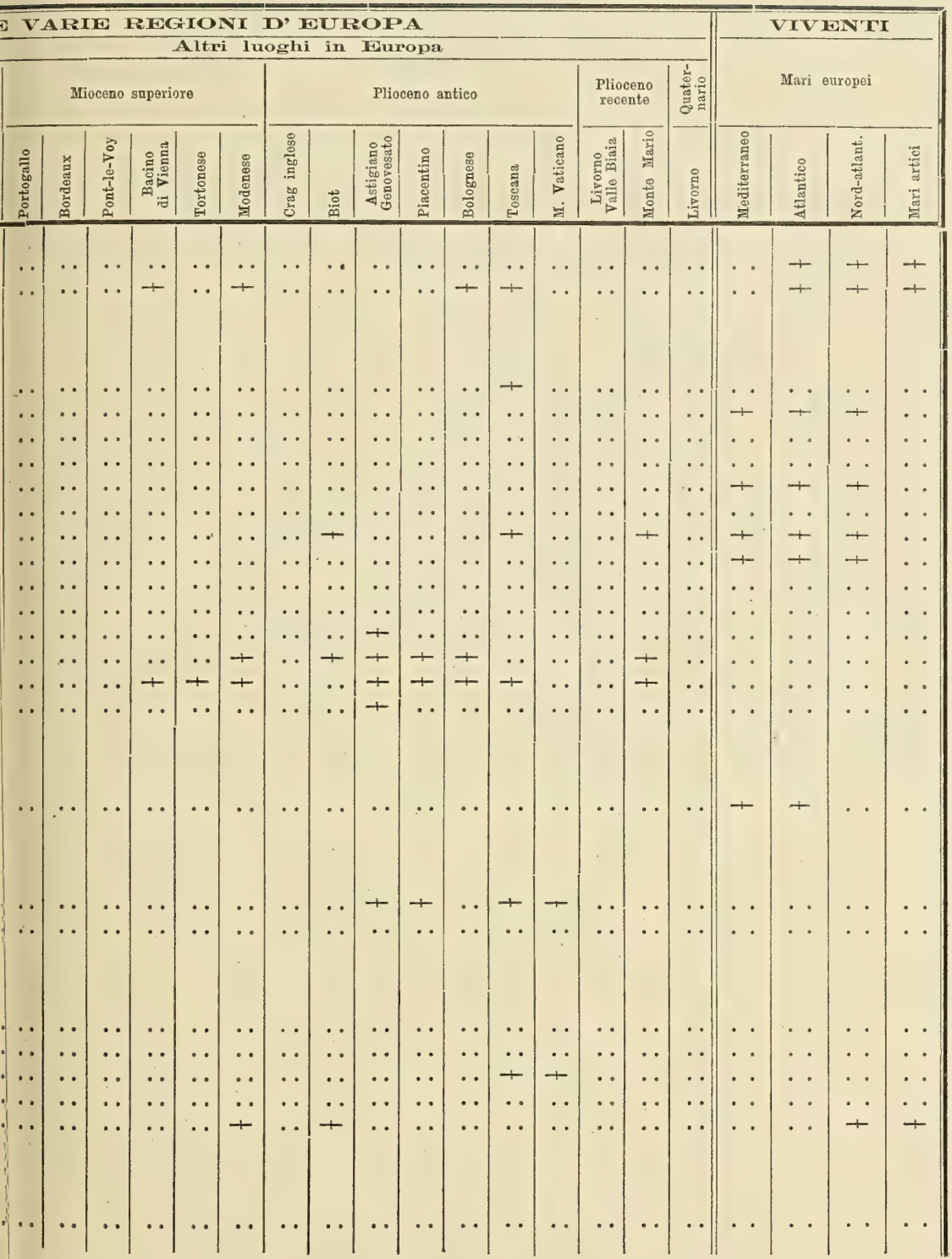
E VARIE REGIONI D' EUROPA																VIVENTI			
Altri luoghi in Europa																			
Miocene superiore						Plioceno antico							Plioceno recente		Quaternario	Mari europei			
Portogallo	Bordeaux	Pont-le-Voy	Bacino di Vienna	Tortonese	Modenese	Crag inglese	Biot	Astigiano Genovesato	Piacentino	Bolognese	Toscana	M. Vaticano	Livorno Valle Biaia	Monte Mario	Livorno	Mediterraneo	Atlantico	Nord-atlant.	Mari artici
..	..	..	..	+	+	..	+	+	+	+	+	+	+	+	+	..	..	..	..
..	..	..	+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	+	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	+	+	+	..
..	+	+	+	..	..	+	..	+	+	+	..	..	+	+	+	..	+	+	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	+	..	..	+	+	..	+	+	+	..	+	..	+	+	+	..
..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	+	..	+	..	+	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	+	..	+	..	+	+	+	..	+	..	+	+	+	+	+	+	..
..	..	..	+	..	..	..	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	..
..	..	..	..	..	+	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	+	+	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	+	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

QUAD… OTTICO

della distribuzione stratigrafica e geografica d… culidi **terziarie** dell' Italia meridionale.

Num. d' ordine	GENERI E SPECIE	FOS… LE VARIE REGIONI D' EUROPA — ITALIA MERIDIONALE									Altri luoghi in Europa — Mioceno medio	Mioceno superiore						Pliocene antico							Pliocene recente		Quaternario	VIVENTI — Mari europei			
		Tongriano	Aquitaniano	Langhiano	Elveziano	Tortoniano	Messiniano	Zancleano	Astiano	[illegible]	Colline di Torino	Portogallo	Bordeaux	Pont-le-Voy	Bacino di Vienna	Tortonese	Modenese	Crag inglese	Biot	Astigiano Genovesato	Piacentino	Bolognese	Toscana	M. Vaticano	Livorno Valle Biaia	Monte Mario	Livorno	Mediterraneo	Atlantico	Nord-atlant.	Mari artici
	Genere **Nucula**																														
1	*Nucula placentina* Lamk.	..	..	..	+	..	..	..	+	+	+	..	..	..	..	+	+	..	+	+	+	+	+	+	+	+	+	..	..	..	..
2	» *Mayeri* Hoernes	..	..	..	+	+	+	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
3	» *nitida* G. B. Sow.	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	+	+	+	..
4	» *nucleus* (Linneo).	..	..	..	+	+	..	..	+	+	+	..	+	+	+	..	..	+	..	+	+	+	..	..	+	+	+	+	+	+	..
5	» *umbonata* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
6	» *striatissima* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
7	» *trigona* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
8	» *sulcata* Bronn.	..	..	..	+	+	+	..	+	+	+	..	..	..	..	+	..	..	+	+	..	+	+	+	..	+	..	+	+	+	..
9	» *Jeffreysii* Bellardi	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..
10	» *Antoniminensis* Seg.	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
11	» *decipiens* Philippi.	..	..	..	..	+	..	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	+	..	+	..	..	..
12	» *delphinodonta* Migh.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..
13	» *corbuloides* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
14	» *glabra* Philippi.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
	Genere **Nucinella**																														
15	*Nucinella ovalis* S. Wood.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
16	» *Calabra* n. sp.	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
	Genere **Leda**																														
17	*Leda clavata* Calcara.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
18	» *Hoernesii* Bellardi.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	+	+	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..
19	» *cuspidata* (Philippi)	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
20	» *pella* (Linneo)	..	..	..	..	..	..	..	+	+	+	+	..	..	..	..	..	..	+	+	+	+	+	..	+	+	..	+	+	..	..
21	» *commutata* (Phil.)	..	..	..	+	+	+	..	+	+	+	..	+	+	+	..	..	..	+	+	+	+	+	..	+	+	+	+	+	..	..
22	» *Bonellii* Bellardi	..	..	..	..	+	..	..	+	..	+	..	..	..	+	..	..	..	..	+	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..
23	» *lamellicostata* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
24	» *inaequilatera* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
25	» *erctensis* Brugnone	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
26	» *trigona* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
27	» *concava* Bronn.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	+	+	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
28	» *gibba* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
29	» *acuminata* Jeff.	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	+	..
30	» *seminulum* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
31	» *rectidorsata* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
32	» *peraffinis* n. sp.	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
33	» *Nicotrae* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Num. d'ordine	GENERI E SPECIE	FC	ITALIA MERIDIONALE							
			Tongriano	Aquitaniano	Langhiano	Elveziano	Tortoniano	Messiniano	Zancleano	Astiano
34	*Leda pustulosa* Jeffreys		..	..	..	..	..	..	..	+ +
35	» *pusio* (Philippi)		..	..	..	..	..	..	..	+ +
	Genere **Yoldia**									
36	*Yoldia minima* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ +
37	» *frigida* Torell.		..	..	..	..	..	..	..	+ +
38	» *sinuosa* n. sp.		..	..	..	..	+	..	..	+ +
39	» *pellucida* (Phil.)		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
40	» *lucida* Loven.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
41	» *confusa* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
42	» *tenuis* (Philippi)		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
43	» *abyssicol* Torell.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
44	» *micrometrica* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
45	» *meridionalis* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
46	» *Philippii* Bellardi		..	..	..	+	+	+	..	+ + +
47	» *nitida* (Brocchi)		..	..	..	+	+	+	..	+ + +
48	» *longa* Bellardi		..	..	..	..	..	+	..	+ + +
49	» *Bronnii* Bellardi		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
	Genere **Phaseolus**									
50	*Phaseolus ovatus* Jeffr.		..	..	..	..	..	..	..	+ +
	Genere **Malletia**									
51	*Malletia Caterinii* (Appelius)		..	..	..	..	..	..	..	+ +
52	» *Bellardii* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ +
	Genere **Neilo**									
53	*Neilo phaseolinus* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
54	» *Scillae* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
55	» *dilatatus* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
56	» *Messanensis* n. sp.		..	..	..	..	+	..	..	+ + +
57	» *excisus* (Philippi)		..	..	..	..	..	..	..	+ + +
	Genere **Tindaria**									
58	*Tindaria solida* Seg.		..	..	..	..	..	..	..	+ +


E VARIE REGIONI D' EUROPA
Altri luoghi in Europa
VIVENTI
Mioceno superiore
Plioceno antico
Plioceno recente
Quaternario
Mari europei
Portogallo
Bordeaux
Pont-le-Voy
Bacino di Vienna
Tortonese
Modenese
Crag inglese
Biot
Astigiano Genovesato
Piacentino
Bolognese
Toscana
M. Vaticano
Livorno Valle Biaia
Monte Mario
Livorno
Mediterraneo
Atlantico
Nord-atlant.
Mari artici

Num. d'ordine	GENERI E SPECIE	FOSSILI — ITALIA MERIDIONALE: Tongriano	Aquitaniano	Langhiano	Elveziano	Tortoniano	Messiniano	Zancleano	Astiano	Quaternario	FOSSILI — NELLE VARIE REGIONI D'EUROPA — Altri luoghi in Europa: Miocene medio: Collino di Torino	Miocene superiore: Portogallo	Bordeaux	Pont-le-Voy	Bacino di Vienna	Tortonese	Modenese	Plioceno antico: Crag inglese	Biot	Astigiano Genovesato	Piacentino	Bolognese	Toscana	M. Vaticano	Plioceno recente: Livorno Valle Biaia	Monte Mario	Quaternario: Livorno	VIVENTI — Mari europei: Mediterraneo	Atlantico	Nord-atlant.	Mari artici
34	*Leda pustulosa* Jeffreys	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	+	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
35	» *pusio* (Philippi)	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	+	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	
	Genere **Yoldia**																													
36	*Yoldia minima* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	
37	» *frigida* Torell.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
38	» *sinuosa* n. sp.	..	..	..	..	+	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	
39	» *pellucida* (Phil.)	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
40	» *lucida* Loven.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	
41	» *confusa* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
42	» *tenuis* (Philippi)	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	
43	» *abyssicol* Torell.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	+	+	..	
44	» *micrometrica* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
45	» *meridionalis* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
46	» *Philippii* Bellardi	..	..	..	+	+	+	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
47	» *nitida* (Brocchi)	..	..	..	+	+	+	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
48	» *longa* Bellardi	..	..	..	..	..	+	..	+		..	..	..	..	+	..	+	..	..	+	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	
49	» *Bronnii* Bellardi	..	..	..	..	..	..	..	+		+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	
	Genere **Phaseolus**																													
50	*Phaseolus ovatus* Jeffr.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	
	Genere **Malletia**																													
51	*Malletia Caterinii* (Appelius)	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	+	..	+	..	..	..	..	..	
52	» *Bellardii* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
	Genere **Neilo**																													
53	*Neilo phaseolinus* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
54	» *Scillae* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
55	» *dilatatus* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	
56	» *Messanensis* n. sp.	..	..	..	..	+	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+	+	..	..	..	..	..	
57	» *excisus* (Philippi)	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	+	..	..	+	..	..	..	..	..	..	..	+	..	+	
	Genere **Tindaria**																													
58	*Tindaria solida* Seg.	..	..	..	..	..	..	..	+		..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	

CONCLUSIONI

Dall'esame del precedente quadro sinottico risulta:

1.° Che le nuculide terziarie dell'Italia meridionale si riferiscono a 58 specie, delle quali 15 trovansi nel mioceno, 51 nel plioceno, 5 nel quaternario e 16 vivono nei mari attuali.

2.° Delle specie enumerate soltanto 24 conosconsi in altre regioni, perciò sono esclusive dell'Italia meridionale 34 specie.

3.° Che il plioceno astiano ha somministrato 50 specie quasi tutte comunissimamente sparse, che lo caratterizzano assai bene.

4.° Che il plioceno astiano depositatosi in mari assai profondi racchiude numerose e comuni specie, che lo distinguono benissimo dal plioceno littorale ed hanno i loro identici viventi nella zona degli abissi, e specialmente nei mari del Nord.

5.° Che sono esclusive, e quindi caratteristiche del mioceno, tra le 15 specie raccolte, soltanto 7, le altre 8 fanno passaggio al plioceno.

6.° Che delle 51 specie del plioceno, 35 soltanto sono caratteristiche, perchè esclusive di tale formazione, le altre 16 vivono nei mari europei.

7.° Che delle 5 specie quaternarie nessuna è caratteristica, essendochè tutte vengono dal plioceno e vivono tuttavia.

8.° Che sono bene rare le specie che dal mioceno elveziano e tortoniano giungono sino ai mari attuali, se ne numerano appena quattro nell'Italia meridionale.

SPIEGAZIONE DELLA TAV. I.

Spiegazione della Tav. I.

Figure 1. — *Nucula striatissima* Seguenza.

1. Una valva dell' Astiano di Rometta veduta all' esterno.
1a. Una valva dell' Astiano di Salice rappresentata dall' interno.
1b. La precedente veduta di lato per mostrare la lunula.
1c. Lunghezza ordinaria della conchiglia.

Figure 2. — *Nucula trigona* Seguenza.

2. Una valva di Riace in Calabria veduta all' interno.
2a. La stessa veduta all' esterno.
2b. La medesima valva dal lato della lunula.
2c. Maggior diametro della conchiglia.

Figure 3. — *Nucula corbuloides* Seguenza.

3. Una valva dell' Astiano di Rometta dal lato esterno.
3a. Una valva dell'Astiano di Messina lato interno.
3b. Un esemplare intiero da Messina veduto lateralmente.
3c. Un esemplare della Var. *rotundata* da Messina.
3d. Una valva dell' Astiano di Messina Var. *rotundata*.
3e. Una valva opposta della stessa varietà e provenienza.
3f. Una valva dell'Astiano di Messina della Var. *brevior*.
3g. Un esemplare intiero dell'Astiano di Messina, forma tipica.
3h. Maggiori diametri delle conchiglie.

Figure 4. — *Nucula umbonata* Seguenza.

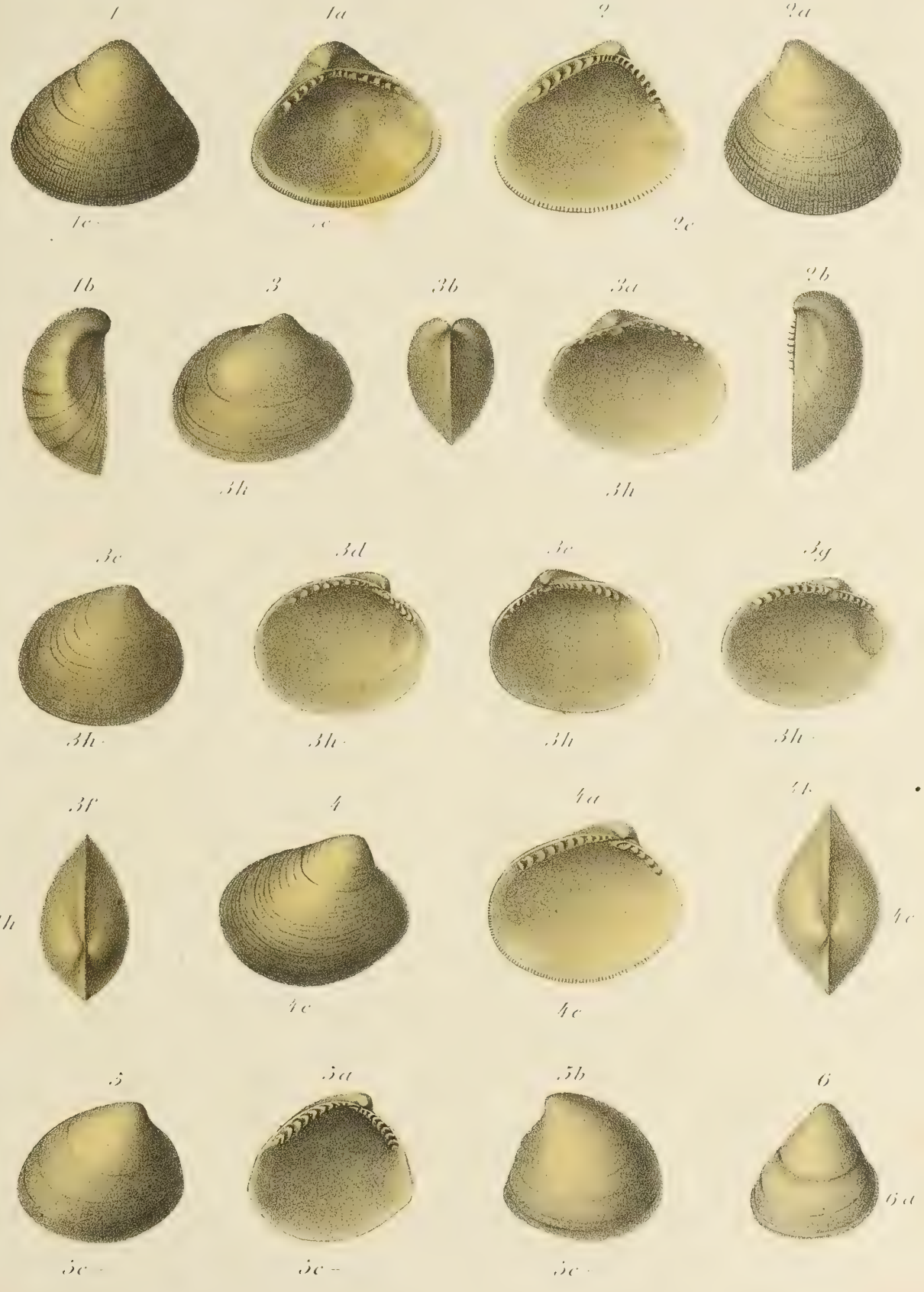
4. Una valva dell'Astiano di Rometta veduta dall' esterno.
4a. Una valva dall'interno dell'Astiano di Messina.
4b. Un esemplare intiero dell'Astiano di Messina.
4c. Maggiore diametro della conchiglia.

Figure 5. — *Nucula delphinodonta* Migh.

5. Una valva dell'Astiano di Calatabiano, forma tipica.
5a. Una valva della Var. *minor* dal lato interno, della stessa provenienza.
5b. Una valva dal lato esterno, della stessa varietà e provenienza.
5c. Maggior diametro.

Figure 6. — *Nucula glabra* Philippi.

6. Una valva della Var. *elata* raccolta a Gioiosa-Jonica.
6a. Maggior diametro della conchiglia.


1
1a
1c
2
2a
2c
1b
3
3b
3a
2b
3h
3h
3c
3d
3e
3g
3h
3h
3h
3h
3f
4
4a
4
3h
4c
4c
4c
5
5a
5b
6
6a
5c
5c
5c

SPIEGAZIONE DELLA TAV. II.

Spiegazione della Tav. II.

Figure 7. — *Nucinella Calabra* n. sp.

7. Una valva veduta dall'interno, raccolta nel Tortoniano di Benestare in Calabria.
7a. La valva opposta del medesimo individuo all' esterno.
7b. La stessa dal lato interno.
7c. La stessa veduta lateralmente.
7d. Lunghezza della conchiglia.

Figure 8. — *Nucinella ovalis* S. Wood.

8. Una valva dell'Astiano di Calatabiano.
8a. La stessa veduta dall' interno.
8b. La stessa guardata lateralmente.
8c. Lunghezza della valva.

Figure 9. — *Leda (Lembulus) commutata* Philippi.

9. L' interno d' una valva dell' Astiano d' Altavilla pr. Palermo.
9a. Una valva dell' Astiano di Calatabiano della Var. *Calatabianensis.*
9b. Un esemplare d'Altavilla della Var. *inflata.*
9c. Lunghezze degli esemplari.

Figure 10. — *Leda (Lembulus) lamellicostata* Seguenza.

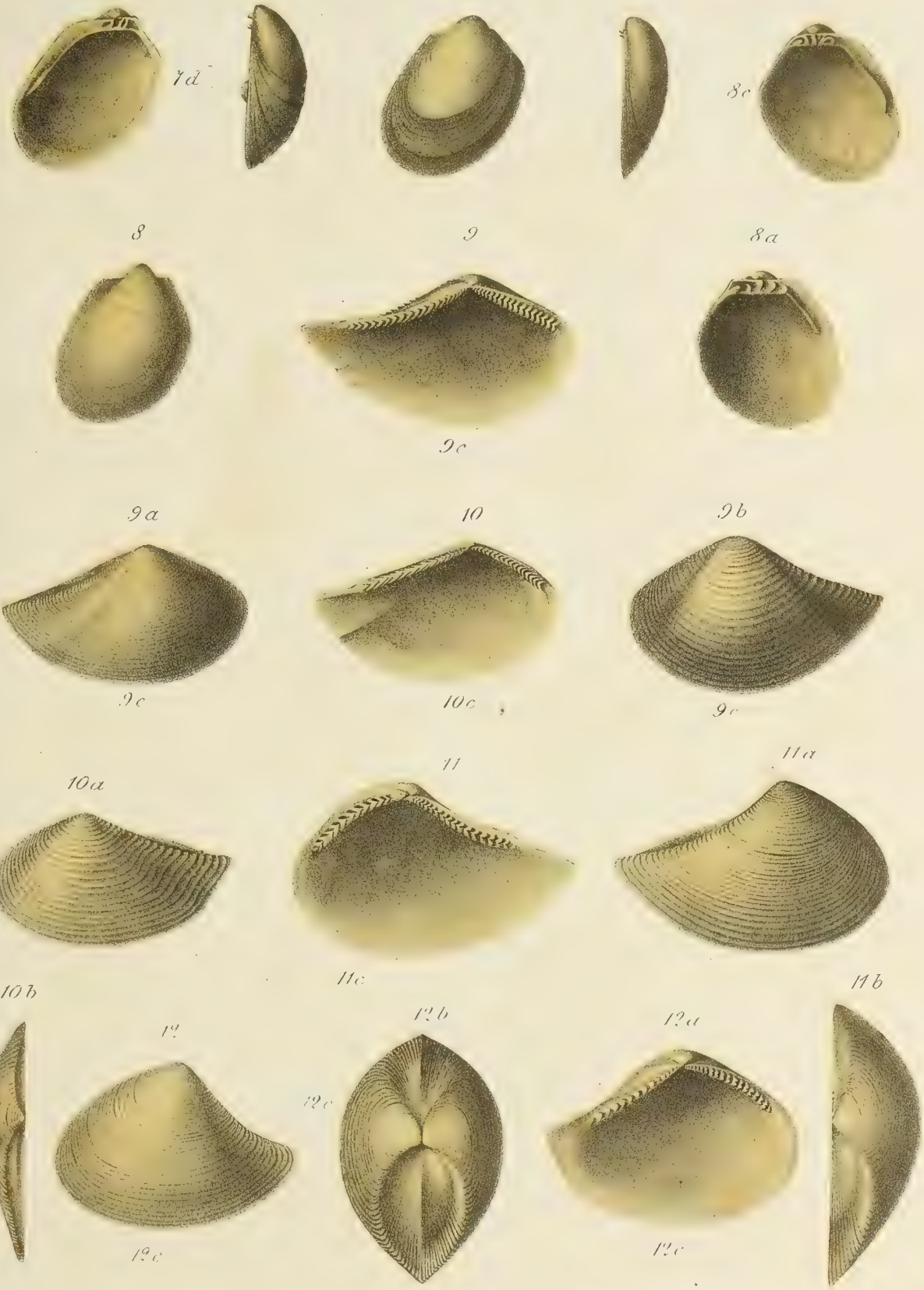
10. Una valva dall' esterno dell'Astiano di Calatabiano.
10a. La stessa rappresentata dall' interno.
10b. La stessa veduta dall'apice.
10c. Lunghezza della conchiglia.

Figure 11. — *Leda (Lembulus) inaequilatera* Seguenza.

11. Una valva dall'interno raccolta a Bianco (Calabria).
11a. La stessa veduta all'esterno.
11b. La valva medesima guardata dall' apice.
11c. Misura della lunghezza.

Figure 12. — *Leda (Jupiteria) trigona* Seguenza.

12. Una valva dal lato esterno dell' Astiano di Rometta.
12a. Un'altra dall'interno raccolta ad Ardore in Calabria.
12b. Un esemplare intero da Ardore.
12c. Lunghezza delle conchiglie.


7
7c
7a
8b
7b
7d
8c
8
9
8a
9c
9a
10
9b
9c
10c
9c
10a
11
11a
11c
10b
11b
12
12b
12a
12c
12c
12c

SPIEGAZIONE DELLA TAV. III.

Spiegazione della Tav. III.

Figure 13. — *Leda (Jupiteria) gibba* Seguenza.

13. Un esemplare dell'Astiano di Rometta.
13a. Una valva veduta dal lato interno dell'Astiano di Salice.
13b. Un esemplare della stessa provenienza.
13c. Lunghezze degli esemplari.

Figure 14. — *Leda (Junonia) seminulum* Seguenza.

14. Un esemplare dell'Astiano di Salice.
14a. Lo stesso veduto dagli apici.
14b. Lunghezza dello stesso.

Figure 15. — *Leda (Junonia) acuminata* Jeffreys.

15. L'interno d'una valva dell'Astiano di Messina.
15a. L'esterno d'un'altra valva della stessa prov.
15b. Un esempl. della Var. *brevirostris* da Messina.
15c. Un individuo completo dell'Astiano di Mess.
15d. Un esemplare della Var. *oblonga* dell'Astiano di Salice.
15e. Lunghezze degli esemplari.

Figure 16. — *Leda (Junonia) Nicotrae* Seguenza.

16. Un esemplare veduto dall'esterno dell'Astiano di Calatabiano.
16a. L'interno d'una valva della stessa prov.
16b. Un intiero esemplare da Calatabiano.
16c. Lunghezze degli esemplari.

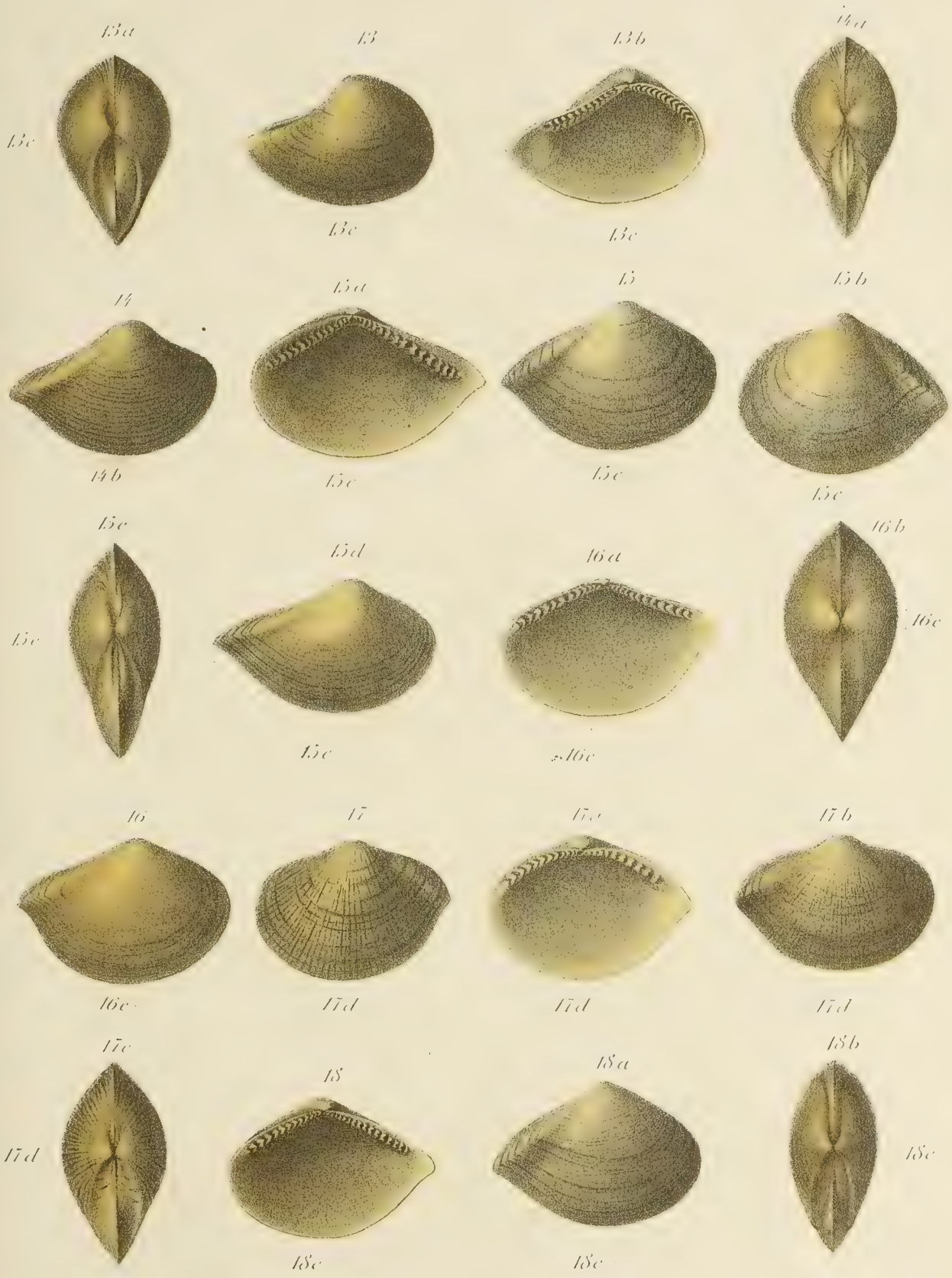
Figure 17. — *Leda (Junonia) pustulosa* Jeffreys.

17. Una valva, veduta all'esterno dell'Astiano di Rometta.
17a. L'interno d'un'altra valva della stessa prov.
17b. Una valva di una varietà dell'Astiano di Ardore.
17c. Un esemplare di Rometta.
17d. Lunghezze degli esemplari.

Figure 18. — *Leda (Junonia) peraffinis* n. sp.

18. L'interno di una valva del Tortoniano di Benestare.
18a. La stessa valva veduta all'esterno.
18b. Un giovane esemplare intiero della stessa provenienza.
18c. Lunghezze degli esemplari.

Serie 3.a vol. I.o Mem.rie della Classe di Scienze fisiche. G. Seguenza. *Nuculidi terziarii (Italia Meridionale)*



SPIEGAZIONE DELLA TAV. IV.

Spiegazione della Tav. IV.

Figure 19. — *Leda (Junonia) rectidorsata* Seguenza.

19. L'esterno d'una valva dell'Astiano di Messina.
19a. Un'altra valva rappresentata dall'interno.
19b. Una valva della Var. *elegans* da Messina.
19c. Un esemplare intiero dell' Astiano di Rometta.
19d. Lunghezze degli esemplari.

Figure 20. — *Leda (Saturnia) pusio* Philippi.

20. L'interno della valva spettante alla Var. *Salicensis*.
20a. Lunghezza.

Figure 21. — *Yoldia meridionalis* Seguenza.

21. Una valva dell'Astiano di Ardore.
21a. L' interno della stessa valva.
21b. La stessa veduta dall'apice.
21c. Lunghezza dell'esemplare.

Figure 22. — *Yoldia micrometrica* Seguenza.

22. Una valva dell'Astiano di Messina.
22a. L'interno di un'altra valva della stessa prov.
22b. Un intiero esemplare da Messina.
22c. Lunghezza degli esemplari.

Figure 23. — *Yoldia sinuosa* n. sp.

23. L' interno di una valva del Tortoniano di Benestare.
23a. L' esterno della valva stessa.
23b. Lunghezza della valva.

Figure 24. — *Yoldia confusa* Seguenza.

24. Una valva dell'Astiano di Rometta.
24a. L' interno d'una valva dell'Astiano di Messina.
24b. Un esemplare intiero da Messina.
24c. Una valva della Var. *major* di Riace in Calabria.
24d. Lunghezze degli esemplari.

Figure 25. — *Yoldia pellucida* (Philippi).

25. Una valva dell' Astiano di Monosterace in Calabria.
25a. L' interno di un' altra valva dell'Astiano di Riace (Calabria).
25b. Lunghezze degli esemplari.

19 19a 19b 20

19d 19d 19d 20a

19c 21 21a 21b

19d 21c

22 22a 23 23a

22c 22c 23b

22b 24 24a 24b

22c 24d 24d 24d

25 24c 25a

25b 24d 25b

SPIEGAZIONE DELLA TAV. V.

Spiegazione della Tav. V.

Figure 26. — *Yoldia lucida* Loven.

26. Un esemplare dell'Astiano di Messina.
26a. Lunghezza dell' esemplare.

Figure 27. — *Yoldia minima* Seguenza.

27. Una valva dell'Astiano di Rometta.
27a. L' interno di un'altra valva dell'Astiano di Messina.
27b. Un esemplare intiero di Messina.
27c. Lunghezze degli individui.

Figure 28. — *Yoldia abyssicola* Torell.

28. Un esemplare dell'Astiano di Rometta.
28a. Lunghezza.

Figure 29. — *Phaseolus ovatus* Jeffreys.

29. Un esemplare dell'Astiano di Calatabiano.
29a. L' interno d'una valva della stessa prov.
29b. Un individuo intiero da Calatabiano.
29c. Lunghezze delle conchiglie.

Figure 30. — *Malletia Bellardii* Seguenza.

30. Una valva dell'Astiano di Calatabiano.
30a. L' interno della stessa.
30b. Lunghezza.

Figure 31. — *Neilo phaseolinus* Seguenza.

31. Un intiero esemplare dell'Astiano di Messina.
31a. Una valva veduta dall'interno, dell'Astiano di Rometta.
31b. L' esemplare intiero veduto dagli apici.
31c. Lunghezze degli esemplari.

Figure 32. — *Neilo Scillae* Seguenza.

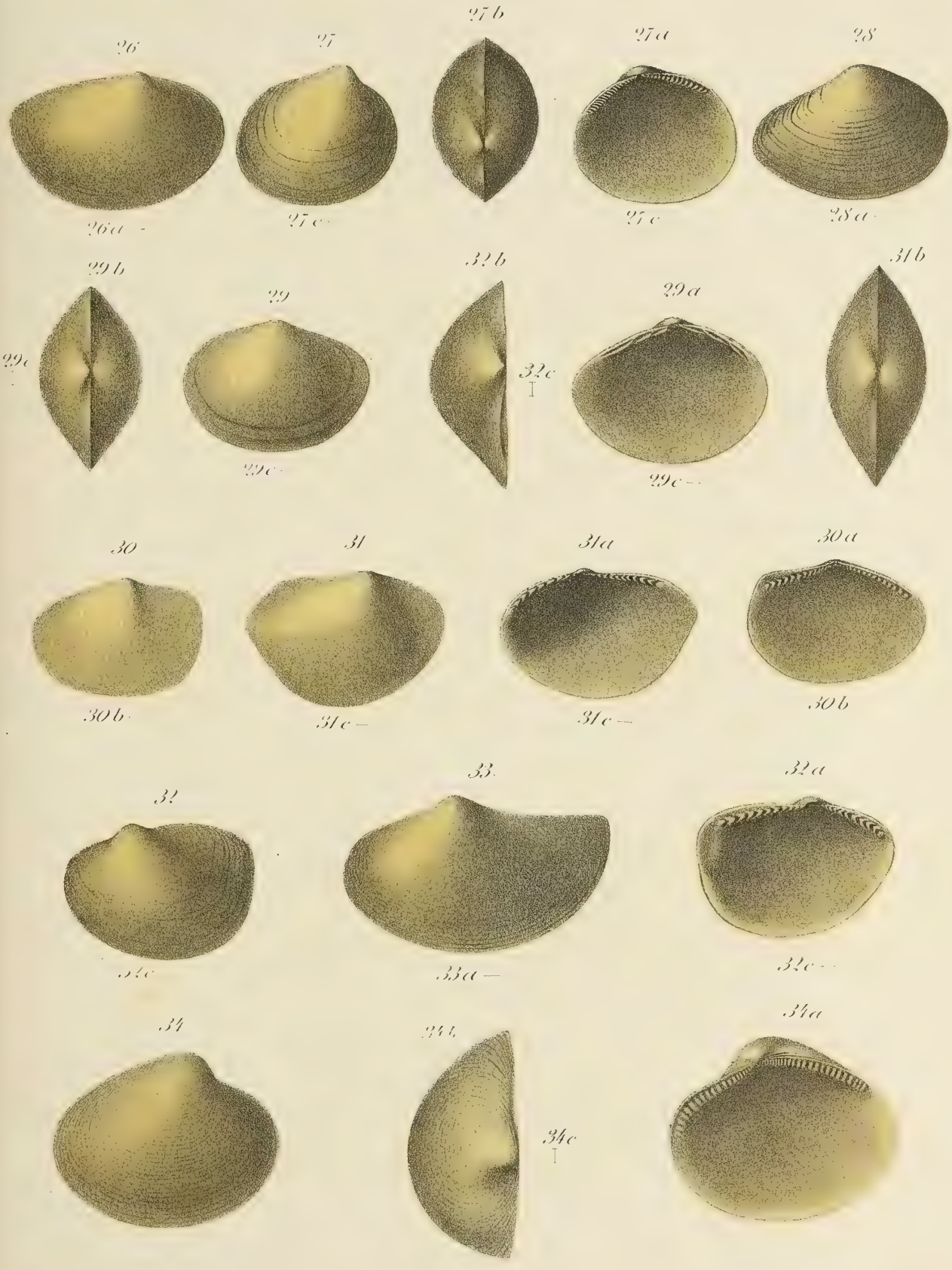
32. Una valva dell'Astiano di Messina.
32a. L' interno della stessa.
32b. Una valva guardata dall'apice, dell'Astiano di Rometta.
32c. Lunghezze degli esemplari.

Figure 33. — *Neilo Messanensis* n. sp.

33. Una valva del Tortoniano di Bianchi (Messinese).
33a. Lunghezza.

Figure 34. — *Tindaria solida* Seguenza.

34. Una valva dell'Astiano di Rometta.
34a. L' interno della stessa.
34b. La stessa veduta dall' apice.
34c. Lunghezza.


26
26a
27
27c
27b
27a
27c
28
28a
29b
29c
29
29c
32b
32c
29a
29c
31b
30
30b
31
31c
31a
31c
30a
30b
32
32c
33
33a
32a
32c
34
34b
34c
34a

Alla Nota del Socio G. CANTONI [1] contro la teorica di Melloni sulla elettrostatica induzione, risposta del Socio P. VOLPICELLI

letta nella seduta del 4 giugno 1876.

---

§ 1

Dobbiamo innanzi tratto avvertire, che per maggior chiarezza, i paragrafi della presente pubblicazione corrispondono sempre a quelli della Nota del Cantoni cui si risponde.

Comincia la Nota indicata con esporre la teorica del Melloni, che si pubblicò nell'Accademia delle scienze [2], per mezzo dell' illustre fisico sig. V. Regnault, sulla elettrostatica induzione, senza però che il Cantoni dica: non essere stato quel dotto fisico italiano il primo ad abbracciare la teorica stessa, lo che interessa molto per la storia dell'attuale quistione. Nella Nota medesima l'oppositore seguendo la maggior parte dei fisici, chiama col nome *attuata* la omonima della inducente, e col nome *indotta* la eteronoma della inducente stessa. Qui facciamo riflettere, che l'epiteto attuata è conforme alla teorica di Melloni, perchè include l' idea che questa elettricità possegga l' azione, ovvero la proprietà di agire; idea che non è inclusa nell'epiteto indotta, nel quale s' include invece l' idea di passività, lo che pure si accorda colla teorica di Melloni. Ciò nulla ostante, siccome queste due elettricità provengono l'una e l' altra dalla medesima influenza, perciò con ragione sono, specialmente dai fisici tedeschi, dette ambedue *indotte*; però la eteronoma della inducente si dice indotta di *prima* specie, mentre la omonima della inducente medesima, si dice indotta di *seconda* specie. Piace a me di adottare tale nomenclatura, esprimendo essa molto bene l'origine di queste due contrarie elettricità, e la seguirò tanto in tutta la presente risposta, quanto nelle altre mie pubblicazioni, relative alla elettrostatica influenza. Dice l' autore che Melloni « riguardava fallaci tutti quei modi, fin allora usati, per esplorare lo stato elettrico delle varie parti del corpo indotto, quali sono i pendolini ad esso uniti, i piani di prova e via dicendo ». A questo proposito è da osservare che in quella citata comunicazione, Melloni si servì anch'esso di pendolini e di piani di prova, per mostrare

(1) Vedi Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie 2ª vol. VIII fascicolo 14° p. 586, e fascicolo 15° p. 678.

(2) V. Comptes-rendus, t. 39 séance 24 juillet 1854 pag. 177.

vera la sua dottrina. I pendolini ed i piani di prova possono utilmente servire per mettere in evidenza la verità in tale argomento; ma questi mezzi vogliono essere adoperati colle debite cautele, affinchè non ingannino lo sperimentatore, inganno che spesso è avvenuto, come in seguito vedremo.

« Le idee del Melloni, dice l'oppositore, trovarono pochi fautori fra i fisici di qualche grido, anzi tra noi il Belli aveva messi a nudo i difetti di siffatta dottrina, e con ingegnose sperienze, e con solidi argomenti teorici. Soltanto il prof. Volpicelli andò tratto tratto pubblicando alcune sue Note in appoggio alle idee di Melloni, e non si scoraggiò se quei suoi lavori non sembravano incontrare molto favore ».

Primieramente osserviamo non essere a bastanza esatto il dire, che « le idee di Melloni trovarono pochi fautori fra i fisici di qualche grido »; poichè Melloni già rappresenta esso medesimo un fisico di moltissimo grido; inoltre fra quelli che prima e dopo di lui professarono esplicitamente od implicitamente la medesima sua dottrina, possiamo annoverare i seguenti: Epino - De Luc - Lichtenberg - Fischer - Volta - Pfaff - Knochenhauer - Petrina - Eisenlohr - Tyndall - Zantedeschi - Gaugain - Majocchi - Lucas - Du Moncel - Topler - Balestrieri - R. Fabri - Serra Carpi - R. Francisque Michel - Nobile - Serpieri - De la Rive - Felice Marco - Biot, ed anche l'Annuario scientifico ed industriale, pubblicato in Milano (1) nel quale trovasi una noterella, che dichiara ingegnosissime le mie sperienze sulla elettrostatica induzione, per sostenere la dottrina di Melloni. Nell'articolo *Elettroforo* del Vocabolario di Marbach (2) si trova un ragionamento del tutto favorevole alla mancanza di tensione per la indotta di prima specie. Nel vocabolario di Gehler (3) si trova un articolo di Pfaff, nel quale si dice che una piccola palla di sambuco isolata, e posta in contatto su qualunque punto dell'indotto, fornisce sempre una carica omonima della inducente. Si dice altresì, pag. 301, che la indotta di prima specie dev'essere completamente *vincolata*, e non può in verun modo agire al di *fuori*. Si dice pure, pag. 302, che la vera maniera di ravvisare il cilindro indotto è quella di riconoscere, che il medesimo possiede in ogni suo punto le *due diverse* elettricità, però con questo, che la contraria della inducente si trova in maggior quantità verso l'induttore, mentre la omonima si trova in maggior copia nella estremità opposta del medesimo indotto. Lo stesso Matteucci ha pubblicato (4) che la tensione della indotta è massima per l'inducente, ed è nulla per tutto il resto, lo che, se bene si rifletta, si accorda in parte colla teorica di Melloni. Vi sono anche altri fisici, e antichi e moderni, che o implicitamente od esplicitamente ammettono che la indotta di prima specie, finchè rimane tale, trovasi del tutto vincolata; ma tutto ciò sarà posto in maggior luce con altra mia pubblicazione. Inoltre quelli, e sono moltissimi, che ammettono la elettricità vincolata, fra i quali anche il Belli (*Corso elem. di fisica sper.* t. III° pag. 202) e gli altri, fra i quali specialmente De la Rive (5), che riguardano di grande interesse la discussione su questo argomento, sono tutti favorevoli alla teorica di Melloni.

(1) Anno 3° parte 1ª 1866 pag. 124. (2) Vol. 2° pag. 847. (3) Vol. 3° cap. V pag. 297 e 299, ed anche pag. 301 e pag. 302. (4) Nuovo Cimento, t. 3 an. 1856 pag. 223. (5) *Traité d'électricité*, t. 3° pag. 648 lin. 3.

I due congressi scientifici, uno di Palermo, l'altro di Nantes, dichiararono formalmente l'uno e l'altro, interessare molto alla scienza, che la discussione su questo controverso argomento sia continuata. Inoltre il celebre fisico Verdet (1) dichiarò, che le due controverse ipotesi, relative all'argomento in discorso, hanno formato il soggetto di lunghe e numerose discussioni. Dunque, giova ripeterlo, non è a bastanza esatto il dire che « le idee di Melloni sul proposito trovarono pochi fautori tra i fisici di qualche grido ». Del resto il mio principale argomento per dimostrare vera la teorica di Melloni, non consiste nelle autorità, ma bensì nelle sperienze, le quali come vedremo abbondano a favore della teorica stessa.

Secondariamente poichè la quistione attuale ferisce un principio comunemente ricevuto, e produce una profonda modificazione nelle dottrine di elettricità statica, e nelle applicazioni del calcolo ad esse, così non si deve meravigliare, chi per poco abbia seguìto la storia del progresso scientifico, se abbiansi oppositori alla teorica di Melloni. Si tratta nella medesima quistione di fare ricredere fisici reputatissimi, che hanno pubblicato e professato sempre il contrario di quello che propone Melloni. Quindi sarei piuttosto molto meravigliato, se la opposizione non si fosse manifestata, ed io credo che questa durerà molto, ma che si terminerà per adottare la teorica del Melloni; giacchè il tempo e la discussione, presto o tardi, raggiungono sempre il vero, come dimostra evidentemente la storia delle scientifiche riforme, dalla quale si rileva essere la morte una provvidenza per favorire il progresso.

In terzo luogo rispondiamo, che gli argomenti del Belli sono tutt'altro che solidi: ad esso rispose vittoriosamente, con tutta la necessaria chiarezza, il sig. dott. Rugiero Fabri di Ravenna, fisico distintissimo, con tre sue pubblicazioni, ognuna inserita negli Atti dell'accademia pontificia dei Nuovi Lincei; la prima nel t. X, sessione 5ª del 2 di aprile del 1857, pag. 331; la seconda nel t. XI, sessione 7ª del 13 di giugno del 1858, pag. 405; la terza nel t. XIV, sessione 5ª del 7 di aprile del 1861, pag. 325. Considerando attentamente le sperienze del Belli contro la teorica di Melloni, e le risposte del Fabri per sostenerla, si dovrà dire del primo, che *quandoque bonus dormitat Homerus*. E qui ha luogo riflettere che il Cantoni, prima di levare a cielo le sperienze del Belli contro Melloni, avrebbe dovuto egli confutare le relative risposte del Fabri, e ripetere le sperienze col noto cilindro indotto e sezionato; ma su ciò torneremo qui appresso.

In quarto luogo, se non mi sono scoraggiato, come dice l'opponente, nel vedere che i miei lavori a sostegno della teorica di Melloni, sembravano non incontrare molto favore, ciò avvenne tanto perchè molti fisici competenti giudicarono essere di grande interesse il discutere sull'attuale quistione, e fra questi specialmente il De la Rive; quanto perchè tutti quelli che lealmente, cioè senza cavillare o malignare, e senza partito preso, sperimentarono meco sul fenomeno in proposito, rimasero sempre tutti privi di obbiezioni contro la teorica di Melloni, o almeno dubitarono della teorica contraria; fra questi debbo citare il Du Moncel, il Gavarret ed il matematico Lucas con parecchi altri fisici di Parigi e di Roma. Non mi sono scoraggiato nè mi scoraggierò, perchè in 23 anni di continui lavori su questo argomento, non ho fino ad

(1) Annales de chim. et de phy. 3e série, novembre 1854 t. 42 pag. 373.

ora trovato una sperienza, che possa validamente distruggere la teorica di Melloni, e confermare la contraria comunemente adottata. Da ultimo non mi sono scoraggiato anche perchè le riforme non sorgono d' ordinario come le grandi scoperte di fatti verificabili facilmente, non avversati da precedenti opinioni contrarie, bensì dalla universale accettati; ma invece quelle riforme si adottano poco a poco, per mezzo di lunghe discussioni. Poichè contro l' evidenza dei ragionamenti, anche l'ingegno il più sublime potrà ritardare l'accettazione delle nuove teoriche, ma non potrà impedirne il trionfo.

È avvenuto in vari casi che il coraggio molto giovò al trionfo delle verità scientifiche: così per es. il sig. Joule di Manchester indipendentemente del tutto dal sig. Mayer, avendo fortemente fissato il suo spirito sopra un principio, la generalità del quale lo aveva impressionato fortemente, proseguì per molti anni a sostenere il principio medesimo, senza lasciarsi scoraggiare dalla freddezza colla quale i primi suoi lavori furono accolti. Egli finalmente potè vedere sanzionato quel suo generale principio, consistente nella invariabilità del rapporto che lega fra loro il calorico e la forza meccanica ordinaria (1). Se non m'inganno, altrettanto avverrà per la teorica di Melloni, da me sostenuta relativamente alla indotta di prima specie, perchè nè dalle opposizioni di taluni, nè dalla freddezza di tali altri mi farò imporre, ma solo dalle sperienze bene istituite e bene interpetrate.

Il Cantoni asserisce che « il suo ottimo amico professore Govi, comunicava recentemente all'Accademia dei Lincei talune osservazioni molto semplici e molto concludenti contro la teorica di Melloni, ed a favore di quella comunemente adottata ». Ma non deve ignorare il Cantoni, che io risposi completamente alle critiche del Govi, con due molto sviluppate Memorie; cosicchè prima di pronunciarsi egli a favore dell'ottimo amico suo, avrebbe dovuto riflettere sulle due risposte che io feci al medesimo, ed inserite negli Atti della R. Accademia dei Lincei, la prima intitolata: *Sulla elettrica tensione* nel t. 2° serie 2ª pag. 303, sessione del 3 gennaio 1875; la seconda intitolata: *Esperimenti, e raziocinî per dimostrare vera la teorica del fisico italiano Melloni sulla elettrica influenza, od elettrostatica induzione, non ostante quello che fu pubblicato in contrario dal prof. Govi*, t. 2° serie 2ª degli Atti della R. Accademia dei Lincei pag. 841, sessione del 14 febbraio 1875. Questo titolo nell' estratto della indicata Memoria fu cangiato nel seguente: *Difesa della teorica di Melloni sulla elettrostatica influenza, dalle obbiezioni del prof. Govi.* Avrebbe veduto l' oppositore medesimo sig. Cantoni, se avesse lette le mie risposte al Govi, e quelle del Fabri al Belli, che le idee del Melloni e mie danno piena ragione dei fatti fondamentali della elettrostatica induzione, ma non così le idee che costituiscono la comune teorica di questo fenomeno, lo che rovescia del tutto il giudizio del Cantoni.

Questo fisico dice che « a Parigi tanto mi adoperai nel 1874, con articoli pubblicati nei Comptes rendus, e con esperienze fatte innanzi a diversi fisici, che non pochi entrarono in dubbio sul valore della vecchia dottrina della induzione ». A me sembra essere lodevole, che con articoli e con sperimenti siasi adoperato taluno a far valere una dottrina, di cui si trova esso convinto: e se con questi mezzi,

(1) Tyndall, *La Chaleur*, pag. 38.

che sono certo i più convenienti, siasi giunto almeno a far dubitare della dottrina contraria, mi pare che sia questo un buon frutto prodotto dai mezzi stessi, che perciò dovrebbero essere assai valutati dal Cantoni. Nè si dovrebbe questo meravigliare se il sig. R. Francisque Michel abbia concluso enfaticamente a favore della dottrina di Melloni, perchè questa enfasi è conseguenza necessaria del vedere riescire vera una teorica, di cui si è convinti. Questa enfasi non è nuova nella storia delle scoperte, come tutti sappiamo; essa fu manifestata dal Galileo quando scoprì le fasi di Venere, fu manifestata da Keplero quando scoprì la terza delle sue leggi relative al moto dei pianeti, e così via discorrendo. Fu tanta la consolazione di questo sommo astronomo, che nel cap. 3 del libro V dell'opera sua *Harmonices mundi*, proruppe dicendo: « inventis enim veris orbium intervallis per observationes Brahei plurimi temporis labore continuo, tandem, genuina proportio temporum periodicorum ad proportionem orbium ... sera quidem respexit inertem, Respexit tamen, et longo post tempore venit...

§ 2.

Primieramente in questo secondo paragrafo il Cantoni dichiara « non essere punto indotto dalla pubblicazione del Michel ad accogliere la riforma del Melloni, asserendo avere ben maggior valore le giudiziose osservazioni del Belli e del Govi ». Però prima di asserire questo maggior valore, avrebbe il Cantoni operato assai più conforme alla sana critica, ponderando innanzi tutto le risposte date dal Fabri al Belli, e da me al Govi, e poi giudicare.

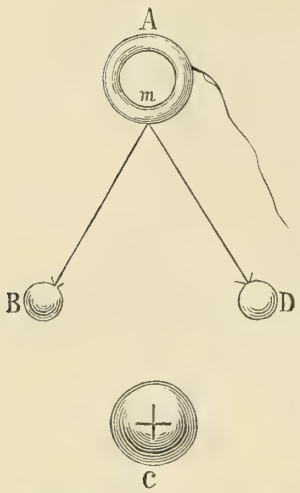
Secondariamente non posso convenire coll'oppositore, quando egli dice che « asserendo io non essere provvista di tensione la indotta, viene spontanea la interrogazione che il Govi mi rivolse anzi tutto, chiedendomi una precisa definizione della elettrica tensione ». Se il Govi avesse ricordato, ed anche il Cantoni, che prima di questa domanda, già nei Comptes-rendus (1) avevo pubblicato con molto sviluppo, essere la tensione medesima una forza repulsiva dell'elettrico per se stesso, nè la domanda del Govi avrebbe avuto luogo, nè il Cantoni avrebbe giudicata spontanea questa domanda, ma piuttosto superflua; tanto più che quella indicata mia pubblicazione sul significato elettrico della voce tensione, vide la luce nei giornali scientifici più diffusi, come *Les mondes*, e *L' Institut* (2).

In terzo luogo il Cantoni espone da capo la sperienza fatta con due pendolini, che non è al certo nuova, e che dal Govi fu pubblicata negli Atti della R. Accademia dei Lincei (serie 2ª t. 2°, sessione II del 3 gennaio 1875, pag. XIV lin. 10 e seguenti). Questa sperienza fu da me dimostrata non valere affatto contro la teorica di Melloni (3). Ma poichè dall'autore, cui rispondo, la sperienza stessa non solo è riprodotta, ma riguardata ineccezionabile; così fa d'uopo che nuovamente ne dimostri la insufficienza, e ciò debbo fare con maggiore sviluppo.

(1) T. 61 pag. 548.
(2) V. Atti della R. Accademia dei Lincei serie 2ª t. 2° pag. 303.
(3) Atti della R. Accademia dei Lincei, serie 2ª t. 2° sessione del 14 feb. 1875, pag. 845 § 3.

Ecco in qual modo il Cantoni ha riportato la sperienza stessa, cui per servire alla chiarezza, vogliamo aggiungere la (fig. 1) « un doppio pendolino formato con piccole palline portate da due fibre di lino, sospeso per mezzo di appositi uncinetti ad un piccolo anellino metallico, sorretto questo da un sottile isolante, viene presentato al di sopra di un induttore, in modo che la superficie di questo riesca simmetrica rispetto alla verticale che passa fra le due palline. Queste allora divergeranno fra loro, e la divergenza aumenterà se si farà comunicare col suolo l'anellino di sostegno. Ritirando poi l'induttore, le palline non lasceranno di divergere, anzi divergeranno ancor più, dimostrando così, che la causa della loro precedente divergenza non può essere diversa da quella per cui divergono ancor dopo, cioè per la reciproca repulsione fra due corpi omonimamente elettrizzati. Ed a meglio convincersi di ciò, durante il primo stadio della ripellenza per semplice induzione, si tolga dall'anellino uno dei pendolini, mercè una verghetta isolante munita di uncinetto: l'altro rimasto si ridurrà tosto verticale; ma tornerà a divergere appena si riattacchi all'anellino il pendolino levato col mezzo della stessa verghetta. Epperò in questo caso, codesta ripellenza dei pendolini per induzione, non si può in niun modo attribuire ad una attrazione laterale dell'induttore, siccome faceva il Melloni rispetto alla divergenza osservata nei pendolini applicati direttamente al corpo indotto, nelle parti più prossime all'induttore (1) ». Questi fatti, che saranno assai più manifesti se i pendolini elettrometrici sieno sottilissimi steli, non terminati da palline di sambuco, si debbono in parte ammettere come ora vedremo; però non così la interpetrazione ad essi fatti attribuita dal Govi e dal Cantoni, cioè che la divergenza indicata nasca dalla tensione della indotta di prima specie, di cui sono essi pendolini dall'inducente caricati.

(fig. 1)



E per verità: 1° se non m'inganno, la seguente riflessione offre un tale argomento, che solo esso basterebbe a dimostrare la indotta di prima specie non possedere tensione. In fatti supponiamo che la possegga, e che perciò la divergenza delle pagliette sia cagionata da questa data e non concessa tensione. Discende che la elettricità medesima sarebbe provveduta di tale una forza repulsiva da fare divergere le pagliette dalla verticale; conseguentemente avrebbe forza di respingere se stessa. Ma nel possedere questa forza repulsiva, consiste la condizione necessaria e sufficiente, affinchè la elettricità possa muoversi, cioè possa comunicarsi, possa disperdersi nel suolo e nell'aria, possa in fine produrre corrente, come si verifica nella indotta di seconda specie. Perciò se la indotta di prima specie possedesse tensione, dovrebbe produrre tutti gli effetti ora indicati; ma la sperienza dimostra che non li produce; dunque

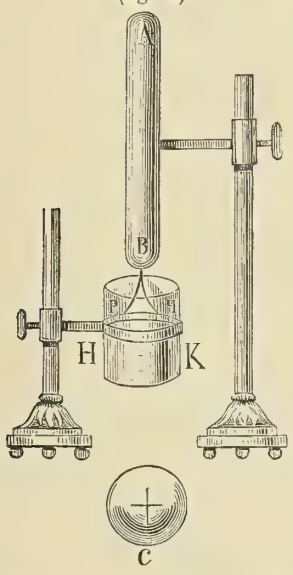
(1) Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie 2ª vol. VIII fasc. 14°, adunanza ordinaria del 1° luglio 1875 pag. 587.

la indotta di prima specie non possiede tensione. Di più, la sperienza dimostra eziandio che la indotta medesima non può nè influire, nè colla sua contraria neutralizzarsi; 2° se gli estremi B, D (fig. 1) dei pendolini medesimi si tocchino con un opportuno piano di prova, si avrà da questo la manifestazione di una carica omonima della inducente, non ostante che sui medesimi siavi anche la indotta di prima specie; 3° se mettasi a comunicare col suolo l' indotto ABD, partirà da questo tutta la omonima della inducente, quindi crescerà in esso la contraria, cioè la indotta di prima specie; tuttavia, toccando i pendolini ovunque con un opportuno piano di prova, esso non manifesterà carica veruna.

Dunque nei pendolini esisteva la omonima della inducente prima della comunicazione col suolo, come lo prova l' opportuno piano di prova, ma senza potersi neutralizzare colla indotta di prima specie, che pur vi consiste in maggior quantità, e senza potersi comunicare al piano di prova stesso. Perciò la indotta medesima non ha tensione, perchè se la possedesse, non potrebbe coesistere colla sua contraria, ma si neutralizzerebbe con essa; e non avendo tensione, non può comunicarsi al piano di prova. Dalla sola divergenza dei pendolini dunque non si ha diritto a concludere, che la indotta di prima specie possiede tensione; giacchè questa divergenza in realtà dipende principalmente da solo quattro diverse cagioni, quando l' indotto coi pendolini rimanga isolato, delle quali cioè una è la repulsione della indotta omonima della inducente, che ora dimostrammo esistere anche negli estremi dei pendolini: l'altra è l'attrazione su i medesimi, esercitata dalla influenza dell'ambiente, che non si può negare da chi abbia dramma d' ingegno, e che fu messa in chiaro dall' illustre Faraday; ed a riconoscerla basta il solo buon senso: la terza consiste nell' attrazione procedente dall'induttore su i pendolini, la quale tende a diminuirne la divergenza: la quarta si riferisce alla gravità, che pur essa tende a produrre la stessa diminuzione.

Ora passiamo a dimostrare che queste sono realmente le quattro principali cause della divergenza di cui parliamo. Si applichi all'estremo B del cilindro AB verticale (fig. 2), una coppia di pendolini o pagliette *p, q,* verticali anch'esse, che però possono liberamente ruotare attorno i loro punti di sospensione, ma soltanto in un medesimo piano verticale che passando per le pagliette medesime sia parallelo al piano della figura stessa. Queste pagliette così preparate, per favorire la esattezza, e la maggiore comodità nello sperimentare, dovranno essere vicine assai fra loro e parallele. Dovranno ancora essere circondate in tutta la lunghezza loro da un cilindro di vetro HK, bagnato bene con acqua e sufficientemente angusto, il quale comunicherà col suolo; cosicchè mentre permetterà la vista delle pagliette, riescirà pure conduttore. Disposta per tal modo la sperienza, si porti sotto l'indicato cilindro un inducente C, che, per fissare le idee, supporremo elettrizzato positivamente. Se il cilindro indotto AB si trovi nell'isolamento, in tal caso le pagliette medesime divergeranno un poco, ma solo a cagione della elettricità omonima della inducente, distribuita

(fig. 2)



sulle pagliette stesse, non già per la opposta. Imperocchè se un opportuno piano di prova si porti a contatto di qualunque delle due pagliette, si otterrà dal piano medesimo la manifestazione di una elettricità omonima della inducente, contro quello che si asserisce dalla teorica comunemente adottata sulla elettrostatica influenza. Inoltre se invece di servirsi del piano di prova, si avvicini all' estremo superiore A del cilindro indotto AB un bastoncello di cera lacca elettrizzato negativamente, le pagliette diminuiranno subito la indicata tenue divergenza loro positiva. Ciò conferma che le pagliette stesse, per la ricevuta induzione negativa, hanno anche ricevuto prima una piccola e libera carica omonima della inducente. Di più se ad una qualunque di queste pagliette si avvicini maggiormente la interna superficie del cilindro HK, la paglietta medesima si porterà in contatto della superficie stessa per effetto della sua tenue carica di elettricità positiva, indotta di specie seconda e libera, cioè provveduta di tensione.

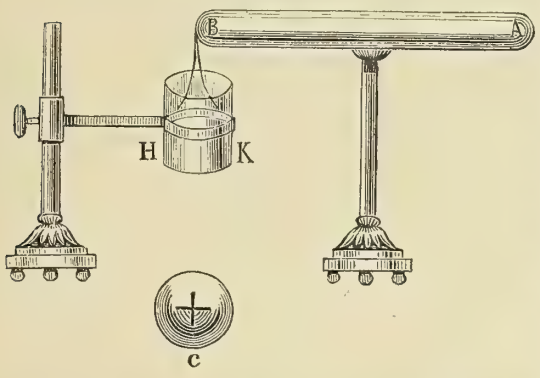
Ora facciasi che il cilindro AB comunichi col suolo, è chiaro che le cause dalle quali ora dipende la divergenza delle pagliette, supponendo esistere la repulsione per parte della indotta di prima specie, si riducono a tre soltanto: cioè alla gravità, all'attrazione della inducente ed alla supposta repulsione. Crescerà quindi l'influenza sull' indotto AB, cioè crescerà la carica della indotta di prima specie sopra esso; ma ciò nulla ostante le pagliette, difese dall' indicato cilindro di vetro, cesseranno del tutto dall' essere divergenti. Ciò avviene perchè la omonima della induttrice si è dissipata nel suolo, e perchè la influenza dell' ambiente non può giungere sulle pagliette, per essere queste difese perfettamente da un involucro conduttore. Pel contrario se la difesa del cilindro di vetro non vi fosse, ognuno sa bene che ponendo l'indotto a comunicare col suolo, crescerebbe di molto quella indicata divergenza. Tutto ciò prova evidentemente, che la divergenza delle pagliette non è l'effetto della indotta di prima specie di cui sono esse caricate. Il vedere che la indotta di prima specie non può disperdersi nel suolo, e neppure dissiparsi nell' aria circostante all' indotto, e che soltanto allora si disperde quando cessa o diminuisce la influenza, ciò solo è bastevole per convincere i più tenaci oppositori, che la indotta medesima, finchè rimane tale, risulta del tutto priva di tensione, cioè di attitudine a muoversi ed a produrre corrente.

Se mentre si trova l'induttore C sotto al cilindro HK, e l'indotto AB comunichi col suolo, si faccia toccare una qualunque delle due pagliette da un opportuno piano di prova, questo non riceverà nessuna carica, sebbene le pagliette ne posseggano una molta copiosa e indotta di prima specie, cioè contraria della inducente. Da ultimo se in questo caso, a qualunque delle due pagliette si avvicini quanto si può la interna superficie del cilindro HK, la paglietta medesima nè si allontanerà, nè si avvicinerà menomamente alla superficie stessa. Nel caso medesimo se con un inducente, sia positivo sia negativo, s'influisca sull' estremo A dell'indotto, il più lontano dall'inducente, le pagliette divergeranno sempre. Tutto ciò conferma che la indotta di prima specie non possiede tensione.

Se l'indotto AB invece di essere verticale, come nel caso precedente, fosse orizzontale, si troverà verificato, anche per questa seconda disposizione, quanto fu concluso per la prima, sperimentando cioè sull' orizzontale cilindro come fu sperimentato

sul verticale. In fatti se l'orizzontale cilindro AB isolato (fig. 3), venga sottoposto alla influenza dell'inducente positivo C, le pagliette elettrometriche, le quali per costruzione utilissima non possono divergere, fuorchè in un piano perpendicolare a quello della figura, divergeranno in questo medesimo piano. La divergenza loro, come nel caso precedente, sarà prodotta in grandissima parte dalla induzione dell'ambiente, ed in minima parte dalla omonima della induttrice che si trova essa pure distribuita sulle pagliette le quali, per evitare ogni obbiezione, supponiamo in questo caso meno lunghe che nel precedente. Però se vengano queste circondate da un bicchiere di vetro HK senza fondo, bene bagnato con acqua e comunicante col suolo, esse diminuiranno moltissimo la divergenza indicata, la quale sarà ora prodotta unicamente dalla omonima della inducente, che si trova pure sulle pagliette stesse, e sarà contrariata dall'attrazione della induttrice. Imperocchè in tale stato di cose, le pagliette per mezzo del bicchiere bagnato HK sono perfettamente difese dalla induzione dell'ambiente, detta curvilinea. La esistenza della omonima della inducente sulle pagliette si dimostra mediante un opportuno piano di prova, ed anche mediante un analizzatore inducente a giusta distanza sulle pagliette stesse dall'estremo A dell'indotto BA: avvertiamo che le pagliette non debbono curvarsi.

(fig. 3)

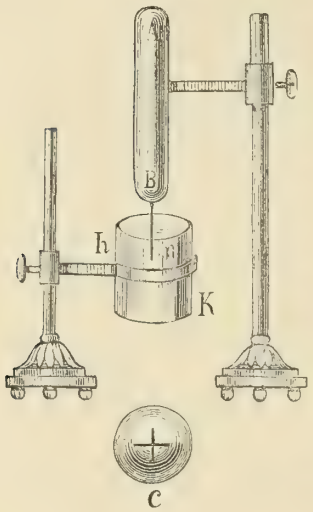


Quando l'inducente C sia positivo, come noi supponiamo sempre, allora un analizzatore negativo farà diminuire la divergenza delle pagliette, mentre un analizzatore positivo farà che questa divergenza cresca. Inoltre, avvicinando molto la interna superficie del bicchiere HK ad una delle due pagliette, questa inducendo verrà manifestamente attratta dalla superficie stessa. Però se in vece facciasi comunicare col suolo il cilindro AB indotto, la divergenza delle pagliette cesserà del tutto, non ostante che sull'estremo B siasi accresciuta la indotta di prima specie. Così essendo le sperimentali disposizioni, si faccia che una qualunque delle pagliette si avvicini molto alla interna superficie del bicchiere, la direzione della paglietta stessa rimarrà quella di prima, cioè non sarà nè attratta nè respinta dalla indicata superficie, ovvero nè la paglietta nè la superficie avranno potere d'indurre l'una sull'altra. Se mentre il bicchiere HK difende le pagliette dalla induzione dell'ambiente, si avvicini a debita distanza un induttore all'estremo A del cilindro non isolato, le pagliette stesse accresceranno sempre la divergenza loro, qualunque sia la natura elettrica di questo secondo induttore. In somma tutto quello che si verifica nell'indotto verticale, si verifica pure nell'orizzontale; ciò che conduce a riconoscere che la teorica della elettrostatica induzione riprodotta da Melloni è la vera, e non quella comunemente accettata. Mi pare che nelle sperienze ora esposte, relative alle figure numerate 2 e 3, nelle quali non si adopera dielettrico alcuno direttamente, le fasi manifestate dalla divergenza delle pagliette elettrometriche nelle sperienze stesse, dimostrino ad evidenza che la indotta di prima specie non tende affatto, e che la medesima coesiste colla indotta di seconda

specie nell'estremo il più prossimo all'inducente, senza potersi con quella di prima neutralizzare.

All' estremo inferiore B dell' indotto verticale si applichi una sola paglietta *n* (fig. 4), la quale coincida coll'asse verticale del cilindro di vetro *h*K, incontrando col suo prolungamento il centro dell'inducente C. La paglietta medesima non potrà escire mai dalla sua giacitura verticale, non ostante la induzione di C, perchè in questa disposizione si trova essa collocata simmetricamente rispetto all' induttore, come pure rispetto al cilindro *h*K. Però quei risultamenti delle sperienze dichiarati nei due casi che precedono, uno cioè relativo all' indotto verticale, l' altro all'orizzontale, i quali risultamenti possono aver luogo con una sola paglietta, si troveranno verificati anche in questo terzo caso. In fatti se l'indotto AB rimanga isolato, allora se alla paglietta *n* si avvicini bastantemente la interna superficie del tubo *h*K, si manifesterà un' attrazione. Se poi lo stesso indotto AB comunichi col suolo, allora se alla paglietta *n* si avvicini la interna superficie del tubo medesimo, questa non manifesterà nè attrazione, nè repulsione; ciò dimostra, senza uso diretto di coibente, che la indotta di prima specie si trova priva di tensione.

(fig. 4)



Egli è vero che toccando con un filo metallico non isolato l'anellino A dei pendolini sottoposti alla induzione di C (fig. 1), cresce sensibilmente la loro divergenza; però non è vera la interpetrazione data dai fisici Cantoni e Govi al fatto medesimo, ritenendo essi ciò dimostrare contro Melloni, che la indotta di prima specie possiede tensione. Imperocchè se i pendolini stessi diligentemente si tocchino con un opportuno piano di prova, non si avrà dai medesimi veruna elettrica manifestazione, sebbene molta elettricità posseggano indotta di prima specie. L' aumento della indicata divergenza dei pendolini, quando si facciano essi comunicare col suolo, procede unicamente dalla induzione od influenza dell' ambiente. In fatti, partita dall' indotto per la sua comunicazione col suolo la omonima della inducente, deve l' induttore influire con energia maggiore sull' aria che da vicino lo circonda, la quale alla sua volta influisce maggiormente sulle pagliette, accrescendo perciò la divergenza loro. E che sia così viene dimostrato dal circondare con un cilindro di vetro non isolato e bagnato d'acqua le pagliette stesse, le quali subito cesseranno dal divergere, perchè questo cilindro, per essere conducente, impedisce sulle medesime ogni effetto della influenza curvilinea, che sarebbe meglio chiamare laterale o dell' ambiente.

Ci viene inoltre opposto quanto segue: « Dopo che l' indotto si fece comunicare col suolo, se tolgasi o si scarichi l' induttore, i pendolini non solamente rimangono divergenti, senza neppure avere mostrato un istante qualche tendenza a ricongiungersi, ma invece divergono di più ». Qui dobbiamo dichiarare che il fatto riferito non si verifica punto generalmente, ma solo in alcune condizioni eccezionali che non appartengono affatto all'attuale argomento, e perciò sono fuori della presente quistione; lo che ora metteremo in chiaro. Vedremo che tolte queste condizioni eccezionali, si verifica sempre

il contrario, cioè si verifica sempre che, soppresso l'inducente, la divergenza delle pagliette diminuisce molto.

Imperocchè avvicinando l'inducente C alle pagliette o pendolini B, D (fig. 1), queste sino ad un certo avvicinamento continuano sempre a divergere; ma quando questo avvicinamento è cresciuto a sufficienza, i pendolini cominciano a diminuire di continuo la divergenza loro, e si caricano per *comunicazione* di elettricità omonima della inducente. In tale stato essi hanno raggiunto quella eccezionale condizione, per la quale avviene che soppresso l'inducente, i pendolini accrescono la divergenza che avevano alla fine dell'indicato avvicinamento.

Ed in fatti l'eccessivo avvicinamento dell'inducente agli estremi D, B dei pendolini, produce nell'interno dell'angolo B*m*D da essi formato tale un'attrazione da fare diminuire l'angolo medesimo, essendo anche diminuita l'attrazione opposta ed esterna dell'ambiente. Perciò si vede chiaro che per effetto di questa eccezionale circostanza, quando l'inducente si scarichi, cesserà l'attrazione interna, ed i pendolini dovranno accrescere la divergenza loro, per essere i medesimi caricati di elettricità *omonima* della inducente, a motivo dell'eccessiva diminuzione della distanza fra i medesimi e l'induttore C, come facilmente si verifica mediante un opportuno piano di prova, od anche portando l'indotto a contatto dell'elettroscopio. L'indotto comunichi o no col suolo, il diminuire o l'aumentare della divergenza dei pendolini o pagliette applicate ad esso, che si verifica nello scaricare l'induttore C posto sotto alle medesime, dipende dalla estensione di questo, dalla forma del medesimo e dalla distanza che intercede fra esso ed i pendolini, come ancora dal peso dei medesimi e dallo stato igrometrico dell'aria. Queste circostanze modificano l'effetto meccanico delle forze che agiscono sulle pagliette, le quali forze procedono dalla influenza tanto dell'ambiente quanto dell'induttore, e dalla carica omonima della inducente, che i pendolini ricevettero per comunicazione, di cui la esistenza si verifica nei diversi modi che ora furono indicati. Quindi è che i pendolini o pagliette dell'indotto si possono avvicinare tanto all'inducente, che le medesime diminuiscano la loro divergenza. In questo caso eccezionale, sopprimendo l'inducente, crescerà la divergenza delle pagliette; ma non affatto per la supposta tensione della indotta di prima specie, sibbene per le altre cause già dichiarate. Debbo però confessare che in questo caso eccezionale, l'accrescimento della indicata divergenza il più delle volte dura un brevissimo tempo, e presto le pagliette diminuiscono la divergenza loro, ciò che non si avverte dal Govi e dal Cantoni. Anzi dal Govi si pubblicò che, « tolto allora o scaricato l'induttore (cioè dopo che l'indotto si fece comunicare col suolo), non solo i pendolini rimangono divergenti, senza neppure avere mostrato un istante qualche tendenza a ricongiungersi, ma anzi divergono di più ». Perchè avvenga ciò, bisogna che la elettricità comunicata dall'inducente alle pagliette sia molta, e che l'aria sia bastantemente asciutta. Però fino a tanto che l'avvicinamento dell'inducente alle pagliette sia tale da produrre sempre l'aumento della divergenza loro, in tale ordinario caso allontanando l'inducente, facciasi o no comunicare prima col suolo l'indotto, diminuirà sempre la divergenza delle pagliette, contro quello che fu asserito dal Govi e creduto dal Cantoni. Per conseguenza quello sperimentatore il quale alle diverse fasi, che presenta la divergenza delle pagliette, si affida per concludere che la indotta di prima specie possiede tensione, cade

in errore; poichè se colla sperienza riconoscesse le cause da cui dipendono le fasi medesime, vedrebbe chiaramente che fra queste non entra punto la indicata tensione. Ma come mai si può credere lealmente che possegga tensione la indotta di prima specie, mentre questa non può nè comunicarsi nè disperdersi, vale a dire non può respingere se stessa? E perchè non cresce mai la divergenza dei pendolini, ma invece diminuisce sempre quando si scarica l'inducente, purchè questo non siasi troppo avvicinato ad essi? Non è forse anche in tal caso che la indotta di prima specie si trova su i medesimi pendolini? Da tutto ciò discende non potersi affatto riguardare valevoli contro la teorica di Melloni le conseguenze, che il Govi ed il Cantoni dedussero dall'indicato accrescimento della divergenza dei pendolini dopo scaricato l'inducente. Questo accrescimento è asserito dai nominati fisici, ma non si verifica punto, fuorchè in condizioni eccezionali, e non procede affatto della indotta di prima specie. Poniamo che un inducente, posto a debita distanza dalle pagliette, abbia prodotto per induzione l'aumento continuato della divergenza loro, essendo queste applicate all'indotto e non isolate. In questo caso è chiaro per ognuno, anche senza sperimentare, che poste le medesime pagliette nell'isolamento, se cessi la induzione, dovranno esse di necessità diminuire la primitiva divergenza loro, e ciò quand'anche non esistesse la induzione dell'ambiente. Imperocchè la indotta di prima specie, la sola in questo caso di cui sono caricate le pagliette, si trova in esse distribuita molto più nelle loro estremità inferiori, che nelle superiori. Ma quando si allontani dalle pagliette la induzione, allora la medesima indotta di prima specie, divenuta libera, dovrà diminuire nelle inferiori estremità e crescere nelle superiori, lo che deve produrre nella primitiva divergenza delle medesime una sensibile diminuzione. Questo dovrà evidentemente avvenire, tanto perchè la elettricità contraria della inducente ha ricevuto la nuova indicata distribuzione, quanto perchè ha cessato sulle pagliette medesime la induzione dell'ambiente; la quale se pure non esistesse, come credono gli oppositori alla teorica del Melloni, tuttavia l'angolo delle pagliette dovrebbe diminuire solo per la prima delle ora indicate due cagioni, essendo in questo caso la sola indotta di prima specie cagione della divergenza. Del resto qualunque fase abbia luogo riguardo alla divergenza delle pagliette, quando l'indotto, cui queste furono annesse, abbia comunicato col suolo, certo è, giova ripeterlo, che un opportuno piano di prova posto a contatto delle medesime non riceverà da esse carica elettrica veruna. Di più se avendo l'indotto comunicato col suolo, si circondano le pagliette o pendolini con un cilindro conduttore non isolato, la divergenza loro cesserà del tutto. Questi due soli fatti sperimentali bastano, per esser certi che la indotta di prima specie non possiede tensione: inoltre pure discende che la divergenza medesima, nel caso in proposito, è tutta cagionata dalla influenza dell'ambiente. Quando poi succeda che la divergenza delle pagliette o pendolini si accresca nel sopprimere l'inducente, allora si vedrà, con un opportuno piano di prova, che le pagliette o pendolini medesimi sono carichi di elettricità *indotta di seconda specie*, non già di prima, contro quello che suppongono e Govi e Cantoni, per non avere sperimentato come si doveva.

In quarto luogo il Cantoni, seguendo Govi, anzi copiandolo, soggiunge: «Ed a meglio convincersi di ciò durante il primo stadio della repellenza per semplice induzione, si tolga dall'anellino A (fig. 1) uno dei pendolini, mercè una verghetta isolante munita di

uncinetto: l'altro rimasto si ridurrà tosto verticale, ma tornerà a divergere appena si riattacchi all'anellino il pendolino levato per mezzo della verghetta. Epperò in questo caso codesta ripellenza dei pendolini per induzione non si può in nessun modo attribuire ad un' attrazione dell' induttore, siccome faceva il Melloni rispetto alla divergenza osservata nei pendolini applicati direttamente al corpo indotto nelle parti più prossime all' induttore ».

Il risultamento sperimentale qui riferito è vero, ma non punto è vera la interpetrazione che al medesimo si è data dai due nominati fisici, cioè che « i corpi elettrizzati dalla elettrostatica influenza si respingono per effetto della indotta di prima specie, perchè i medesimi falsamente suppongono questa dotata di tensione ». In fatti la conclusione medesima viene subito distrutta, se con un opportuno piano di prova, come più volte già dicemmo, si tocchino i pendolini. Poichè questo piano, quando l' indotto comunichi col suolo, non riceverà da essi carica veruna, e quando il medesimo sia nell' isolamento, il piano di prova stesso verrà dai pendolini carico di elettricità omonima della inducente. Ciò dimostra con tutta la evidenza, che la indotta di prima specie, posseduta dai pendolini, non ha tensione affatto. Premessa questa risposta passiamo a spiegare il riferito risultamento sperimentale del Govi, riprodotto dal Cantoni.

La esistenza della induzione per parte dell' ambiente non può revocarsi menomamente in dubbio, sia perchè viene ammessa con opportune sperienze dal Faraday, e da parecchi altri distinti fisici, sia perchè viene dimostrata con molti sperimenti, che quanto prima saranno da me pubblicati, sia perchè fondata sul buon senso per farla riconoscere vera. Quindi chiaro apparisce che togliendo uno dei pendolini, quando essi divergono, l'altro deve risentire da tutte le parti l'attrazione laterale dell' ambiente stesso, che prima gli era impedita da un lato, se non in tutto, certamente in grandissima parte, per la presenza di quel pendolino che fu tolto. Perciò l'altro pendolino restato deve, come dicemmo, rimanere attratto da ogni lato egualmente, per effetto della induzione laterale simmetrica, ossia dell'ambiente. Quindi è che il medesimo pendolino restato si deve disporre verticalmente (fig. 4). Tornando a collocare al suo posto il pendolino tolto, tornerà di nuovo la divergenza dei due pendolini dalla verticale, perchè ognuno di essi difende in gran parte l'altro da una delle due influenze laterali dell'ambiente; cosicchè ogni pendolino risente assaissimo l'attrazione da una sola parte, ma ben poco dall'altra.

Ha detto il Cantoni, come abbiamo già riferito, « che la repulsione dei pendolini per induzione non si può in niun modo attribuire ad un' attrazione dell' induttore, siccome faceva il Melloni, rispetto alla divergenza osservata nei pendolini applicati direttamente al corpo indotto, nelle parti più prossime all'induttore ». Questa del Cantoni è un' asserzione non a bastanza esatta; imperocchè dice il Melloni (Comptes-rendus, t. 39 p. 178 lin. 11 salendo): « les appareils pour explorer l'état électrique des deux bouts du cylindre, sont soumis eux-mêmes à l'influence de A, et subissent en B une perturbation électrique bien autrement intense que celle qu'ils éprouvent en C. Ne serait-il pas possibile que le changement des actions attractives en répulsives ou *vice versâ*, dérivât tout simplement de cette perturbation électrique de l'analyseur, et non pas de la qualité différente des électricités qui dominent en B et C? ».

Il primo periodo di questo brano del Melloni esprime una verità che niuno potrà mai negare; mentre il secondo periodo non dà per certo che la elettrica perturbazione

incontrata dall'analizzatore sia la causa del cangiamento delle azioni attrattive in repulsive o *vice versa*; ma emette soltanto il dubbio che ciò sia. Questo dubbio viene pure manifestato dal Melloni col seguente brano (luogo citato p. 181 l. 2 salendo): « Maintenant si vous me demandez la cause de cette singulière disposition de l'électricité sensible dans le cylindre soumis à l'induction, je répondrai franchement que je ne saurais encore la formuler de manière bien nette ».

Di qui si vede che il Melloni, sebbene non abbia perfettamente riconosciuto in che consista la causa della indicata perturbazione, ciò nulla ostante egli col suo penetrante ingegno ha chiaramente veduto essere del tutto erronea la teorica comunemente adottata per la spiegazione dell' indicato fenomeno. Ma ciò che più monta, egli riconobbe ancora essere la indotta di prima specie del tutto sprovvista di tensione, come meglio dichiarerò quando la citata Memoria del Melloni sarà da me con opportuni schiarimenti riprodotta.

Però se questo illustre fisico italiano non riconobbe che la causa del cangiamento delle azioni attrattive in repulsive, o *vice versa*, consisteva nella induzione curvilinea, fu perchè non aveva egli posto mente alla esistenza evidente di questa induzione. Ma ciò nulla ostante il medesimo seppe che « pour resoudre la question il faudrait trouver le moyen de soustraire les instruments à l'action perturbatrice du corps inducteur» (luogo citato p. 178 l. 3 salendo). Questo giustissimo mezzo, fu da me praticato, colla costruzione di quegli strumenti analizzatori, ossia piani di prova che dissi opportuni, che vengono sottratti ad un tempo e dall' azione del corpo induttore e dalla influenza detta curvilinea, che pure dal corpo medesimo deriva per mezzo dell' ambiente.

Ma torniamo sulla sperienza delle pagliette che divergono (fig. 1), ponendo bene mente a questo fatto che giova ripetere, cioè fino a che l' induttore trovasi ad una conveniente distanza dalle pagliette, queste divergono sempre più; quindi se l'induttore medesimo in tal caso ordinario si allontani, esse diminuiranno sempre la divergenza loro. Però se l'induttore si avvicini maggiormente alle pagliette, allora esse per tale avvicinamento maggiore diminuiranno la divergenza, non ostante che rimangano sotto la induzione. In tal caso eccezionale l'attrazione induttiva più fortemente agirà nell'interno dell'angolo formato dalle pagliette, di quello che all'esterno di esse per causa dell' ambiente, il quale pur esso induce. Perciò se ora l' inducente si scarichi facendo prima comunicare per un istante l' indotto col suolo, cesserà l' azione attrattiva nell' interno dell'angolo delle pagliette, le quali non solo per questa cessazione, ma eziandio pel trasporto della inducente sulle pagliette, dovranno divergere maggiormente. Se l'aria non sia molto secca, in tal caso, quantunque si faccia per un istante comunicare col suolo l'indotto e quindi le pagliette stesse, prima di scaricare l'inducente delle medesime, tuttavia per quell'intervallo di tempo che intercede fra la comunicazione istantanea col suolo e la seguente scarica dell'inducente, la quale avviene dopo che le pagliette sono tornate nell'isolamento, la omonima della inducente può essersi trasportata in tanta copia dall'induttore sull'indotto, per la grande vicinanza loro a questo, che allontanato l' inducente, il residuo della stessa omonima sia tanto, che per essere cessata l' attrazione interna le pagliette debbono divergere maggiormente. Ma questo accrescimento della divergenza non procederà punto dalla indotta di prima specie, che le pagliette si ebbero per induzione. In fatti se in questo caso eccezionale, dopo allontanato

l'inducente, si applichi su qualunque punto del sistema già indotto ed isolato un piano di prova, si otterrà una manifestazione di elettricità *omonima* della inducente. Inoltre se dopo prodotta l'apertura delle pagliette, causata dalla induzione sulle medesime per mezzo di un inducente stabilito ad una certa distanza da esse, introducasi nell'angolo delle medesime il bottone di una piccolissima bottiglia di Leida caricata come il primo inducente, subito le pagliette diminuiranno la loro divergenza. Si troverà pure in questo caso, che tanto il sistema indotto, quanto le pagliette annesse al medesimo, avranno una carica di elettricità *omonima* della inducente.

Però se per produrre la divergenza delle pagliette, si adoperi un inducente costante, come sarebbe una energica pila secca ricoperta di buon coibente sul polo che alle pagliette si avvicina e non isolata nell' altro polo, in questo caso, benchè si avvicinino molto le pagliette all'inducente, le medesime non si mostreranno mai cariche della indotta di seconda specie. Non occorre osservare che queste sperienze si dovranno eseguire quando l'aria sia bastantemente secca.

Profitto di questa occasione per mostrare, che il seguente brano pubblicato dal Govi (1) per dimostrare che la indotta di prima specie possiede tensione, invece dimostra il contrario. Nella risposta che feci (2) alle obbiezioni del nominato autore, omisi, ed ora vi supplisco, di prendere ad esame il brano indicato, che così dice: « A motivo però di questa diffusione della indotta, quando cessa la induzione, non sarebbe difficile di trovare o una distanza, o una carica dell' induttore, o una estensione superficiale dell'indotto tali, che, tolto l'induttore, la divergenza dei pendolini non mutasse, o scemasse sensibilmente, o si riducesse anche a zero ».

Dunque, secondo questo brano, la divergenza dei pendolini dipende da molte cagioni, le quali possono produrre diversi effetti nella divergenza stessa, dalla quale perciò non può concludersi, come già dicemmo, che la indotta possegga tensione: lo che discende a buon dritto dal medesimo brano. Ma se facciansi bene le ragioni, sarà facile concludere dal brano medesimo, che la indotta di prima specie non tende. Imperocchè; 1° se ci facciamo a domandare per qual motivo la diffusione della indotta di prima specie non si verifica mentre dura la induzione, dovrà ognuno rispondere: perchè la indotta medesima è vincolata dalla inducente. Ma ognuno egualmente dovrà concedere che questa risposta equivale a riconoscere, che la indotta di prima specie non ha tensione finchè rimane tale ; 2° se da una qualunque delle combinazioni riferite nel citato brano emergerà, che la indotta di prima specie non tende, dovrà questo risultamento accettarsi per qualunque altra delle possibili combinazioni relative alla divergenza di cui parliamo. Per tanto suppongasi che le pagliette indotte sieno brevi e sospese ad una piccolissima superficie, queste pagliette, fatte comunicare col suolo, sottopongansi alla influenza di un induttore posto a giusta distanza dalle medesime, divergeranno esse; quindi tolta prima la comunicazione col suolo, e poi cessata la induzione, diminuirà di molto la divergenza delle pagliette. Ora si rifletta, che se la causa della divergenza delle pagliette, quando le medesime si trovano sottoposte alla influenza, fosse la tensione ossia la forza repulsiva della indotta di prima specie,

(1) Atti della R. Accademia dei Lincei, serie 2ª t. II° pag. XV.
(2) Ibidem, pag. 841.

di cui sono esse caricate, non potrebbe, dopo soppresso l' inducente, diminuire di molto la divergenza di tali pendolini, come realmente diminuisce. Avvegnachè, attesa la picciolezza della superficie delle pagliette ora isolate, la elettrica diffusione su questa piccolissima superficie deve sulla medesima produrre una elettrica distribuzione ben poco diversa da quella esistente sulle pagliette stesse, prima che fosse allontanato da loro l'inducente; pure perchè anche dopo questo allontanamento si deve negli estremi dei pendolini trovare maggior copia di elettricità, di quello che sia nelle altre loro parti, come avveniva prima dell'allontanamento stesso. Dunque la divergenza delle pagliette durante la induzione non può dipendere dalla data e non concessa tensione della indotta di prima specie, poichè se questa esistesse, non dovrebbe dopo l'allontanamento indicato diminuire di molto la divergenza delle pagliette, come realmente diminuisce nel caso che ora contempliamo. Dunque, poichè nel caso medesimo non è la indotta di prima specie quella che produce la divergenza delle pagliette, così non potrà esserlo neppure in qualunque altro caso; e perciò questa indotta non possiede mai tensione, lo che discende per corollario dal riportato brano del Govi.

Possiamo ancora col seguente ragionamento istituito sulla divergenza delle pagliette, quale dalla sperienza veramente si ottiene, giungere a concludere che la indotta di prima specie non tende. In fatti quando l' inducente non è molto vicino alle pagliette, queste, cessata la induzione, diminuiscono la divergenza loro, come ognuno può sempre verificare facilmente. Per tanto deve concludersi da tale primo risultamento, che mentre durava la influenza, e le pagliette non erano isolate, la forza repellente, ossia tensione presunta (cioè data e non concessa) della indotta di prima specie, di cui realmente sono caricate le pagliette, superava l'attrazione su queste, la quale realmente agisce sulle medesime proveniente dall' induttore. Però avvicinando sempre più l'inducente stesso alle pagliette, si deve, come insegna la sperienza, giungere ad un tale avvicinamento, in cui queste incomincieranno a diminuire la primitiva loro divergenza, stando esse tuttavia sottoposte alla induzione. Allora se l'influsso cessi, vedrà ognuno crescere la precedente divergenza. Per tanto devesi da tale secondo risultamento concludere, che mentre durava sulle pagliette non isolate la influenza, la forza repellente, ossia tensione presunta (cioè data e non concessa) procedente dalla indotta di prima specie, di cui sono più che nel primo caso cariche realmente le pagliette, risultava minore dell' attrazione, che sulle medesime realmente si esercita dall' inducente. Ora dobbiamo riflettere che coll'avvicinarsi la inducente alle pagliette, crescono insieme sulle medesime tanto l' attrazione quanto la induzione, ossia la indotta di prima specie, cioè la supposta repulsione di questa, sempre nel medesimo rapporto. Ma nel primo risultamento la repulsione superava l' attrazione; dunque dovrà superarla eziandio nel secondo risultamento. Però in questo la sperienza dimostra il contrario, cioè dimostra che l'attrazione supera la repulsione; dunque la causa della divergenza delle pagliette comunicanti col suolo non può dedursi dalla tensione della indotta di prima specie; perchè se questa fosse realmente la causa della indicata divergenza, le pagliette, cessata la induzione, avrebbero dovuto come nel primo risultamento diminuire la divergenza loro anche nel secondo.

Da tutto l' esposto si conferma, che dalle diverse fasi manifestate dalla divergenza delle pagliette non si può concludere che la indotta di prima specie possegga

tensione. Di più si conferma eziandio la verità della teorica di Melloni sulla elettrostatica influenza, cioè che la divergenza delle pagliette non isolate, ha per cagione unica la risultante di queste due forze agenti contemporaneamente sulle pagliette stesse, cioè l'attrazione procedente dall'induttore, e l'attrazione laterale che procede dall'ambiente, ossia dall'induzione curvilinea di Faraday; la quale diminuisce sempre più coll'avvicinarsi maggiormente l'induttore alle pagliette. Colui che non rimanesse convinto dai precedenti due raziocinî, rifletta che le riferite sperienze, come già dimostrammo, confermano le conclusioni ora ottenute. Esso ricerchi la natura dell'elettrico, di cui sono cariche le pagliette quando queste, dopo soppressa la induzione, accrescono la divergenza loro, nel qual caso la carica che posseggono è *omonima* della inducente.

Tutto quello che abbiamo esposto fin qui già basterebbe per adottare le seguenti conclusioni:

1° Che i fatti nei quali si fa consistere la teorica comunemente adottata sulla influenza elettrica non sono tutti veri, e quei che sono veri mancano di verità nella interpetrazione, quale viene ad essi comunemente attribuita nei corsi di fisica e nei trattati di elettricità, compresi anche i più moderni. Così per es. falsamente si asserisce, che la omonima della inducente, ossia la indotta di seconda specie non si trovi su qualunque punto dell'indotto isolato, ed anche perciò sulla estremità di questo la più prossima all'inducente. Inoltre vengono interpetrate male assai dall'antica teorica le fasi della divergenza dei pendolini applicati sull'indotto, e viene pure interpetrato malissimo il fatto interessante molto, da pochi considerato, che cioè la sola omonima della inducente si disperda nel suolo, allorchè *qualunque* punto dell'indotto sia toccato da un conduttore non isolato.

2° Che sopra un conduttore cilindrico isolato e sottoposto alla elettrica influenza, la indotta di prima specie, vale a dire la contraria della inducente, non possiede affatto tensione, ma soltanto *attrazione* pel solo inducente.

3° Che si trova essa indotta di specie prima in maggior copia su quell'estremo dell'indotto il più prossimo all'inducente, diminuendo sempre più andando verso l'altro estremo del medesimo cilindro.

4° Che l'attuata, cioè la indotta di seconda specie, vale a dire la omonima della inducente, si trova su qualunque punto del cilindro indotto, senza eccettuare l'estremo suo più vicino all'inducente, ma cresce sempre più coll'avvicinarsi all'altro estremo, ed è per tutto libera, cioè per tutto ha tensione.

5° Che l'aria dell'ambiente riceve la influenza dell'induttore, quindi si elettrizza essa pure per induzione; perciò l'aria medesima induce su i corpi ad essa circostanti, ed anche sulle pagliette elettrometriche applicate sull'indotto, alla quale induzione fu dato l'epiteto di curvilinea dall'illustre Faraday, che la riconobbe pel primo.

§ 3.

Dice il Cantoni (luogo citato pag. 588 l. 6): « è abbastanza concludente in tal senso la dimostrazione data già dal Beccaria dello speciale stato elettrico delle varie parti di un conduttore (*isolato*), che riceve l'induzione per mezzo di doppî pendolini applicati alle parti stesse, ed esplorati convenientemente siccome egli faceva » (V. Beccaria *Elettricismo artificiale*, § 468 e seg.).

Noi rispondiamo che questo speciale stato elettrico delle varie parti di un conduttore influito, ed osservato dal Beccaria mediante la divergenza dei pendolini applicati in varî punti dell' indotto, è consentaneo alla teorica del Melloni, che vuole sia l'indotta di prima specie priva di tensione. Ed in fatti il Beccaria dice, che i pendolini più prossimi all' induttore divergono massimamente, e che questa divergenza è minore nei seguenti, fino ad un certo punto, in cui i pendolini appena si muovono, e che poi gli altri cominciano a divergere, fino all'altro estremo del lungo cilindro che adoperava egli, ma non dice il Beccaria che vi è alcuna coppia di pendolini non divergente.

Ora è naturale che l'aria circostante essendo indotta, la elettricità omonima all'inducente che trovasi nelle sue molecole deve agire per attrazione sulle pagliette elettrometriche, producendone la divergenza; però tale attrazione sulle pagliette per parte dell'aria influita andrà diminuendo allontanandosi esse dall' induttore. Anche un'altra forza dovuta alla tensione della omonima della inducente, ovvero indotta di seconda specie, che trovasi su tutto il cilindro indotto, concorre alla divergenza di queste coppie di pagliette già divergenti per l'attrazione laterale dell'ambiente, ossia per la induzione curvilinea.

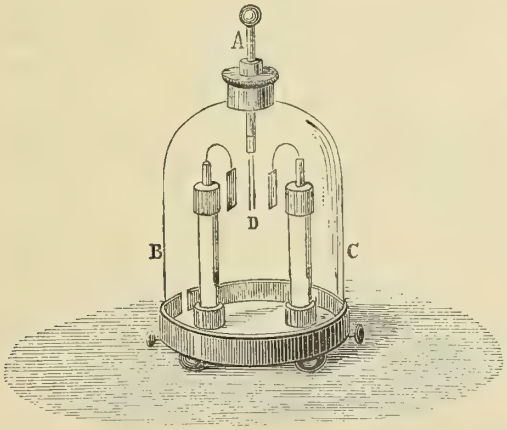
Questa forza la quale fino ad un certo punto del cilindro avrebbe prodotto per sè sola una divergenza piccolissima nei pendolini, diviene verso l'estremo lontano tale da esser capace essa stessa a produrre una divergenza molto sensibile, poichè la indotta di seconda specie, come si osserva dal diagramma elettrico della teorica di Melloni da me immaginato, va sempre crescendo dall'estremo del cilindro più prossimo fino a quello più lontano dall'inducente. Per conseguenza ciò che riferisce il Beccaria relativamente alla divergenza dei pendolini sotto l' azione della inducente, non è punto contrario ai principî professati dal Melloni, da me sostenuti e dimostrati. Una osservazione interessante però merita il modo con cui Beccaria stesso ha esplorato la natura della elettricità, di che questi piccoli elettrometri erano caricati. Il Cantoni dice che furono convenientemente dal Beccaria esplorati questi pendolini. Mi permetta il Cantoni di negargli completamente la convenienza del modo con cui questi elettrometri vennero dal Beccaria stesso esplorati. Usava egli a questo fine una bacchetta di resina o vetro confricati, e dall' attrazione o repulsione esercitate da così fatti analizzatori avvicinati ai pendolini, deduceva la natura della elettricità su questi. Ma il Cantoni non deve ignorare quale causa d'inganno possa essere questo mezzo di esplorare la elettrica natura.

In primo luogo lo stesso Cantoni, nei suoi *Elementi di Fisica*, pag. 584 prop. 10ª, riferisce la ragione per la quale noi diciamo che un tal mezzo dev' essere proscritto, e così egli si esprime: «Volpicelli osservò (1859) che la cera lacca, la gomma lacca e la resina ialappa (e moltissime altre) sfregate assai leggermente colle dita (nude o coperte da un guanto di lana) prendono lo stato elettro-positivo; mentre sfregandole con forza (come si fa per solito) prendono lo stato elettro-negativo: e si possono successivamente alternarvi i due stati col variare la forza dello strofinamento». Questo fatto qui esposto dallo stesso Cantoni, se non fosse altro ci deve far dubitare, che nello strofinamento credendo di svolgere la elettricità che vogliamo, se ne svolga piuttosto una contraria, dipendentemente dalla forza che abbiamo impiegato per istrofinare, e dalla natura della sostanza colla quale si strofina, e dall'aggregato stesso molecolare del coibente; poichè si osserva che anche in una stessa qualità di coibente, da un suo pezzo si può più agevolmente suscitare l' elettrico positivo, mentre da un altro si ottiene il contrario.

Ora il Beccaria dice aver egli osservato, che gli elettrometri situati verso un induttore positivo, segnano tutti elettricità per difetto, perchè fuggono dalla cera lacca. Noi diciamo, che verificandosi quello che poc'anzi è stato esposto, e supponendo la cera lacca positiva, respingerebbe bensì le pagliette, ma 1° perchè esse sono cariche di positivo libero indotto di seconda specie, e non per il negativo indotto di prima specie, il quale non ha tensione; 2° perchè la induzione positiva dell' aria ambiente si rafforzerebbe e produrrebbesi così nelle pagliette elettrometriche una divergenza maggiore. Però, come si vede chiaro da questa giustissima ragione che abbiamo dato, il negativo ovvero la indotta di prima specie, che trovasi tanto sulle pagliette quanto sull' estremo dell' indotto il più prossimo all' inducente, non è essa la causa che produce la divergenza delle pagliette stesse. Eppure il Beccaria ed il Cantoni concludono falsamente che questa repulsione o divergenza maggiore sia l'effetto di due elettricità negative fra loro.

Supponiamo per un secondo caso che la bacchetta di cera lacca, che adoperiamo per analizzatore, sia veramente, come d' ordinario, caricata di elettricità negativa. È certo che quando noi appressiamo questo nuovo inducente od analizzatore sulle pagliette, spingiamo su esse una certa quantità di elettricità negativa, omonima di quella della bacchetta; oltre alla indotta di prima specie, la quale è priva di tensione. Questa elettricità negativa spinta sulle pagliette, deve per la sua tensione, produrre una certa divergenza nei pendolini; di più la induzione curvilinea che era positiva, trovando sulle pagliette una elettricità contraria maggiore di quella di prima, le attrarrà più fortemente; e finalmente crescerà anche di più la induzione curvilinea, poichè l' induttore principale positivo, avendo innanzi a sè una carica elettrica contraria maggiore, accrescerà verso questa la sua ertezza elettrica, ed indurrà perciò con energia maggiore sull'ambiente. Un'altra causa d'errore può essere la quantità stessa di carica, che acquista l' analizzatore per lo sfregamento. In fatti benchè la carica, indotta di prima specie, che trovasi sulle pagliette fosse libera, e la bacchetta analizzatrice fosse carica di elettricità contraria, in tal caso dovrebbe aversi la chiusura delle pagliette stesse. Se però la carica della bacchetta superasse di molto quella dell'inducente, potrebbe avvenire in questo caso che si avrebbe invece una divergenza maggiore nei pendolini.

(fig. 5)



Per tutte le indicate difficoltà, che s' incontrano nell' uso di tale genere di analizzatori, mi sembra potersi senza più concludere:

1° Doversi proscrivere assolutamente questo modo di esplorare la elettrica natura in ogni caso, ma principalmente sopra corpi sottoposti all'azione di un induttore; ma doversi adoperare invece l' elettroscopio di Bohenberger, rappresentato nella (fig. 5), servendosi di *opportuni* piani di prova.

2° Essere erroneo e non concludente punto l'altro metodo usato dagli altri, di staccare cioè questi elettrometrini dall' indotto, e portarli ad un elettroscopio fuori

dell'induzione; giacchè con questo modo si conoscerebbe la sola *risultante* delle due elettricità contrarie, che Melloni vuole coesistenti in ciascun punto dell'indotto, e ciò più volte fu dimostrato ad evidenza esser vero.

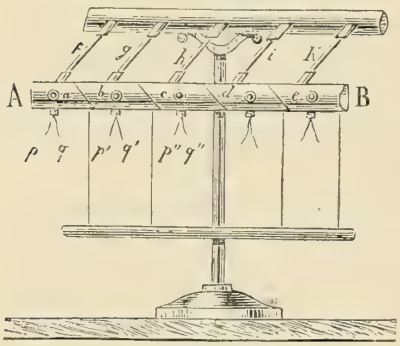
3° Essere unico il mezzo adatto a conoscere la natura della elettricità, che trovasi sugli elettrometrini, e questo consistere in un piano di prova piccolissimo, il quale può avere forme diversissime, poichè può esser foggiato come un condensatore ad armature mobili, o ad armature fisse, od anche non condensatore, formato cioè di un piccolissimo dischetto metallico congiunto ad una asticella finissima di vetro verniciato, per mezzo di buon coibente, nel quale penetra la elettricità omonima libera, che trovasi pure sull'estremo dell'indotto prossimo all'induttore. Di questi piani di prova verrà in seguito da me sviluppata più diffusamente una completa teorica, con relative figure.

Prosiegue il Cantoni dicendo: « Questa forma di dimostrazione venne ridotta ancor meglio concludente dal Riess, col disporre verticalmente il cilindro indotto al disopra dell'induttore, e coll'applicare ad esso dei pendolini semplici, siccome è ben noto ».

Dopo quanto abbiamo dichiarato riguardo alla sperienza del Govi con i doppî pendolini, emerge chiaro che nulla di più vale a concludere contro questa nuova teorica da me sostenuta, la sperienza immaginata dal Riess; giacchè ognuno vede, come questa sperienza non per altro differisce da quella del Govi, che per essere uno solo il pendolino che può divergere, poichè il cilindro indotto dal quale pende non può moversi, perciò la divergenza si verifica solo da un lato del cilindro stesso.

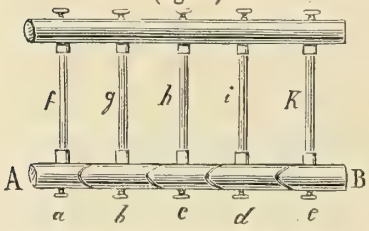
Il Cantoni loda la sperienza del Belli a questo proposito istituita: « Egli usava un lungo conduttore cilindrico isolato, il quale mercè opportuni fili isolanti, poteva venir rapidamente spartito in tanti brevi tronchi di cilindro a base obliqua, facendo ruotar questi intorno a rispettivi assi fissi, per modo da ridurre paralleli fra loro i tronchi stessi, ciascuno dei quali portava un doppio pendolino piuttosto corto, e diretto in un piano perpendicolare all'asse lungitudinale del cilindro intero. Presentando un corpo induttore a codesto cilindro coi suoi tronchi congiunti, e determinandone il disgiungimento sotto la induzione, ciascun pendolino mostrerà quel grado di divergenza, che offriva dianzi, e la conserverà quasi immutata, ancorchè si rimuova lentamente e lo si scarichi ».

(fig. 6)



Questa sperienza del nostro Belli mi era nota già da molto tempo, avendomi l'autore stesso inviata una copia della relativa Memoria estratta dal Nuovo Cimento (fasc. di febbraio e marzo 1857), accompagnata da una sua lettera, nella quale correggeva egli molti errori incorsi nella stampa della Memoria stessa.

(fig. 7)

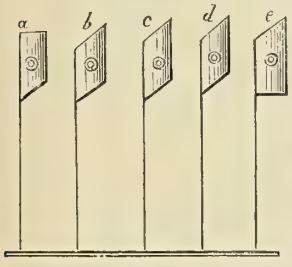


Per maggior chiarezza riportiamo la figura ed una descrizione di questa macchina immaginata dal Belli, ambedue tralasciate dal Cantoni, a danno della facile intelligenza dei lettori.

Si compone di un cilindro metallico AB (fig. 6 e 7), formato di 5 tronchi *a, b, c, d, e* a basi oblique; questi tronchi sono mantenuti isolati

e combacianti perfettamente l'uno all'altro, per mezzo di 5 bacchette isolanti, che noi abbiamo adoperato di ebanite verniciata, *f*, *g*, *h*, *i*, K disposte orizzontali, le quali abbiamo verniciate onde difendere le superficie di esse dal contatto dell'aria. Queste bacchette servono di assi alla rotazione dei detti tronchi del cilindro; poichè i medesimi per appositi fili isolanti possono separarsi tra loro, facendoli ruotare attorno ai detti assi o bacchette di ebanite, riuscendo l'asse del cilindro intero normale alle bacchette stesse. Ciascuno di questi tronchi è munito di una coppia di pendolini *pq*, *p'q'*,... elettrometrici, disposti in modo che il piano secondo il quale questi pendolini divergono riesca normale all'indicato asse del cilindro. Questi tronchi dopo effettuata la separazione fra loro, debbono rimanere tutti verticali (fig. 8).

(fig. 8)



Feci subito costruire quel cilindro composto di tanti tronchi e basi oblique, e mi studiai verificare quei risultamenti dal Belli riferiti; poichè mi parve veramente strano che dovesse questa sperienza, bene eseguita, riescire opposta del tutto ad altre a questa simili, da me tante volte verificate. Ed in fatti in un ambiente molto secco, e servendomi di un inducente il più possibile costante, poichè allora non ne possedeva di quella costanza così perfetta come oggi, mi accinsi a ripeterla; però debbo confessare non essere mai riuscito a riprodurre il fenomeno tal quale il Belli lo asserì, ed ora lo asserisce il Cantoni. Nella sperienza da me ripetuta ebbi ad osservare che quei piccoli elettrometri annessi ai varî tronchi del cilindro, quando questi venivano separati fra loro e poscia scaricato l'inducente, diminuivano sempre quella divergenza che mostravano sotto l'induzione.

Mi permetterà ora il prof. Cantoni che gli enumeri le ragioni, per le quali si dimostra impossibile, tolta ogni perturbazione, che la sperienza del Belli riesca nel modo descritto dal Belli stesso: sono esse le seguenti:

1° Quando i tronchi del cilindro, ruotando attorno i loro assi orizzontali, vengono disgiunti, allora le superficie delle basi che prima erano in contatto tra loro, si disuniscono, e la elettricità liberata si distribuisce anche su queste superficie; per conseguenza pure solo per questa ragione deve diminuire la divergenza degli elettrometrini, perchè quella stessa quantità di carica elettrica, che secondo Belli e Cantoni era la causa della divergenza dei pendolini, ora si è distribuita sopra un conduttore di più grande capacità, e perciò la forza sua di tensione deve diminuire.

2° Essendo la vera causa che produce la divergenza di questi pendolini l'induzione dell'aria circostante, od altrimenti la induzione detta curvilinea, cioè dell'ambiente, come è stato tante volte da me dimostrato; ne segue che cessando questa per avere scaricato l'inducente, le pagliette elettrometriche debbono diminuire assai la divergenza che mostravano sotto la induzione, e mantenere solo quell'angolo dovuto alla tensione ora acquistata dalla indotta di prima specie, la quale non può in verun modo valere a mantenerlo uguale a quello già prodotto dalla induzione dell'aria circostante.

A convincersi anche meglio che questa divergenza sotto la induzione è per la massima parte dovuta all'attrazione laterale dell'aria si circondi ciascuna coppia di pendolini con un cilindro di vetro bagnato, acciò sia conduttore, e si vedrà che tutte

le pagliette o pendolini diminuiranno moltissimo l'angolo di divergenza; e ciò dimostra chiaramente che quella divergenza non era punto dovuta alla tensione della indotta di prima specie che trovasi sul cilindro; poichè niun ostacolo impedirebbe a questa, per tale disposizione, di scorrere sulle pagliette per aprirle. Ne può dirsi che tale artificio turbi la sperienza, come si pretende, giacchè introducendo in questo cilindro di vetro un piano di prova piuttosto ampio, si vedrà dopo estratto che niuna traccia di elettricità apparirà in esso per effetto della induzione, lo che deve verificarsi anche sulle pagliette.

3° Trovandosi poi, secondo Melloni e secondo la sperienza, sopra ciascun tronco del cilindro la indotta di seconda specie, deve seguire sopra ciascun tronco, dopo che furono separati, e dopo scaricato l'induttore, la neutralizzazione delle due indotte fra loro, e diminuendo per tale ragione la carica, che pretendevasi produrre la divergenza, ne segue che dopo la separazione dei tronchi è impossibile trovare la divergenza stessa di prima, ma diminuita negli elettrometri.

4° Da ultimo se veramente la indotta di prima specie fosse la causa per cui gli elettrometri divergono, lo che sarebbe un manifesto indizio di tensione o di sforzo repulsivo, è certo che applicandovi un piano di prova piccolissimo, dovrei avere in questo la comunicazione di quella elettricità capace di produrre una tale divergenza. Ora se il piano di prova sia il più piccolo possibile e difeso o no dalla induzione, sempre manifesterà la omonima dalla inducente se l'indotto è isolato, o manifesterà nulla se questo comunica col suolo. Per conseguenza evidentemente deriva, che non avendo forza quella elettricità di comunicarsi ad un piano di prova, molto meno può esser capace di produrre nei pendolini la divergenza che fra essi manifestasi; a produrre la quale si richiederebbe uno sforzo tanto maggiore.

Questa sperienza bensì potrà verificarsi nel modo annunziato dal Belli, quando dall'inducente si trasporti per mezzo dell'aria una certa quantità di elettricità induttrice od attuante sull'indotto, ed in copia tale da produrre sopra ciascun tronco del cilindro una sufficiente carica di elettricità omonima della inducente. In tale circostanza però non si ha diritto a concludere ciò che ne concluse il Belli, seguìto dal Cantoni, che cioè la divergenza dei pendolini è causata dalla indotta di prima specie, la quale ora più non esiste sull'indotto, essendo sul medesimo cessata la induzione.

Aggiungiamo infine che questo fenomeno dei doppî pendolini è soggetto a due fasi del tutto contrarie fra loro, come abbiamo veduto nella sperienza di Govi, una cioè quando non siavi stata perturbazione di sorta su i pendolini stessi per parte della inducente. In tale fase al togliersi dell'induttore, i pendolini diminuiscono sempre la divergenza loro, e la elettricità risultante su i medesimi è indotta di prima specie. L'altra fase, non bene considerata dal Govi, quando cioè al sopprimersi dell'induttore avviene la maggiore divergenza nei pendolini; però allora esplorati questi, si trovano sempre carichi di una elettricità risultante omonima della inducente. Per conseguenza non deve recare meraviglia vedere in questo caso accrescersi la divergenza dei pendolini stessi, nè ciò deve dare diritto alcuno a concludere contro la teorica da me sostenuta. Il vedere che la divergenza di essi pendolini, fuori della induzione, sia la stessa o maggiore di quella che appariva sotto l'azione dell'induttore, ripetiamo che non deve recare meraviglia; poichè fra queste due fasi tra loro contrarie deve esservene una

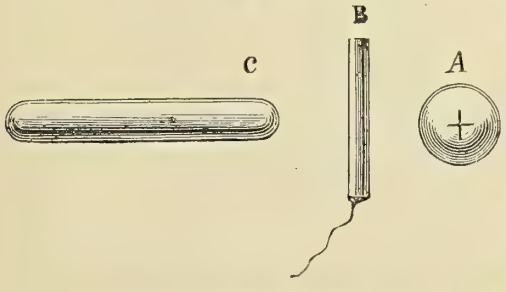
intermedia nella quale non avviene nè la diminuzione nè l'accrescimento di divergenza nei pendolini, ma pure in questa fase deve trovarsi nei pendolini una risultante di elettricità omonima della inducente.

E poichè siamo entrati a parlare delle sperienze del Belli, non sarà fuori di proposito, nè senza utilità, il riportare alcune fra le principali opinioni del Belli stesso intorno alla elettrostatica induzione, non che far vedere gli erronei concetti di quelle contrarie alla teorica da me professata su questo argomento. Nel t. III della sua *Fisica sperimentale* pag. 94 § 925, dice il Belli « ..... noi abbiamo assunto, che la ripulsione e l'attrazione, che il fluido elettrico soffre da se stesso e dalla materia pesante, operino liberamente attraverso ai corpi ». Inoltre (luogo citato pag. 158 § 971) egli dice: « Tutte le azioni attuanti operano anche attraverso i corpi ..... Quando i corpi frapposti sono conduttori, il corpo attuante smove il fluido naturale anche in questi, e fa in essi nascere un'azione verso il corpo attuato, la quale si associa a quella del corpo attuante medesimo, e la altera e talvolta anche la distrugge». A pag. 468 (luogo citato § 1243) il medesimo dice: « È però necessario che i corpi interposti siano ben isolanti o almeno bene isolati; altrimenti acquistando essi per induzione una elettricità contraria a quella dei corpi elettrizzati, che loro si presentano, diminuiscono gli effetti di questi ultimi in un modo sensibilissimo. Ed in fatti Wheeler e Watson osservarono che il vetro umido o freddo non lascia passare sì bene l'azione come quello secco o caldo ».

Nel nuovo Cimento t. V, anno 1857, pag. 168 § 22 il Belli medesimo si esprime in tal modo: « Io non trovo necessario il principio ammesso da alcuni fisici, che le induzioni si esercitino anche in linee curve. Ma ammetto invece che esse, come tutte in genere le azioni elettriche, si esercitino liberamente attraverso ai corpi, come fa la gravitazione ». Ed a pag. 176 del t. III del suo *Corso elementare di fisica sperimentale* § 986 si legge: « Se un corpo elettrizzato si trova abbracciato tutto all'intorno, standone però affatto isolato, da un inviluppo conduttore interamente chiuso, e comunicante col terreno, si stabilisce nella superficie interna di cotale inviluppo una elettricità contraria a quella del detto corpo rinchiuso; la quale elettricità si dispone unicamente in questa superficie interna con maggiore intensità nelle parti meno sporgenti, e lasciando allo stato naturale tutta la grossezza dell'inviluppo stesso, e tutta la superficie esterna ».

In questa esposizione delle opinioni del Belli da noi riferita si vede, che non dichiara egli con certezza quello che la sperienza insegna relativamente al traversare che fa la elettrica induzione per le masse o conduttrici, o coibenti. La sperienza insegna che quando le masse sono perfettamente conduttrici e non isolate, la elettrica influenza non traversa per le medesime; pel contrario quando sono esse coibenti allora la elettrica influenza le traversa, e ciò contraddice al Belli, il quale vorrebbe confondere l'azione della gravità con quella della influenza elettrica, mentre la prima traversa tutto, qualunque sia la natura dei corpi, e la seconda non traversa quelli che sono conduttori. Quindi un corpo C (fig. 9) separato da una inducente A per mezzo di uno scranno B metallico non

(fig. 9)



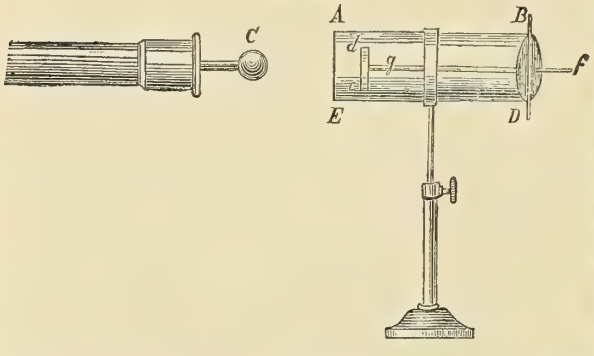
isolato, ed a sufficienza esteso, non riceve alcuna azione dal medesimo inducente. Ciò si verifica esattamente colla sperienza, poichè il corpo C rimane sempre nello stato neutrale; però taluni fisici, tra i quali Belli, spiegano questo fatto ritenendo che la influenza elettrica traversi le masse conduttrici e si annulli nel traversarle, cosicchè il corpo C non riceverà dall' inducente A influenza di sorta.

Questa spiegazione si fonda nell' ammettere, che delle tre azioni prodotte in C, la indotta di seconda specie dello scranno B si disperda nel suolo, e le altre due cioè la indotta di prima specie, con la sua contraria inducente, traversino insieme lo scranno B, ed ivi si distruggano, perchè fra loro eguali e contrarie; cosicchè nulla rimanga per agire sopra il corpo C. Altri poi fra i quali Faraday ritengono che il corpo C rimanga privo d' azione per parte dell' inducente A, perchè la induzione elettrostatica non traversa le masse conduttrici non isolate. Dunque i seguaci di Belli fondano la spiegazione del riferito fatto nel supporre che le due azioni elettriche sopra B si distruggano dopo avere traversato questo scranno, per essere fra loro uguali e contrarie; quindi essi concludono, che l' effetto della induzione a traverso le masse conduttrici non isolate è nullo.

Per altra parte tutti ammettono che in un punto interno ad una massa conduttrice, l'effetto della elettrostatica influenza è nullo (V. Poisson, Mém. de l'institut impérial de France, année 1871 pag. 7 ed altrove. V. ancora Accademia del Cimento, Saggi di naturali esperienze, pag. 232, Firenze 1667. V. pure Faraday, Archives des sciences phys. et nat., Genève 1856, t. 31 pag. 65 l. 17) e nel nuovo Cimento (t. III 1856, pag. 74 lin. 25 e seg.).

Ciò è stato giustamente preso per punto di partenza nell'applicare il calcolo alla elettrostatica, ed è un punto di partenza che non può contraddirsi, nè teoricamente, nè sperimentalmente. Se dunque l'azione inducente si annulla nell' interno di un corpo conduttore, non è possibile che questa traversi tale corpo. Discende altresì, che non potendo la influenza elettrostatica traversare un conduttore non isolato, neppure potrà traversarlo quando è isolato.

(fig. 10)

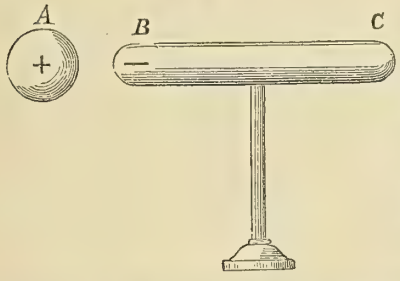


La sperienza fondamentale in appoggio di quanto abbiamo ora concluso col raziocinio, consiste nella seguente. S' introduca in una campana ABED (fig. 10) metallica e comunicante col suolo, un piano di prova isolato, e pongasi un inducente C ad influire sulla campana stessa; si vedrà che a qualunque distanza si ponga il piano di prova o disco metallico dal fondo della campana stessa, sempre si mostra esso allo stato neutro quando venga estratto dalla campana, e portato ad un elettroscopio. Si deve usare la cautela di allontanare il piano di prova dalla induzione insieme alla campana, cioè di non estrarlo da questa in presenza dell' induttore, poichè riceverebbe la influenza dopo che fu estratto. Se la campana in luogo di essere conducente sia dielettrica, la induzione in tal caso

traverserà la campana. Tutto questo mostra chiaramente, che quei fenomeni osservati dal Pisati sulla inversione di polarità nell'indotto, per l'interposizione fra questo e l'induttore di una massa metallica non isolata, sono effetti della induzione laterale dell'ambiente, come si vede nel caso da noi riferito, poichè impedita questa, non si verificano i fatti relativi alla inversione dal Pisati stesso dedotti.

Nel citato corso elementare di fisica, t. 3.° pag. 168 § 983, il Belli si occupa nello spiegare il fenomeno della elettrostatica induzione, che Beccaria nell'*Elettricismo artificiale,* pag. 206 § 484 chiama meraviglioso, e molti fisici trascurano di spiegare. Questo fenomeno consiste in ciò: mettendo in comunicazione col suolo da qualunque suo punto un indotto BC (fig. 11) esso perde sempre la indotta di seconda specie, e non mai quella di prima.

(fig. 11)



Il ragionamento del Belli, per la spiegazione del fenomeno stesso, non solo è oscuro, ma si oppone direttamente alla sperienza; poichè questa quando sia ben condotta, vale a dire adoperando *convenienti* piani di prova, ci mostra esistere su qualunque punto dell'indotto medesimo la indotta di seconda specie: perciò non può chiamarsi meraviglioso, nè col Beccaria, nè col Belli, che non compresero la causa di questo fatto. Imperocchè qualunque sia il punto dell'indotto, che si congiunge con la Terra, sempre la indotta di seconda specie si porterà in contatto con la Terra stessa. Quindi è chiaro, contro quello che asserisce Belli, che la indotta medesima abbandonerà del tutto il cilindro indotto BC, sia che si congiunga con la Terra l'estremo dell'indotto che più si allontana dall'inducente A, sia che questa congiunzione si faccia con l'estremo B più vicino allo stesso inducente. Se poi l'indotto BC si mantenga isolato, allora è chiaro che il medesimo si priverà maggiormente della indotta di seconda specie, toccandolo con un piano di prova nell'estremo C più lontano, che non toccandolo nell'estremo B più vicino all'inducente. Questo fatto, confermato dalla sperienza, si accorda perfettamente con la teorica di Melloni, però la spiegazione che ne dà il Belli (luogo citato, pag. 170 l. 19) non è soddisfacente.

La sperienza riportata da Belli nel t. III pag. 161 § 974 del citato suo corso elementare di fisica sperimentale, dimostra la esistenza della induzione curvilinea, per queste due ragioni:

1. Perchè la induzione pel principio di Poisson, non può traversare le masse conduttrici comunicanti col suolo.

2. Perchè la indotta di seconda specie, la quale per essere libera si deve distribuire sopra tutta la superficie del sistema indotto, dovrebbero queste due indotte neutralizzarsi fra loro, perciò non dovrebbero i pendolini divergere. Ma siccome questa divergenza si verifica sempre, purchè la induzione non sia in verun modo impedita sulle pagliette stesse, convien dire che questa divergenza è prodotta dalla induzione curvilinea.

Belli stesso nel t. III del corso di fisica citato, pag. 173 § 985, definisce in che consistono le atmosfere elettriche, che noi facciamo dipendere dalla elettrizzazione delle molecole dell'aria, circondanti un corpo elettrizzato. Belli ammette, che un corpo

elettrizzato induca su tutti gli altri, che lo circondano, senza far menzione che le molecole dell'aria, nella quale il corpo elettrizzato si trova immerso, debbono anche esse trovarsi per l'influenza di questo elettrizzate. Senza tale omissione, avrebbe il Belli facilmente compreso con Faraday la esistenza della induzione curvilinea, trascurando la quale, molti fenomeni elettrostatici non si spiegano bene, specialmente quelli che si riferiscono alla induzione.

Così per es. la mancanza di tensione per parte della indotta di prima specie, si comprende facilmente dal vedere, che nel caso della induzione curvilinea, l'effetto prodotto da questa sopra un piano di prova, procede sempre dalla elettricità indotta di seconda specie, che si trova sopra ogni molecola dell'aria, mentre dovrebbe ottenersi uno zero di effetto sul piano di prova stesso, quante volte la indotta di prima specie, che si trova pure su ciascuna molecola d'aria, possedesse tensione, cioè non fosse completamente vincolata.

Definisce il Belli la elettricità vindice a questo modo (ibidem, pag. 397 § 1181): « Noi chiamiamo col nome di fenomeni di elettricità vindice quei fatti nei quali due contrarie elettricità possedute da due corpi contigui e affatto occultate l'una dall'altra, vengono a manifestarsi e a dare visibili segni di sè coll'allontanare i due corpi..... intendendo, che esso (il nome) significhi un'elettricità la quale torna a ricuperare o a rivendicare i perduti segni ».

Da questo modo di vedere ognuno comprende, non essere altro la elettricità vindice, se non che la elettricità indotta di prima specie, dopo sottratta all'inducente. Perciò tutte le sperienze prodotte dal Belli a questo proposito, sono una conferma della teorica di Melloni, alla quale egli si oppone.

In fatti abbiamo un esempio di questa elettricità, detta da Belli vindice, nell'elettroforo da esso descritto (t. III del suo corso di fisica, pag. 416 § 1196). In questo istrumento si osserva, che appena situato lo scudo sulla stiacciata, se questo venga posto in comunicazione col suolo, emette una scintilla, perdendo così la indotta di seconda specie, ovvero la omonima della stiacciata, senza più dare alcun segno di elettricità, finchè rimane sovrapposto al piatto resinoso. Però appena cominciasi ad allontanarlo da questo, subito si manifesta in esso una carica di elettricità eteronoma di quella inducente, perchè la indotta di prima specie si libera tanto più, quanto più l'allontanamento è grande. Ognuno vede, che tutto ciò si accorda perfettamente con i fatti, che si osservano nella sperienza fondamentale della induzione, ed ognuno vede altresì, che a questo fenomeno debbono riportarsi tutti quelli, che hanno la *superflua* denominazione di elettricità vindice.

Belli nel t. III del suo corso di fisica, pag. 161 § 974, cita le figure 50 e 51, dalle quali si deduce la esistenza della induzione curvilinea, come ora vedremo. Quei pendolini *a*,*b* applicati alla lamina conduttrice PQ, supposta isolata unitamente ai pendolini stessi, divergono sempre fra loro, purchè la induzione dell'inducente AB possa giungere ad essi, e cessa tale divergenza, quando la induzione stessa è del tutto intercettata, come avviene allorchè per es. i pendolini medesimi siano circondati da un cilindro di vetro bagnato, e non isolato. Ciò prova che la induzione non traversa le masse conduttrici comunicanti col suolo, come risulta dal porre bene mente al principio sul quale Poisson ha fondato il calcolo per la distribuzione dell'elettrico sui

conduttori. Inoltre se la PQ non venga isolata, cresce la divergenza dei pendolini annessi a questa lamina conduttrice. Ciò prova che siffatta maggiore divergenza non è l'effetto della indotta di seconda specie, che più non si trova sulla PQ, dopo che la medesima fu comunicata col suolo. Finalmente avvicinando, nel modo praticato da Faraday, un piano di prova ai pendolini *a, b,* questo manifesterà una carica elettrica contraria della inducente. Ciò prova che l'apertura dei pendolini è dovuta alla induzione curvilinea, perchè se fosse dovuta alla indotta di prima specie, il piano di prova dovrebbe manifestare una carica elettrica di natura contraria, cioè di natura omonima della inducente. Inoltre, poichè i fisici tutti ammettono che la indotta di prima specie si trova unicamente sulla faccia della PQ, che riguarda l'inducente AB, questa medesima indotta, per giungere sui pendolini, dovrebbe traversare la stessa PQ, locchè non può succedere pel principio di Poisson già sopra invocato.

Ma potrebbe supporsi che questa indotta di prima specie, per giungere ai pendolini, si porti sulla faccia della PQ, che riguarda questi, a motivo della sua tensione, propagandosi dall'una all'altra faccia della stessa PQ. Però la sperienza si oppone a questo supposto; poichè un piano di prova difeso dalla induzione, collocato come fa d'uopo sulla indicata faccia, non riceve carica veruna. E poichè la indotta di prima non esce dalle punte, ancorchè collocate sull'indotto dalla parte dell'inducente, perciò giustamente la maggioranza dei fisici, ancorchè contrarî alla teorica del Melloni, non ammettono la supposta propagazione della indotta di prima specie. Però essi credono, per un errore madornale, poter conciliare nell'indotta di prima specie la sua tensione colla immobilità di essa indotta.

A queste sperienze del Belli eseguite su i doppî pendolini, ed ora da me analizzate, mi piace contrapporre la seguente, immaginata con molto vantaggio per dimostrare la stessa verità ostinatamente controversa.

Immaginiamo un cilindro BA isolato, e sottoposto all'influenza di un induttore *C*; annettasi a questo cilindro un elettrometrino a pagliette piuttosto corte, che possano aprirsi solo in un piano normale all'asse del cilindro stesso. Queste pagliette divergeranno fra loro, quando l'indotto sia isolato, per effetto dovuto e alla induzione curvilinea, ed alla indotta di seconda specie, che pure trovasi su quell'estremo, come fu già in più guise dimostrato, e come nuovamente si dimostrerà pure in appresso. Queste pagliette *p, q* vengano circondate da un cilindro di vetro bagnato HK (fig. 2 e 3), acciò le sue superficie siano conducenti: le pagliette già indicate diminuiranno l'angolo della loro divergenza, ma questa non cesserà del tutto. Gli oppositori della teorica del Melloni dicono, che tale divergenza è dovuta alla tensione della indotta di prima specie; noi pel contrario diciamo, che tale divergenza in questo caso è unicamente dovuta alla tensione della indotta di seconda specie, che trovasi anche su quell'estremo A, e non ad altro; poichè applicando il cilindro HK, che circonda le pagliette stesse, abbiamo impedito totalmente la induzione curvilinea su le medesime.

Ed in fatti si ponga il cilindro BA, e per conseguenza anche le pagliette *p, q* ad esso congiunte, a comunicare col suolo, per la quale comunicazione si priva l'indotto della indotta di seconda specie, od omonima della inducente, e si accresce perciò sull'estremo B dell'indotto medesimo la eteronoma della inducente, od indotta di

prima specie. Si vedrà immediatamente che le pagliette cessano affatto dal divergere, non trovandosi veruna elettricità in esse. Ora da questo fatto si conclude:

1. Che se veramente la causa della divergenza delle pagliette, prima della comunicazione delle medesime col suolo, era la indotta di prima specie, la divergenza loro avrebbe dovuto aumentare per l'accresciuta quantità della indotta medesima sull'estremo B, prodotta dalla indicata comunicazione col suolo. Ma poichè di fatto la divergenza di esse ha cessato del tutto, dopo tolta la omonima dell'inducente dal cilindro, perciò si deve concludere, che questa era la causa della divergenza delle pagliette; dunque la indotta di prima specie non ha tensione.

2. Stante che pel privare l'indotto della omonima della inducente, ne seguì la chiusura perfetta dei pendolini, perciò chiaro apparisce che la indotta di seconda specie si trova anche sull'estremo B più prossimo all'induttore.

3. Finalmente dopo dimostrato che queste due indotte contrarie coesistono sull'estremo B e non si neutralizzano, ne deriva la conseguenza evidente, che quella di prima specie, benchè rimanga sull'estremo B dell'indotto, non apre le pagliette, cioè non possiede tensione.

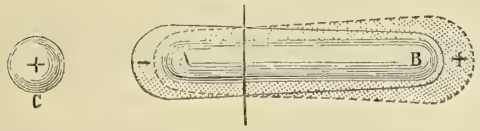
§ 4.

Il nostro egregio oppositore celebra la ben cognita sperienza di Wilke, come la più concludente a dimostrare la esistenza di tensione nella indotta di prima specie. E riputando i comuni vocaboli non bastanti a magnificare tale sperienza, egli stesso ne impiegò uno non ancora in tale quistione impegnato, esprimendosi in tal guisa: « l'altro modo di prova adoperato primieramente da Wilke, conduce ancor più direttamente ed *ineccepibilmente* alla stessa conclusione, che cioè l'elettricità indotta esercita una tensione effettiva al pari dell'attuata. Poichè nei due conduttori che egli (Wilke) presenta uniti all'induttore, e che tosto separa mercè appositi isolanti, per discostarneli poi ed esplorarli, niuno può dire ragionevolmente che le due diverse elettricità, che in essi si riconoscono, l'indotta nel più vicino, l'attuata nel lontano, non esercitino e prima (durante l'induzione ed il congiungimento) e di poi, una tensione elettrica effettiva. E che l'atto della separazione non influisca punto nel modificare la precedente opposta tensione nei due conduttori, lo possiamo dedurre da ciò, che projettando sulla loro superficie mentre stanno uniti, e risentono viva la induzione, la nota mistura di solfo e minio mediante apposito soffietto, ben si riconosce che si tingono diversamente, e per colorito e per intensità le varie parti della superficie stessa . . . . » (Rendiconto del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie II^a vol. VIII fasc. 14, adunanza del 1° luglio 1875).

Non sappiamo veramente comprendere come il prof. Cantoni, dal vedere che la *risultante* nella parte del cilindro più prossima all'induttore, è indotta di prima specie, ed è di seconda specie quella nella parte la più lontana dall'induttore stesso, abbia egli concluso, che la elettricità indotta di prima specie esercita sotto l'azione inducente una tensione effettiva al pari di quella di seconda. Questa sperienza di Wilke per nulla si oppone alla teorica di Melloni; ed in fatti il Melloni dice, che nella parte più prossima all'induttore si trova tanto la indotta di seconda specie, quanto la

indotta di prima, come si scorge dal diagramma elettrico da me immaginato (fig. 12) a rappresentare la teorica di Melloni sulla elettrostatica induzione. Tutti siamo certi che la indotta di prima specie di cui viene caricato per induzione un corpo conduttore isolato, risulta eguale e contraria alla indotta di seconda specie di cui similmente viene caricato ad un tempo lo stesso conduttore isolato. La distribuzione di queste due indotte sul conduttore isolato diversifica, poichè la indotta di 1ª specie va sempre diminuendo sul conduttore isolato andando dall'estremo suo più vicino all'inducente, verso quello più lontano, mentre la indotta di 2ª specie cresce andando sul medesimo nel senso stesso; cosicchè la massima quantità della indotta di 1ª specie si trova nell'estremo più prossimo all'inducente, mentre la massima di 2ª specie si trova nell'opposto estremo. Però certo è che la indotta di 2ª specie si trova in qualunque punto dell'indotto, non escluso l'estremo più prossimo all'inducente. Inoltre dividendo in tante parti fra loro eguali un cilindro indotto ed isolato, dovrà ognuna di esse, a cominciare dall'estremo più vicino all'inducente, contenere una carica sempre minore della indotta di 1ª specie in ognuna di queste parti, priva di tensione, con una sempre maggiore di 2ª in ognuna delle parti medesime, e sempre tendente.

(fig. 12)



Per conseguenza finchè i due conduttori cilindrici sono riuniti, ognuno di essi contiene ambedue le indotte, ma in quantità ed in istati diversi fra loro; quando si determina la separazione di essi, è ben naturale che in quello prossimo all'inducente si manifesti una *risultante* della indotta di prima specie, essendosi una parte di essa neutralizzata con quella quantità di indotta di seconda, che si trova su esso, e nel cilindro più lontano appparisca una *risultante* d'indotta di seconda specie.

Se in luogo di separare i due tronchi fra loro, come usò Wilke, si sottraggano questi ancora uniti, si avrà una prova evidente che l'unica indotta che si disperde è quella di seconda specie, ben' inteso che la sperienza non subisca perturbazione di sorta. Ed in fatti, purchè non avvenga sull'indotto comunicazione alcuna dall'inducente, si vede sempre che sottratto l'indotto, ma non separato, alla induzione, manifesta esso una risultante eteronoma della inducente. Ma poichè le due indotte contrarie fra loro, che dall'inducente vengono generate sull'indotto, sono fra loro di uguali quantità, se avessero ambedue tensione, dovrebbero disperdersi ugualmente ed aversi un risultamento zero; ovvero siccome la indotta di prima specie trovasi nell'estremo dell'indotto più vicino all'inducente, al quale estremo può anche applicarsi una punta, dovrebbe per questa, stante la forte chiamata dell'induttore, uscire la indotta indicata per andare sopra l'inducente, ed in copia tanto maggiore, perchè agevolata dalla punta, e dovrebbe così aversi una risultante omonima della inducente. Ma invece la sperienza scevra da ogni perturbazione, c'insegna che la *risultante* sul sistema indotto intero, è sempre di elettricità contraria della inducente. Perciò si conclude evidentemente, che la sola indotta che si disperde è quella di seconda specie, non mai quella di prima, come falsamente si crede dagli oppositori.

Del resto ripetiamo che questa sperienza di Wilke non ad altro vale, che a farci riconoscere la *risultante* in ciascuno dei due cilindri; e nel cilindro composto,

quando sottraggasi dalla induzione, neppure in questo caso dice Wilke in quale rapporto le componenti hanno concorso a produrre la *risultante*.

Riguardo poi al modo di esplorare l'indotto sotto l'azione dell'inducente, col miscuglio polverulento di solfo e minio, questo fu da me sommamente riprovato; poichè quelle polveri uscendo dal soffietto *elettrizzate*, agiscono esse sulle varie parti dell'indotto, ed accorrono sul medesimo appunto per questa ragione. Di più delle due polveri che passano tra l'inducente e l'estremo indotto ad esso il più vicino, è certo che una di queste due polveri sarà dall'induttore attratta, cioè quella caricata di elettricità contraria, mentre l'altra sarà respinta dal medesimo, cioè quella caricata omonimamente. Quindi è chiaro come questa polvere respinta dall'induttore, si depositi sull'estremo dell'indotto più vicino all'induttore stesso, ma non per attrazione della indotta di prima specie verso la polvere. Potrebbe però essere in un caso attratta veramente questa polvere da quell'estremo, ma solo quando la polvere stessa generi per influenza sull'estremo indicato, una certa quantità d'indotta contraria, la quale in questo caso attrarrebbe la polvere come suo inducente; poichè la indotta di prima specie non attrae altri corpi fuori della induttrice, che l'ha generata; però è da riflettere che l'attrazione non deve confondersi con la tensione. Siccome la repulsione in questo caso è più forte dell'attrazione, come ognuno facilmente deve riconoscere, così deve ammettersi che nel caso medesimo la polvere caricata di elettricità omonima all'inducente sia da questa respinta, e per conseguenza si depositi sull'estremo dell'indotto il più vicino all'inducente. Quanto all'altro estremo, nulla si deve aggiungere, fuorchè questo possiede molta elettricità libera, o di seconda specie.

Del resto con questo miscuglio elettroscopico si vede che non esiste la linea neutra sull'indotto, e che fra gli estremi del medesimo non si vede mai un solo colore, ma bensì sempre le due polveri mescolate, salvo che le cariche inducenti non siano molto forti, lo che devesi evitare.

Concludiamo che la polvere che si deposita sull'estremo indotto, il più lontano dall'induttore, vi accorre per attrazione, che questo estremo esercita su essa; mentre quella di colore diverso, che si deposita nell'opposto estremo il più vicino, vi è spinta dall'induttore. Notiamo infine, che queste polveri vengono pure influite dall'induttore, e perciò alterate le cariche che avevano acquistato per mutuo sfregamento. Da tutte queste circostanze, che accompagnano la sperienza, la meno adatta, perchè la più complicata, è quella fatta con le polveri di minio e solfo, la quale non può condurre lo sperimentatore a decidere con certezza quale delle due teoriche sulla elettrostatica induzione sia da preferire. Però fortunatamente non mancano mezzi valevoli per giungere a questa decisione.

§ 5.

Il Cantoni prende a criticare una pubblicazione fatta dal sig. Francisque-Michel, nella quale viene sostenuta la teorica elettrostatica che io dimostro vera, e questa pubblicazione si trova inserita nel giornale *Les mondes,* marzo 1875, esprimendosi Cantoni nel modo seguente: « Dapprima asserisce (Michel) che esplorando qualsiasi punto del conduttore indotto, con taluni piani d'assaggio molto piccoli e di forma piuttosto complicata ideati dal Volpicelli, se ne ottiene ovunque una carica omonima della

inducente, anche nei punti ad esso inducente più prossimi, e che mai si può aver prove d'una linea neutra, qual'è supposta dalla vecchia dottrina della induzione. A confutare (dice Cantoni) queste due asserzioni ad un punto, per me basta il ricordare l'osservazione poc'anzi descritta: poichè i pulviscoli di solfo e minio mi rappresentano appunto tanti assaggiatori estremamente piccoli, semplicissimi e non soggetti ad influenze secondarie. Ed essi ci dicono ad evidenza, che la superficie del conduttore indotto è per una parte, la più prossima all'induttore, in istato elettrico opposto a quello dell'induttore, mentre è in istato elettrico omonimo la restante superficie, la meno vicina all' induttore stesso; e che nei varî punti di tali due porzioni di superficie, la tensione va decrescendo man mano dai punti estremi (o più prossimi, o più remoti) sin verso i punti intermedî, ove la tensione riducesi nulla, appunto là dove si passa da uno ad altro dei due stati elettrici (linea neutra). E ciò in piena conformità di quanto dissero sino ad ora i comuni piani di assaggio, o le palline d' assaggio, convenientemente adoperate ».

Nella critica dei piani di prova da me adoperati, si limita il Cantoni a far dire a Michel, che questi sono di forma complicata, e dice il Cantoni che egli preferisce adoperare il miscuglio delle polveri di solfo e minio per esplorare l'indotto. Ma poichè con questi due sistemi di esplorare la natura della elettricità, quello cioè adoperato da me coi piani di prova, e quello preferito dal Cantoni colle polveri di solfo e minio, danno dei risultamenti affatto contraddittorî fra loro, avrebbe dovuto piuttosto il Cantoni esaminare seriamente, e senza spirito di parte, ciascuno di questi due mezzi, ed avrebbe dovuto convenire, che quello da lui preferito è fallace, perchè troppo complicato rispetto l'altro semplicissimo, ed esente da qualunque alterazione che si volesse attribuire nell'uso dei piani di prova da me adoperati. Ed in fatti il piccolo piano di prova condensante, dev' essere tale che riesca ben difeso dall'azione dell' induttore; cosicchè avvicinato a questo induttore, il dischetto comunicante col suolo, del medesimo piano di prova condensante, senza toccare l'indotto coll'altro isolato, questo non mostri, per effetto della induzione, veruna carica elettrica. Allora sarà certo che toccando l'indotto col dischetto isolato di questo piano di prova, non sarà alterato, per effetto della induzione, il suo stato neutrale; quindi se il piano stesso mostrerà qualche carica elettrica, deve averla ricevuta, per comunicazione dall'indotto stesso, giacchè la condizione principale cui deve soddisfare il piano di prova condensatore, quella è, che sottoposto alla induzione presentandolo all'induttore dalla parte dell'armatura comunicante col suolo, nell'altra armatura isolata si mantenga lo stato neutrale. Queste riflessioni basterebbero a convincere chiunque della veridicità del piano di prova condensante da me adoperato; non pertanto sarà bene aggiungere le seguenti prove sperimentali:

1. Il piano di prova condensatore, applicato all'indotto isolato, in quell'estremo il più vicino alla inducente, mostra la elettricità omonima della inducente stessa.

2. Quando l'indotto venga privato della omonima medesima, il piano condensatore applicato in quell'estremo, non manifesta più veruna carica elettrica, quantunque nello stesso estremo siasi accresciuta la quantità della indotta di prima specie, rispetto quella che l' indotto possedeva prima che fosse privato della omonima indotta di seconda specie.

3. Se l'indotto, dopo comunicato per un istante col suolo, nel qual caso esso contiene la sola indotta di prima specie, venga allontanato dall' induttore, e tosto si applichi ad esso indotto il piccolo piano di prova condensatore, subito questo manifesterà una elettricità contraria a quella inducente.

4. Finalmente quando l' indotto è nell' isolamento, se venga toccato più volte dal piano di prova condensatore in quell' estremo il più prossimo all' inducente, si osserva, che dopo un certo numero di contatti fra il piano di prova e questo estremo, si giunge a privare del tutto l'indotto della omonima, cioè della indotta di seconda specie. Tale fatto assicura, che veramente il piano condensante, riceve per comunicazione dall' indotto, quella elettricità, da esso mostrata. Se il Cantoni, non crede sufficienti queste sperienze a dimostrare la veridicità dei miei piani di prova condensanti, non deve venir fuori un'altra volta col dire, che i piani condensanti sono complicati, ma pel contrario deve a queste prove da me addotte, fare quelle obbiezioni, per le quali crederà egli potersi alle mie stesse prove opporre.

§ 6.

Il Cantoni soggiunge dicendo: « Quanto dice il Michel a proposito di una terza sperienza del Volpicelli, è così contrario ai dati sperimentali condotti a dovere, che mi desta meraviglia il trovare cotanto travisato un fatto fondamentale ed eloquentissimo d'elettrostatica. Egli (Michel) asserisce, che armando di punte l'estremo indotto del conduttore, in breve manifesterà esso, ritirandolo dall' induttore, una carica elettrica eteronima a quella di questo, del pari che se le punte fossero applicate all'estremo attuato; epperò egli (Michel) conclude che la elettricità indotta non dissipandosi punto, mostra di non esercitare tensione di sorta, ed essere completamente dissimulata.

« Non farò al Michel colpa di non conoscere una esperienza semplicissima, citata a questo proposito nell' unico volume su l'elettricità del nostro Belli, perchè sgraziatamente gli scritti di quell'insigne fisico non ebbero il meritato grido presso gli stranieri, che poco si occupano delle cose nostre. Eccola. Presentando ad un induttore elettrizzato positivamente una verghetta metallica isolata, puntata ad un estremo e rotondata all' altro, nella oscurità apparirà la stelletta alla punta, se l' induttore e più accostato a questa, ed apparirà il fiocchetto se viene invece accostato all' estremo arrotondato. E se la verghetta terminerà in punta ad ambedue gli estremi, si vedrà contemporaneamente la stelletta all' estremità più vicina, ed il fiocchetto alla più lontana. Ora queste apparenze dicono chiaramente, che per l' estremo vicino si dissipa l' elettricità negativa, o l'eteronima all' inducente, mentre si dissipa l' elettricità positiva per l'estremo più lontano, dove s' aduna l' elettricità attuata. Il che mette in evidenza lo stato di tensione propria così nell' indotta, come nella attuata ».

Rispondiamo col ripetere, che se il Cantoni avesse anche una volta voluto vedere le sperienze qui riferite, dopo ripetuto invito, non avrebbe provato tanta meraviglia, quanto ne ha mostrata nell'udire questo fatto riportato dal Michel, tanto evidente e certo nel risultamento, da non dubitare punto della riuscita; purchè l'ambiente in cui si sperimenta soddisfi a tutte le condizioni più volte da me per le stampe indicate. Dovremmo piuttosto noi maravigliare, per vedere che il Cantoni, così sicuro della verità dell'antica teorica e dei suoi fenomeni, non voglia poi scendere nel campo della sperienza, per osservare

quei fatti che gli si oppongono, per poterli distruggere. Egli recherebbe un vantaggio molto maggiore alla scienza in questo modo, che non meravigliando per udire tali fatti, senza nemmeno volerli esaminare. Quanto alla sperienza del Belli riferita dal Cantoni, sulle apparenze, sia della stelletta, sia del fiocco sopra una punta, noi diciamo che questi segni diversi non danno veruna ragione a concludere contro la teorica da me sostenuta, che cioè la indotta non si dissipa per le punte. In fatti poichè tanto Belli quanto Cantoni trovano l'indotto carico di elettricità omonima della inducente, dopo sottratto all' influenza, essendo esso armato di punta verso l' induttore, certo è che la carica elettrica inducente affluì sul medesimo indotto, poichè per avere nella punta dell'indotto la stelletta od il fiocco, si richiede una carica elettrica inducente assai forte, la quale circostanza è sempre causa perturbatrice del fenomeno della semplice induzione. Inoltre è ben noto che si ha sopra una punta la stelletta, non solo per la uscita da essa punta della elettricità negativa, ma eziandio per l'ingresso in essa dell'elettrico positivo. Dunque solo per vedere sopra una punta la stelletta elettrica, non si può concludere sempre che per essa esce la negativa, e particolarmente nel caso nostro, in cui la inducente positiva è molto forte. Ma è più naturale che per essa punta entri la elettricità inducente, la quale nell'ingresso produce l'apparenza della stelletta.

Parimente l' uscita dell' elettrico positivo per una punta si manifesta sotto la forma di fiocco elettrico, quando però la tensione sua sia abbastanza forte; che se questa non è molto grande, anche la uscita dell'elettrico positivo produce nella punta l'apparizione della stelletta. In fatti per vedere questo cangiamento di fiocco in stelletta, si appressi una seconda punta comunicante col suolo, e diretta normalmente all'asse del conduttore principale della macchina elettrica, la tensione diverrà minore, e si cangerà in stelletta quello che sulla prima punta, posta sul conduttore stesso, appariva sotto forma di fiocco. Con tale ambiguità di causa, che produce queste apparenze luminose, come mai possono il Cantoni ed il Belli concludere a favor loro, che sia proprio la elettricità indotta di prima specie, la quale uscendo per le punte produca questo fenomeno? Se avessero essi esplorato convenientemente la natura della elettricità, che produceva tale apparenza luminosa sopra la punta rivolta verso l' induttore, avrebbero veduto che questa è sempre omonima della inducente, e non mai contraria, salvo il caso in cui questa contraria sia divenuta libera, per forte diminuzione della carica inducente. Ognuno vede che il mezzo più conveniente per esplorare la natura della elettricità che esce o entra per le punte, sotto l' induzione, consiste nell' uso di un piano di prova, difeso però dalla induzione, ed applicandolo lateralmente alla punta. In fine ripetiamo che il modo di prova del Cantoni e del Belli, può facilmente indurre in errore, dal quale non può aversi un indizio certo della natura elettrica producente il fenomeno in proposito, del quale abbiamo un esempio palpabile nei pettini del conduttore della macchina elettrica. Se il Cantoni è sicuro che quella manifestazione di elettriche stellette sulle punte dei pettini, è l'effetto della uscita del negativo per esse, ci piacerebbe davvero, e ci ammaestrerebbe molto vedere, che il Cantoni stesso riuscisse a prendere con un piano di prova questa elettricità, che, secondo lui, mostra tanta tensione. Per me dico, che quante volte mi sia studiato di prendere il negativo dai pettini con un *qualunque* piano di prova, sempre mi è riuscito il piano

di prova stesso, carico di elettricità *positiva*. Perciò chiediamo al Cantoni una dimostrazione, la quale ci provi che l'apparizione della stelletta elettrica sopra una punta applicata sull'estremo di un indotto il più prossimo all'induttore, sia prodotta veramente dalla uscita della elettricità contraria all'inducente stesso, cioè di prima specie.

Qui cade in acconcio riferire una sperienza, dalla quale si dimostri ad un tempo, che l'inducente da noi adoperato, cioè la pila secca molto grande, è un inducente sensibilmente costante, come ancora che la indotta di prima specie, non possiede tensione. A questo doppio fine, si congiunga il cilindro indotto coll'elettrometro di Palmieri, si privi l'indotto medesimo della indotta di seconda specie, facendolo comunicare per un istante col suolo; avverrà che l'ago dell'elettrometro tornerà alla sua primitiva origine, quantunque sull'indotto si trovi accresciuta la induzione.

Ciò dimostra che l'ago medesimo, sebbene sia in comunicazione col cilindro, che possiede la indotta di prima specie, tuttavia questa ad esso non si comunica, e perciò non possiede tensione. Inoltre si lasci per quanto tempo si vuole l'indotto medesimo sottoposto alla stessa indicata induzione, e continuando la comunicazione metallica fra l'indotto e l'elettrometro, si vedrà che l'ago indice di questo non si scosterà mai dall'origine della scala circolare, alla quale era tornato, dopo tolta la indotta di seconda specie dal cilindro indotto. Ciò prova che la pila secca è un inducente sensibilmente costante, e che questo inducente riesce *indispensabile* nelle sperienze sulla elettrostatica induzione, senza il quale facilmente le sperienze medesime riescono perturbate, e conducono il più delle volte in errore chi sperimenta con un inducente che non possiede questa costanza.

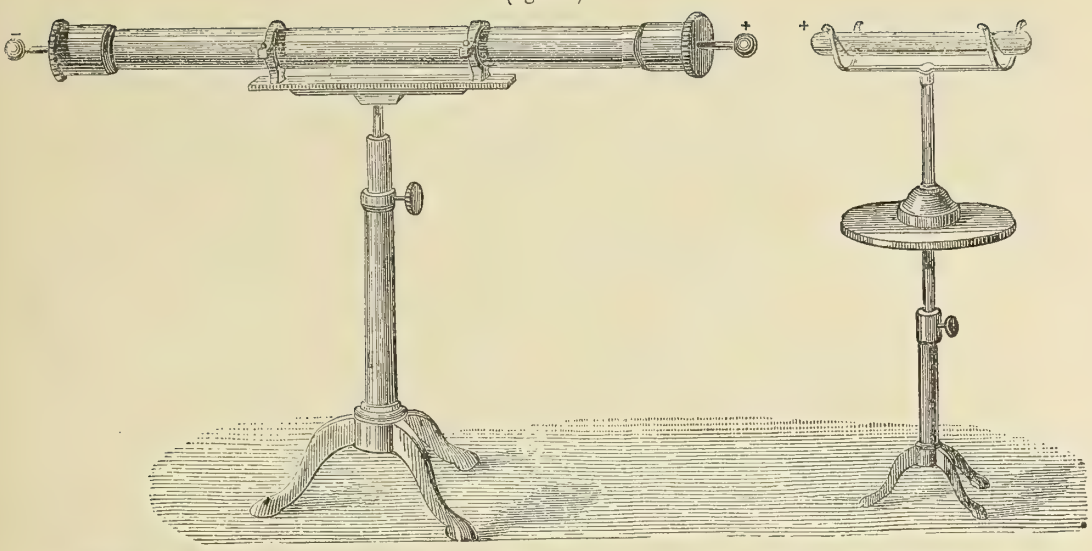
§ 7.

Il Cantoni si estende in varie sperienze molto cognite, fatte sopra un indotto AB, armato di punte nei suoi estremi A e B, credendo dimostrare che la elettricità indotta di prima specie si dissipa per le punte, e che perciò possiede tensione. A questo scopo ha istituito egli delle sperienze elettrometriche, dalle quali ne ha ricavato delle deduzioni contrarie alla teorica da me sostenuta. Non ci fermeremo molto su questo argomento, giacchè come abbiamo detto altre volte, il fatto che la indotta di prima specie non si disperde per le punte, è il più valido argomento a favore della teorica di Melloni, e che distrugge qualunque obbiezione possa muoversi contro di essa, e di più è un fatto che costantemente si verifica, quando si operi nelle condizioni le più convenienti a riconoscere la esistenza di tale fenomeno.

L'avere perciò il Cantoni ottenuto dei risultamenti opposti, è un effetto necessario di perturbazioni, da esso inavvertite nelle sue sperienze. A distruggere la erroneità delle sperienze stesse, dimostrando ad un tempo la verità che sosteniamo, ci sembra utile assai più, contrapporre una sperienza, già da noi comunicata nella seduta del 7 gennaio 1877 all'Accademia dei Lincei, che inserimmo nel vol. I° della serie 3ª degli Atti suoi, piuttosto che fermarci troppo minutamente ad analizzarne a parte ognuna.

La sperienza in proposito consiste in quanto segue: Si adoperi per inducente un polo di una energica pila secca (fig. 13), la quale mantiene sempre sensibilmente costante la sua forza inducente; ovvero si adoperi una bottiglia di Leida, che porti sopra il suo bottone un piccolo elettrometro a quadrante, il quale serve ad indicare

(fig. 13)



la tensione della bottiglia stessa, di cui l'armatura esterna dev'essere in perfetta comunicazione col suolo. L'angolo dell'elettrometro deve essere osservato da lungi con un canocchiale. Con questo secondo inducente però, la durata della sperienza deve continuare, fino a che l'elettrometro non abbia punto variato l'angolo della sua divergenza, che vale a dire finchè l'induttore rimanga sensibilmente costante. Sottopongasi alla influenza dell'uno, o dell'altro di questi due inducenti, un cilindro metallico bene isolato sopra fili sottilissimi di seta, verniciati di buon coibente. Si privi questo della omonima, cioè della indotta di seconda specie, mettendolo in comunicazione per un istante col suolo, e, congiungendolo ad un elettrometro bifilare, come quello del Palmieri, si sopprima l'induzione, e si misuri la quantità di carica indotta di prima specie, resa libera sul cilindro.

Si rinnovi quindi la induzione stessa sul medesimo indotto, reso neutrale prima, ed armato di una o più punte il cilindro indotto in quell'estremo suo più prossimo all'inducente, mantenendo nel resto tutte identiche le altre circostanze; si privi ugualmente l'indotto della omonima della inducente, cioè della indotta di seconda specie, poi soppressa la induzione, si misuri di nuovo la carica della indotta di prima specie, liberata sull'indotto medesimo, e si troverà essere questa in quantità perfettamente uguale a quella, quando cioè non era il cilindro armato di punta. Inoltre ripetendo queste sperienze per una durata o brevissima, o lunga quanto si vuole, la indotta di prima specie si mostrerà all'elettrometro in quantità sempre uguale. Crediamo utile riportare alcuni risultamenti, che ottenemmo nel modo indicato, dai quali si rileva, che la indotta di prima specie non si dissipa neppure dalle punte, ed inoltre si osserva la costanza della inducente da noi adoperata.

Durata della induzione. . .	2″	1′	2′	3′	4′	5′
Grado dell'elettrometro . .	15°	14°,5	15°	15°	15°	15°

Di più se l'indotto non venga privato della omonima della inducente, e siasi armato di una o di più punte solo verso l'induttore, facendo agire l'induzione per diverse durate, si troverà che tolta la induzione, la carica risultante sarà sempre contraria alla inducente, ed andrà sempre crescendo, fino a che la indotta di seconda specie sarà tutta dispersa, e dopo ciò la risultante diverrà costante, come si osserva nella seguente tavola.

Durata della induzione . .	2″	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
Gradi dell'elettrometro. . .	0°	8°	9°	10°	10°,5	12°	13,5	14°	14°	14°

Dobbiamo avvertire, che le punte erano poste in direzione normale all'asse del cilindro indotto, come vuole il Cantoni. Ripeta il Cantoni la sperienza ora descritta coi mezzi e colle condizioni indicate, riconoscerà egli per tal modo, in che consiste il difetto dei suoi sperimenti, e sarà anch'egli costretto a divenire un caldo fautore della teorica del Melloni.

Dice il Cantoni: « E prima conviene rammentare, che la tensione della elettricità indotta, riesce tanto maggiore di quella della attuata, quanto è maggiore la lunghezza del cilindro indotto, rispetto al suo diametro; il qual fatto veniva già dimostrato dal Coulomb, adoperando come indotto, un sistema costituito da un vario numero di palle sferiche ». Da questa conclusione di Coulomb, della quale il Cantoni trascura di citare il luogo, cui Cantoni stesso aderisce, si vede chiaro ambedue ritenere, che la indotta di prima specie possiede tensione, cosa che assolutamente noi neghiamo, e che attualmente si discute, essendo le nostre sperienze sufficientissime a mostrare, che questa tensione risulta nulla sull'indotto, finchè sul medesimo dura la induzione. Perciò secondo Melloni e tanti altri, il fatto riferito da Coulomb non si può concedere, mancando del tutto l'effetto del medesimo, cioè la tensione, cui si riferisce la sperienza di Coulomb. In fatti questo elettricista, se avesse adoperato piani di prova convenienti, e specialmente difesi dalla induzione, e non piani di prova troppo grandi, avrebbe concluso trovarsi la indotta di seconda specie per tutto sulla superficie dell'indotto, non esistere la linea neutra su questo, e trovarsi priva di tensione sul medesimo la indotta di prima specie. Deve osservarsi che per verificare la teorica di Melloni, è necessario e sufficiente dimostrare, con un induttore *costante*, che le punte comunque collocate sull'indotto, producono sempre su questo, sottratto alla induzione, una *risultante contraria* della inducente. Ciò si verifica senza punto aver bisogno di sperienze elettrometriche, ma solo di sperienze, che manifestino la natura elettrica di questa risultante. Imperocchè la quistione, se la indotta di prima specie tenda o no, è quistione di qualità e non di quantità, e nulla importa per deciderla, se questa sia in alcuni casi maggiore, in altri minore, bastando sapere che la medesima è sempre di natura contraria della inducente che non ha tensione, e che la indotta di seconda specie si trova su qualunque punto dell'indotto, senza potersi neutralizzare colla prima. Per conseguenza le tabelle A e B, riportate dal Cantoni nel § 9 della riferita sua

Nota, in primo luogo conducono a risultamenti erronei, secondariamente benchè fossero esatti, non sarebbero necessarî per decidere sulla esistenza della tensione nella indotta di prima specie.

Il Cantoni non dichiara bastantemente il vero significato degli archi numerici costituenti le indicate tabelle, nè fa conoscere se i medesimi archi si ottennero sottraendo l'indotto alla induzione. Questi archi dovrebbero rappresentare la elettrica *risultante* delle due indotte, ora libere ambedue, fra loro neutralizzate per l'allontanamento della induttrice. L'autore però non fa parola di questo allontanamento, e di tutto il processo, che dovette aver luogo nelle sue sperienze, cosa che sarebbe stata utile molto sapere.

Dice il Cantoni alla fine del § 9 «..... Perciò la risultante stessa corrisponde sempre all'azione della punta vicina, la indotta, dov'è assai più viva la tensione, e perciò quando l'induttore è positivo, le cariche provocate sono maggiori appunto perchè allora la elettricità che si dissipa nella punta vicina è la negativa». Da queste parole si vede che il Cantoni ritiene dissiparsi la indotta di prima specie, col mezzo delle punte nell'aria, durante la induzione; ritiene dunque che questa indotta possa comunicarsi, cioè possa esser condotta, lo che non si verifica, nè quando l'indotto è isolato, nè dopo che fu messo in comunicazione col suolo, ma sempre la punta disperde la indotta di seconda specie, non mai quella di prima.

L'oppositore non ammette in queste sue sperienze tabellate, che la indotta di prima specie rimanga vincolata finchè dura l'induzione, e che a renderla libera sia necessario far cessare la induzione stessa; perciò queste sue sperienze *falso supposito laborant.*

Tornando sui risultamenti numerici registrati dal Cantoni nella tabella A, e nella tabella B del § 9 della sua Nota, cui rispondiamo, osserveremo primieramente, che l'autore non dichiara in qual modo ha ottenuto dall'ago la natura dell'elettrico, la quale per lui essendo divenuta molte volte positiva, quando l'inducente era positivo, ed essendo divenuta negativa, quando l'inducente era negativo, ciò prova che l'autore non ha sperimentato con un inducente costante. Imperocchè colle opportune cautele, da me a bastanza dichiarate, da un induttore positivo si deve avere dall'indotto una risultante negativa, e da un induttore negativo si deve avere una risultante positiva; ciò non è un'asserzione gratuita, ma un fatto che si verifica sempre quando l'inducente sia costante, perciò le tabelle A e B dell'autore non hanno alcun valore, come precedentemente fu dichiarato.

Tornando sul § 7 noi contrapporremo alle conclusioni *a*), *b*), *c*), *d*) dell'autore le seguenti *a'*), *b'*), *c'*), *d'*), ottenute dalle nostre sperienze, che contraddicono giustamente alle prime, perchè fatte con le necessarie cautele, specialmente con un inducente costante. Queste sono:

a') Le cariche *risultanti*, provocate dalla induzione sul cilindro indotto, si manifestano sempre eteronome della induttrice, tanto se un ago si applichi su quell'estremo dell'indotto isolato, che più avvicinasi all'inducente *costante*, quanto se l'ago medesimo si applichi all'opposto estremo.

b') Adoperando convenientemente un piano di prova piccolissimo, questo applicato all'estremo dell'indotto isolato, il più vicino all'inducente, manifesta una carica

omonima della inducente stessa, e così pure se il medesimo si applichi all'estremo più lontano; però la prima di queste cariche si trova essere minore della seconda. Ma in ambedue questi casi la risultante nel cilindro, sottratto alla induzione, sarà sempre di natura contraria della inducente.

c') Quando la elettricità induttrice sia negativa, sempre il piano di prova piccolissimo, applicato all' estremo dell' indotto il più vicino all' inducente costante, offre una carica minore di quello che quando esso piano di prova si applichi all' opposto estremo.

d') La carica risultante, prodotta per induzione, colla punta vicino all' inducente, sull'indotto isolato, si manifesta pochissimo maggiore, quando la punta stessa è applicata nell' estremo dell' indotto più lontano dall' inducente, tanto se questo sia positivo, tanto se il medesimo sia negativo; però il piano di prova in questo caso ancora manifesta la maggioranza della indotta di seconda specie sotto l'induzione nell' estremo più lontano, di quello che nell' estremo più vicino all'inducente costante.

Ora il risultamento *a'*) prova evidentemente, che la elettricità indotta di specie prima non esercita punto alcuna tensione, il che perfettamente si accorda colla teorica di Melloni, e con quanto asserisce Francisque-Michel, che cioè le punte ovunque siano poste, disperdono solamente la indotta di seconda specie, la quale soltanto possiede tensione.

Il risultamento *b'*) conferma inoltre, che la tensione della indotta di prima specie non esiste, perchè se così non fosse, le due indotte si dovrebbero neutralizzare, per essere soprapposte una sull'altra sull'indotto isolato, lo che si accorda tanto colle idee di Melloni quanto con quelle di Michel, mentre discorda colle conseguenze dedotte da Coulomb dai suoi ben cogniti sperimenti.

Il risultamento *c'*) conferma ancor esso che le quantità di elettricità omonima della induttrice sull'indotto isolato, si trovano nei due estremi di questo, ma in maggior copia nell' estremo più lontano, ed in minore nell' estremo più vicino, però in questi due casi, sempre la *risultante* si manifesta di natura contraria della inducente.

Infine dal risultamento *d'*) si conclude, che la distribuzione della indotta di seconda specie sull'indotto isolato, occupa tutta la superficie di questo, senza dar luogo ad una linea neutra, quale la intendono i seguaci della teorica comunemente adottata.

Ora tornando sui risultamenti *c*) e *d*) del Cantoni, riportati nella sua Memoria § 7, egli conclude, che questi risultamenti « confermano e rischiarano l'altro fatto tanto studiato dal Belli, che per un corpo acuminato la elettricità negativa si dissipa più rapidamente della positiva, per modo che se la punta si trova dalla banda del cilindro, ove la elettricità è negativa, sia poi questa indotta od attuata, presenterà esso di poi una forte carica positiva ».

Primieramente osserviamo a tal proposito, che se la indotta di prima specie sia negativa, questa, per quel che insegna la sperienza, non può mai disperdersi, per conseguenza non può verificarsi il riferito fatto studiato dal Belli.

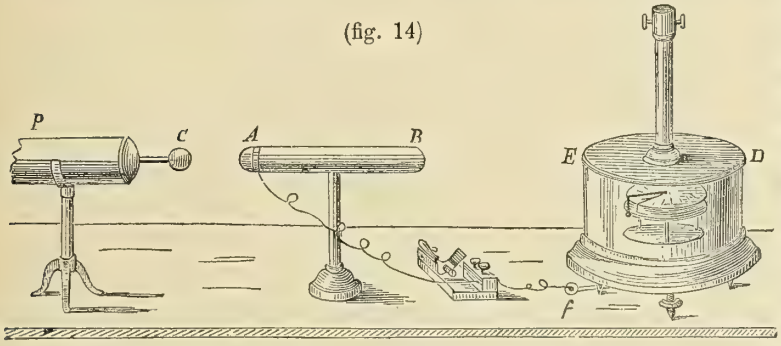
Secondariamente osserviamo, che quando l' attuata sia negativa, il fatto medesimo fu negato da molti, che sperimentarono nel miglior modo possibile per ottenerlo.

In terzo luogo riflettiamo, che se questo fatto fosse vero, come lo crede il Cantoni, potrebbe verificarsi colle due sfere inducenti, caricate ugualmente una di positivo l' altra di negativo. Poichè questa seconda sfera, per essere negativa, dovrebbe

diminuire la sua forza inducente, per la sua maggior dispersione ammessa dal Cantoni, rispetto alla sfera positiva. Per conseguenza i risultamenti che si ottengono con questi due inducenti, uno positivo e negativo l'altro non sarebbero paragonabili fra loro, ma non sono dimostrati veri.

Ho sempre verificato, che nell'estremo il più lontano dalla inducente, la tensione si mostra omonima della inducente stessa, però è molto più intensa in quest'estremo che nell'altro dell'indotto, contro quello che asserisce il Cantoni, che falsamente la nega nell'estremo più vicino all'inducente. Inoltre quest'autore seguendo il Belli, afferma che la elettricità negativa si dissipa molto più rapidamente della positiva. Le sperienze di diversi autori e le mie assicurano non potersi dimostrare quello che asseriscono Belli e Cantoni su questo argomento. Per giudicare sulla presente quistione mi sono servito di un elettrometro di Palmieri, al quale davo una carica elettrica, ora positiva ed ora negativa, sempre però perfettamente uguali tra loro, e misurando con un cronoscopio il tempo, che l'ago dell'elettrometro impiegava per tornare allo zero della scala. La (fig. 14) indica la disposizione da me data all'apparecchio, il quale si compone: 1° di un polo C della grande pila secca, che adopero come inducente costante; 2° Di una lastra metallica lasciata cadere pel proprio peso, la quale ha l'ufficio d'interrompere la induzione rapidamente. Questa lastra non apparisce nella figura; 3° Di un cilindro AB metallico, isolato su fili di seta verniciati, il quale riceve la induzione dalla pila secca. Questo cilindro per mezzo di un filo *f* metallico isolato comunica coll'indicato elettrometro.

(fig. 14)



A fine di partire sempre, nel contare i gradi, dallo zero della graduazione dell'elettrometro, ho interposto fra il cilindro indotto e l'elettrometro un interruttore il quale rimane aperto finchè dura la induzione; al momento che si vuol misurare la risultante si cala la lastra metallica, e contemporaneamente si chiude l'interruttore, ed allora si ha nell'elettrometro la carica risultante dalla neutralizzazione delle due indotte contrarie fra loro, divenute ambedue libere. Con questo metodo ottenni i risultamenti che qui appresso espongo.

Cilindro indotto armato di una sola punta verso l'induttore.

La durata dell'azione inducente della pila sul cilindro indotto è stata sempre di 1′,30″.

Induttore +°	Induttore —°	Induttore +°	Induttore —°	Induttore +°	Induttore —°
27 Maggio		28 Maggio		30 Maggio	
7° —	5° +	5° —	6° +	6° —	6°,5 +
5°,5	7°	5°	5°	6°	6°
5°	5,5	5°	5°	6°	6°
5°,5	5,5	5°	6°	5°	5°
media 5°,7 —.°	media 5°,7 +.°	media 5,—.°	media 5°,5 +.°	media 5°,7 —.°	media 5°,7 +.°

Un'altra serie di sperienze a tal uopo fu da me istituita, col dare all'elettrometro, per induzione, una carica costante di 13°, ora positiva ed ora negativa, facendo cioè agire la induzione ora del polo —° ora di quello +° della pila secca, e tenendo in comunicazione col suolo l'indotto unitamente all'elettrometro. Quando l'ago di questo era perfettamente allo zero, interrompevo nel modo sopra indicato la induzione, e misuravo il tempo che questa carica libera avea impiegato a disperdersi tutta, il che mi era avvertito dall'ago quando riducevasi di nuovo allo zero. Per tal modo ottenni i seguenti risultamenti:

Carica +ª	Carica —ª	Carica +ª	Carica —ª
30 maggio		31 maggio	
tempi impiegati		tempi impiegati	
7′,50″	5′,20″	6′,45″	7′,50″
		7′,55″	7′,55″

Carica +ª	Carica —ª	Carica +ª	Carica —ª	Carica +ª	Carica —ª
1 giugno		2 giugno		3 giugno	
tempi impiegati		tempi impiegati		tempi impiegati	
8′	8′,50″	10′,10″	9′,30″	6′,25″	7′
8′	9′	7′,50″	6′,10″	5′,45″	6′.40″

Nel 1857 il 4 di gennaio, inducendo con la cera di spagna sul piattello collettore di un condensatore, mentre l'altro suo piattello indotto e comunicante col suolo si caricava di elettricità positiva indotta di prima specie, e quindi separando l'uno dall'altro i due piattelli, le pagliette divergevano fino a 12°, ed in un primo diminuivano di 1°. Inoltre ripetendo questa induzione, ma per mezzo del vetro strofinato, ottenni dalla separazione dei due piattelli una divergenza di 12°, dovuta alla indotta negativa di 1ª specie divenuta libera, ed in un minuto primo non si disperse sensibilmente; lo che prova in questo caso, che la negativa si disperde meno della positiva. Nello stesso anno il 29 dicembre alle ore 12 merid., per mezzo della induzione sul condensatore, le pagliette del disco indotto produssero una divergenza positiva di 17°, che in un primo di tempo diminuì di 6°, mentre la produzione di una divergenza negativa di 17° diminuì in un primo di tempo di un solo grado; lo che prova ancora in questo caso, che il negativo si disperde meno del positivo. Il 30 dicembre alle ore 4 pom. diedi una carica positiva di 18° all'elettrometro semplice, la quale dopo un primo diminuì fino a 12 gradi; poi dando una carica pure di 18° ma negativa, l'elettrometro stesso dopo un minuto primo si ridusse a 17°. Nel medesimo giorno, circa la stessa ora, inducendo sopra un solo piattello fornito di elettrometro, una carica +ª di 13° dopo un primo diminuì fino a 10°, mentre dandogli una carica —ª uguale pure di 13°, questa dopo un primo scese a 12°. Infine dando una carica +ª di 13°, l'elettrometro dopo un primo scese a 9°, mentre dando una carica —ª uguale, in un primo scese l'elettrometro a 11°. I quali tre risultamenti pur essi si oppongono alle asserzioni di Belli e di Cantoni, e di tutti coloro che ammettono la dispersione del negativo, maggiore di quella del positivo. Questa sperienza fatta col condensatore, e perciò colla elettricità indotta di prima specie divenuta libera, fu da me ripetuta sei volte, sempre collo stesso risultamento contrario alle asserzioni di Belli e Cantoni. Valendomi della elettricità comunicata alle pagliette di un elettrometro semplice, le pagliette medesime si apersero di 17°, per

una carica positiva, ed in un primo questa loro divergenza diminuì di 5°. Per contrario comunicando alle pagliette una carica negativa, anch'essa di 17°, questa loro divergenza in un primo diminuì di 1°. Ciò conferma il risultamento sopraindicato. Secondo Belli (Biblioteca italiana t. 81) la elettricità negativa si disperderebbe in un tempo circa la metà minore di quello, in cui si disperde la positiva. Il Peltier ed il Biot trovarono, che le elettricità positiva e negativa si disperdono in egual tempo (Vedi Annales de chim. et phys. t. 62 agosto 1836 pag. 423). Essendo la elettricità dell'atmosfera il più delle volte positiva, potrebbe accadere che neutralizzandosi questa, colla negativa del corpo sul quale si sperimenta, l'osservatore vedendo diminuita la carica negativa dell'elettrometro, più rapidamente della positiva, riguardasse in certi casi la negativa dotata di una dispersione maggiore della positiva. Ma esso nei casi medesimi, confonderebbe la dispersione della negativa colla sua neutralizzazione con altra positiva dell'atmosfera, lo che non appartiene al caso in questione. Coulomb non trovò differenza veruna fra la dispersione delle due elettricità pel contatto dell'aria. (Vedi De la Rive, t. II pag. 84). La perdita della elettricità nei gaz puri e secchi è in generale uguale tanto per la elettricità positiva, quanto per la negativa (De la Rive t. II pag. 87).

Se il collega Cantoni vorrà consultare la Fisica di Jamin, t. I, Parigi 1858, troverà a pag. 369, 375, non essere facile a concludere, che la elettrica dispersione del negativo sia maggiore di quella del positivo. Similmente consultando la Fisica di Daguin, t. III, Parigi 1861, troverà egli pure a pag. 191 le condizioni dalle quali dipende la perdita della elettricità nell'aria. Questa perdita, secondo Daguin, diminuisce per l'agitazione dell'aria stessa, lo che si oppone a quello che dice Belli nel t. III del suo Corso di fisica pag. 542 § 1337. Questa perdita, quando l'aria è secca e pura e dicasi lo stesso degl'altri gaz, essendo le cariche elettriche comprese fra certi limiti, è costante, lo che si oppone a quello che ha trovato Coulomb. Troverà pure che la perdita è la medesima nei gaz secchi per la elettricità vitrea, e per la resinosa, quando la tensione non è troppo forte.

Potrebbe dubitarsi, che misurando il tempo in cui le cariche, uguali fra loro, di elettricità una positiva l'altra negativa, si disperdono completamente, avvenga che sul principio della sperienza si disperda più rapidamente la elettricità negativa, e sul fine della sperienza medesima, questa si disperda più lentamente dell'altra positiva. Così che alla fine del tempo totale, in cui la elettricità si è totalmente perduta, discenda che il negativo si disperde o ugualmente o meno del positivo. Dal complesso di queste osservazioni, e delle mie precedenti sperienze si vede, che il fenomeno di cui parliamo, cioè la maggiore o minore dispersione delle due elettricità, non è tanto semplice quanto l'hanno creduta il Belli ed il Cantoni, e che dipende da molte circostanze, specialmente meteorologiche, delle quali fino ad ora non si è tenuto conto come si dovrebbe.

Nel § 8 si riportano dal Cantoni i risultamenti *e*) ed *f*) nel primo dei quali si asserisce che « la carica risultante nel cilindro indotto per la differente dispersione esercitata dalle due punte (la vicina e la lontana) è sempre di natura omonima alla induttrice » e nel secondo si asserisce che « quando la elettricità induttrice della sfera è positiva, la carica risultante nel cilindro è molto maggiore di quella, che ottiensi quando l'induttrice è positiva ».

Per contrario le mie sperienze mi hanno fornito i due seguenti risultamenti, che si oppongono a questi, cioè:

e') La carica *risultante* nel cilindro indotto, comunque siano collocate le due punte sul medesimo, è sempre di natura eteronoma a quella della induttrice.

Da questo fatto molte volte da me ripetuto, e da molte mie sperienze dimostrato vero, si deduce la falsità del risultamento del Cantoni, e delle conseguenze che il medesimo ne deduce.

Il § 9 della Nota del prof. G. Cantoni continua nel fascicolo 15 dei Rendiconti citati, serie 2ª vol. III.° pag. 689. Egli dice: « se veramente, come credono il Volpicelli ed il Michel, solo la elettricità attuata esercitasse una vera tensione, non soltanto accadrebbe la dispersione di essa per gl'isolanti, ma questa dispersione sarebbe molto più attiva, di quanto può dedursi da dirette sperienze ».

Qui rispondiamo che la conducibilità dei sostegni dell'indotto, non è la causa per cui si ha sempre su questo una risultante contraria all'induttore. In fatti sostenendo l'indotto con fili *sottilissimi* di seta e verniciati, il qual mezzo è il più buon coibente, sotto ogni riguardo, che si possa adoperare, si avrà pure dopo soppressa l'azione induttrice sull'indotto, una risultante di nome contrario della carica inducente. L'avere il Cantoni trovato sull'indotto una risultante contraria all'inducente, dopo aver toccato con un semicoibente, ora l'estremo indotto, ed ora l'attuato del cilindro indotto, è perfettamente d'accordo con le idee di Melloni e mie, e benissimo pure s'accorda coll'ammettere che la indotta di seconda specie si trova su tutto il cilindro indotto, non escluso l'estremo suo più prossimo all'inducente. Imperocchè pel primo estremo vi è maggior quantità della indotta omonima, che non ve n'è nel secondo, e così si rende ragione del risultamento *g*) del Cantoni; in quanto poi al risultamento *h*) del medesimo, questo è molto da revocare in dubbio; del resto ancorchè si verificasse, esso non si opporrebbe punto alla teorica del Melloni.

Dice il Cantoni che i risultamenti ottenuti nelle tavole elettrometriche da esso formate « nulla v'è che s'opponga alla vecchia teoria della induzione: anzi essa riesce poco consona colle asserzioni della nuova dottrina, che pone nulla la tensione dell'elettricità indotta ».

Noi diciamo invece che questi risultamenti s'accordano perfettamente colla nuova dottrina, mentre sono per nulla consoni colla dottrina vecchia. Imperocchè ha trovato il Cantoni, che toccando l'indotto in qualunque dei due suoi estremi con un semicoibente, sempre si dissipa la indotta omonima, e non quella di prima specie, che egli dice essere trattenuta dall'attrazione della inducente. Osserviamo in primo luogo, che se veramente la indotta di prima specie avesse tensione, come vuole la vecchia teorica, dovrebbe essa indotta, pel contatto del semicoibente, dissiparsi pel suolo, e non quella di 2ª, che la vecchia teorica stessa nega esistere sull'estremo il più vicino all'inducente. In secondo luogo se fosse vero quel che la vecchia teorica professa, cioè che nella indotta di prima specie si verificasse questa tensione, la indotta di seconda specie nel suo passaggio nell'estremo più vicino all'inducente, per andare nel semicoibente, dovrebbe neutralizzare una corrispondente quantità della indotta di prima specie, lo che non avviene. In terzo luogo potendo il semicoibente portar via dall'estremo dell'indotto il più vicino all'inducente, *una parte* della indotta omonima,

è segno evidente, che su quell'estremo realmente esiste, senza neutralizzare la sua contraria, il qual fatto è ammesso dalla nuova, e negato dalla vecchia dottrina. Per conseguenza da queste osservazioni si deduce che i risultamenti ottenuti dal Cantoni sono ben più consoni alla teorica del Melloni, anzichè all'altra comunemente adottata.

§ 10.

Torna l'autore in questo paragrafo sulla sperienza di Vilke, ben cognita, dalla quale quest'autore dedusse conseguenze contraddette dalla stessa sperienza, quando sia ben'eseguita; perchè

1° non ammise Vilke la presenza della indotta di seconda specie su tutto il cilindro indotto;

2° non ammise la mancanza della linea neutra sull'indotto;

3° non ammise la coesistenza delle due indotte sull'estremo più vicino all'inducente;

4° non ammise che la indotta di prima specie non ha tensione;

5° non ammise che la sola indotta di seconda specie è quella che si disperde. Ora poichè tutte queste verità negate da Vilke sono ammesse dalla sperienza, discende che la dottrina del Vilke non può riguardarsi esatta, così che coloro che la seguono si conducono:

Come le pecorelle escon del chiuso
. . . . . .
E ciò che fa la prima e l'altre fanno,
Addossandosi a lei, s'ella s'arresta,
Semplici e quete, e lo 'mperchè non sanno.

Del resto sarebbe utile sapere come il Cantoni ha dedotto la manifestazione della linea neutra del cilindro indotto e la situazione di essa nel medesimo.

§ 11.

In questo paragrafo del fasc. 15° dei Rendiconti del R. Istituto lombardo, il Cantoni critica quanto riferisce il Michel in appoggio della dottrina del Volpicelli, cioè che ponendo l'indotto per qualunque dei suoi punti a comunicare col suolo, sempre la indotta di 2ª specie è quella che si disperde, non mai l'altra di prima, mostrando per tal modo essere questa priva della tensione, ossia della facoltà di camminare.

Il Cantoni vuole dar ragione di questo fatto, ricorrendo alla capacità della Terra, la quale forma un sistema indotto essa pure; però noi senza entrare in altre quistioni diciamo, che questa elettricità indotta di seconda specie, per andare nel suolo quando l'indotto venga posto in comunicazione con esso, per un suo punto il più vicino all'inducente, deve necessariamente passare sopra la sua contraria indotta di prima specie; però in questo passaggio, non neutralizzandosi con essa, mostra che l'altra non ha tensione. Il dire inoltre che una elettricità fornita di tensione, comunicando con una superficie così grande come è quella terrestre conduttrice, non si distribuisca per essa, ma rimanga immobile sull'indotto, è quanto dire che questa elettricità è inattiva, e

dall'inducente dissimulata del tutto nelle sue proprietà di tensione. Soggiunge più innanzi il Cantoni « che quando il corpo col quale si tocca l'indotto ha molta capacità, opera come la comunicazione col suolo, e l'indotto rimane caricato eteronimamente all'induttore, e quando invece la capacità del corpo toccante è scarsa, rispetto a quella dell'indotto, questo rimane caricato omonimamente all'induttore, poichè con tal contatto si dissipa (manifestando tensione effettiva) la elettricità indotta ». Ora questo è contrario ai dati della sperienza, poichè toccando l'indotto con i piani di prova da noi adoprati, foggiati a bottiglia di Leida, ed aventi una capacità piccolissima, o molto grande, pure, quando la sperienza non è perturbata, l'indotto rimane caricato *eteronimamente* all'inducente, dopo ripetuti contatti col piano stesso, prendendo questo ogni volta dall'indotto una parte della omonima della inducente. Perciò qualunque sia la grandezza della boccia di Leida, sempre dalla medesima si avrà un risultamento omonimo della inducente, contro quello che asserisce il Cantoni. Certo è che se la carica dell'induttore affluisca copiosamente sull'indotto, apparirà questo caricato *omonimamente* anche dopo averlo messo in comunicazione col suolo; ed è naturale in questo caso, toccando cioè l'indotto con un corpo di scarsa capacità, che resti esso carico omonimamente all'inducente, poichè risulta maggiore la quantità omonima che affluisce dall'induttore, che non quella che il corpo toccante appunto per la sua scarsa capacità, sottrae all'indotto stesso. Insomma noi abbiamo diritto a concludere, che quando la sperienza sia fatta senza perturbazione, allora qualunque sia il punto dell'indotto posto a comunicare col suolo, sempre l'indotto medesimo perde totalmente la indotta di seconda specie. In quanto poi alle sperienze fatte dal Cantoni, « per mezzo di una pallina metallica, portata da una lunga verghetta di ebanite, e collegata mercè un sottile filo conduttore con uno dei dischi del predetto condensatore, stando l'altro suo disco in comunicazione col suolo », tutte queste sperienze sono perturbate, perchè la induzione si fa tanto sulla indicata pallina, quanto sulla verghetta di ebanite, pel filo conduttore, e sul piattello del condensatore. Per queste cause perturbatrici, tanto la qualità, quanto la quantità dell'elettrico ricevuto dal condensatore, sono perturbate, rispetto a quelle che si ottengono per mezzo dei piani di prova piccolissimi, siano condensanti, siano semplici, da me immaginati.

§ 12.

Dice il Cantoni: « dopo le cose fin qui dette, le quali tutte mirano a mettere in evidenza la effettiva tensione della elettricità indotta ». Noi crediamo che le cose fin qui dette dal Cantoni pur troppo mirino all'indicato fine, ma crediamo altresì che non lo raggiungano. Continua egli dicendo, che « stima men necessario di trattenersi ad esaminare alcune sperienze del Volpicelli, descritte dal Michel sotto i numeri compresi tra il V° e VIII°, tanto più che le condizioni di queste sperienze non sono molto semplici, ed i risultati delle medesime possono egualmente interpretarsi colla vecchia dottrina della induzione ». Rispondiamo, che la possibilità di egualmente interpretare colle indicate due dottrine le sperienze medesime, non deve soltanto asserirsi, ma deve dimostrarsi.

Il Cantoni si oppone alla conseguenza dedotta dalla sperienza IX descritta dal Michel. Se l'oppositore avesse conosciuto, che i minuzzoli di carta sono indotti per linee curve, lo che apparisce dall'applicazione d'un piano di prova su i medesimi,

avrebbe riconosciuto facilmente, che cessando questa induzione curvilinea, mediante la scarica del piattello inducente, i pezzetti di carta riacquistano la tensione della indotta su i medesimi, e si respingono a vicenda, repulsione che non aveva luogo quando il piattello inferiore si manteneva carico della inducente.

Ci duole qui riferire il seguente brano scritto dal Cantoni, perchè rivela quale confusione facciasi anche oggidì dai moderni fisici, riguardo al significato della tensione elettrica, facendo di questa una sol cosa con l'attrazione, che una elettricità esercita verso un'altra di nome ad essa contrario. In fatti il Cantoni si esprime in tal guisa: « . . . . . D'altronde questo stato di tensione reciproca delle elettricità anzidette (inducente ed indotta di prima specie) si verifica, e può anche misurarsi mercè lo sforzo *di reciproca attrazione* che esse esercitano l'una sull'altra, e per la quale è necessario contrapporre uno sforzo pur determinabile, per impedire il loro avvicinamento ». Questa erronea opinione non è propria solo del Cantoni, ma è comune a molti fisici, anche moderni, che ritengono essere l'attrazione della elettricità una manifestazione della tensione di essa. Noi però quando avemmo occasione di trattare quest'argomento in una risposta al Socio Govi, dopo aver citato le opinioni di varî fisici su questo proposito, non mancammo di criticare sommamente questo modo di vedere, di attribuire cioè alla tensione le attrazioni elettriche, e dichiarammo altresì essere la tensione una proprietà *intrinseca* della elettricità; mentre l'attrazione risulta *estrinseca*. La tensione elettrica è costituita da uno sforzo continuo, che si esercita dalla elettricità contro le proprie molecole ed i corpi circostanti caricati di elettricità omonima. Questa proprietà tende a diffondere la materia nello spazio, ed è propria anche dei gaz; però la elettrica tensione viene caratterizzata da un'altra proprietà tutta sua, quella cioè di decomporre il fluido neutro dei corpi che la circondano, sviluppando su ciascuno i due principî elettrici contrarî, vincolandone completamente uno di essi, e respingendo l'altro ad essa omonimo. Da queste proprietà è costituita la elettrica tensione, ma non già dall'attrazione. La materia ponderabile attrae continuamente se stessa, e se una massa ponderabile attrae un altro corpo, è certo che questo corpo attrae scambievolmente quella, cioè le attrazioni della materia in genere sono reciproche. Però non diremo mai, che per avere la materia ponderabile la facoltà di attrarre se stessa, possegga per ciò tensione. Il fenomeno dell'attrazione è proprio ancora della materia non elettrizzata, bensì è l'effetto della legge universale messa in chiaro da Newton, che cioè *l'azione risulta sempre eguale e contraria alla reazione*. Ripetiamo che l'attrazione deve riguardarsi come una forza estrinseca rispetto al corpo attratto, cioè come una forza che procede dal di fuori del corpo stesso; mentre la tensione deve riguardarsi quale una forza intrinseca rispetto al corpo entro cui si esercita. Così per es. un gazometro che cade dall'alto, manifesta ad un tempo gli effetti di queste due forze, cioè col cadere manifesta l'attrazione terrestre, ovvero la forza estrinseca, e coll'aumentare di volume, per la diminuzione dei pesi comprimenti, manifesta l'effetto della tensione del gaz in esso contenuto, cioè la forza intrinseca. In quanto ai riflessi, che il Belli faceva sull'uso improprio dei vocaboli *elettricità dissimulata*, noi già dichiarammo che la parola dissimulata nella elettricità indotta di prima specie deve riguardarsi relativa e non assoluta; poichè questa elettricità attrae soltanto quei corpi che l'hanno generata, ma non

attrae gli altri corpi, mentre dissimula tutte le altre proprietà, che formano l'essenza della elettricità libera. Quindi per questo solo noi riconosciamo impropria la parola *dissimulata* applicata alla indotta di prima specie, e non per le ragioni riferite dal Belli e ricordate dal Cantoni.

§ 13.

Per ultimo il Cantoni soggiunge: « Innanzi chiudere questo esame critico dello scritto del Michel, non posso tacere una obbiezione che egli premette all' esame del comun modo di vedere sull'induzione. Considerando nel suo insieme la superficie conduttiva del corpo indotto, egli osserva che le due opposte elettricità, mutuamente attraendosi, dovrebbero neutralizzarsi sulla superficie stessa, qualora fossero entrambe dotate di tensione. Ora questa conclusione val quanto negare il fatto della induzione, supponendosi una azione spiegata dall'induttore, la quale non riesce a dare effetto sensibile sull'indotto ».

La opinione del Michel, diciamo francamente che pur'è la nostra, e soggiungiamo che coloro i quali ammettono la tensione nelle due indotte, separate essendo da una linea neutra, negano essi il fenomeno della influenza, e di più cadono in una contraddizione. In fatti lo sforzo che eserciterebbero le due indotte per neutralizzarsi fra loro, riuscirebbe infinito rispetto a quello che dall'inducente si effettua per mantenere separate le due indotte fra loro. Giacchè avuto riguardo alla distanza alla quale si esercitano queste forze, si vede, che fra le due indotte, questa distanza riesce infinitesima, essendo le forze medesime separate solo da una linea, e quindi attratte fra loro con forza *infinita*; mentre la inducente agisce ad una distanza finita, e perciò con forza finita. Da ciò si conclude che l'azione delle indotte contrarie per neutralizzarsi sarebbe infinita sull'indotto, e perciò non potrebbe lo stato di polarità esistere sul medesimo, isolato e conduttore. La contraddizione poi si manifesta nell'ammettere la tensione in due elettricità di nome contrario, ed in quantità uguali, e nel pretendere che queste restino senza neutralizzarsi sopra una superficie conducente, ad onta che siano separate solo da una *linea*.

§ 14.

Dalle risposte da me fin qui dirette al Cantoni emerge chiaro essere abbastanza confermata dalla sperienza la dottrina del Melloni sulla elettrostatica induzione, ed essere la dottrina comunemente adottata su questo fenomeno priva di fondamento, per quello che dalle sperienze viene insegnato, e che alcuni dei miei avversarî non hanno mai voluto vedere. Questa vecchia dottrina non vale a collegare in modo veruno tutti quei particolari fenomeni dell'induzione finora studiati, mentre a ciò provvede mirabilmente la dottrina sostenuta da molti fisici tedeschi e riprodotta da Melloni.

Il marciume od il bruco dell'uva
(*Albinia Wockiana* Briosi).

Nota del prof. ingeg. GIOVANNI BRIOSI
(Direttore della Stazione Chimico-Agraria sperimentale di Roma)
presentata dal Socio CREMONA

nella seduta del 17 giugno 1877.

In questi ultimi anni una nuova malattia ha invaso molti vigneti della Sicilia, e messo a dura prova non pochi possidenti ed agricoltori.

Ove questo male si manifesta, l'uva, prima ancora di essere matura, si guasta, e quando si va a raccoglierla, gli acini, o marci, o passoli avanti tempo, staccandosi dai loro peduncoli cadono sul terreno e si perdono. Il danno arrecato si calcola a centinaia di ettolitri di vino all'anno, e non senza ragione molti proprietarî dell'isola nel chiedere a S. E. il sig. Ministro d'Agricoltura, Industria e Commercio di venir loro in qualche modo in aiuto, ebbero a dichiarare che *la preoccupazione, lo scoraggiamento dei viticoltori era sì grande come se una nuova fillossera avesse invaso le loro belle campagne* (1).

Questa malattia fu dapprima avvertita sulla costa orientale dell'isola, in quella stupenda distesa di vigneti che con varia interruzione copre le ridenti colline e le pittoresche vallate di quel lembo di terra, vero bacio di paradiso, che attraversa la strada ferrata che da Catania conduce a Messina; vigneti che, per la copiosità del prodotto e per l'intelligente e perfezionata coltivazione pari, se non superiore, alle migliori che si conoscono anco fuori d'Italia, formano a giusto titolo l'orgoglio del paesano e l'ammirazione del forestiero.

Ed il male ben presto si estese; nel 1875 aveva raggiunto le vigne della costa occidentale, e si avvertiva a Partinico, a Balestrate e nelle contrade vicine, e nell'anno scorso ed in questo stesso compariva minaccioso anco nell'agro palermitano, a Bagheria, a Casteldaccia, a Misilmeri ecc. Sino dall'autunno 1875 pregato dai signori cav. L. Vico di Acireale e F. Evola di Partinico, i quali gentilmente mi spedirono grappoli ammalati, avevo incominciato alcune ricerche, che ripresi nell'anno scorso, in seguito alle vive istanze di molti proprietarî, fra i quali noto, per ringraziarlo, il signor duca di Salaparuta che mise a mia disposizione i suoi molti vigneti,

(1) Grassi Patanè A. *Insetti nocivi alle viti.* Questo interessante opuscolo, che completamente ignorava all'epoca delle mie ricerche, mi venne ultimamente offerto da quella gentile e dotta persona che è il dott. F. Minà Palumbo.

e dietro ufficiale incarico che a questa stazione veniva affidato dal Comizio Agrario di Palermo.

Ecco ora quanto mi fu dato constatare.

Allorchè sul finire dell'estate o sul principiare dell'autunno si entra in un vigneto preso da tale malattia, i tralci delle viti si mostrano perfettamente sani, ma l'uva è, per la maggior parte, in vero stato di disorganizzazione. I grappoli portano in varia proporzione acini sani ed intatti, ed acini putridi o passoli. La buccia di questi ultimi, più o meno rammollita, è livida, ed il granello non contiene che poca polpa raggrinzita che sa di muffa ed è d'un dolce scipito al palato (1).

Diverse crittogame, molti e varî insetti, che si trovano sui grappoli ed attorno ad essi, tengono, sulle prime, l'osservatore incerto sulla cagione vera del morbo, ma un più attento esame dell'uva non tarda a convincere che causa del male è un piccolo bruco, di cui trovasi sempre qualche individuo nelle parti interne del grappolo, in mezzo a fili sottilissimi, bianchicci e setacei, che allacciano più o meno le diramazioni del raspo. Se si esaminano gli acini la cosa riesce più manifesta; infatti, mentre alcuni di questi si trovano già vuotati sino alla buccia, ed all'osservazione poco si prestano, altri invece, più recentemente attaccati, presentano su uno dei lati un foro rotondo grosso quanto la testa di uno spillo ordinario, pieno di finissima polvere nera, in mezzo alla quale qualche volta fa capolino la testa di un bruchicino, che tirato fuori trovasi identico a quelli che veggonsi entro il raspo e fra i fili bianchicci sopra accennati.

È curioso che i fori non aprono una comunicazione diretta e libera colla polpa dell'acino, ma danno adito ad una specie di borsetta posta nel granello, borsetta più o meno grande e consistente, di forma irregolare, globosa, che rammenta quasi una galla, e che a tutta prima avevo preso per la buccia di giovane vinacciuolo, che sospettai più o meno sformato dal bruco per roderne la mandorla; fatto su cui torneremo di poi.

La polvere nera o specie di fuliggine che riempe il buco e la cavità sottostante, esaminata al microscopio si vede costituita da milioni e milioni di minutissime spore rotonde, che non sono altro che i conidî di un funghettino, l'*Aspergillus glaucus,* od *Eurotium aspergillus glaucus,* che conduce entro questi acini una vita delle più

(1) Alcuni saggi chimici di confronto fra gli acini sani e gli acini passoli e guasti, tolti dagli stessi grappoli, mi hanno dato i seguenti resultati:

100 acini di uva sana pesavano (media) grammi	. . . . .	245
» ammalata	. . . . . »	67
» sana avevano il volume di c.c.	. . . . .	220
» ammalata	. . . . . »	50

Acidità totale riferita ad acido tartarico nel succo dell'uva sana 2gr.,92 00/00
» » » ammalata 10gr.,50 00/00

Glucosio in uva sana . . . . . 30gr.,10 in 100 c.c. di mosto
» ammalata . . . . . 66gr.,65 » » »

Da cui rilevasi che l'uva ammalata sottoposta a saggio si era ridotta ad $^1/_4$ del peso della sana, che erasi inacidita, perdendo circa la metà di glucosio. Di conseguenza anco la porzione che non cade sul terreno, e si riesce a recare al pigiatoio ha ben poco valore, e non serve che a portare nel vino i germi di future alterazioni, per le muffe, le impurità ecc. che contiene.

rigogliose e lussureggianti; e non è senza interesse il notare come questa crittogama degli acini, sia la stessa in tutti i grappoli per quanto provenienti da diversi e lontani vigneti.

Avviene anco sovente, e lo noto perchè trasse altri in errore sulla causa del male, di trovare entro i granelli dell'uva in decomposizione gran numero di piccole larve bianchicce, senza gambe, che a prima vista si scorgono appartenere ad un dittero, e che allevate in laboratorio danno origine alla *Drosophila uvarum* del Rondani (1), cioè al ben noto moscherino dell'uva, quello stesso che nell'autunno quando si fa bollire il mosto, a milioni popola le nostre tinaie. Queste larve di dittero, nate dalle uova deposte dai moscherini attratti sull'uva in via di fermentazione acida e putrida per l'attacco precedente dell'altro bruco, si trovano specialmente abbondanti nei vigneti posti in terreni umidi, nel fondo delle vallate, ciò che favorisce il marcire dell'acino, mentre sono rare nei vigneti ben soleggiati delle parti alte delle colline, ove l'uva bucata tende piuttosto ad appassire, e di larve del dittero spesso non evvi traccia. Il fungo ed il dittero, come altri parassiti che non di rado vi si rinvengono non hanno nulla a vedere colla cagione del male; appartengono alla categoria dei ben noti avventori delle sostanze organiche in decomposizione, a spese delle quali vivono, riorganizzandole.

In ogni grappolo ammalato inoltre trovasi buon numero di acini uniti a due a due, i quali, se si separano, al punto di unione mostrano, tanto sull'uno che sull'altro, un foro rotondo, pieno della solita fuliggine; fori evidentemente opera del vermicciuolo che guasta l'uva, il quale dopo essersi nutrito su uno degli acini, annoiato, va a chiedere il suo tributo all'acino vicino, che perfora alla sua volta, e passa così dall'un granello all'altro senza nemmeno uscire alla luce del giorno. Il che addimostra come possono bastare pochi individui per guastare molti grappoli d'uva.

Questo bruchicino, che descriveremo con qualche cura più avanti, non è altro che la larva di un microlepidottero identico dapertutto, dappoichè non solo trovai gli stessi bruchi tanto nei grappoli da me osservati e raccolti a Bagheria e Casteldaccia, che in quelli inviatemi da Acireale (costa orientale), e da Partinico (costa occidentale), ma ottenni anco da essi nel mio laboratorio identiche ninfe ed uguali imagini od insetti perfetti. Questo microlepidottero non è la *Tortrix Romaniana* del O. Costa (*Tinea oleella* Fabr., *Oecophora oleella* o *Tinea oliviella* Boyer Fosch., *Tinea adspersella* Hübn. ecc.) come credè il Vico di Acireale (2), probabilmente tratto in errore dalla rassomiglianza delle due larve, od almeno dalla corrispondenza della larva di cui ci stiamo occupando colla descrizione che della larva della *Tortrix Romaniana* lasciò scritta il prof. Semmola (3), e nemmeno è la *Eudemis Botrana* (*Cochylis reliquana* Hübn., *Tortrix rosmariniana* Mill., *Tortrix vitisana Jacq.*, *Grapholita Botrana* Heinm. ecc.) come sospettò dall'esame di materiale non ben conservato il prof. Targioni Tozzetti, che di tale insetto ebbe ad occuparsi più volte, ma è un microlepidottero affatto nuovo, anzi diversifica talmente da quelli conosciuti, da costituire non

(1) Rondani C. *Nota sul moscherino dell'uva.*

(2) *La Tortrice*, nel n. 7 aprile 1876 del giornale *La Campagna.*

(3) Semmola V. *Del baco dell'uva.* Atti dell'Accad. delle Scienze di Napoli 1849, pag. 193-210.

solo una nuova specie, ma anco un nuovo genere, non potendosi convenientemente collocare nei generi finora noti ed ammessi.

Questo nuovo microlepidottero appartiene alla grande famiglia delle *Pyralidine* (finora il primo di questa famiglia che a quanto mi sappia attacca fortemente la vite), ed al gruppo delle *Phycidee*, del quale forma un nuovo genere che in segno della stima ed affezione che porto al distintissimo fisiologo ed amico prof. Giuseppe Albini, io denomino *Albinia*, dedicando la specie al dott. M. F. Wocke, che, come è noto, è uno dei più celebri microlepidotteristi viventi, e che con perfetta gentilezza, della quale gli sono molto grato, si prestò a togliermi molti dubbî nella classificazione dell'insetto; e battezzando quindi l'animale col nome di

Albinia Wockiana Briosi.

Faccio ora seguire la descrizione particolareggiata tanto della larva, che della ninfa e dell'insetto perfetto, avvertendo però che non ho punto la pretesa di offrire uno studio completo di questo animale sì dannoso ed importante, essendomi fra l'altro completamente astenuto dall'esame degli organi interni.

Larva o Bruco.

Il bruco o la larva, causa diretta di tanto guasto nell'uva, ordinariamente non sorpassa la lunghezza di $0^m,011$. Di un colore fra il ceneruleo ed il bruno con leggera tendenza al verdognolo sporco, e qualche volta con lieve sfumatura di rosso mattone, ha, come vedesi, tinta non uniforme e costante; cosa del resto comune a quasi tutte le larve, sul cui colore ha molta influenza l'età dell'individuo, la qualità del cibo, il grado della luce in cui vivono, ecc., per cui ad ogni animale quasi si possono rimarcare variazioni di colore più o meno importanti.

Sulla parte superiore del corpo della larva possonsi quasi sempre distinguere (poichè i disegni sono più stabili) tre zone o striscie longitudinali parallele all'asse del corpo, pressochè della stessa larghezza. La mediana che corrisponde al dorso è più chiara, ed ha alla sua volta nel mezzo una linea stretta bruna che segna per così dire la projezione sulla superficie superiore dell'asse del corpo stesso. Le due striscie laterali più scure trovansi sui fianchi della larva, ed in esse pure puossi distinguere, partendo dal dorso, una prima linea più scura, e poi un'altra più chiara. Il ventre ha colore uniforme, carneo o bianchiccio sporco.

Corpo. Il corpo della larva, leggermente fusiforme, assottigliandosi verso le estremità, consta di 13 anelli: 1 cefalico, 3 toracici e 9 addominali. Se si pratica una sezione trasversale, cioè normale all'asse del bruco, nella regione mediana, vedesi che il corpo superiormente è quasi cilindrico, ed inferiormente sul ventre, quasi piano. Ai 3 anelli toracici che portano le tre paia di zampe articolate, cornee o vere, succedono due anelli senza zampe, poi altri quattro anelli con false zampe, o zampe membranose o non articolate, indi altri due anelli senza zampe, e finalmente l'ultimo anello pure con piedi carnosi. La larva quindi ha 16 zampe, delle quali 10 non articolate.

Testa. La testa è cornea (1), lucente, di color pulce più o meno scuro; quasi quadrata cogli angoli posteriori arrotondati se si guarda dal di sopra, ed un poco cuneiforme o schiacciata, se si osserva dai lati. Una linea mediana impressa (fig. 30), che dividesi all'occipite e forma V, si dirige in avanti e mette capo non molto distante dai luoghi d'inserzione delle mascelle. Queste linee impresse, come vedremo più sotto, sono dovute alle suture del cranio.

Cranio. Il cranio è formato da una specie di scatola, sopra chiusa, sotto ed anteriormente aperta per accogliere gli organi boccali con tutte le loro appendici, ed aperta pure posteriormente per attaccarsi al secondo anello del corpo della larva e dar passaggio agli organi interni. Questa scatola risulta di due lamine laterali o parietali *a, a* (fig. 30), ed *n, n* (fig. 29), relativamente grosse, rigide, dure, di color pulce più o meno intenso, composte in gran parte di chitina; e d'una terza squama centrale o frontale *b* (fig. 30), che termina il cranio anteriormente, di composizione analoga a quella dei parietali, ed a forma di angolo isoscele colla base in avanti, e l'angolo opposto insinuantesi fra i parietali. Forti suture più o meno sinuose uniscono all'occipite le due squame parietali fra loro, ed alla lamina frontale, formando appunto la linea impressa mediana, e quella a V accennate di sopra. Le lamine parietali chiudono il capo anco dai lati e per buon tratto pure sulla parte inferiore della testa *n, n* (fig. 29); e sul loro lato anteriore danno passaggio a due antenne *a* (fig. 29), di forma piuttosto complicata e che la larva può a piacere distendere o ritirare. Alla squama frontale o trigonale si attacca il labbro superiore, alle parietali tutti gli altri organi della bocca.

Occhi. Nelle squame parietali si aprono 12 occhi, 6 per lato, disposti ad arco nella regione sottostante alle antenne ed un poco sul fianco del parietale. Ciascun occhio è formato esternamente da una cornea trasparente, leggermente convessa. Gli occhi sono quasi circolari o leggermente elittici, dalla qual forma il più che si scosti è il 2 (fig. 30) che è un poco schiacciato in due sensi. L'occhio 1, cioè il più posteriore (*e* fig. 30), è un poco discosto dal 2, mentre i 3 e 4 sono fra loro vicinissimi, quasi tangenti, ed i 5 e 6 pure a discreta distanza fra loro. Questa disposizione degli occhi ad arco è certamente fatta per aumentare la estensione visiva della larva e supplire in parte al poco numero ed alla loro immobilità.

Bocca. Gli organi boccali esterni constano di un labbro superiore, di un labbro inferiore, di due palpi labbiali, di due mascelle, e di un apparato a filare o serritterio che porta alla sua volta due piccoli palpi, che chiameremo del serritterio.

Labbro superiore. Il labbro superiore vedesi disegnato nella fig. 38 Tav. II. Verso la sua metà anteriore una leggera intaccatura lo rende quasi bilobo: è formato anteriormente di tessuto chitinoso, e si attacca alla testa per mezzo di tessuto molle e membranoso, entro cui si internano due specie di appendici *c,c* fortemente cornee e condiliformi. Questo labbro porta 12 peli simmetricamente disposti nei due lobi; di questi, 4 posteriori sono molto lunghi, sulla stessa linea e ad egual distanza fra loro, 2 di mezzana lunghezza escono vicino alla linea mediana, e 6 più piccoli sono distribuiti verso la periferia.

(1) Molte volte ho adoperato la parola *corneo*, invece di *chitinoso* per seguire il linguaggio consacrato dall'uso.

Lingua. Un organo della forma *b* (fig. 38) deve rappresentare la lingua, fornita di un bordo rilevato, che scorgesi assai bene, malgrado non vi si possino vedere, anco coi più forti ingrandimenti, i peli trovati dal Lyonet nello studiare la grossa larva del *Cossus Piniperda* (1).

Mascelle. Due mandibole simili di forma trovansi disposte lateralmente e simmetricamente fra le due labbra. Robuste, cornee, di un color pulce quasi nero costituiscono le parti più dure della bocca. La loro forma è resa manifesta dalle tre figure 31, 32, 33 Tav. II, che rappresentano il lato esterno, il lato interno ed il fianco (non interamente), della mascella. Ciascuna è formata di due lamine chitinose, irregolarmente concavo-convesse, riunite per buona parte del loro bordo, e nel rimanente staccate, in modo da lasciare una apertura che dà adito ad una cavità racchiusa fra le due lamine e che costituisce l'interno della mascella. Esternamente convesse, internamente concave, le mascelle si articolano, a mezzo d'apofesi che portano alla loro base (cioè all'ingiro del bordo dell'apertura), col bordo anteriore delle lamine parietali.

Il lato opposto alla base, più o meno tagliente, dà luogo alla formazione di cinque denti (fig. 31) dei quali i due ultimi, in alcuni individui sono appena indicati perchè rimasti allo stato rudimentario (fig. 32). La posizione delle mandibole nella bocca è tale che l'angolo inferiore *A,* ed il corrispondente superiore che porta i tre denti più sviluppati, si trova contro il labbro inferiore, e l'angolo *B,* colla parte portante i denti meno sviluppati, si trova contro il labbro superiore.

La mandibola si articola sul parietale specialmente a mezzo di due apofesi, l'una *A* convessa, liscia, sferica, posta al suo angolo posteriore, la quale entra in una corrispondente cavità cotiloidea praticata all'estremità dell'orlo antero-inferiore del parietale, l'altra *B* concava posta all'angolo anteriore della mascella, che ne accoglie una corrispondente convessa del parietale.

In vicinanza di queste apofesi partono lamine dure *x,y* che servono all'attacco dei muscoli che presiedono all'apertura (*y*), ed alla chiusura (*x*) delle mandibole. Questa disposizione mentre permette l'attacco ad un maggior numero di muscoli, allunga di molto il loro braccio di leva ed aumenta il momento della potenza muscolare, ciò che spiega la forza meravigliosa di cui sono dotate le larve in generale nelle mandibole. Due grossi peli diretti in avanti e di lato, escono verso il dorso sul lato esterno e convesso di ciascuna mascella. Nella larva del *Cossus Piniperda* con tanto ingegno e tanta cura studiata dal Lyonet, il primo dente sul dorso è il più robusto di tutti ed il più lungo, ciò che dà alla mandibola del *Cossus* una forma quasi triangolare, e quindi diversa della forma pressochè quadrata della mandibola della nostra larva, ove il primo dente sul dorso è più corto dei due che seguono.

Labbro inferiore. Il labbro inferiore (fig. 34) è, non vi ha dubbio, degli organi esterni della bocca, il più complesso ed interessante. Esso porta lateralmente due grossi palpi, i palpi labbiali (*b,b,* fig. 29 e 34), e nel mezzo il serritterio (*o,m,n,c,* fig. 34), cioè l'organo da cui nelle larve dei lepidotteri esce il filo della seta. Nella fig. 29 che rappresenta la testa della larva vista dal di sotto, a cui si sono

(1) Lyonet P. *Traité anatomique de la chenille qui ronge le bois de saule.* Haye 1762 pag. 61.

tolte le mascelle, lasciando in posto solo le apofesi sferiche, vedesi il labbro inferiore disteso fuori per mezzo della compressione della testa colla lastrina copri-oggetto. Esso si attacca agli orli antero-inferiori dei parietali, e consta di masse carnose più o meno protuberanti, e di parti più o meno chitinose. Due lamine *d,d*, lunghe, strette e cornee, simili e simmetricamente disposte, con una insenatura verso il mezzo che le rende due volte arcuate, dividono il labbro in tre parti, una mediana sottostante al serritterio, e due laterali che sopportano i palpi labbiali. Queste lamine devono servire all'attacco di parte dei muscoli che operano i movimenti dei diversi organi boccali. Sotto il serritterio due peli *e,e* (fig. 34) sono rivolti in avanti.

Serritterio. Il serritterio consta di una base conica *o,o* coperta in gran parte da lamina chitinosa, che porta superiormente un'appendice lunga e tubulare, obbliquamente inclinata all'infuori, dalla cui estremità esce il filo con cui la larva tesse il proprio bozzolo, e che costituisce il tubo setifero.

Palpi del serritterio. Ai lati del tubo setifero sorgono due palpi che Lyonet e Cornalia, i quali li osservarono rispettivamente sul *Cossus* e sul *Bombyx* (1), chiamano palpi della filiera, e che noi nomineremo *palpi del serritterio* ora che per le ricerche di Helm sembra che l'organo a filare dei lepidotteri non si possa più come prima paragonare ad una filiera (2). Il Lyonet atteso l'estrema cortezza di questi palpi nella larva del *Cossus* che egli studiava, non credeva che essi potessero in alcun modo aiutare il bruco nella funzione del filare, ed inclinava a ritenerli quali organi dell'odorato, mentre il Cornalia che li studiò sul *Bombyx* li ha per organi eminentemente tattili, che servono di guida all'animale intorno al luogo ove attaccare il filo nella costruzione del bozzolo. Nella larva che noi abbiamo preso in esame, questi palpi sono molto più sviluppati, e la loro struttura più complessa è tale da far ritenere che il Cornalia sia nel vero. Essi constano di 3 articoli (fig. 34), sull'ultimo dei quali si attacca una lunga e sottile appendice *n*, quasi digitiforme ed adunca che arriva sino all'estremità del tubo setifero, verso il quale è rivolta. Gli articoli di questi palpi sono cilindrici o leggermente conici, a forma di tubo, e composti di parti rigide e di parti molli, di tal che l'animale può allungare od accorciare il palpo a piacere ritirando gli uni entro gli altri. Dal lato interno del secondo articolo parte altra appendice *m*

(1) Cornalia, *Monografia del bombice del gelso,* nelle Memorie dell' I. R. Istituto lombardo ecc. vol. VII pag. 140 e seguenti.

(2) Helm F. E. *Ueber die Spinndrüsen der Lepidopteren,* nella Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie di Siebold e Kölliker, vol. 26 (1876), da pag. 433 a 469, con 2 tavole.

Secondo Helm l'organo per filare del filugello consterebbe di due parti; l'una anteriore che egli chiama tubo o canale conduttore, entro il quale non arriverebbe la sostanza serica come credeva il Lyonet, ma invece il filo della seta già bello e formato, sul quale la forma del tubo, come la forma della sua apertura ecc. non avrebbero la benchè minima influenza; la seconda, posteriore, più complicata sarebbe quella ove la sostanza serica piglia aspetto di fili (è noto che il filo della seta risulta da due fili saldati insieme in un solo), parte che egli paragona ad un pressoio e chiama perciò premifilo (*Fadenpresse*).

Come agisca questo organo non è facile comprendere esattamente senza figure, però dal brano che segue dell' Helm, che integralmente trascrivo, si può formarsene un' idea.

« Das Secret der Spinndrüsen, welches in je einem cylindrischen Canale nach Form fliesst, bei « seinem Eintritt in den Spinnapparat, durch die von der Unterseite bewegliche vorspringende Leiste

sottile e lunga, ricurva nel senso opposto alla prima, di modo che si oppongono quasi come l'indice ed il pollice di una mano.

A sostenere e forse a condurre il tubo setifero *c* evvi inferiormente una specie di rilevamento più o meno conico, che si innalza di molto sul lato posteriore e scende aprendosi sul lato anteriore, forse per facilitare i piegamenti di detto tubo in avanti ed all'infuori. Dall'estremità del tubo *c* (fig. 34) vedesi una porzione di filo *f*, già uscita.

Palpi labiali. Nei palpi labiali (fig. 35) che chiudono il labbro inferiore alle sue due estremità, si può distinguere una base composta di due articoli relativamente grossi, e due altre appendici sovrastanti di forma più complessa. I due articoli della base *h*,*h'* sono leggermente conici e formati di parti rigide e di parti molli. Le parti rigide constano di lamine tubulari, chitinose, più larghe sul lato esterno che sull'interno, ciascuna delle quali porta un lungo pelo. L'articolo superiore ha diametro minore dell'inferiore, entro il quale può essere tirato a piacere dall'animale.

Delle due appendici sovrastanti, quella sul lato interno e posteriore, è leggermente chitinosa, di forma quasi mammellare, e porta alla sua superficie quattro cornetti, dei quali due più grossi, quasi cilindrici terminano con un piccolo punteruolo *ee*, e gli altri due più sottili hanno quasi la forma di grossi peli a punta smussata, che soventi all'estremità si allarga leggermente e si biforca in due punticine divergenti, una più lunga, e l'altra più corta. Altri peli piccolissimi veggonsi ai piedi delle appendici sparsi sulla superficie mammellare. — La seconda appendice è formata da due articoli *i*,*k* (fig. 35 Tav. II) relativamente lunghi, di cui l'inferiore è più grosso ed il superiore più sottile. Ciascuno di questi articoli consta di parti membranose e di parti leggermente cornee e più propriamente chitinose ed il secondo all'estremità porta 5 o 6 peli, cortissimi ma robusti, dei quali uno, verso l'esterno, è più lungo degli altri. La conformazione di questi palpi è tale che gli articoli più sottili ed anteriori possono essere ritirati e nascosti entro i più grossi e posteriori, e così la larva può raccorciare i palpi e sino a nasconderli quasi per intero entro la loro base.

L'essere questi palpi proprio all'orlo della bocca, ed ai fianchi del serritterio, e lo avere una struttura così ricca di appendici, indica che il loro ufficio deve esser quello

« gegen die feste obere Decke des Lumens gepresst wird, und dadurch die Form des Lumens annimmt, « also eine bandförmige Gestalt bekommt, welche es fortan beibehält. Die beiden platten Fäden, die « nebeneinander hinlaufen, werden nun wegen Communication der Lumina am Innenrande wo sie auf- « einander stossen, mit einander verklebt. Daher sieht man im Leitungsrohr einen doppelbandförmigen « Faden, und findet dieselbe Form an jedem Coconfaden wieder (pag. 453) ».

Le quali ricerche dell'Helm per quanto diligenti e coscienziose non sarebbe male che venissero da altri ripetute; esse per es. potrebbero fornire un bel tema a qualche nostro abile istologo, chè tutto quanto riguarda il baco da seta ha per noi Italiani un interesse tutto affatto speciale, e l'argomento occupò già alcuni dei nostri più distinti scienziati, quali Malpighi (*), De Filippi (**), Cornalia, Verson ecc.

(*) Malpighi M. *Dissertatio Epistola de Bombyce* etc. in Opera omnia t. II, Leyden 1687.

(**) De Filippi, *Alcune osservazioni anatomiche fisiologiche sugli insetti in generale ed in particolare sul bombice del gelso.* Negli Annali dell'Accademia d'Agricoltura di Torino, 15 nov. 1850, con tre tav.

Idem, *Breve riassunto d'alcune ricerche anatomico-fisiologiche sul baco da seta.* Nelle Memorie della Società Biologica di Torino, fasc. 1, 1854.

di aiutare la larva tanto nell'operazione del mangiare, spingendo e disponendo nella bocca il cibo, quanto in quella del filare e di costruire il bozzolo.

Sui due articoli della base *h,h'* veggonsi due peli, di cui l'inferiore è molto lungo, ed un terzo pelo di mezzana grandezza, che non scorgesi nella figura, trovasi nella specie di gola od insenatura che divide le due appendici sovrastanti alla base.

Antenne. Sui lati anteriori dei parietali, esternamente ai punti d'inserzione delle mascelle, si fanno strada, attraverso la scatola cornea del cranio, le antenne, ricche esse pure di non poche appendici. Nell'antenna (fig. 36 Tav. II) si possono distinguere 4 articoli, due inferiori che servono per così dire di base, e che per lo più nell'animale vivo sono molto meno visibili di quanto emerga dalla figura, per essere l'uno generalmente raccolto entro l'altro e tutti e due quasi sempre entro la testa; e due superiori che costituiscono più propriamente l'antenna esterna e visibile. L'articolo *c*, che è il corpo principale dell'antenna, è quasi nero, tanto abbonda in esso la sostanza chitinosa. Da esso parte una specie di pelo o meglio di bacchetta *f*, lunghissima, leggermente ricurva, di grossezza quasi uniforme e non terminante a punta; e di più, oltre l'ultimo articolo dell'antenna *d,e,i*, che vedesi a sinistra e che descriveremo sotto, si innalzano due altre appendici, l'una molto sviluppata *g*, posta sulla destra, della forma di un grosso punteruolo conico ed adunco, e l'altra più piccola, di forma simile e posta alla base dell'ultimo articolo, oltre a tre altri peli più corti posti all'ingiro delle appendici suddette. L'ultimo articolo dell'antenna consta di un pseudo cilindretto *d* leggermente curvo, che porta superiormente un altro corpicino *e*, pseudo cilindrico o pseudo conico, dall'estremità del quale esce una specie di pelo *i* piuttosto lungo e poco puntuto. Un piccolo cornetto scorgesi sulla destra ed un corto pelo sulla sinistra.

Quasi tutte queste appendici sono formate di parti più o meno rigide e di parti molli che loro permettono movimenti d'articolazione più o meno estesi. Le falangi *d,e,i* sono leggermente ricurve, e volgono la loro concavità verso quella della lunga bacchetta *f* che sorge dall'articolo sottostante. Quale sia veramente l'ufficio di queste parti della testa non saprei dire con sicurezza; la loro vicinanza agli occhi, farebbe sospettare qualche relazione con essi, forse servono a proteggerli; o forse sono organi tattili semplicemente.

Descritte così le parti esterne o del *dermatoscheletro* della testa, passiamo alle rimanenti del corpo.

Zampe articolate. I tre primi anelli che vengono subito dopo il cefalico portano inferiormente ciascheduno un paio di zampe, che diconsi zampe vere od articolate, ed anche anteriori o toraciche, perchè corrispondenti alle altre tre paia di zampe dell'insetto perfetto.

Ciascuna di queste zampe (fig. 39 Tav. II) articolate, consta di 4 parti od articoli, oltre l'unghia. Il primo *g* con cui la zampa si attacca al corpo è molto largo, schiacciato e di forma quasi mammellare. Nella figura non vedesi per intero; esso consta di parti membranose e di lamine più o meno chitinose. Il secondo *f* somiglia ad un cono tronco, irregolare e non molto alto, consta di parti rigide e di parti molli e diafane, come i due articoli susseguenti, di esso più lunghi e più sottili. Le lamine chitinose di questi 3 articoli non si estendono su tutta la loro circonferenza, ma si

arrestano alla parte interna della zampa, ove danno luogo a tessuto più o meno membranoso e molle, cosa che non riescì indicata nella figura con sufficiente esattezza.

L'ultimo articolo è costituito dall'unghia, interamente chitinosa e quasi nera, della forma di robusto uncino a base piuttosto larga. Fortissimi muscoli veggonsi entrare nel piede ed alcuni percorrerlo sino all' unghia onde presiedere ai movimenti dei diversi articoli, i quali, in causa della particolare forma delle lamine chitinose, si piegano solo verso l'interno e non mai verso l'esterno. L'articolazione quivi infatti non è come negli animali superiori costituita da apofisi ossee che si appoggiano, si incastrano e scorrono in diversa maniera le une sulle altre, ma bensì da semplici membrane molli che uniscono fra loro, per i lembi estremi, le parti rigide o cornee, parti molli che in queste zampe sono molto estese sul lato interno e pochissimo sull'esterno.

Tre o quattro peli contai sul secondo articolo, quattro sul terzo, ed uno assai corto sul quarto.

Zampe membranose. La nostra larva, come già si disse, oltre le 6 zampe cornee sopra descritte porta altre 5 paia di zampe di forma affatto diversa (vedi fig. 4, Tav. I), molto più grosse e più corte, non articolate ed interamente membranose. Otto di queste zampe si trovano sugli anelli 7, 8, 9, 10 e due sull'anello anale od ultimo della larva: alle prime si dà il nome di zampe mediane ed alle ultime di zampe terminali. Le zampe membranose sono, come vedesi nella figura 4 Tav. I; 40 e 41 Tav. II, appendici a forma di cono tronco, irregolare e molto corto, a base ovale o più o meno elittica. La parte più importante di queste *false* zampe (l'animale le perde nel trasformarsi in insetto perfetto), è la pianta. La pianta come il rimanente della zampa è membranosa, e la larva può aprirla o chiuderla a piacere per mezzo di muscoli che trovansi attaccati all'interno lungo l'asse maggiore dell'elisse, i quali tirando su e sollevandone la parte mediana, formano fra il sostegno su cui si appoggia la larva, e la zampa stessa una specie di vuoto che permette alla larva di aderire con molta forza agli oggetti a cui si attacca.

Allo stesso scopo servono gli uncini bruni, cornei, infissi sul margine della pianta, i quali per meglio adattarsi alle piccole asperità dei corpi a cui si vogliono attaccare, sono di due specie (oltre un'altra di cui diremo sotto), gli uni cioè più lunghi, e gli altri più corti, disposti alternativamente in modo che ad uno lungo succede uno corto, benchè in via eccezionale qualche volta si trovino anco due lunghi, o due corti di seguito.

Nella nostra larva, come abbiam detto, questi uncini corrono tutto all'ingiro del disco del piede, nel baco da seta invece essi non si trovano che sul margine esterno di detto disco. La forma di questi uncini vedesi nelle figure 42 e 44 Tav. II. In essi possonsi distinguere due parti, l'una anterione e l'altra posteriore; quest'ultima impegnata nella membrana della pianta.

La parte anteriore può assomigliarsi ad un cornetto, ed è più scura, più liscia e più sottile della posteriore, che ha forma pure ricurva ma meno regolare, e molto più grossa. Questi uncini di fianco sono più grossi che di fronte.

Gli uncini più piccoli sono nella parte inferiore, più adunchi dei più grandi, ai quali del resto assomigliano completamente. Qualchevolta sì gli uni che gli altri sono più incurvati di quanto vedesi nelle figure.

Uncini a tenaglia. Oltre a queste due serie di uncini, già note e da altri descritte nei falsi piedi delle larve dei lepidotteri, io nelle larve dell'*Albinia Wockiana* ne ho trovato una terza, risultante di uncini di forma tutto affatto diversa da quella dei sopra descritti.

Questi uncinetti sono rappresentati nella fig. 43 Tav. II e li chiamo *uncini a forbice* o meglio *a tenaglia*, perchè ad uno di questi due strumenti più o meno possono assomigliarsi.

Questi uncini a tenaglia sono di una estrema piccolezza, la figura li mostra veduti e disegnati ad un ingrandimento di più che 1200 diametri, di tal che non è facile lo scorgerli. Essi si trovano alla base degli uncini maggiori e quasi regolarmente ad essi alternati, cioè ciascun uncino a tenaglia è fra due uncini semplici, e viceversa.

Queste piccole forbicine o tenagliette sono rivolte in fuori, cioè colla loro apertura verso la periferia della pianta del piede, disposte per così dire in piani radiali, e normali alla superficie della pianta stessa; per cui nella figura sono visti di fianco. Essi constano nella loro parte anteriore di due cornetti chitinosi leggermente ricurvi ed opposti, l'uno più grosso *h*, l'altro più sottile *n* e più incurvato. Posteriormente, oltre una specie di bordo chitinoso, vedesi una lamina *m* (forse son due) diafana e rigida che deve servire all'attacco dei muscoli che determinano i movimenti dell'uncino stesso. Nel cornetto *h* sembra che alla parte posteriore impegnata nella membrana del piede siavi una specie di fenestrella o spaccatura, che dà passaggio alla parte posteriore del cornetto *n*, e rende così possibile alle parti anteriori di avvicinarsi ed allontanarsi in modo analogo all'aprirsi e chiudersi d'una tenaglia.

Di tal fatta di uncini non fanno menzione nè il Lyonet, nè il Cornalia, e di conseguenza devesi ritenere che, nè nelle larve del *Cossus* e degli altri insetti studiati dal primo, nè in quella del *Bombyx*, che per diverse cagioni non mi fu dato potere esaminare, osservata dal secondo, essi non esistono, dappoichè, estraendo anco dal fatto che in queste grosse larve sarebbe stato facile lo scorgerli, la valentía e la diligenza impiegate in tali ricerche da questi due distintissimi scienziati sono tali da non dar luogo al dubbio.

La forma di tali uncini non potrebbe essere più adatta per servire alla larva onde attaccarsi prestamente ai corpi su cui si vuole arrampicare; e l'abbondanza di questi mezzi di attacco spiega come queste larve possono tanto fortemente tenersi agli oggetti, e sospendersi coll'aiuto delle sole zampe membranose.

Le false zampe dell'anello anale sono più piccole delle mediane, e non hanno che metà corona di uncini; cioè il lato posteriore del piede ne è privo. Gli uncini di queste zampe posteriori od anali sono un poco più grandi di quelli delle zampe mediane, e quivi pure sonvi le tenagliette. Il numero degli uncini di ciascun piede varia, entro certi limiti, non solo da individuo ad individuo, ma anco da piede a piede sullo stesso individuo; il loro numero cresce coll'età della larva.

Nelle zampe mediane questi uncini sono più piccoli verso le due estremità dell'asse maggiore dell'ellisse della pianta, e ciò evidentemente per facilitare il chiudersi della zampa stessa.

In una zampa mediana contai 32 uncini semplici, fra grandi e piccoli, ed altrettanti uncinetti a tenaglia; in un'altra, ne contai solo 30.

Sull'anello anale d'altro individuo, sopra una zampa contai 24 uncini semplici, sull'altra solo 15, in un terzo individuo l'una zampa anale aveva 17 uncinetti semplici, l'altra 20.

Il Lyonet invece nel *Cossus Piniperda*, contando gli uncini delle zampe mediane di 4 larve, trovò che il piede che ne aveva meno arrivava al numero di 70, e quello che ne aveva più, possedeva 96 uncini (1).

Diversi peli, dei quali uno molto lungo, veggonsi attorno a ciascuna zampa sul ventre della larva.

Nell'ultimo anello, subito dopo l'ultimo paio di zampe, si apre l'apertura anale tenuta costantemente nascosta da una valvola che si solleva solo nel momento di dar passaggio allo sterco.

Stigme. La nostra larva ha 18 stigme disposte a due a due su ciascun anello, eccettuatine il primo o cefalico, il 3°, il 4° ed il 13° od ultimo, che ne sono privi. Queste piccole aperture, per cui l'aria entra nelle trachee e viene portata alle diverse parti del corpo, si trovano sui fianchi, propriamente subito sotto e sul davanti dei peli, che nella fig. 4 sono indicati dalla seconda linea di punti neri. Queste stigme, non disegnate nella figura 4, esternamente si presentano come piccolissimi anelli circolari o leggermente elittici, di sostanza chitinosa, susseguiti da altri anelli più piccoli in modo da formare una cavità leggermente imbutiforme. Le stigme sono fra loro pressochè uguali, se si eccettuano le due prime (cioè del 2° anello), e le due ultime (del 12° anello) che sono più grandi delle altre.

Peli. La larva dell'*Albinia* è cosparsa di discreto numero di peli, più o meno ritti, dei quali i più lunghi raggiungono circa i $^2/_3$ del diametro del corpo. In ciascun fianco se ne possono vedere, con una buona lente, 4 serie, come scorgesi nella fig. 4, ove quelli della terza linea, partendo dal dorso sono doppî, cioè sono due fra loro vicinissimi.

Altri peli poi si scorgono sul ventre attorno le zampe ecc. Ciascun pelo esce da una specie di cilindretto bruno, e la pelle attorno ad esso è per lo più leggermente rilevata.

I peli sono percorsi internamente da un canale che puossi quasi sempre seguire coll'occhio al microscopio sino verso la loro estremità, la quale però è chiusa, e l'ultimo tratto del pelo è massiccio. L'ufficio loro sembra essere quello di organi del tatto.

L'anello che viene subito dopo il cervicale è lievemente chitinoso, liscio ed a forma quasi di cono tronco colla base maggiore verso il capo, ma tutti gli altri anelli invece sono membranosi, e presentano nel loro mezzo una specie di linea impressa un poco sinuosa, e normale al corpo, la quale divide ciascun anello quasi in due zone, e che deve essere dovuta all'attacco di muscoli interni.

NINFA O CRISALIDE.

La nostra larva forma un bozzoletto bianchiccio, abbastanza compatto, entro cui si incrisalida.

La crisalide è rappresentata dalla fig. 5 Tav. I, vista dal dissopra ed un poco di fianco.

(1) Lyonet, o. c. pag. 88.

Le diverse parti della futura immagine o del futuro insetto perfetto veggonsi in essa rappresentate allo stato per così dire embrionale.

Essa è di color giallognolo sporco e più o meno scuro, con occhi bruni, e misura in media 0,^{m} 007 per 0,^{m} 002. I suoi bozzoletti, si trovano in autunno, epoca in cui ho potuto cercarli, generalmente nelle parti più interne dei grappoli dell'uva.

FARFALLA OD INSETTO PERFETTO.

La farfalletta (fig. 2 e 3 Tav. I ingrandita), non più grande di una mosca ordinaria, ma di questa più snella, è di un colore cenericcio più o meno scuro, con splendore setaceo od acciaino, e due striscie più chiare di cui parleremo sotto. Di quelle rappresentate nelle figure 2 Tav. I, la superiore è alquanto più grande del vero, il corpo non misurando che 0,^{m} 006 di lunghezza, e fra l'una e l'altra punta delle ali aperte non essendovi che 0,^{m} 015. Ha testa piuttosto piccola, occhi composti, grossi e quasi neri, e fronte presso a poco larga quanto il raggio dell'occhio.

Antenne. Due antenne si partono dall'occipite, formate da una serie di articoli chitinosi, corti e pseudo cilindrici, che si articolano gli uni sugli altri, e non gli uni dentro gli altri come dice Raman (1), e permettono all'antenna di piegarsi in tutti i sensi per meglio soddisfare al loro ufficio, che sembra quello d'organi dell'odorato più che d'organi tattili nel vero senso della parola (2).

Per mezzo di un articolo assai corto (1, figure 7, 8 Tav. I) a forma di cono tronco colla base maggiore rivolta in basso, la quale entra in una cavità circolare praticata nel cranio, l'antenna si attacca alla testa.

La struttura delle antenne però non è perfettamente uguale nel maschio e nella femmina, e la differenza si manifesta nella forma del 2° e del 4° articolo. Il 2° articolo tanto nel maschio che nella femmina è il più lungo, ed il più grosso dell'antenna, però nel primo è più sviluppato che nella seconda, presso la quale è quasi cilindrico, mentre nel maschio è rigonfiato superiormente a forma di clava. Il 4° articolo mentre nella femmina (4, fig. 8 Tav. I) è della forma ordinaria di tutti gli altri articoli corti dell'antenna, nel maschio (4, fig. 7 Tav. I) invece porta un'appendice ad *S*, che si innalza quasi come un manico sulla parte inferiore dell'antenna stessa. In riposo l'animale tiene le antenne rivolte all'indietro, poggianti sopra il dorso, e spesso l'una sull'altra un poco incrociate, in grazia alla direzione dei due primi articoli di una antenna leggermente convergente colla direzione dei due primi articoli dell'altra. Le antenne tanto nel maschio che nella femmina si piegano, allorchè si coricano sul dorso, subito dopo il 2° articolo; e sul loro lato esterno nel maschio scorgesi una leggera depressione od insenatura formata dalla compressione dell'appendice ad *S* del 4° articolo sopra accennata. Quando l'animale cammina, o viene in qualche modo allarmato, comincia subito col sollevare le antenne, che muove in tutte le direzioni, e specialmente in avanti, come se tastasse l'aria.

(1) Raman. G. *Die Schmetterlinge Deutschland und der angrenzenden Länder in nach der Natur gezeichneten Abbildungen, nebst erläuternden Text.* pag. 460.

(2) Erichons, *De Fabrica et usu antennarum.* Berol. 1847; Burmeister, *Zeitung für Zoologie* I n. 7: vedi Gegenbauer C. *Manuel d'Anatomie comparée.* Paris 1874 pag. 369.

La lunghezza delle antenne sorpassa di poco quella della metà delle ali superiori, ed il loro colore, come quello di queste ali, è cenericcio scuro.

Palpi. La nostra farfalla ha due palpi (fig. 6 Tav. I) di mediana grandezza, lunghi circa quanto i $^3/_4$ della circonferenza della testa, ed uguali tanto nel maschio che nella femmina. Sono diretti verso l'alto ed alla base ricurvi in modo da seguire, per circa metà della circonferenza del capo, la forma rotondeggiante del viso e del fronte. Ciascun palpo risulta di 3 articoli, dei quali il superiore rivolto verso l'alto è nella stessa direzione della seconda metà del mediano ed arriva all'altezza del piano dell'occipite. L'articolo superiore è più corto e più sottile degli altri due, come questi, coperto di squame allungate si potrebbe assomigliare quasi ad una codicina di volpe.

L'articolo mediano è, da una volta e mezzo a due volte, più lungo del superiore; ed il basilare od inferiore più grosso degli altri, è circa $^3/_4$ della lunghezza del mediano. Questi palpi che trovansi ai fianchi della lingua o tromba molto facilmente hanno l'ufficio di proteggerla più che quello di servire di organi del tatto, a cui, per la loro copertura di squame, non sembrano adatti.

Palpi laterali. Due piccoli palpi laterali della forma che vedesi nella fig. 9 Tav. I, trovansi nascosti fra i palpi principali. Constano di 3 articoli, dei quali il superiore *d* curvo, si stacca quasi ad angolo retto dal secondo *b* che è il più lungo di tutti, e porta un'intaccatura verso i $^2/_3$ circa della sua lunghezza; mentre l'articolo basilare è molto corto, e porta un'appendice *e* semiglobosa. I due articoli anteriori sono coperti da lunghe squame, le quali anteriormente danno a questi palpi la forma quasi di pennello. I palpi laterali della femmina non sono filiformi, come generalmente nelle Phycidee, ma bensì simili a quelli del maschio.

Lingua o *tromba.* Il nostro microlepidottero possiede pure una lingua o tromba, la quale in riposo porta generalmente rotolata sotto il viso, e che rappresenta l'organo di presa dell'alimento. Essa è molto lunga, chitinosa, alla base coperta di squamette; forma una specie di tubo che dividesi con molta facilità in due parti perfettamente uguali allorchè si cerca separarla cogli aghi per lo studio microscopico. In essa vedonsi tante lineette trasversali, normali al suo asse, le quali sembrano indicare i luoghi di attacco di altrettanti muscoletti, col mezzo dei quali essa possa stendersi o raggomitolarsi. Una linea longitudinale scorre per tutta la sua lunghezza, verso il lato interno, linea che accenna ad una struttura più complicata di quella di un semplice tubo. Il Burmeister (1) infatti dice che la tromba dei lepidotteri è percorsa da tre canali distinti, uno più largo, mediano, e due più stretti, laterali: della conformazione interna della tromba dell'*Albinia Wockiana* non mi sono occupato, però la linea longitudinale suddetta, sembra accennare a qualcosa di simile.

La forma del labbro superiore rammenta in qualche modo quella del labbro superiore della larva.

Zampe. La figura 14 Tav. I; rappresenta la forma delle zampe anteriori, e la figura 13 quella delle zampe posteriori.. Le zampe posteriori hanno due paia di speroni, l'uno all'estremità della tibia, l'altro verso la sua metà; le zampe mediane (non disegnate) invece ne posseggono un sol paio, mancando loro gli speroni che veggonsi nella

(1) Raman, opera citata pag. 461.

lunghezza della tibia delle zampe posteriori. La tibia delle zampe anteriori porta pure una specie di sperone (non un paio), il quale però è così alla gamba aderente e tanto coperto di squame, che si presenta quasi come un semplice allargamento della tibia stessa. In ciascun paio, l'uno dei speroni è quasi doppio dell'altro.

Le zampe anteriori constano di cinque parti, l'anca o coxa C (fig. 14), il trocantero *t*, la coscia o femore *f*, la gamba o tibia *t'*, ed il piede o tarso *p*. Le zampe mediane e posteriori contano un articolo di meno, cioè non hanno coxa distinta, ed il trocantero pure è cortissimo e non scorgesi sempre chiaramente, poichè bene spesso resta attaccato al torace nel separare la zampa dal corpo, o forma quasi un sol tutto col femore. Il tarso è formato da 5 falangi od articoli, che vanno diminuendo in lunghezza ed in grossezza man mano che si avvicinano all'unghia, che è rappresentata da due uncini.

Il misuramento delle sei zampe di una femmina diede le seguenti dimensioni:

Zampe anteriori (media delle due)	Coxa (lunghezza)	$= 0^{mm},50$	larghezza massima	$0^{mm},18$
	Trocantero	$= 0^{mm},11$		
	Femore	$= 0^{mm},58$		
	Tibia	$= 0^{mm},28$		
	Tarso	$= 0^{mm},62$		
	Lunghezza della zampa	$2^{mm},090$	1ª falange	$= 0^{mm},26$
			2ª »	$= 0^{mm},10$
			3ª »	$= 0^{mm},08$
			4ª »	$= 0^{mm},08$
			5ª »	$= 0^{mm},08$
Zampe mediane (media delle due)	Trocantero	$= 0^{mm},14$		
	Femore	$= 0^{mm},90$		
	Tibia	$= 0^{mm},90$		
	Tarso	$= 1^{mm},00$		
	Lunghezza della zampa	$2^{mm},94$	1ª falange	$= 0^{mm},50$
			2ª »	$= 0^{mm},20$
			3ª »	$= 0^{mm},14$
			4ª »	$= 0^{mm},09$
			5ª »	$= 0^{mm},07$
Zampe posteriori	Trocantero	$= 0^{mm},14$		
	Femore	$= 0^{mm},64$		
	Tibia	$= 0^{mm},78$		
	Tarso	$= 0^{mm},86$		
	Lunghezza della zampa	$2^{mm},42$	1ª falange	$= 0^{mm},40$
			2ª »	$= 0^{mm},20$
			3ª »	$= 0^{mm},10$
			4ª »	$= 0^{mm},08$
			5ª »	$= 0^{mm},08$

Le quali dimensioni, benchè non siano costanti, e variino entro certi limiti a seconda degli individui, pure servono a far vedere quali relazioni passino fra le lunghezze delle diverse zampe, e delle loro parti.

Le zampe anteriori sono le più corte, e le mediane le più lunghe. Nelle zampe anteriori inoltre la coxa ed il trocantero presi insieme sono presso a poco lunghi quanto il femore, mentre la tibia è quasi la metà del femore, ed il tarso è doppio della tibia.

Nelle zampe mediane invece tanto il femore, che la tibia ed il tarso sono più lunghi che nell'anteriore; delle tre parti della zampa, la più lunga è il tarso, mentre le altre due sono uguali fra loro. Nelle zampe posteriori, femore, tibia e tarso sono più corti che nelle mediane, e la lunghezza loro cresce andando dal primo all'ultimo.

Ali superiori. Le ali superiori (fig. 11 Tav. I) sono quasi tre volte più lunghe che larghe, e sporgono fuori per circa $^1/_3$ della loro lunghezza sull'estremità anale. Inferiormente si allargano, ed al lato anteriore terminano quasi ad angolo retto. Il lembo esterno è leggermente curvo, specialmente verso l'estremità inferiore, e la frangia si allunga procedendo dall'angolo esterno verso l'interno. Il fondo dell'ala è ceneruleo più o meno scuro, con splendore setaceo, o meglio acciaino.

Nella farfalla viva facilmente scorgesi su ciascun' ala, due linee o striscie trasversali un poco più chiare del fondo dell'ala, l'una verso il basso a $^3/_4$ circa della lunghezza, l'altra all'alto, verso la spalla, ad $^1/_3$ circa della lunghezza dell'ala. La prima, leggermente curva, parte verso l'angolo esterno, e salendo va a finire al lembo interno, ove incontrandosi colla striscia omologa dell'altra ala forma sul dorso della farfalla un angolo colla punta rivolta in alto. Questa striscia corre pressochè parallela all' orlo inferiore dell'ala, e verso la metà mostra una leggera intaccatura per cui dividesi, per così dire, in due archetti che rivolgono alla frangia la loro concavità. La seconda striscia più curva della prima parte sul lembo esterno a breve distanza dalla spalla, e scendendo va ad incontrare a circa $^1/_3$ del lembo interno l'omologa dell' altra ala, formando una specie di arco semicircolare rivolto verso l'alto. I contorni che limitano queste due striscie, sul loro lato convesso, cioè verso quello che guarda il centro dell'ala, sono più scuri del fondo dell'ala, e danno luogo a due lineette brunicce, irregolari e mal definite. Verso il mezzo la linea bruniccia inferiore (ove appunto trovasi l' insenatura della striscia chiara) s'ingrossa, e forma una piccola macchietta di forma più o meno irregolare. Altre due macchiette nerastre, più o meno irregolari veggonsi all'alto, l'una sotto, l'altra sopra la striscia chiara. La prima quasi triangolare, è formata, verso il lembo esterno, da allargamento della lineetta scura; la seconda, verso il centro, è generalmente allungata verso la spalla. Nella fig. 3 queste particolarità non si veggono abbastanza distintamente, per essersi un poco alterato il disegno originale nel litografarlo. Le due linee o striscie chiare sono costanti, ma così poco marcate che qualchevolta quasi non si scorgono, particolarmente se l' animale che si osserva non è nato alla piena luce della campagna, ma in laboratorio, oppure se la farfalla che si studia è già morta da tempo, cancellandosi esse con molta facilità.

In buona parte delle farfallette allevate nel mio gabinetto infatti, le due striscie chiare caratteristiche sopra accennate, quasi non si avvertivano; e le lineette brunicce erano ancor meno definite e nitide, per cui non rimanevano d'esse che le macchiette scure mal definite; e qualche volta nessun disegno, ma solo un color cenericcio più o meno uniforme. L'orlo inferiore dell'ala è segnato da una linea scura finissima. La frangia, pure cenerulea o piombina, è molto risplendente e di color più chiaro dell'ala. Due linee chiare molto fine, delle quali la prima subito sotto il lembo, ne limitano una più larga e più scura: queste lineette della frangia però mal si scorgono ad occhio nudo.

L'ala superiore come vedesi nella fig. 11 Tav. I, conta undici coste, o vene, o nervature, e la costola n. 1 non è biforcata. La cellula mediana, indivisa come in tutte le piralidine, è molto allungata, e si allarga verso il basso. Le costole 2 e 3 si staccano avanti l'angolo posteriore della cellula mediana, e le 4 e 5 all'angolo stesso, da stilo comune. Dall' angolo anteriore ove formasi generalmente un piccolo disco,

partono, tanto la nervatura 6 isolata, che le 7 ed 8 riunite sopra unico stilo. Le costole 9 e 10 invece si staccano avanti l'angolo anteriore. Le diramazioni 7, 8, 9, 10 ed 11 metton capo all'orlo anteriore e le altre all'orlo inferiore. Le costole dalla 3 alla 8 inoltre raggiungono il lembo inferiore ad egual distanza.

La nervatura delle ali superiori appartiene quindi al tipo di quelle delle *Phycidee.* uno dei gruppi della grande famiglia delle *Pyralidine.* Le ali superiori delle Phycidee infatti possono avere 11, 10 o 9 vene o meglio diramazioni di vene, delle quali la n. 1 non biforcata superiormente, e le 7 ed 8, o sopra stilo comune o coincidenti (1).

Ali inferiori. Queste ali sono di color ceneruleo più chiaro di quello delle superiori, uniforme, senza disegni, e con splendore setaceo: la frangia parimenti di splendore setaceo è alquanto più sbiadita e senza alcuna linea o disegno. La loro forma vedesi nella figura 12 Tav. I: più larghe e più puntute delle superiori e quasi della stessa lunghezza, hanno l'angolo esterno molto acuto, ed all'interno sono rotondeggianti. La frangia è molto più lunga di quella delle ali sovrastanti, e cresce seguendo il lembo dall'esterno all'interno. Queste ali contano 10 costole, delle quali 3 libere all'angolo interno, 1^a, 1^b, 1^c (fig. 12). La cellula mediana piuttosto piccola non è interamente chiusa, poichè la diramazione trasversale, giunta ad un certo punto, si interrompe e si perde. L'angolo interno di detta cellula è, per lo più, ben marcato, ma non così l'esterno, malgrado sia esso pure indicato nell'incontro della vena 6 colla 7, accennando ad una costola trasversale spezzata.

Ora, come è noto, una delle caratteristiche principali delle nervature delle ali inferiori delle Phycidee sta appunto nell'avere la cellula mediana chiusa, e per questo lato la struttura dell'ala inferiore dell'*Albinia* forma un'eccezione piuttosto originale. In diverse specie però del genere *Nephopteryx* Zll. la parte superiore della costola trasversale, secondo quanto mi scrive l'illustre microlepidotterista dr. Wocke, è così fina che con molta fatica si riesce a vederla. La vena 2 sembra partirsi dalla spalla e scorrere per certo tratto unita alla costola mediana interna, staccandosi però molto prima dell'angolo interno della cellula mediana; e la 3 si diparte poco prima di detto angolo, mentre le 4 e 5 solo si toccano per brevissimo tratto, ove formasi l'angolo interno della cellula mediana.

In qualche esemplare anzi, la 5, di cui l'estremità superiore forma il ramo trasversale, scorre staccata, e ad una certa distanza dalla 4, ed in questo caso l'angolo della cellula mediana è formato da due piccole appendici o rigonfiamenti che escono dalle due costole e sporgono sino ad incontrarsi. La diramazione 6 superiormente corre tangente alla costola mediana anteriore, senza ad essa unirsi, e le diramazioni 7 ed 8 partono dall'angolo esterno sopra unico stilo; la 8 anzi è cortissima.

Squame. Le ali, è noto, come quasi tutto il rimanente del corpo ne' lepidotteri, sono coperte da squamette di forma varia, e poste le une sulle altre a guisa d'embrici. Queste squamette, nelle quali si può distinguere un peduncolo ed una espansione filiforme o più o meno fogliacea, provengono da modificazioni delle cellule epiteliali,

(1) Heinemann. v. H. *Die Schmetterling Deutschland und der Schweiz systematisch bearbeitet*, Microlepidotteri, vol 1° parte II pag. 145 e seguenti.

e sono inserte in tubetti squamiferi, obbliquamente disposti sulla superficie della parte del corpo che ricoprono. La fig. 18 Tav. I per es. rappresenta la forma delle squame più lunghe della frangia dell'ala superiore, al lembo inferiore ed all'angolo interno; squame che vanno man mano accorciandosi procedendo verso l'angolo esterno, ove prendono la forma della fig. 20. La frangia però consta di diversi strati di squame sovraposte per cui assieme alle più lunghe, al di sotto, se ne veggono delle più corte, le quali colla loro disposizione danno luogo alle lineette più chiare o più scure, di cui si è fatto cenno parlando delle ali. Al lembo interno la frangia è precipuamente formata di squame filiformi, molto lunghe, della forma rappresentata nella fig. 26, e di altre leggermente fogliacee (fig. 27) frammiste a squame filiformi più o meno corte (fig. 27^{bis}).

Le squamette delle figure 19 e 21 sono del campo dell'ala superiore, le prime appartengono specialmente alla parte superiore, verso l'attacco. Le squamette della fig. 22 appartengono al lembo esterno, e sono più o meno lunghe, accorciandosi verso l'estremità superiore.

I peli arricciati del ciuffo *c* sulla nervatura mediana interna dell'ala superiore (fig. 11) sono molto sottili e non si scorgono ad occhio nudo.

Nella frangia dell'ala inferiore scorgonsi squame molto lunghe, rappresentate nella fig. 23, le cui intaccature nella parte fogliacea sono così profonde che dividono questa in tante appendici filiformi.

Il campo delle ali inferiori è coperto da squamette di forma pressochè uguale a quella delle squame del campo delle ali superiori.

L'addome è coperto da squamette simili a quelle del campo dell'ala; i palpi da squamette sottili ed allungate; i palpi laterali idem leggermente fogliacee; e sulle antenne veggonsi squamettine corte e piuttosto larghe frammiste a peli finissimi. Le squame della fig. 24, e quelle tanto larghe delle figure 15, 16, 17 sono tolte dalla testa che è l'organo che presenta, a questo riguardo, maggiore varietà, tanto nella forma, che nelle dimensioni; cosa naturale in una parte che porta organi di aspetto e di grandezza tanto diversi, i quali tutti più o meno debbono essere da esse ricoperti.

Testa, torace ed antenne sono del colore delle ali superiori; l'addome è del colore della ali inferiori, e verso l'estremità anale più chiaro; i palpi sono più scuri delle ali superiori; gli occhi sono quasi neri. Le zampe sul lato superiore tendono al color cenere scuro delle ali superiori, e sul lato inferiore al color cenere chiaro delle ali sottostanti. Nel riposo le ali si dispongono spesso a tetto, e nascondono il corpo quasi per intero.

COSTUMI.

Per rispetto ai costumi dell'insetto, tanto interessanti sì per la scienza che per la pratica agraria, molte lacune rimangono a riempire, attesochè le mie osservazioni, per la lontananza dei vigneti attaccati, e per non essere stato ogni volta avvertito in tempo, non poterono seguire per un intero anno l'animale in tutte le sue evoluzioni.

Dalle osservazioni mie, e da quelle del sig. Grassi risulta, che questo insetto preferisce i vigneti dei luoghi bassi, e sfugge quelli delle colline elevate; almeno nei primi il danno è molto maggiore che nei secondi. A Casteldaccia, nei possedimenti

del duca di Salaparuta, io osservai per es. un vigneto, posto in una specie di isolotto nel fondo del torrente, orribilmente maltrattato, mentre i vigneti delle circostanti colline erano quasi immuni.

Questa farfalletta, come altre congeneri, per es. la *Cochylis Ambiguella* Hb., i di cui costumi hanno non pochi punti di rassomiglianza (1) con quelli dell'*Albinia* pare poca amica del sole, dai cui raggi durante il giorno tiensi al riparo sotto le foglie; ed il Grassi dice essere stato rimarcato che essa sviluppasi maggiormente nei terreni fertili, *dove le vigne sono più rigogliose, o si mantengono folte di lunghi tralci e coperte di spessi pampini, come se amassero dei luoghi reconditi ove posarsi.*

I danni arrecati, per quanto forti, non sono fortunatamente generali, poichè accanto ad un vigneto che perderà la metà od i due terzi della vendemmia, o che sarà costretto addirittura a vendemmiare un mese prima dell'epoca solita, e fare aceto invece di vino, altri ve ne sono in cui appena si avverte; l'invasione però in una contrada è sempre generale, ed anco nei vigneti che non sembrano tocchi, sempre rinviensi qualche grappolo attaccato.

L'animale non sembra avere predilezioni, attacca tutte le uve indistintamente, bianche o nere; io l'ho trovato tanto sul *Perricone* (uva nera) che sul *Cattarato* (bianca e nera), sull'*Inzolia* (bianca e nera) ecc. che sono le uve vinifere maggiormente coltivate nelle vicinanze di Palermo.

Per ciò che riguarda il numero delle generazioni compiute nell'anno dall'insetto, ho troppo poche osservazioni dirette per poterlo determinare con sicurezza. Certo, è fuori dubbio che la comparsa di questi bruchicini deve avere, ed ha realmente luogo, più di una volta nell'anno, e che, se in alcuni siti non fu avvertita che nell'autunno, si è solo per mancanza di diligente osservazione. Il signor Grassi-Patanè che mostra d'essere non solo intelligente, ma anco accurato ed attento viticoltore, assicura che questi bruchi appaiono tre volte nell'anno. La prima sarebbe in primavera, la seconda quando gli acini dell'uva hanno già raggiunto i $^3/_4$ del loro volume, e la terza quando l'uva si approssima alla maturazione. Secondo il Grassi le prime farfallette compaiono al tempo che l'uva si dispone alla fioritura, e col mezzo di impercettibili pungiglioni aprono dei piccoli fori negli acini per deporvi le uova, dalle quali nascono vermicciuoli che per 40 giorni circa si nutrono dei piccoli granelli dell'uva che distruggono interamente; è il primo danno. Di poi passati a crisalidi ed a farfalle, queste depongono di nuovo le uova dentro i granelli, e si hanno i secondi bruchi, ed un secondo danno nell'uva acerba e già grossa: e la terza generazione, la più dannosa e la più nota, si avrebbe poco prima della maturazione.

Al signor Grassi però (che non è entomologo, e non ne accampa nemmeno pretesa) dobbiamo osservare prima a tutto che, dallo studio particolareggiato che noi abbiamo fatto della farfalla, emerge chiaramente che questo perforamento degli acini per deporvi le uova, non è punto probabile, poichè la farfalla non ha pungiglioni, nè altri organi con cui potere praticare dei fori.

Si potrebbe solo per quanto riguarda la prima generazione sospettare, benchè poco vi creda, che le farfalle le quali compaiono all'epoca della fioritura, deponessero

(1) Nördlinger H. *Die kleinen Feinde der Landwirthschaft.* Stuttgart 1869, pag. 428.

le uova sui fiori stessi dell'uva, e propriamente entro i pistilli, e che le uova rimaste coll'allegamento nel frutto, si sviluppassero di poi entro di esso, dando origine ai bruchi che si trovano dentro la polpa degli acini.

Un fatto analogo, con molta apparenza di vero, fu enunciato da Baldassare Romano (1), distinto giovane siciliano morto troppo presto, per la farfalletta che in Sicilia attacca l'ulivo e che compare due o più volte all'anno, in primavera ed in autunno. Di questo microlepidottero se ne erano fatte due specie diverse, l'*Oecophora olivella* (*Tinea olivella* Briganti) e l'*Elachista oleaella* (*Tinea oleella* Fab.), sino a che il Romano dimostrò l'identicità delle due specie, constatando che quella dell'autunno non era che il frutto delle uova deposte nel pistillo dei fiori dalla generazione primaverile, identicità enunciata già dal Bernard, e negata dapprima dal Boyer de Fonscolombe (2), che la ammise di poi e chiamò l'insetto coll'unico nome di *Oocophora oleaella* Fab. (3).

Nelle prime pagine di questa Memoria noi abbiamo accennato (ciò vale specialmente per gli acini dell'uva i quali invece di marcire direttamente divengono passoli, per l'inoltrata formazione di glucosio all'epoca dell'attacco) che le cavità sottostanti al foro praticato nei granelli dalla larva, sono circoscritte da una specie di borsetta, formata da buccia che sul lato esterno, cioè su quello in contatto colla polpa, è bianchiccia, liscia, compatta, unita e globosa, da far credere d'essere quella di un vinacciuolo, la cui mandorla sia stata rosa dalla larva in modo affatto analogo a quanto il Romano afferma avvenire col *Prays oleelus* nell'olivo. Ora l'esame microscopico addimostra che il tessuto di questa falsa buccia non è della natura di quello del guscio dei vinacciuoli, ma risulta invece delle stesse cellule larghe ed a pareti sottilissime di cui consta la polpa degli acini, compresse per così dire ed indurite. Questo falso tessuto che a tutta prima non poco imbarazza l'osservatore, è forse dovuto dall'un lato alla compressione prodotta dal corpo della larva, dall'altro alla evaporazione della parte della polpa che la larva mette a diretto contatto coll'atmosfera, per cui diminuiscono nelle cellule le sostanze liquide, non che ai molti e grossi micelli dell'*Aspergillus glaucus* che come fu detto entro vi vive, e forse anco alle sostanze escrementate dal bruco stesso.

Il Grassi-Patanè inoltre non fa cenno dell'ultima comparsa delle farfalle, che ha luogo alla fine dell'autunno e che può durare ben tardi, dal momento che da uva ammalata e matura raccolta sul principio di settembre io ottenni farfalle non solo per tutto il detto mese, ma anco sino alla fine del susseguente ottobre, in luogo sempre

(1) *Degli insetti che danneggiano gli ulivi in Sicilia.* Palermo 1845, pag. 30 a 36.

(2) Stainton H. T. *The Tineina of southern Europe*, pag 292, ove è riprodotta la Memoria di Vittore Chiliani, *Materiali per servire alla compilazione della fauna entomologica italiana*, ossia, *Elenco dei lepidotteri degli Stati Sardi.*

(3) Oggidì inoltre, secondo le osservazioni dell'egregio prof. Achille Costa, pare che non solo le due Tinee sopra mentovate, ma anco la *Tinea Servilella* O. Costa, non sia che un'altra generazione della stessa specie, ora *Prays oleelus* (*), la quale per tal modo assumerebbe tre forme distinte, ed in tre diverse stagioni dell'anno si ciberebbe delle foglie, dei fiori e delle mandorle dei frutti dell'olivo.

(*) Staudinger O. e Wocke M. *Catalog der Lepidopteren des europaeischen Faunengebiets.* Dresden 1871, pag. 278.

aperto, alla temperatura dell'aria libera. Si avrebbe così, ammesso le tre prime, anco una quarta generazione, invero però non completa poichè ritengo che le uova di queste ultime farfalle non arrivino a schiudersi nell'anno.

Per tal modo, resterebbe anco a determinarsi sotto quale stato l'insetto passa l'inverno, se sotto quello di crisalide solamente, o se, come sembra probabile, pure allo stato di uova. D'altra parte rimarrebbe a cercare ove queste uova ibernanti vengono deposte, quando si schiudono, e di che si cibano nei primordî della loro vita, poichè secondo ogni probabilità dovrebbero essere le prime a nascere, dando luogo ad una generazione di larve anteriore a quella proveniente dalle crisalidi ibernanti, la quale ultima attaccherebbe l'uva, quando il granello è già formato, e perciò molto tardi.

Sarebbe pure interessante cercare ove queste crisalidi ibernanti vengono formate dalle larve autunnali; se nelle fessure della corteccia dei tralci, e delle canne di sostegno solamente, ovvero, se pure nel terreno, od altrove come si è sospettato. Questi piccoli problemi, ed altri ancora, che rimangono a risolvere sono di molta importanza perchè da essi potrebbonsi avere molti lumi per la scelta delle pratiche e dei mezzi da tentarsi per trovar modo di combattere tanto nemico.

Rimedî. In quanto ai rimedî bisogna confessare che questo insetto, per la sua piccolezza, e per l'annidarsi e nascondersi entro gli acini stessi dell'uva, è uno di quelli, la cui distruzione deve riescire all'agricoltore molto difficile, benchè per quanto diremo più sotto secondo me, non impossibile.

Buona parte di questi bruchi intanto, va certo distrutta all'epoca e pel fatto della vendemmia, e ricordo che in certi luoghi, agli uomini che pigiavano l'uva si coprivano letteralmente le gambe e le coscie di questi bruchi; quindi il primo consiglio a darsi è di accelerare la vendemmia per non lasciar tempo alle larve di autunno di formare le crisalidi da cui usciranno le future generazioni. Questa pratica ove l'attacco dell'*Albinia* è forte, viene senza altro seguìta indipendentemente dall'idea di sbarazzarsi de' bruchi, e ciò per salvare dalla totale distruzione porzione del prodotto; ma nei vigneti leggermente ammorbati, la vendemmia si protrae, secondo l'uso del paese, tardissima, ed è per questi che vale particolarmente la raccomandazione ed il consiglio della precoce raccolta.

Per rispetto ai rimedî di diretta applicazione osserviamo dapprima, che a Riposto ed a Giarre si fecero dai viticoltori molti esperimenti, ma tutti infruttuosi. Si tentò di acchiappare le farfalle entro fanaletti accesi ed aperti di notte qua e là nel vigneto, ma la quantità con essi distrutta *è stata sì poca che lascia ogni speranza di lieto successo.* Si applicò il solfo ed il tabacco, che riuscirono del tutto innocui. Si tentò persino di far raccogliere il verme da donne al tempo che la fioritura è compiuta (1), ma questo mezzo pure fu abbandonato perchè incerto e troppo costoso.

(1) Si sono adibite delle donne di lavoro per raccogliere quel verme. Al tempo che già la fioritura è compiuta, le femmine, tenendo nella mano sinistra un mezzo foglio di carta, o la stessa mano sotto i pendenti grappoletti, e colla destra armata di canna o di legno bene acuminato, vanno indagando coll'occhio là dove trovasi la piccola fuliggine, e trovatala si fanno minuziosamente a scandagliarla colla punta di quel legno che tengono in mano. Ne avviene che si vedono a quando a quando cadere sulla carta sottostante dei piccolissimi insetti. i quali si raccolgono e si bruciano, ecc. (Grassi — Lettera al Ministro ecc.)

Se per es. si constatasse che buona parte delle larve autunnali formano le loro crisalidi nel terreno, le lavorazioni di questo, tanto nell'inverno, che nella primavera, specialmente prima e dopo la fioritura dell'uva, dovrebbero essere molto utili; come dovrebbe riuscire fruttuoso lo scorticamento nell'inverno dei tralci, e l'abbruciamento del legno morto, delle canne di sostegno (se vi si sono), e della tolta corteccia, nell'ipotesi molto probabile che buona porzione di crisalidi trovansi nascoste nelle fessure. L'applicazione del vapore d'acqua bollente già da diversi consigliata in casi analoghi, *fatto sprigionare da una marmitta chiusa e munita di un tubo piegato nel coperchio per dirigerlo sui tralci delle viti* (Targioni), onde colpire i bruchi nei loro ripari invernali, potrebbe pure tentarsi con qualche speranza di buon resultato.

Il signor Vico di Acireale, scrivendomi, mi chiedeva che gli avessi indicato una polvere insetticida; ma a dir il vero, in questo genere, pel caso nostro non saprei cosa consigliare. Il catrame, la calce, le decozioni di tabacco, di lupini, il solfo carbonato di potassa applicato per la fillossera ecc., non mi sembrano sostanze atte ad essere impiegate contro il nostro baco su larga scala, sopra milioni di viti; perchè o di non facile applicazione, o insufficienti e troppo costose.

Secondo me, il principale se non l'unico rimedio che si potrebbe e dovrebbe tentare con molta speranza di buon successo sarebbe l'applicazione, già in qualche modo sospettata dal Grassi stesso, del petrolio. Ai proprietarî ed agli agricoltori di Catania, di Acireale e delle contrade vicine, questo potente insetticida è già noto per gli splendidi resultati da loro ottenuti contro il tanto temuto Mytilaspide degli agrumi, ed io ritengo che dalla sua applicazione molto vi sia a sperare anco pel bruco dell'uva. Se il petrolio riesce ad uccidere il pidocchio degli agrumi, che trovasi coperto e difeso da uno scudo quasi impenetrabile agli agenti esterni, a maggior ragione si può sperare che egli agisca su questi bruchi, i quali, per quanto entro gli acini, può dirsi che al confronto trovansi indifesi ed esposti senza altro alla sua azione.

Come per gli agrumi, anche per l'uva, si dovrebbe mescolare una parte di petrolio con quindici o venti parti d'acqua (l'esperienza indicherà la proporzione migliore), e con questa miscela tenuta sempre agitata, si dovrebbe all'epoca della prima generazione delle larve, ed in generale ogni qualvolta queste appaiano nel vigneto, spruzzare con uno scopino od un grosso pennello i grappoli dell'uva. L'operazione non difficile, e tale da poter essere eseguita da donne e da ragazzi, dovrebbe convenire anco pel lato del tornaconto, perchè in Sicilia le viti sono basse, alla portata della mano, e con un litro di petrolio, o venti litri di miscela, si può aspergere, al certo, un buon numero di grappoletti.

CARATTERI DEL GENERE *ALBINIA*.

Antenne del maschio con una particolare appendice ad *S* al 4° articolo, quelle della femmina senza. Palpi di mediana grandezza, rivolti in alto, ciascuno di tre articoli. Palpi laterali nascosti, il di cui ultimo articolo leggermente ricurvo si stacca quasi ad angolo retto dal penultimo, ambedue coperti da lunghe squame, sì nel maschio che nella femmina (eguali). Ali superiori con 11 nervature, di cui quelle che soglionsi designare con n.ⁱ 4 e 5 hanno origine da unico stilo, e le 7 ed 8, e qualche volta anco la 6, si staccano da stilo comune. Ali inferiori con 7 nervature, oltre le tre

libere all'angolo interno; le nervature 2 e 3 si staccano avanti l'angolo, e le 4 e 5 all'angolo stesso della cellula mediana. La cellula mediana non interamente chiusa.

CARATTERI DELLA SPECIE *ALBINIA WOCKIANA.*

Ali superiori di color grigio cenere più o meno scuro e di splendore setaceo od acciaino, con due linee o striscie trasversali più chiare, l'una ad $^1/_3$, l'altra a $^3/_4$ circa dell'ala, con contorni più scuri del fondo dell' ala stessa, che danno luogo a macchiette nerastre mal definite. Ali inferiori pure di color cenericcio, e di splendore setaceo, ma più chiare. Idem il rimanente del corpo. Distanza da una punta all'altra delle ali aperte 0,^{m}015; lunghezza del corpo 0,^{m}006.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

FIG. 1 — Grappolo d'uva per circa metà attaccato dall'*Albinia Wockiana*, in cui vedesi una larva di grandezza naturale che pende dal suo filo, e negli acini guasti i fori prodotti dal bruco ecc.

» 2 — Due farfalle, di cui quella con le ali aperte di grandezza naturale, quella colle ali chiuse, più grande.

» 3 — Farfalla molto ingrandita, in cui però le macchiette brune delle ali si alterarono un poco nel litografarle.

» 4 — Larva molto ingrandita.

» 5 — Crisalide molto ingrandita.

» 6 — Palpo della farfalla tanto del maschio che della femmina. Ing. 90 D. circa.

» 7 — Tratto basilare dell'antenna della farfalla maschio. Ing. 90 D. circa.

» 8 — Idem della femmina. Ing. 90 D. circa.

» 9 — Palpo laterale tanto della farfalla maschio, che della femmina. Ing. 90 D. circa.

» 10 — Tromba o lingua della farfalla. Ing. 90 D. circa.

» 11 — Ala superiore per far vedere la nervatura. Ing. 10 D. circa.

» 12 — Ala inferiore idem. Ing. 10 D. circa.

» 13 — Zampa posteriore della farfalla. Ing. 70 D. circa.

» 14 — Idem, anteriore. Ing. 70 D. circa.

» 15,16,17,27,25 — Squame tolte dalla testa della farfalla. Ing. 330 D. circa.

» 18 e 20 — Squame tolte dalla frangia dell'ala superiore. Ing. 330 D. circa.

» 19 e 21 — Squame tolte dal campo dell'ala superiore. Ing. 330 D. circa.

» 22 e 23 — Squame tolte dalla frangia dell'ala inferiore. Ing. 330 D. circa.

» 26 e 27 e 27bis — Squame tolte dal lembo interno della frangia dell'ala superiore. Ing. 330 D. circa.

FIG. 28 — Estremità dell'addome nella farfalla femmina.

» 29 — Testa della larva, vista dal di sotto, ove il labbro inferiore fu disteso fuori colla compressione: *n*, *n* lamine parietali; *o* occhi, *a* antenne, *b* palpi labiali, *c* palpi del serritterio. Ing. 45 D. circa.

» 30 — Cranio di larva, visto dal di sopra: *a*, *a* lamine parietali, *b* lamina frontale, *e* occhi, *d*, *d* luogo delle antenne ecc. Ing. 45 D. circa.

» 31 — Mascella vista dal lato esterno. Ing. 240 D. circa.

» 32 — Altra mascella vista dal lato interno: *x*, *y* lamine rigide per attacco di muscoli. Ing. 240 D. circa.

» 33 — Mascella di fianco. Ing. 240 D. circa.

» 34 — Labbro inferiore della larva: *o n c m* serritterio, *b*, *b* palpi labiali, *m*, *n* palpi del serritterio, *c* tubo conduttore del filo, *f* tratto di filo già fuori. Ing. 300 D. circa.

» 35 — Palpi labiali della larva. Ing. 200 D. circa.

» 36 — Antenna della larva: *g*, *f*, *i* ecc. appendici o bacchette tattili. Ing. 330 D. circa.

» 37 — Pelo tolto dal ventre, vicino a piede membranoso. Ing. 330 D. circa.

» 38 — Labbro superiore e lingua della larva. Ing. 240 D. circa.

» 39 — Zampa articolata della larva. Ing. 45 D circa.

» 40 e 41 — Zampa membranosa della larva; vista di fianco e di sotto (in parte). Ing. 160 D. circa.

» 42 — Uncino grande della pianta delle zampe membranose della larva. Ing. 800 D. circa.

» 43 — Uncino piccolo idem. Ing. 800D. circa.

» 44 — Uncinetto a tenaglia delle zampe membranose. Ing. 1200 D. circa.

Fig. 15
Fig. 16
Fig. 1
Fig. 7
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 20
Fig. 23
Fig. 25
Fig. 22
Fig. 24
Fig. 27
Fig. 21
Fig. 19

Fig. 3

Fig. 8

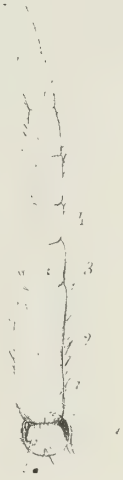


Fig. 14

Fig. 13

Fig. 1

Fig. 9

Fig. 2

Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Fig. 5

Fig. 4

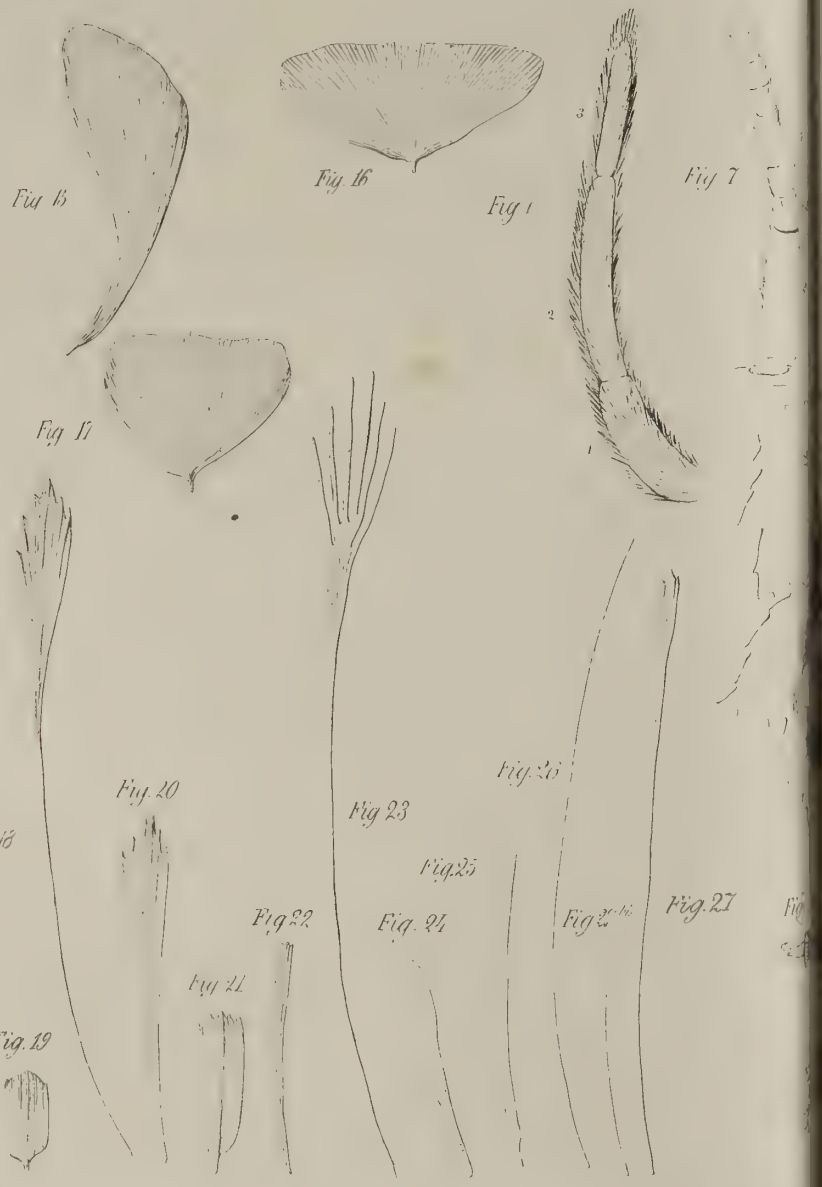


Fig. 15
Fig. 16
Fig. 1
Fig. 7
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 20
Fig. 23
Fig. 25
Fig. 19
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 24
Fig. 26
Fig. 27

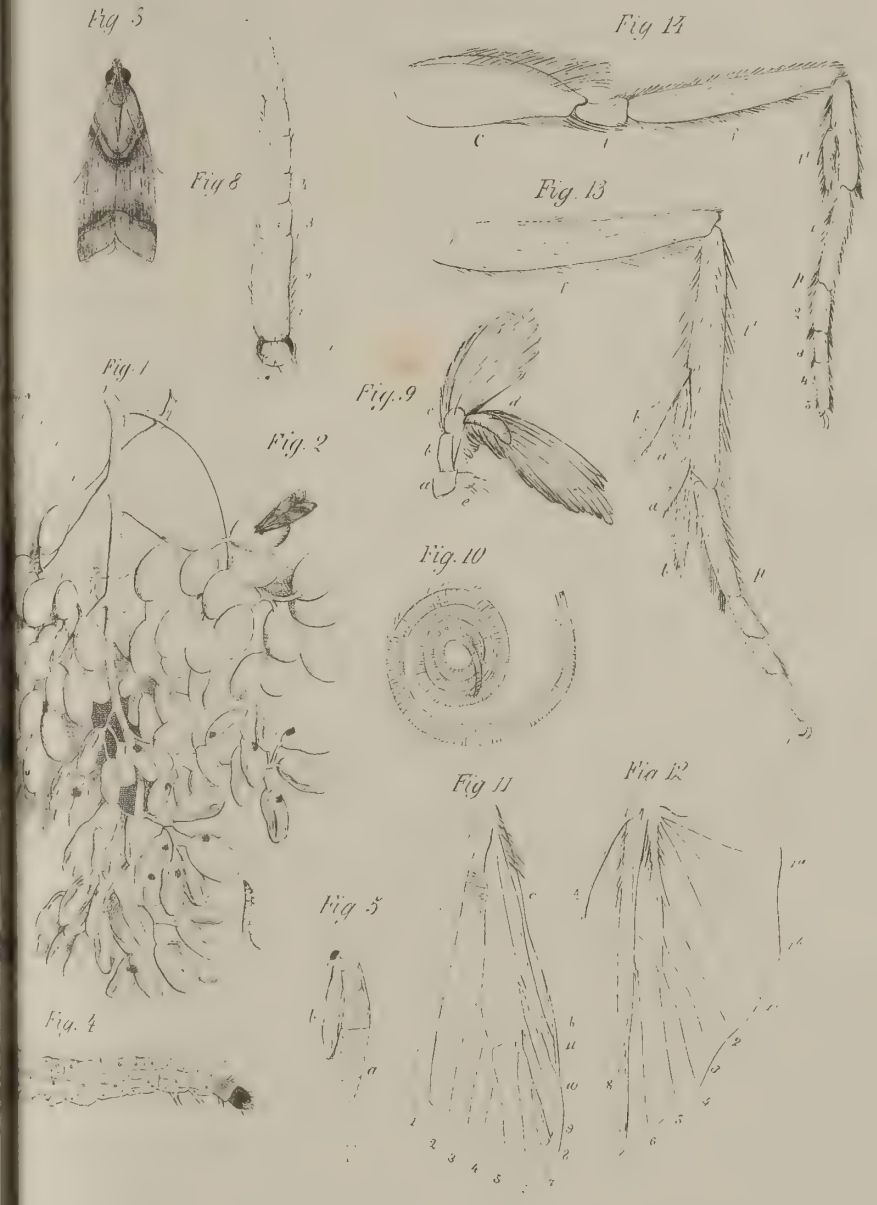


Fig. 3
Fig. 8
Fig. 14
Fig. 13
Fig. 9
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 5
Fig. 4

Fig. 31

Fig. 30

Fig. 32

Fig. 40

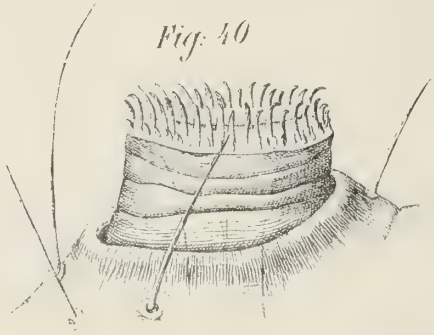


Fig. 33

Fig. 42

Fig. 41

Fig. 39

Fig. 44

Fig. 43

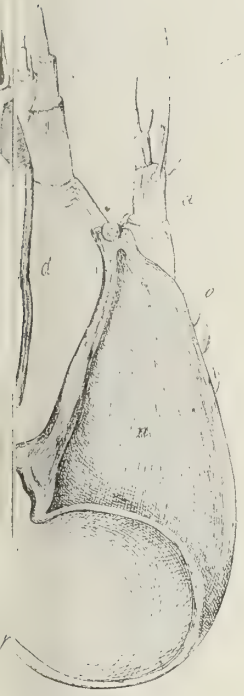


Fig. 28

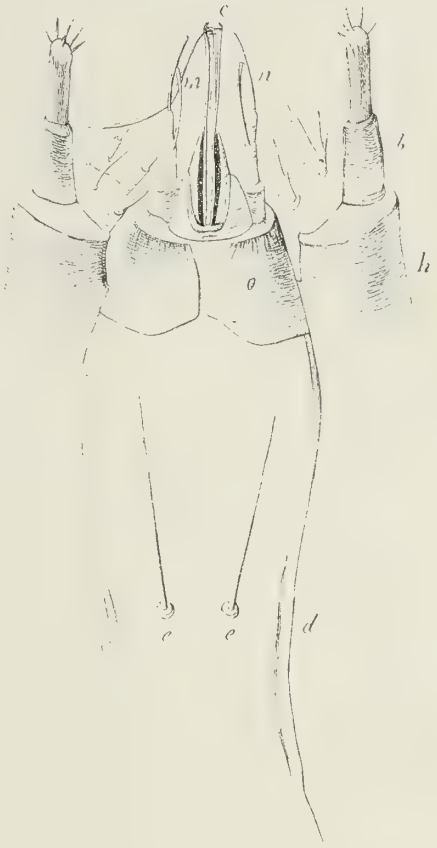


Fig. 34

Fig. 35

Fig. 36

Fig. 38

Fig. 37

Fig. 31

Fig. 30

Fig. 32

Fig. 40

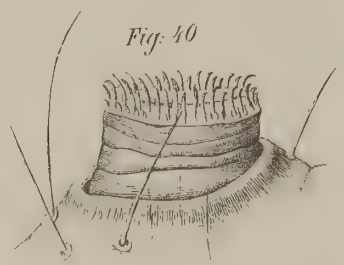


Fig. 33

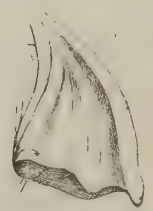


Fig. 42

Fig. 41

Fig. 43

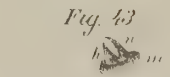


Fig. 44

Fig. 39

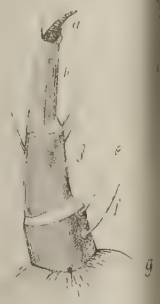


Fig. 29

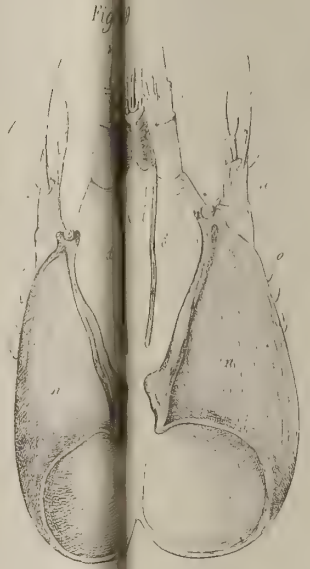


Fig. 34

Fig. 35

Fig. 36

Fig. 28

Fig. 38

Fig. 37

Sulle osservazioni spettroscopiche del bordo e delle protuberanze solari fatte al R. Osservatorio del Campidoglio.

Nota VII del prof. L. RESPIGHI

letta nella seduta del 3 giugno 1877.

La periodicità del fenomeno solare delle macchie costituisce attualmente l'oggetto di vaste e profonde ricerche, dirette non solamente a confermare questo importante avvicendamento di stato nella superficie del sole, a fissarne le varie fasi e la durata, ma a mostrare eziandio l'esistenza di intime relazioni fra questo fenomeno celeste ed i principali elementi fisici della terra, e cioè magnetismo, temperatura, umidità, pioggia, temporali, cicloni ecc.

Riguardo alle relazioni della frequenza delle macchie colle variazioni degli elementi del magnetismo terrestre, l'accordo fre le due specie di fenomeni è così marcato e deciso, tanto nei risultati medî, quanto nei singoli risultati, cioè tanto nel loro complesso che nei loro dettagli, da non lasciare alcun dubbio sulla realtà di queste relazioni, le quali appariranno sicuramente tanto più intime e particolareggiate, quanto più esattamente sarà conosciuta la durata e le leggi del periodo delle macchie.

Riguardo agli altri elementi fisici terrestri, quantunque *a priori* non si possa escludere una qualche relazione dei medesimi con quella periodica variazione nello stato della superficie solare, pure avuto riguardo alla moltiplicità delle cause e delle circostanze, che possono influire sul valore di questi elementi, e delle forti variazioni cui sono soggetti, vi ha ragione di temere, che certe relazioni, che alcuni pretendono comprovate dalle osservazioni, siano risultati puramente casuali ed accidentali, piuttostochè effetti reali di questa periodica perturbazione solare.

Essendoci tuttora ignota la vera essenza o natura di questa perturbazione, e dei fenomeni pei quali essa si appalesa alla superficie del sole, noi manchiamo dei dati necessarî per dedurre, se ed in quale misura essa possa influire sulla intensità di quelle azioni, che il sole stesso direttamente od indirettamente esercita sulla terra, e dalle quali dipendono gli avvicendamenti nello stato fisico della terra stessa.

Limitandoci a considerare l'irraggiamento calorifico, che certamente costituisce la principale azione del sole sulla terra, e che perciò può considerarsi come la principale causa delle variazioni dello stato fisico della medesima, non è forse ancora ben deciso, se effettivamente la quantità di calore irraggiato dal sole sia maggiore all'epoca del massimo o in quella del minimo delle macchie; mentre le recenti ricerche fatte da Langley sulla intensità dell'irraggiamento della fotosfera, delle macchie e delle penombre, conducendo ad ammettere la possibilità di una qualche diminuzione nella media temperatura terrestre all'epoca del massimo delle macchie, la mostrano così tenue da potersi difficilmente

rilevare in mezzo alle forti variazioni accidentali presentate da questo elemento della fisica terrestre. La questione però potrebbe risolversi *a posteriori*, quando avendosi una lunga serie di osservazioni si potessero instituire i confronti fra i valori dei varî elementi della fisica terrestre, o fra le frequenze di certi fenomeni negli anni di maggiore o minore frequenza delle macchie, e si riuscisse a verificare una marcata e regolare differenza nei risultati di questi confronti.

Ma il materiale di osservazione, che potrebbe porsi a base di queste ricerche, non è ancora abbastanza ricco e sicuro per garantire la costanza e regolarità dei risultati contro le possibili accidentalità, o casuali combinazioni di apparenti accordi e relazioni; e qualunque conseguenza si volesse ora ricavare a questo riguardo dovrebbe considerarsi come incerta o prematura.

Le macchie sono senza dubbio una manifesta prova di una periodica perturbazione della superficie solare, ma forse non sono per se stesse un elemento del tutto sicuro per valutare i varî gradi, le varie fasi di questa perturbazione, e per fissare l'epoca precisa del suo massimo e del suo minimo di intensità; e ciò viene confermato dal fatto che ancora si discute sulla vera durata di questo periodo, e sulla costanza della durata stessa. Mancano quindi i dati sicuri per poter instituire confronti fra questi fenomeni solari ed i fenomeni terrestri allo scopo di verificare, se esista fra di essi una qualche correlazione, una qualche corrispondenza.

Tali ricerche si potranno ragionevolmente intraprendere quando sarà più chiaramente definita la natura di questa perturbazione solare, e quando saranno più rigorosamente stabilite le sue condizioni e le sue leggi; le quali debbono ricercarsi non solamente nei fenomeni delle macchie, ma bensì nell'esame complessivo di tutti i fenomeni pei quali è caratterizzata la perturbazione stessa.

Da pochi anni lo spettroscopio ha svelato agli astronomi sulla superficie del sole un altro fenomeno, che senza dubbio si collega più direttamente colla vera attività solare, della quale è una manifestazione, un effetto più immediato che non le macchie, le facule e tutte le altre accidentalità, che il cannocchiale ci mostra in quella superficie.

A spiegare la costanza dell'irraggiamento calorifico e luminoso del sole gli astronomi hanno sempre riconosciuta la necessità di ammettere un rimescolamento continuo delle masse interne colle esterne, una continua circolazione per la quale le masse interne più calde debbono regolarmente sostituirsi alle esterne raffreddate per l'irraggiamento.

Di questa circolazione o rimescolamento di masse, che costituisce la vera attività alla superficie solare, il cannocchiale non ci fornisce alcun dato, alcuna notizia diretta risguardante il suo modo di produzione, il suo meccanismo; e solo ce ne attesta l'esistenza per mezzo delle continue variazioni di splendore e di aspetto che si succedono nelle varie parti di essa superficie.

Lo spettroscopio invece ci mette sott'occhio questo continuo tramestìo della massa superficiale del sole, e quello stato di generale ebollizione che continuamente l'agita e la sconvolge; lo spettroscopio ci mostra le bolle di vapori incandescenti che dall'interno del sole irrompono continuamente dalla sua superficie per diffondere sulla medesima il calore, che essi portano dagli strati inferiori per riparare le perdite fatte per l'irraggiamento.

Le immagini spettrali della cromosfera, e specialmente quelle dovute all' idrogeno, non presentano l'aspetto di uno strato gassoso galleggiante sulla fotosfera a guisa di una atmosfera stabile, ma bensì una selva, una siepe di piccoli getti, dove più dove meno distinti e splendenti, d' altezza e spessore variabile, qua e là riuniti in gruppi o fasci di maggiore altezza, ora verticali, ora inclinati.

Questa monotonia, o quasi monotonia di aspetto nella cromosfera trovasi di tratto in tratto interrotta in alcune località da getti giganteschi per ispessore e per altezza, o da masse gassose talora diffuse in enormi estensioni, e nelle più svariate e strane diramazioni e conformazioni, e spesso soggette a rapide e gigantesche trasformazioni.

I continui cambiamenti, che noi rileviamo nella cromosfera anche nelle parti più uniformi, non deformate cioè da grandi getti o da masse gassose, ci provano che la massa di essa cromosfera è in uno stato di continua trasformazione per una continua successione di nuovi getti ad altri che si dileguano.

Chi ha avuto occasione di studiare attentamente e per lungo tempo la cromosfera, e di seguire nelle loro varie fasi i fenomeni da essa presentati, difficilmente può non ravvisare in questi il meccanismo di una reale e continua emissione di gas e vapori incandescenti, portati sotto l'aspetto di getti dall' interno del sole alla superficie per alimetarvi il calore e la luce.

Per parte mia, dopo di avere continuato con amore e costanza queste osservazioni e questi studî per quasi otto anni, tanto nelle condizioni normali della superficie solare, quanto nelle condizioni eccezionali corrispondenti al massimo delle macchie, sono rimasto di ciò pienamente convinto; in modo da ritenere inutile ed irragionevole il ricercare fuori di questi fenomeni la causa alimentrice del calore e della luce alla superficie del sole, quella circolazione o rimescolamento nella massa solare atto a mantenere nella sua superficie la costanza o quasi costanza di irraggiamento calorifico e luminoso.

Le macchie, le facule e tutte le accidentalità della superficie solare debbono considerarsi come semplici effetti o risultati della attività meccanica, fisica e chimica della cromosfera, e la loro spiegazione non può ricercarsi che in un ordine di idee legate e subordinate ai varî stati, ai varî fenomeni presentati dalla cromosfera stessa.

Quantunque le osservazioni regolari e sistematiche della cromosfera e delle protuberanze non si estendano che a pochi anni, pure sono già sufficienti a provare che lo stato della cromosfera, e quindi l'attività solare per essa manifestata, è soggetta ad una periodica perturbazione coincidente col periodo delle macchie; in quanto che la frequenza delle protuberanze, o delle irregolarità ed anomalie della cromosfera si mantiene in conveniente accordo colla frequenza o col numero delle macchie.

Le nostre osservazioni, comprendendo l'epoca del massimo delle macchie, ed ora toccando quella del minimo, non lasciano alcun dubbio sulla coincidenza e quasi identità del periodico avvicendamento dei due distinti fenomeni, trovandosi nell'intervallo di osservazione una specie di parallelismo fra le loro relative frequenze.

Per cui si ha ragione di inferire che, se le osservazioni della cromosfera abbracciassero un periodo abbastanza lungo, come quello delle macchie, basterebbero per se stesse a provare l'esistenza di una periodica perturbazione dell'attività solare, a fissare le epoche dei massimi e dei minimi, come ora facciamo colle macchie. Che anzi

i fenomeni della cromosfera, essendo più direttamente collegati e quasi immedesimati colla attività solare, probabilmente potrebbero presentare dei caratteri più decisi relativamente alla natura ed alle leggi di questa periodica perturbazione.

È quasi generalmente adottata dagli astronomi l'opinione che la maggiore frequenza delle macchie e delle facule sia indizio di una maggiore attività nella superficie solare, e questa opinione può ritenersi giusta, quando si consideri l'attività solare costituita dalle rapide e gigantesche variazioni di splendore e di aspetto alla superficie del sole, senza aver riguardo però alla causa da cui possono essere prodotte.

Ma se per attività solare intendiamo lo stato di movimento o la forza viva della massa superficiale del sole, ritengo ben difficile il dedurre dalla semplice ispezione di essa superficie e dalle variazioni che la medesima ci presenta, se l'attività sia realmente massima quando maggiore è il numero delle macchie e delle facule; le quali potrebbero risultare non da un reale aumento dell'attività stessa, ma bensì da un'ineguale ed irregolare distribuzione di moto e di azioni aumentate o condensate in alcune parti, paralizzate e distrutte in altre; e questo appunto mi sembra risultare dalle osservazioni della cromosfera e dai fenomeni da essa presentati.

Le ineguaglianze dell'attività solare nelle varie parti della superficie sono indicate dai varî stati della cromosfera, e principalmente per l'ineguale distribuzione dei getti gassosi, per la loro maggiore o minore vivacità di splendore e per la loro maggiore o minore elevazione e grossezza: e perciò lo stato della superficie del sole dovrà considerarsi come tanto più regolare e normale, quanto più uniforme è la distribuzione, lo splendore e l'altezza di questi getti nell'insieme della superficie: e per contrario tanto più irregolare o perturbato quanto più numerose e marcate sono le ineguaglianze dei getti riguardo alla loro distribuzione, al loro splendore ed alle loro dimensioni.

In quanto alla intensità della attività solare, dedotta dalla somma, dal complesso dei varî stati di eruzione delle singole parti della superficie, io non ritengo ragionevole il valutarla semplicemente dal maggiore o minor numero dei getti più pronunciati o più giganteschi, ossia dal semplice numero delle protuberanze: e mi sembra poi irragionevolissimo il ritenerla proporzionale al numero ed alla grandezza delle protuberanze stesse, pel fatto che generalmente queste anormali eruzioni sono accompagnate da uno stato di calma relativa, accusata da una minore frequenza od agglomerazione di quei piccoli getti che dominano su tutta la superficie solare; cosicchè si direbbe che nei maggiori getti sono sommate o confuse le eruzioni normali di una porzione della superficie.

Nella località delle macchie, dove più frequentemente si presentano le più veementi e gigantesche eruzioni, ordinariamente sulla cromosfera non campeggiano che pochi e vivacissimi getti, mentre dalle mie molte osservazioni fatte sul posto dei nuclei mi risulta come carattere speciale della cromosfera, la mancanza di getti, che d'altronde sono ordinariamente assai sviluppati e vivissimi sul contorno dei nuclei stessi.

Questi fatti, se non m'inganno, tenderebbero a mostrare che la maggiore o minore frequenza delle protuberanze e delle irregolarità della cromosfera non costituisce una prova della variabilità dell'attività del corpo o della massa solare, ma semplicemente una ineguale distribuzione della medesima nelle varie parti della superficie, mentre l'attività complessiva si mantiene probabilmente costante o quasi costante.

Verso l'epoca del massimo delle macchie nel 1870 e 1871 la cromosfera presentavasi ordinariamente invasa da molte e gigantesche protuberanze, soggetta a frequenti e gigantesche eruzioni specialmente nelle regioni delle macchie, e cospersa di tratto in tratto anche in vaste estensioni da piccoli e vivi getti; ma essa in compenso si mostrava più calma e meno vivace nelle altre parti: mentre attualmente, epoca del minimo delle macchie o prossima a questo, la cromosfera, mostrandosi quasi del tutto priva di protuberanze, di grandi getti od eruzioni, si mantiene in tutta la sua estensione convenientemente splendente e più ricca di piccoli getti che nell' epoca del massimo; cosicchè lo stato medio di eruzione o di attività nella medesima può ritenersi sensibilmente eguale nelle due epoche, o di poco differente. Valutando invece l'attività solare per la frequenza delle grandi protuberanze, essa risulterebbe nell' epoca del massimo delle macchie almeno tre volte più intensa che in quella del minimo.

Lo stato di generale eruzione, in cui trovasi la superficie del sole malgrado la regolarità e costanza della sua forma, difficilmente può concepirsi e spiegarsi senza ammettere che lo strato superficiale del medesimo abbia una certa consistenza e coesione di parti, tale da opporre una notevole resistenza alla libera espansione dei gas e vapori incandescenti compressi nelle parti interne del sole stesso, e costretti perciò ad aprirsi la via attraverso a quello strato, vincendone la resistenza o la pressione per effetto idrostatico coadiuvato dalla loro forza espansiva: dimodochè i piccoli getti della cromosfera altro non sarebbero che bolle di gas o vapori irrompenti contro la superficie con grande velocità, in forza della quale nel loro scoppio, nella loro detonazione alla superficie stessa si trasformano in masse gassose allungate od acuminate, in forma di getti passeggeri ed intermittenti.

Nella mia Memoria III del 4 dicembre 1870 sulle osservazioni del bordo e delle protuberanze solari, pubblicata negli Atti della R. Accademia dei Lincei Vol. XXIV al principio del 1871, ebbi occasione di mostrare, in base alle mie osservazioni sulla cromosfera, come assai probabile e ragionevole l'opinione di coloro che ammettono la fotosfera improntata sopra uno strato liquido incandescente, formato dalla successiva condensazione dei gas e vapori della cromosfera pel raffreddamento dovuto all'irraggiamento, e successivamente corroso od assottigliato dalle masse gassose compresse nell'interno del sole sotto una enorme pressione e ad un' enorme temperatura.

Questa opinione, che mi sembra la più adatta a spiegare i fenomeni tutti osservati alla superficie solare, sostenuta e professata sotto varî aspetti da autorevoli scienziati, è finora ben lontana dall' essere stata seriamente combattuta tanto nel campo delle idee o della teoria, quanto in quello delle osservazioni e dei fatti. E per parte mia nelle numerose e coscienziose osservazioni, da me fatte sui fenomeni della cromosfera dal 1869 sino al presente, ho avuto occasione di pienamente convincermi della sua ragionevolezza e verosimiglianza.

Sarebbe appunto questo lo strato resistente attraverso al quale si precipitano alla superficie del sole le grandi ed innumerevoli bolle gassose che vengono a formare nella cromosfera i getti minori, e in certe condizioni eccezionali le protuberanze e le eruzioni propriamente dette.

I gas e vapori incandescenti compressi da questo strato, per l'enorme temperatura e per lo stato di dissociazione in cui si trovano, non si possono supporre

nell'interno del sole stratificati secondo i loro pesi molecolari, ma bensì misti e confusi in una massa eterogenea, in una specie di caos, che continuamente tende a sprigionarsi dal suo involucro. Perciò le bolle emergenti dalla superficie solare dovranno contenere molti gas e vapori, i quali però saranno projettati ad altezze tanto minori quanto maggiore è il loro peso molecolare: ed è probabilmente per questa ragione che ordinariamente il solo idrogeno, come il più leggero di tutti i materiali eruttati, raggiunge nella cromosfera grandi altezze; quantunque ciò debba in gran parte ripetersi anche dalla diversità delle proporzioni colle quali i varî elementi entrano nella composizione delle bolle e in generale della massa gassosa del sole; essendo inoltre assai probabile che anche gli altri gas e vapori siano lanciati a notevoli altezze sulla superficie del sole, ma in quantità così tenui da non potere produrre il rovesciamento nelle rispettive righe spettrali, se non in casi eccezionali, come spesso avviene nelle località delle macchie.

Per quanto uniformi si vogliano ritenere le condizioni della massa interna del sole, non sarebbe però ragionevole di ritenere che lo strato superficiale sia rigorosamente della stessa densità, spessezza e coesione in ogni sua parte, in modo da opporre ovunque la stessa resistenza alla effusione dei gas interni; e prescindendo dal considerare varie cause, varie circostanze che potrebbero disturbare questa uniformità di condizioni e quindi di attività alla superficie solare, abbiamo certamente una causa di disequilibrio inevitabile nella rotazione solare; la quale mentre può influire entro certi limiti sulla costituzione dello strato superficiale, deve poi certamente influire sul moto ascensivo delle masse gassose, alterandone la velocità e la direzione, e tendendo specialmente nelle latitudini medie a condensare o riunire le masse stesse in bolle di maggiore estensione, capaci di produrre alla superficie getti più o meno giganteschi relativamente alle generali e normali dimensioni.

Perciò se può ammettersi la possibilità di grandi getti o protuberanze in qualunque parte della superficie solare, dobbiamo però ritenere la loro produzione, la loro presenza più probabile in alcune determinate zone, e quindi la loro frequenza variabile nei varî paralleli solari od alle varie latitudini, minima ai poli, massima verso le zone di latitudine media.

Questo è quanto deducesi dalle osservazioni fatte in questo Osservatorio dall'ottobre 1869 sino alla fine del maggio ultimo; come può facilmente rilevarsi dagli specchi C e D posti in fine alla presente Nota; il primo dei quali dà la frequenza relativa di tutte le protuberanze grandi o piccole, e cioè di tutte le marcate anomalie od irregolarità della fotosfera nelle varie zone di 10° in 10° di distanza polare, per tutto il periodo di osservazione diviso in 16 periodi secondarî: il secondo dà invece la frequenza relativa nelle varie zone solari delle sole eruzioni gigantesche, non inferiori in altezza a tre diametri terrestri.

I sedici periodi, nei quali è stata divisa l'intera durata delle osservazioni, sono così determinati:

Periodo	I	— 26	ottobre	1869	— 30	aprile	1870	N.° delle osser.	71
»	II	— 1	maggio	1870	— 31	ottobre	1870	» »	79
»	III	— 1	novembre	1870	— 30	aprile	1871	» »	31
»	IV	— 1	maggio	1871	— 1	settembre	1871	» »	67
»	V	— 29	gennaio	1872	— 30	aprile	1872	» »	37

Periodo	VI	—	1 maggio	1872	—	31 luglio	1872	N.° delle osser.	62
»	VII	—	1 agosto	1872	—	31 dicembre	1872	» »	51
»	VIII	—	1 gennaio	1873	—	31 maggio	1873	» »	70
»	IX	—	1 giugno	1873	—	31 dicembre	1873	» »	107
»	X	—	1 gennaio	1874	—	31 maggio	1874	» »	87
»	XI	—	1 giugno	1874	—	31 dicembre	1874	» »	89
»	XII	—	1 gennaio	1875	—	31 maggio	1875	» »	84
»	XIII	—	1 giugno	1875	—	31 ottobre	1875	» »	93
»	XIV	—	1 novembre	1875	—	31 maggio	1876	» »	97
»	XV	—	1 giugno	1876	—	31 ottobre	1876	» »	107
»	XVI	—	1 novembre	1876	—	31 maggio	1877	» »	100

Dall'esame di questi specchi numerici, e meglio dalla loro grafica costruzione nelle Tavole VI e VII, si rende tosto manifesta la dipendenza della distribuzione delle protuberanze dalla rotazione solare in tutti i 16 periodi di osservazione, quantunque questa distribuzione nei periodi II, III e IV, tuttochè subordinata alla rotazione solare, presenti un andamento ben diverso da quello degli altri periodi; fatto rimarchevole per la sua coincidenza col massimo delle macchie.

Escludendo questi periodi, è manifestamente provato dalla Tavola VI che la frequenza media delle irregolarità della cromosfera è minima nelle regioni o calotte polari, crescendo gradatamente sin verso i 30° di latitudine dove abbiamo i massimi assoluti, con un minimo meno pronunciato verso l'equatore.

Se ci limitiamo a considerare le grandi protuberanze, facendo sempre astrazione dai periodi II, III e IV, dall'esame dello specchio D, e meglio dalla sua grafica costruzione nella Tavola VII, troviamo che le forti perturbazioni od anomalie dello stato eruttivo, o dell'attività solare mancano assolutamente nelle calotte polari sino alla distanza di circa 30° dal polo, mentre la loro massima frequenza si verifica in risultato medio a circa 30° dall'equatore, e con tanta costanza, da doversi conchiudere che non solamente la frequenza, ma anche l'entità o l'intensità delle perturbazioni dell'attività solare è subordinata alla rotazione.

Confrontando però i risultati parziali ottenuti per ciascuno dei 16 periodi di osservazione, mentre si trova la frequenza delle perturbazioni variabile sensibilmente da un periodo all'altro, si trova poi che anche la loro distribuzione sulla superficie del sole, tuttochè subordinata sempre alla rotazione, non mantiene però un andamento rigorosamente uniforme, il quale anzi si mostra sensibilmente alterato nei periodi II, III e IV.

Le variazioni nella frequenza di queste locali perturbazioni, e nella loro distribuzione alla superficie del sole, non si presentano però a salti od in modo irregolare, ma bensì con una certa regolarità e continuità, da far ritenere che esse siano dovute ad una causa agente secondo determinate norme e leggi.

Quantunque la brevità del periodo di osservazione non ci permetta di seguire quella causa perturbatrice in tutte le sue fasi, pure le osservazioni già fatte sono sufficienti a farci presagire la sua periodicità, dopochè nel suo andamento è manifestamente indicato un massimo e un minimo di intensità, e un progressivo avvicinamento delle protuberanze ai poli, seguìto da un graduato allontanamento dai medesimi.

Secondo le nostre osservazioni il massimo di questa perturbazione dello stato di eruzione alla superficie solare è portato verso la metà del 1871, ed è caratterizzato dalla massima frequenza diurna delle sensibili irregolarità della cromosfera e delle grandi protuberanze ed eruzioni, e dalla loro temporaria invasione delle regioni polari: mentre nel 1876 e 1877 le irregolarità della cromosfera sono notevolmente diminuite di numero e di entità, scomparendo quasi totalmente le grandi protuberanze ed eruzioni, in modo da doverle considerare come fenomeni del tutto straordinarî od eccezionali.

Lo stato di calma relativa ora persistente nella cromosfera sembra indicare, che la causa perturbatrice trovasi già ridotta al minimo di intensità, o piuttosto che la sua azione sia del tutto cessata, potendosi considerare le piccole irregolarità della cromosfera, tuttora sussistenti, come fenomeni normali dipendenti dalle attuali condizioni fisiche e chimiche della massa superficiale del sole, o da una permanente instabilità o disequilibrio di azioni nella massa interna del sole.

Il rapido aumento nelle grandi irregolarità della cromosfera, e specialmente la temporaria e breve invasione delle medesime nelle regioni polari, fanno sospettare, che la loro causa non sia costituita dall'azione regolare e continua di una forza agente sulla massa solare secondo determinate leggi di tempo e di spazio, ma piuttosto da una temporaria prevalenza delle azioni tendenti a disturbare lo stato attuale del sole contro quelle che tendono a mantenerlo.

Le osservazioni della cromosfera non abbracciano ancora un tratto di tempo abbastanza lungo per confermare questa conclusione; ma le osservazioni delle macchie, già abbastanza protratte per provare incontestabilmente le periodiche variazioni nella frequenza di questo fenomeno solare, possono a tale riguardo procurarci utili schiarimenti: in quanto che il confronto dello stato di eruzione della superficie solare colla frequenza delle macchie e delle facule ci conduce a stabilire una relazione e corrispondenza fra tutti questi fenomeni così intima, da doverli ritenere come effetti di una stessa causa, e come speciali manifestazioni di una medesima perturbazione periodica della massa superficiale del sole.

Due fatti concorrono a provare queste relazioni fra le eruzioni solari e le facule e le macchie, cioè il simultaneo incremento e decremento del loro numero o della loro frequenza, e lo stato di anormale eruzione che ordinariamente domina sulla località delle macchie e delle facule. Però questi tre modi di manifestazione della periodica perturbazione del sole debbono considerarsi come distinti fra loro, se non in riguardo alla loro origine od alla loro causa, in riguardo però alla diversità delle condizioni richieste per la loro produzione.

Le protuberanze o le grandi perturbazioni dello stato eruttivo del sole sono ordinariamente molto più numerose delle facule e delle macchie, in modo che si hanno spesso protuberanze senza facule e senza macchie: e di più le regioni da esse dominate abbracciano generalmente una maggiore estensione della superficie solare spingendosi verso i poli più di queste, e giungendo temporariamente ad invadere tutta la superficie solare, mentre le facule non si estendono che verso i 50° o 60°, e le macchie quasi mai al di là di 40° di latitudine: il che prova essere più probabili e più facili sulla superficie del sole le condizioni necessarie per la produzione delle protuberanze.

Le facule ordinariamente sono accompagnate da protuberanze o da eruzioni, le quali però in questa speciale circostanza sono caratterizzate da uno splendore più vivo, da una maggiore violenza e diffusione dei getti, e da una più sentita irregolarità della cromosfera: il che proverebbe come condizione necessaria alla produzione delle facule uno stato di eruzione più intenso, più gigantesco.

Finalmente la località delle macchie rendesi segnalata per un modo più speciale di eruzione e per una più marcata anormalità nello stato della cromosfera, e cioè per eruzioni violentissime, getti più lucidi, più compatti, più variabili di forme e di splendore e quasi sempre di composizione chimica assai complessa, contenenti cioè anche a notevoli altezze misti all'idrogeno varî vapori incandescenti, cioè di magnesio, ferro, sodio ecc.; ciò che d'altronde può essere una semplice conseguenza della maggiore violenza dei getti, capace di portare a notevole altezza anche vapori o gas di peso molecolare molto maggiore di quello dell'idrogeno. A questo carattere delle eruzioni nelle località delle macchie può aggiungersi quello di una più marcata intermittenza di eruzione, ed una pronunciata deficienza nella cromosfera di quei piccoli e numerosi getti di cui essa è intessuta nelle regioni di normale attività.

Malgrado queste intime relazioni fra le protuberanze, le facule e le macchie, non sembra però che si verifichino simultaneamente e in una regolare proporzione le condizioni favorevoli alle loro produzioni nella superficie solare; poichè prendendo separatamente la frequenza delle protuberanze e delle macchie nei periodi che comprendono il massimo dell'una e dell' altra, i loro rapporti variano piuttosto irregolarmente, e i loro massimi valori si trovano corrispondere ad epoche sensibilmente diverse.

Così volendo fissare il massimo della perturbazione colla massima frequenza delle macchie, esso corrisponderebbe prossimamente alla metà del 1870, mentre fissandolo colla massima frequenza delle protuberanze, ed anche separatamente con quella delle sole grandi protuberanze, noi lo troviamo indicato verso la metà del 1871: e se avessimo anche i dati per valutare la frequenza massima delle facule, deducendo da essa il massimo della perturbazione, probabilmente lo troveremmo corrispondere nè all'una, nè all'altra delle due indicate epoche, ma forse ad un'epoca intermedia.

Ciò prova che la causa perturbatrice raggiunge prima la sua massima energia nella produzione delle macchie, o nella produzione delle speciali eruzioni da cui sono queste accompagnate, e più tardi soltanto essa si manifesta in modo più imponente collo sviluppo di un maggior numero di eruzioni estese a tutta la superficie solare.

Se noi volessimo considerare questa perturbazione della superficie del sole come il risultato di una forza esterna agente sulla massa di qnesto, o come l'effetto di un'azione o forza interna, sarebbe sicuramente più ragionevole il fissarne la massima intensità all'epoca della massima frequenza delle eruzioni solari o delle protuberanze, e della loro estensione a tutta la superficie solare, mentre il massimo delle macchie non corrisponderebbe che ad una fase secondaria della perturbazione.

Ad ogni modo questo importantissimo fatto deve essere preso in grave considerazione, sia nella ricerca delle leggi di questa periodica perturbazione solare, sia nella ricerca della causa da cui può ritenersi prodotta; e qualunque teoria sulla causa del periodo delle macchie dovrebbe ritenersi difettosa, se essa non rendesse ragione

di questa temporaria e generale perturbazione dello stato eruttivo della superficie solare; mentre a me sembra anzi che questo dovrebbe essere il punto di partenza per una vera teoria del fenomeno.

Considerato nella sua essenza, il periodo così detto delle macchie si riduce ad una periodica perturbazione dell'attività solare costituita dallo stato permanente e generale di eruzione dominante in tutta la superficie, e reso manifesto dai piccoli getti della cromosfera. Questa perturbazione poi non consisterebbe in una reale variazione di attività o di azioni nella massa superficiale del sole, ma semplicemente nel modo ineguale di distribuzione di queste azioni nelle varie parti della superficie.

La causa di queste irregolarità di azioni nella massa superficiale del sole potrebbe ricercarsi, o in una variazione periodica delle condizioni statiche e dinamiche delle varie parti della massa interna del sole, o in una variabilità di costituzione dello strato superficiale, o finalmente nell'influenza di masse extrasolari come sarebbero quelle dei pianeti.

La vera costituzione interna della massa solare ci è ignota, e forse non tutte conosciute le forze da cui è questa investita, e ignoto parimenti è il modo di distribuzione di queste forze nelle varie parti della massa; e perciò non possiamo escludere la possibilità di dilatazioni, di contrazioni delle masse gassose, di variazioni di pressione, o di espansione ecc., insomma la possibilità di fenomeni che direttamente od indirettamente possano favorire o contrariare la circolazione delle masse gassose alla superficie del sole, e quindi alterare lo stato di eruzione della medesima.

Ma se per questa via si potrebbero facilmente spiegare delle alterazioni accidentali e temporarie nello stato di eruzione alla superficie del sole, ben difficilmente potremmo spiegare una alterazione, una perturbazione regolare a periodo costante o quasi costante, estesa a tutta la superficie solare, senza ricorrere ad ipotesi troppo arbitrarie ed improbabili relativamente alla interna costituzione del sole.

Per ispiegare questo fenomeno gli astronomi hanno quindi preferito di ricercarne la causa fuori del sole, ricorrendo all'influenza di quei pianeti che per la loro maggiore massa, o per la loro minore distanza dal sole stesso, o per l'eccentricità delle loro orbite potrebbero colla loro variata attrazione produrre sulla superficie del sole movimenti, agitazioni analoghe a quelle delle maree terrestri: ed alcune relazioni fra lo stato della superficie, cioè fra il numero e la latitudine delle macchie, e la distanza e posizione di questi pianeti, relazioni ricavate dalle osservazioni protratte ad un certo numero di anni, sembrerebbero appoggiare in qualche modo questa spiegazione.

Ma tali relazioni sono ben lontane dal presentare quel conveniente accordo che sarebbe necessario per rimuovere dalle medesime il ragionevole sospetto di una casuale od accidentale combinazione: sospetto che diviene tanto più fondato, quando la meccanica ci mostra la piccolissima influenza delle attrazioni di questi pianeti sulle condizioni statiche e dinamiche delle varie parti della massa solare: cosicchè ammesse queste relazioni fra le posizioni dei pianeti e lo stato della superficie solare, ne dovremmo ricercare la causa fuori dell'attrazione, nell'azione di forze speciali totalmente ipotetiche e misteriose.

Questa spiegazione diventa tanto più improbabile, tanto più inverosimile, quando noi consideriamo l'indicata perturbazione non solamente nella sua parziale manifestazione

pel fenomeno delle macchie, ma nel suo più generale e più deciso carattere delle stato di eruzione alla superficie solare: poichè mentre verrebbero sensibilmente spostate le epoche del massimo della perturbazione, per cui riescirebbero alterate le loro relazioni colla posizione dei pianeti, la causa produttrice di quella perturbazione dovrebbe poi gradatamente e successivamente estendersi a tutta la superficie dal sole, condizioni difficilmente conciliabili colla influenza dell' attrazione o di altre azioni possibili delle masse planetarie sulla massa o sulla superficie del sole stesso.

Lo stato superficiale del sole dipende certamente dal contrasto della radiazione, che tende ad abbassarne la temperatura, e dell' afflusso delle masse gassose che continuamente portano sulla medesima il calore immagazzinato all' interno e gli elementi necessarî per alimentare il meccanismo dell' irraggiamento: e il risultato di questo contrasto di azioni costituisce la così detta attività solare.

Se il sole si mantiene in uno stato di attività sensibilmente costante, ciò significherebbe che le due azioni contrarie si trovano in uno stato di compensazione o di equilibrio: ma questo equilibrio non potrebbe essere stabile e duraturo, se una qualche causa non intervenisse a somministrare al sole il calore, la forza viva da esso continuamente profusa nell'alimentazione dell'attività alla sua superficie. Ma se questa causa o non esiste, o la sua azione è insufficiente all' indicato scopo, il sole deve inevitabilmente raffreddarsi, e modificarsi quindi la sua attività nello strato superficiale. Se non che la quantità del calore accumulato nell' interno del sole può ritenersi tanto grande in confronto di quello perduto per irraggiamento da rendere questo raffreddamento, questa variazione di attività insensibile anche in una lunga serie di anni e di secoli.

Ammettendo però che il sole si trovi attualmente in quel periodo di trasformazione o di vita, nel quale la massa superficiale del medesimo tende a costituirsi od è già costituita per effetto di raffreddamento in uno strato abbastanza consistente e resistente per moderare e circoscrivere l'espansione o l'efflusso dei gas e vapori interni, non mi sembra difficile di provare la possibilità di temporarie perturbazioni nello stato di attività alla superficie solare, e con quelle impronte di periodicità che si riscontrano nei fenomeni delle macchie e delle protuberanze.

Come ho già accennato i piccoli getti gassosi che costituiscono la cromosfera sarebbero la prova di fatto della consistenza dello strato superficiale del sole, attraverso al quale si fanno strada i gas interni sotto la forma di bolle da cui sono i getti stessi prodotti; e probabilmente gli intervalli oscuri o più debolmente luminosi, che separano i punti, i tratti o le granulazioni più lucide della cromosfera - altro non sarebbero che le basi di questi piccoli getti, o le bolle gassose emergenti dalla fotosfera stessa o dallo strato liquido incandescente.

Il signor Faye nella sua ingegnosissima teoria della fisica costituzione del sole, quantunque consideri il sole stesso in un stadio di trasformazione meno avanzato di quello supposto da Zöllner, ritenendo egli la superficie ancora allo stato gassoso, però con tale abbassamento di temperatura che i vapori metallici, passando dallo stato di dissociazione a quello delle combinazioni, danno luogo alla formazione di una specie di nubi di polveri incandescenti, dalle quali risulterebbe il forte irraggiamento termico e luminoso, pure egli ammette come possibile anche in questo stato, che l'energia

della radiazione solare possa andar soggetta a dei fenomeni di intermittenza, a delle variazioni d' intensità aventi l'apparenza o il carattere di una qualche periodicità, come succede appunto nel periodo delle macchie.

Ammettendo egli che la costanza della radiazione solare risulti principalmente dalla quantità di calore sviluppato nel progressivo condensamento o contrazione della massa solare, in modo che radiazione esteriore e contrazione della massa solare sarebbero due fatti fra loro strettamente collegati, deduce la possibilità che a partire da una data epoca questa doppia azione dia luogo a qualche intermittenza. Per esempio avvicinandosi il sole alla sua finale estinzione, la contrazione potrebbe procedere a salti o scosse, e quindi una contrazione brusca della massa darebbe luogo ad uno sviluppo eccessivo di calore, e l'astro sembrerebbe rianimarsi improvvisamente, risplendere per qualche tempo di insolito splendore, dopo di che si avvierebbe di nuovo verso la sua totale estinzione.

Prima però di giungere a queste oscillazioni estreme potrebbero aver luogo dei fenomeni, delle alternative molto meno pronunciate, aventi il carattere di periodicità più o meno duratura, come quella che si verifica attualmente nel fenomeno delle macchie.

In questo modo il Faye riporrebbe nel sole stesso la causa del periodo delle macchie.

Ma se noi portiamo lo stato fisico del sole a quello stadio di raffreddamento pel quale lo strato superficiale è già ridotto ad uno stato di notevole consistenza, come sarebbe lo stato liquido, queste intermittenze di raggiamento diventano tanto più probabili e forse molto più facili a concretarsi, a definirsi nella loro essenza.

Supponendo il sole in uno stato di raggiamento superficiale costante, dovremmo necessariamente ammettere, che il calore portato dalle eruzioni gassose alla superficie stessa fosse eguale al calore profuso nell'irraggiamento; e lo strato liquido costituirebbe in certo modo la macchina, per mezzo della quale si effettuerebbe questo continuo scambio di calore, questa continua e regolare circolazione fra le masse interne e le esterne.

Ma questo stato di equilibrio, questa costanza nella energia dell'irraggiamento solare non potrebbe verificarsi senza il concorso di qualche causa atta a somministrare alla massa del sole il calore continuamente perduto; in caso diverso sarebbe inevitabile un progressivo abbassamento di temperatura nel corpo solare, e quindi una progressiva diminuzione nell'intensità dell'irraggiamento.

Malgrado però la probabile mancanza di questa causa riparatrice del calore del sole, e malgrado il progressivo raffreddamento della sua massa, pure l'attività superficiale potrebbe mantenersi per lungo tempo sensibilmente costante, quando la quantità di calore immagazzinato nel sole fosse tanto grande, da potersi ritenere quasi trascurabili le perdite o diminuzioni sofferte per l'irraggiamento in quell'intervallo di tempo: e ciò appunto si ha ragione di ritenere verificato nello stato attuale del sole.

Ma ciò non esclude la possibilità di disequilibrî parziali e temporarî della attività solare considerata nelle varie parti della superficie; dimodochè, ritenendo l'attività stessa come risultante dalle eruzioni solari, non è certo fuor di ragione l'ammettere che essa possa essere in alcune parti temporariamente esagerata da uno stato più

energico d'eruzione, dovuto ad una maggior forza di espansione, ad un maggiore accumulamento e condensamento di gas e vapori, o ad una minore resistenza dello strato superficiale, mentre in altre parti potrebbe essere temporariamente indebolita da una diminuzione di forza espansiva, o da una maggiore consistenza nello strato suddetto.

Come ho superiormente accennato, quantunque questi disequilibrî nello stato di eruzione della superficie solare siano possibili in qualunque parte di questa, pure la loro produzione deve essere più probabile e più frequente in quelle località, dove domini una qualche causa atta ad alterare lo stato di espansività dei gas interni, oppure a favorire o contrariare il loro passaggio attraverso allo strato superficiale.

Senza ricorrere ad ipotesi più o meno arbitrarie relativamente alla costituzione della massa gassosa interna del sole, e considerandola anche in uno stato di sensibile uniformità per densità, temperatura e forza espansiva, possiamo facilmente riconoscere nella rotazione solare una causa permanente di alterazione nello stato e nelle condizioni della superficie. La rotazione solare può certamente influire sullo stato generale di eruzione alla superficie solare, aumentando la resistenza dello strato dirittamente attraversato dai gas e vapori, specialmente nelle zone o paralleli vicini all'equatore o non molto lontani dal medesimo, e ciò in causa della velocità, che viene come a rendere più denso lo strato stesso.

Per quanto piccolo vogliasi ritenere questo aumento di resistenza, è certo però che diminuendo la circolazione dei gas e vapori dall'interno all'esterno, la superficie andrà successivamente e lentamente raffreddandosi; in modo da rendere possibili dei condensamenti parziali, delle specie di coagulazioni nello strato superficiale, sulle quali rese più difficili le eruzioni dei gas e vapori, questi si accumuleranno verso le parti meno resistenti per erompere dalla superficie in grandi masse e con grande velocità; mentre poi continuando il raffreddamento potrà accadere che in alcuni punti la resistenza e consistenza dello strato superficiale giunga ad impedire totalmente le eruzioni normali, obbligando perciò i gas e vapori, condensati e compressi sul loro contorno, ad aprirsi violentemente la strada sotto forma di violenti e gigantesche eruzioni. Queste parti anormali dello strato superficiale del sole, povere di calore e di luce, costituirebbero le macchie, mentre le facule sarebbero formate dalle parti della superficie rese più incandescenti dal calore e dai materiali ivi portati dalle eruzioni.

Con ciò sarebbe spiegato il fatto della dipendenza o subordinazione del fenomeno delle macchie e delle protuberanze alla rotazione solare.

Alla produzione delle macchie richiedendosi un grado di raffreddamento e di coesione nello strato superficiale molto inoltrato, esse più facilmente si dovrebbero presentare nella zona di maggiore resistenza, cioè sin verso le latitudini medie, mentre alle maggiori latitudini la loro produzione diventerebbe successivamente più rara, potendo però sussistere anche nelle maggiori latitudini quello stato di eterogeneità nello strato superficiale bastevole a produrre eruzioni eccezionali od irregolari. Ma questi fenomeni, queste anomalie nello stato di eruzione della superficie solare non potrebbero aumentare indefinitamente, poichè, mentre la grande instabilità della massa superficiale tenderebbe continuamente a sommergere le parti più raffreddate e condensate, le masse gassose interne e le masse stesse eruttate nelle anormali eruzioni

cospirerebbero poi a disciogliere, a disperdere quella specie di isole natanti, per ripristinare nella superficie la primitiva uniformità di costituzione.

Lo stato di eruzione alla superficie solare ritornerebbe in allora normale, le grandi eruzioni diventerebbero sempre più rare ed eccezionali; ma ben presto prevalendo di nuovo i raffreddamenti parziali cagionati dalla rotazione solare, lo strato superficiale andrebbe soggetto ad una nuova perturbazione, alla riproduzione cioè delle eruzioni straordinarie e delle macchie.

Non è difficile poi il riconoscere che la successiva riproduzione di questo fenomeno, di questa perturbazione dovrebbe presentare una certa regolarità, sia riguardo alla intensità, sia riguardo alla durata, ed assumere quindi l'aspetto di un fenomeno, di un fatto periodico, la cui intensità e durata dipenderebbe dalle attuali condizioni della massa solare, mentre col progressivo raffreddamento di questa potrebbe acquistare proporzioni più marcate, ed una durata probabilmente più breve.

Attualmente questa perturbazione considerata nella sua essenza, tuttochè segnalata da fenomeni imponenti quali sono le macchie, le facule e le protuberanze od eruzioni, in realtà si riduce ad una modificazione parziale e quasi passeggiera nella attività solare, e che perciò potrebbe riprodursi per lunga serie di secoli, senza imprimere nella superficie del sole le traccie di una sensibile trasformazione; e ciò in causa principalmente della immensa quantità di calore immagazzinato nel corpo solare, e della immensa quantità di gas e vapori in esso condensati.

Mentre in questo modo potrebbe rendersi ragione della produzione delle eruzioni o protuberanze solari e delle macchie, della subordinazione della loro frequenza alla rotazione solare, e del loro periodico avvicendamento; avendo poi riguardo all'influenza delle eruzioni sulle condizioni meccaniche dello strato superficiale del sole, e principalmente alla resistenza che esse debbono opporre al moto di rotazione, non sarebbe difficile il mostrare la possibilità e probabilità di correnti nella materia fotosferica, capaci di dare alle macchie i noti movimenti in longitudine ed in latitudine.

Ma riservandomi di entrare in altra circostanza nell'esame di queste particolarità, di questi dettagli della perturbazione periodica dello stato di attività nella superficie solare, mi limiterò per ora a giustificare questo mio concetto sulla attività del sole e sulla natura del fenomeno delle variazioni periodiche delle macchie, mostrando in base alle osservazioni la verità delle due condizioni fondamentali, sulle quali esso è fondato; cioè quella dello stato eruttivo del sole, e quella delle resistenze locali dello strato superficiale alle eruzioni, specialmente nelle regioni delle macchie.

Nelle mie anteriori Note sulle osservazioni del bordo e delle protuberanze solari, già pubblicate negli Atti della nostra Accademia, ritengo di avere pienamente dimostrata l'origine eruttiva, tanto delle protuberanze idrogeniche, quanto quella delle protuberanze metalliche, composte cioè di varî vapori metallici e gas oltre l'idrogeno, quali ordinariamente si osservano nelle località delle macchie: e perciò troverei superfluo di ritornare su questo argomento, tanto più che oramai tutti o quasi tutti gli spettroscopisti convengono nell'ammettere che le protuberanze sulla località delle macchie sono realmente prodotte da eruzioni di gas e vapori incandescenti dall'interno del sole.

Resterebbe quindi a provare che anche i piccoli getti, di cui è intessuta la cromosfera, provengono anch'essi da uno stato generale di eruzione o di ebollizione della

superficie solare; ma una volta ammesso che questa superficie è costituita in tali condizioni da rendere possibili gigantesche e violenti eruzioni, ora in una parte, ora in altra di questa superficie, io non comprendo come questo carattere non possa ritenersi come generale e proprio di tutta la superficie, e tale da manifestarsi non solamente per mezzo di gigantesche eruzioni, ma eziandio per mezzo di fenomeni più moderati e più modesti, quali sono i piccoli getti della cromosfera, che in sostanza non diversificano dalle grandi protuberanze che nelle proporzioni e nella grandezza.

È un fatto che la cromosfera in qualunque parte della superficie solare è continuamente invasa da piccoli getti, quali si avrebbero da bolle gassose che portate alla superficie con grande velocità scoppiassero attraverso a questa, per diffondersi nella massa generale di essa cromosfera.

Volendo rinunciare a questo modo di sviluppo, semplicissimo e naturale, di quelle masse filiformi invadenti la cromosfera, e che d'altronde rende evidente quella circolazione, quello scambio nella massa solare indispensabile per alimentare la luce e il calore della fotosfera, quale altra origine potrebbe assegnarsi a questi getti apparenti, la quale non fosse basata sopra ipotesi infondate ed arbitrarie? Se questi non sono getti di eruzione, cosa sono? Se questi non sono i getti che alimentano la cromosfera e la fotosfera, da dove e in che modo proviene questo alimento? Sino a che non si sarà data a queste domande soddisfacente risposta, io credo che si avrà tutto il diritto di considerare i getti della cromosfera come prodotti da uno stato di generale eruzione della superficie del sole, e come una reale manifestazione della vera attività solare.

Alcuni astronomi, sostenendo che le protuberanze non sono prodotte da eruzioni, ma da semplici sollevamenti della massa cromosferica, appoggiano la loro opinione principalmente sul fatto, piuttosto frequente, della minore altezza ed irregolarità della cromosfera nelle parti limitrofe alle protuberanze stesse. Ma senza ricorrere a questa spiegazione, che ci obbligherebbe ad ammettere nella superficie del sole delle forze ipotetiche ed improbabili, capaci di produrre questi strani e giganteschi sollevamenti della cromosfera, ristretti ad alcune speciali località e spesso quasi istantanei, mi sembra molto più naturale e ragionevole di spiegare questo fatto come una semplice alterazione nello stato di generale e normale eruzione della superficie solare, in causa della ineguale resistenza dello strato superficiale; la quale, opponendosi in alcune parti al libero efflusso dei gas e vapori, li obbliga a condensarsi e riunirsi nelle parti limitrofe, per erompere dalla superficie in masse gigantesche e con maggiore velocità di projezione.

Questa soppressione locale dei piccoli getti è manifestamente provata nelle regioni delle macchie, nelle quali ordinariamente la cromosfera è molto più compatta, regolare e bassa che nelle altre località, con getti vivissimi, ma molto più radi, i quali mancano ordinariamente sul vero posto del nucleo. È appunto in queste località ove le eruzioni, ristrette ad alcuni centri e specialmente sul bordo della macchia, raggiungono di tratto in tratto proporzioni gigantesche e spaventose, per la veemenza dei getti, per le loro rapide trasformazioni e per la varietà delle sostanze eruttate.

Nel mio lungo ed assiduo corso di osservazioni ho avuto occasione di esaminare attentamente e senza alcuna prevenzione questi singolari fenomeni, presentati dalle regioni delle macchie all'epoca della loro alzata e tramonto all'estremo bordo solare,

e sono stato forzatamente condotto a conchiudere, che nelle regioni delle macchie la fotosfera e la massa superficiale del sole è costituita in tali condizioni da contrastare la libera effusione o circolazione dei gas interni, obbligandoli quindi ad aprirsi violentemente la via attraverso le parti più debolmente resistenti, ove viene in certo modo sommata od accumulata l'attività propria della parte di superficie perturbata.

Qualunque spiegazione vorrà darsi alle macchie, io ritengo, sarà sempre difettosa e non accettabile, se non sia tale da rendere ragione della loro caratteristica proprietà di contrariare e localizzare le eruzioni od emanazioni dei gas interni dalla superficie del sole; ed anzi sono convinto, che la ricerca di questa spiegazione dovrebbe prendere le mosse da tale fatto, e basarsi principalmente sul medesimo.

Per mostrare che questa mia conclusione non è nè azzardata, nè contestabile, ho creduto opportuno di unire alla presente Nota i disegni di una gran parte dei rilievi da me presi nella cromosfera sulle località delle macchie; nei quali posso garantire l'esattezza delle posizioni relative dei getti o protuberanze colle macchie, perchè determinate con osservazioni differenziali, fatte col solo spettroscopio tanto sui getti quanto sui nuclei delle macchie.

Questi disegni sono presentati nelle tavole I, II, III, IV e V, colle rispettive date e coll'indicazione approssimata dell'angolo di posizione delle macchie, le quali sono figurate in piccoli tratti o lineette lucide sottoposte alla cromosfera: mentre nel Catalogo che forma appendice alla presente Nota è indicata, oltre alla data, l'ora della osservazione, con qualche speciale notizia relativa alla medesima. Gli angoli di posizione sono contati dal punto Nord verso Ovest e da 0° a 360°: nella tavola I è data la scala delle grandezze in minuti primi di arco.

Le protuberanze od eruzioni nelle località delle macchie sono generalmente contraddistinte da un carattere speciale, quello cioè di presentare molte righe lucide, oltre quelle dell'idrogeno, e fra queste sono rimarchevoli le righe 7055,0 e 6676,9 secondo l'Atlante dello spettro solare normale di Angström la prima delle quali trovasi fra le righe fraunhoferiane *a* e B, e la seconda fra B e C. Per non complicare troppo il Catalogo e la spiegazione delle figure colla indicazione di tutte le righe lucide osservate nelle varie eruzioni, ho creduto opportuno di limitarmi a notare soltanto queste due righe, chiamandole *a*B e BC, perchè oltre all'essere decisamente caratteristiche delle eruzioni limitrofe alle macchie, sono poi spesso visibili anche alla sommità dei getti. Nella maggior parte dei casi, in cui non riescirono visibili queste righe, ne furono causa le condizioni atmosferiche sfavorevoli a queste osservazioni.

Dall'esame di questi disegni facilmente si rileva, che ordinariamente al posto preciso dei nuclei delle macchie non corrispondono getti od eruzioni, le quali invece sono più o meno sviluppate sul loro contorno: non mancando però dei casi nei quali le eruzioni apparentemente sorgono sul posto della macchia; ma ciò deriva certamente da semplice effetto di prospettiva, pel quale i getti sono projettati sul posto della macchia, mentre la loro base trovasi fuori della medesima.

Che anzi, supponendo che le eruzioni possano colla stessa facilità e frequenza svilupparsi in tutto il contorno della macchia, le projezioni dei getti sul posto dei nuclei dovrebbero essere molto più numerose di quelle risultanti dalle osservazioni: il che tenderebbe a provare che sul bordo delle macchie le eruzioni sono più

frequenti, o più facili a svilupparsi nella direzione del meridiano che in quella del primo verticale. Ricercando poi il numero delle volte in cui le eruzioni prevalgono dal lato della macchia rivolto al polo, e da quello rivolto all'equatore, si trova che il numero delle eruzioni dalla parte del polo sta a quello delle eruzioni dalla parte dell'equatore nel rapporto di 3 a 2: e ciò mostrerebbe che i gas e vapori trovano attorno alle macchie più facile la via dalla parte dei poli, o che quivi più facilmente essi si accumulano e si condensano.

Un altro fatto comprovante la mancanza dei getti o delle eruzioni sui nuclei ci viene procurato dalla osservazione delle macchie sul disco solare, sui nuclei delle quali è raro il caso che le righe spettrali delle protuberanze si presentino rovesciate o lucide: mentre se i getti vivissimi, che ordinariamente sorgono presso le macchie, avessero realmente la loro base sulla macchia o sul nucleo, le loro righe spettrali dovrebbero apparire su questo sempre rovesciate. Mentre nei casi, in cui si osserva questo fenomeno, il rovesciamento delle righe ordinariamente è ristretto ad una porzione della macchia, mentre esso è distintamente visibile sul suo contorno, e talora anche sulla viva luce della fotosfera; ciò proverebbe, che i getti piuttostochè sorgere sul nucleo, sono semplicemente projettati sul medesimo.

Non intendo però di escludere la possibilità di eruzioni anche sui nuclei delle macchie, ma questo fatto sarebbe eccezionale, e probabilmente indizio della trasformazione, della rottura o dissoluzione delle macchie stesse.

Finalmente lo spettroscopio, contro l'opinione di molti astronomi e contro le più accreditate teorie delle macchie, mostra che la fotosfera anche sul posto delle macchie è regolarmente e nettamente terminata, senza indizî di quei marcati dislivelli e di quelle gigantesche perturbazioni meccaniche, dalle quali si suppongono prodotte le macchie stesse. Quando la fessura dello spettroscopio è diretta tangenzialmente al bordo solare, essa può rendere sensibili anche i piccoli dislivelli della fotosfera o dell' infima base della cromosfera; i quali sarebbero necessariamente accusati e manifestati dalle masse di luce e strisce lucide, che in corrispondenza alle medesime verrebbero projettate in posizione stabile sullo spettro atmosferico: mentre nelle moltissime ed accurate osservazioni, da me fatte a questo scopo sul bordo solare nella località delle macchie, ho trovato la fotosfera generalmente regolarissima al suo contorno, e soltanto in alcune rarissime circostanze, alla base di qualche vivissimo getto ho visto lo spettro continuo di punti o piccole masse appena sporgenti dalla fotosfera, e per brevissimo tempo.

Come dichiarai nelle mie precedenti Note a proposito di queste osservazioni, il loro risultato mostra che sul posto delle macchie o non esistono dislivelli od irregolarità sensibili nella superficie solare, o che almeno sono ristrette a proporzioni minime, e di gran lunga inferiori a quelle che alcuni ritengono di avere osservato col cannocchiale semplice; nei quali casi molto probabilmente si trattava non di reali dislivelli, ma di apparenti ondulazioni del bordo solare in causa dell'irradiazione e del contrasto di luce fra le facule e le parti limitrofe della superficie comparativamente molto meno lucide, e cioè le penombre e i nuclei stessi delle macchie projettate sul bordo.

Anche nella circostanza delle più gigantesche e violenti eruzioni, il limite della fotosfera o la base della cromosfera si è sempre trovata regolarissima, meno che in alcuni casi eccezionali, nei quali si trovarono alla base di alcuni getti o sopra alcuni

punti della cromosfera di quei parziali incurvamenti o spostamenti che vengono attribuiti a cambiamenti di refrangibilità dei raggi monocromatici in causa della grande velocità dei getti verso o contro l'osservatore. Perciò senza pretendere di escludere nella regione delle macchie uno stato di speciale attività meccanica, ritengo però che sia ben lontano da quello stato di sconvolgimento e di profonda agitazione, di cui alcuni ritengono essere le macchie centro e sede.

Cosicchè si ha ragione di ritenere che malgrado le violenti eruzioni gassose, che di tratto in tratto si sviluppano in quelle località, lo strato superficiale o la fotosfera non va soggetta che a moderate e quasi passeggere modificazioni nelle sue condizioni statiche e dinamiche: e che perciò le grandi variazioni di aspetto, che si osservano in tali località, non corrispondono, in gran parte almeno, ad effetti meccanici, e cioè a sollevamenti, trasporti, diramazioni, condensamenti di masse, ma piuttosto a semplici cambiamenti di stato, a semplici variazioni di splendore, prodotte nelle varie parti della superficie da rapide variazioni di temperatura, o da energiche azioni chimiche ed elettriche.

Il complesso di questi fatti mi sembra sufficiente a provare, che le perturbazioni nello stato di eruzione alla superficie solare debbono principalmente ripetersi da resistenze locali dello strato superficiale alla eruzione, all'efflusso normale dei gas e vapori interni; resistenze molto probabilmente risultanti da uno stato di maggior condensamento, o di più forte coesione o viscosità nella massa superficiale di esso strato, in causa di eccessivo raffreddamento.

Colle cose sinora esposte non ho certo la pretensione di avere tracciata la teoria delle macchie solari e delle loro periodiche variazioni, mentre io non ho avuto altro intendimento che quello di indicare ed esporre dei fatti, che dovrebbero servire come punto di partenza per dirigere le nostre ricerche sulla origine e sulla natura di questi fenomeni. Cosicchè senza attribuire alcuna importanza ai particolari apprezzamenti e giudizî da me fatti sui medesimi, e sulle speciali conseguenze che mi è sembrato ragionevole di dedurne, non esito però a dichiarare, che la spiegazione delle macchie e delle loro periodiche variazioni deve principalmente ricercarsi nelle eruzioni anormali della superficie solare, quali ci vengono presentate dalle osservazioni spettroscopiche della cromosfera, e subordinatamente alle condizioni e caratteri in esse verificati.

Fino ad ora le ricerche sulla causa del periodo delle macchie sono procedute in modo totalmente empirico, senza alcuna norma direttrice; poichè si trattava di ricercare la causa delle variazioni periodiche di un fenomeno di origine e natura totalmente ignota, insomma di un fenomeno ancora misterioso, e col solo dato del valore approssimato della durata del periodo di variazione, ossia del tempo intercetto fra il minimo e il massimo di frequenza del fenomeno stesso.

Essendo quindi il problema di sua natura indeterminato, se ne ricercava la soluzione a tentone, passando cioè in rivista i varî corpi celesti e principalmente i pianeti, che possono in qualche modo agire sulla massa solare, per verificare se nei loro movimenti e posizioni rispetto al sole vi fosse un qualche avvicendamento, una qualche periodica combinazione, la cui durata riescisse prossimamente eguale al periodo delle macchie, e le cui fasi presentassero qualche marcata coincidenza coi massimi e minimi delle macchie stesse; ed è appunto per questa via che si è dedotta la probabilità

dell'influenza di alcuni pianeti nella produzione del fenomeno, ma senza poter indicare e definire la natura di questa influenza.

Ma attualmente il problema diventa determinato, potendosi sostituire ad una manifestazione misteriosa della periodica perturbazione solare, quale è quella delle macchie, una manifestazione meccanica di indole determinata e nota, quali sono le protuberanze o le eruzioni anormali della superficie solare.

Sostituendo alle macchie le protuberanze, il problema si riduce alla ricerca di un'azione, di una causa atta a produrre una periodica perturbazione od alterazione nello stato di normale eruzione della superficie del sole, con quelle norme e in quelle proporzioni, che vengono indicate dalla frequenza, dalla grandezza, dalla distribuzione delle protuberanze, o delle eruzioni anormali nelle varie zone solari e nelle varie epoche di questo periodico avvicendamento. Con questa sostituzione, se il problema non può dirsi ancora risoluto, è però indicata chiaramente la via e lo scopo, nel quale debbono dirigersi le nostre ricerche e le nostre indagini per giungere alla desiderata soluzione.

SPECCHIO A

NUMERO DEI

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	X
0° a 10°	26	50	19	147	34	46	19	30	33	63	35	40	22	57	53	
10 » 20	35	103	38	163	41	45	23	26	65	43	41	34	28	40	52	
20 » 30	94	175	30	72	37	54	26	40	58	37	44	32	53	47	57	
30 » 40	93	86	21	104	60	93	41	101	143	95	104	115	137	109	98	
40 » 50	115	116	23	148	81	115	116	97	149	105	141	143	77	101	89	
50 » 60	103	126	52	147	96	119	119	134	212	138	145	135	70	70	64	
60 » 70	116	138	48	145	90	110	115	131	227	170	155	161	89	114	58	
70 » 80	92	146	41	137	74	115	120	102	212	115	159	148	97	112	66	
80 » 90	68	118	31	132	72	105	82	123	171	125	110	90	88	93	76	
SOMME																
Nord	742	1058	303	1195	585	802	661	784	1270	891	934	898	661	743	613	4
Sud	724	882	309	1218	588	685	644	757	1187	830	906	826	568	734	596	4
TOTALI . . .	1466	1940	612	2413	1173	1487	1305	1541	2457	1721	1840	1724	1229	1477	1209	9

SPECCHIO B

NUMERO DELLE GRAN

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XV
0° a 10	0	0	11	21	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10 » 20	0	21	16	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
20 » 30	8	44	8	8	0	3	0	1	1	3	0	0	4	0	2	
30 » 40	16	15	2	27	5	21	3	15	7	7	13	17	20	10	7	
40 » 50	18	23	4	39	17	32	23	29	15	9	22	14	10	6	4	
50 » 60	15	24	14	38	18	22	24	35	45	26	25	16	8	1	1	
60 » 70	12	25	12	34	14	23	15	18	42	23	23	24	8	11	1	
70 » 80	7	35	8	21	11	20	22	15	27	9	10	5	6	5	0	
80 » 90	6	13	11	16	10	17	13	14	22	8	5	2	4	5	1	
SOMME																
Nord	82	200	86	214	77	138	100	127	159	85	98	78	60	38	16	1
Sud	104	172	70	276	68	119	95	146	123	84	66	56	40	28	12	1
TOTALI . . .	186	372	156	520	145	257	195	273	282	169	164	134	100	66	28	3

R TUBERANZE SOLARI

ISTANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0° a 10°	14	24	11	133	53	26	7	25	41	38	35	39	20	41	39	38
10 » 20	33	32	23	196	43	24	12	33	46	31	41	43	22	38	36	42
20 » 30	76	86	42	60	46	42	12	45	63	37	45	51	50	57	33	45
30 » 40	91	110	10	62	39	66	41	73	81	65	92	149	153	125	70	52
40 » 50	110	119	22	128	58	93	93	93	137	106	121	122	80	74	82	62
50 » 60	98	123	54	156	87	114	136	100	200	98	122	96	52	74	57	50
60 » 70	135	140	51	175	94	126	136	118	184	139	170	115	78	93	95	55
70 » 80	95	123	59	170	87	105	127	146	221	179	157	115	58	119	101	50
80 » 90	72	125	37	138	81	89	80	124	214	137	123	96	55	113	83	71
Somme	724	882	309	1218	588	685	644	757	1187	830	906	826	568	734	596	465

R TUBERANZE SOLARI

ISTANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0° a 10	0	0	1	26	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	0	2	61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	12	16	4	10	0	1	0	3	0	0	0	0	2	2	0	0
30 » 40	25	32	7	7	2	12	3	10	5	1	3	6	26	9	0	1
40 » 50	25	25	7	30	5	23	23	26	9	8	7	18	7	3	2	5
50 » 60	9	23	16	52	19	29	20	32	29	10	14	12	0	1	3	2
60 » 70	18	39	8	39	15	28	27	31	26	21	14	6	3	2	4	2
70 » 80	7	20	12	32	17	17	15	24	31	30	23	13	1	5	3	1
80 » 90	8	17	13	19	9	9	7	20	23	14	5	1	1	6	0	0
Somme	104	172	70	276	68	119	95	146	123	84	66	56	40	28	12	11

SPECCHIO A

NUMERO DELLE PROTUBERANZE SOLARI

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0° a 10°	26	50	19	147	34	46	19	30	33	63	35	40	22	57	53	39
10 » 20	35	103	38	163	41	45	23	26	65	43	41	34	28	40	52	33
20 » 30	94	175	30	72	37	54	26	40	58	37	44	32	53	47	57	43
30 » 40	93	86	21	104	60	93	41	101	143	95	104	115	137	109	98	61
40 » 50	115	116	23	148	81	115	116	97	149	105	141	143	77	101	89	67
50 » 60	103	126	52	147	96	119	119	134	212	138	145	135	70	70	64	57
60 » 70	116	138	48	145	90	110	115	131	227	170	155	161	89	114	58	70
70 » 80	92	146	41	137	74	115	120	102	212	115	159	148	97	112	66	60
80 » 90	68	118	31	132	72	105	82	123	171	125	110	90	88	93	76	53
SOMME																
Nord	742	1058	303	1195	585	802	661	764	1270	891	934	898	661	743	613	480
Sud	724	882	309	1218	588	685	644	757	1187	830	906	826	568	734	596	465
TOTALI	1466	1940	612	2413	1173	1487	1305	1541	2457	1721	1840	1724	1229	1477	1209	945

DISTANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0° a 10°	14	24	11	133	53	26	7	25	41	38	35	39	20	41	39	38
10 » 20	33	32	23	196	43	24	12	33	46	31	41	43	22	38	36	42
20 » 30	76	86	42	60	46	42	12	45	63	37	45	51	50	57	33	45
30 » 40	91	110	10	62	39	66	41	73	81	65	92	149	153	125	70	52
40 » 50	110	119	22	128	58	93	93	93	137	106	121	122	80	74	82	62
50 » 60	98	123	54	156	87	114	136	100	200	98	122	96	52	74	57	50
60 » 70	135	140	51	175	94	126	136	118	184	139	170	115	78	93	95	55
70 » 80	95	123	59	170	87	105	127	146	221	179	157	115	58	119	101	50
80 » 90	72	125	37	138	81	89	80	124	214	137	123	96	55	113	83	71
SOMME	724	882	309	1218	588	685	644	757	1187	830	906	826	568	734	596	465

SPECCHIO B

NUMERO DELLE GRANDI PROTUBERANZE SOLARI

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0° a 10	0	0	11	21	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	21	16	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	8	44	8	8	0	3	0	1	1	3	0	0	4	0	2	0
30 » 40	16	15	2	27	5	21	3	15	7	7	13	17	20	10	7	2
40 » 50	18	23	4	39	17	32	23	29	15	9	22	14	10	6	4	6
50 » 60	15	24	14	38	18	22	24	35	45	26	25	16	8	1	1	2
60 » 70	12	25	12	34	14	23	15	18	42	23	23	24	8	11	1	3
70 » 80	7	35	8	21	11	20	22	15	27	9	10	5	6	5	0	3
80 » 90	6	13	11	16	10	17	13	14	22	8	5	2	4	5	1	3
SOMME																
Nord	82	200	86	244	77	138	100	127	159	85	98	78	60	38	16	19
Sud	104	172	70	276	68	119	95	146	123	84	66	56	40	28	12	11
TOTALI	186	372	156	520	145	257	195	273	282	169	164	134	100	66	28	30

DISTANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0° a 10	0	0	1	26	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	0	2	61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	12	16	4	10	0	1	0	3	0	0	0	0	2	2	0	0
30 » 40	25	32	7	7	2	12	3	10	5	1	3	6	26	9	0	1
40 » 50	25	25	7	30	5	23	23	26	9	8	7	18	7	3	2	3
50 » 60	9	23	16	52	19	29	20	32	29	10	14	12	0	1	3	2
60 » 70	18	39	8	39	15	28	27	31	26	21	14	6	3	2	4	2
70 » 80	7	20	12	32	17	17	15	24	31	30	23	13	1	5	3	1
80 » 90	8	17	13	19	9	9	7	20	23	14	5	1	1	6	0	0
SOMME	104	172	70	276	68	119	95	146	123	84	66	56	40	28	12	11

NUMERI DIURNI DEL
moltipli

Specchio C

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	
0 a 10	37	63	61	219	92	74	37	43	31	72	40	48	24	69	50	
10 » 20	49	129	123	243	111	73	45	37	61	50	46	41	30	41	49	
20 » 30	132	222	96	107	100	87	51	57	54	43	49	38	58	48	53	
30 » 40	131	109	68	155	162	150	80	144	134	109	117	137	147	112	91	
40 » 50	162	147	74	221	219	186	227	139	139	120	158	170	83	104	83	
50 » 60	145	159	168	219	259	192	233	191	198	158	166	161	75	72	60	
60 » 70	163	175	152	216	243	178	226	187	212	196	174	192	96	117	54	
70 » 80	129	185	133	204	200	186	235	146	198	132	179	176	104	115	62	
80 » 90	96	149	100	197	194	169	161	176	160	144	123	108	95	96	71	
Somme																
Nord	1044	1338	975	1781	1580	1295	1295	1120	1187	1024	1052	1071	712	774	573	
Sud	1020	1117	999	1816	1588	1105	1264	1081	1110	958	1017	980	609	766	559	
Totali	2064	2455	1974	3597	3168	2400	2559	2201	2297	1982	2069	2051	1321	1540	1132	

NUMERI DIURNI DELLE GRA
moltipli

Specchio D

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI														
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
0 a 10	0	0	36	31	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	27	52	60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	11	56	26	12	0	5	0	4	1	4	0	0	4	0	2
30 » 40	23	19	6	40	14	34	6	21	7	8	15	20	21	10	7
40 » 50	25	29	13	59	46	52	45	41	14	10	26	17	11	6	4
50 » 60	21	30	45	58	51	35	47	50	42	30	29	19	9	1	1
60 » 70	17	32	39	50	38	37	29	26	39	26	26	29	9	11	1
70 » 80	10	44	26	31	30	32	43	21	25	10	11	6	6	5	0
80 » 90	8	16	32	24	27	27	26	20	20	9	6	3	4	5	1
Somme															
Nord	115	253	275	365	211	222	196	180	148	97	113	94	64	38	16
Sud	146	218	227	413	187	191	186	208	114	98	75	65	42	28	12
Totali	261	471	502	778	398	413	382	388	262	195	188	159	106	66	28

TUBERANZE SOLARI
OO

STANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0 a 10	20	30	36	198	143	42	14	36	38	43	39	46	21	42	36	38
10 » 20	46	41	76	292	116	39	24	47	43	40	46	51	24	39	34	42
20 » 30	107	109	136	90	124	68	24	64	59	43	51	60	54	69	32	45
30 » 40	128	139	32	91	105	106	80	104	76	75	103	178	164	129	66	52
40 » 50	155	151	71	191	157	150	182	133	128	120	136	145	86	76	77	62
50 » 60	138	156	174	233	235	184	267	143	187	113	137	114	55	76	53	50
60 » 70	190	177	165	261	254	203	267	169	172	160	191	136	84	96	89	55
70 » 80	134	156	190	251	235	169	249	209	207	206	176	136	62	123	94	50
80 » 90	102	158	119	206	219	144	157	176	200	158	138	114	59	116	78	71
Somme																
N	1020	1117	999	1816	1588	1105	1264	1081	1110	958	1017	980	609	766	559	465
S																
Totali . . .																

TUBERANZE SOLARI
OO

STANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0 a 10	0	0	3	39	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	0	6	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	17	20	13	15	0	2	0	4	0	0	0	0	2	2	0	0
30 » 40	35	41	23	10	5	19	6	14	5	1	3	7	28	9	0	1
40 » 50	35	32	23	45	14	37	45	37	8	10	8	21	7	3	2	5
50 » 60	13	29	52	80	54	47	39	46	27	12	16	14	0	1	3	2
60 » 70	25	49	26	58	41	45	53	44	24	24	16	7	3	2	4	2
70 » 80	8	25	39	48	46	27	29	34	29	35	26	15	1	5	3	1
80 » 90	13	22	42	28	24	14	14	29	21	16	6	1	1	6	0	0
Somme																
N	146	218	227	413	187	191	186	208	114	98	75	65	42	28	12	11
S																
Totali . . .																

NUMERI DIURNI DELLE PROTUBERANZE SOLARI

Specchio C — moltiplicat[o] per 100

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0 a 10	37	63	61	219	92	74	37	43	31	72	40	48	24	69	50	38
10 » 20	49	129	123	243	111	73	45	37	61	50	46	41	30	41	49	36
20 » 30	132	222	96	107	100	87	51	57	54	43	49	38	58	48	53	43
30 » 40	131	109	68	155	162	150	80	144	134	109	117	137	147	112	91	61
40 » 50	162	147	74	221	219	186	227	139	139	120	158	170	83	104	83	67
50 » 60	145	159	168	219	259	192	233	191	198	158	166	161	75	72	60	57
60 » 70	163	175	152	216	243	178	226	187	212	196	174	192	96	117	51	70
70 » 80	129	185	133	204	200	186	235	146	198	132	179	176	104	115	62	60
80 » 90	96	149	100	197	194	169	161	176	160	144	123	108	95	96	71	53
Somme																
Nord	1044	1338	975	1781	1580	1295	1295	1120	1187	1024	1052	1071	712	774	573	480
Sud	1020	1117	999	1816	1588	1105	1264	1081	1110	958	1017	980	609	766	559	465
Totali	2064	2455	1974	3597	3168	2400	2559	2201	2297	1982	2069	2051	1321	1540	1132	945

DISTANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0 a 10	20	30	36	198	143	42	14	36	38	43	39	46	21	42	36	38
10 » 20	46	41	76	292	116	39	24	47	43	40	46	51	24	39	34	42
20 » 30	107	109	136	90	124	68	24	64	59	43	51	60	54	69	32	45
30 » 40	128	139	32	91	105	106	80	104	76	75	103	178	164	129	66	52
40 » 50	155	151	71	191	157	150	182	133	128	120	136	145	86	76	77	62
50 » 60	138	156	174	233	235	184	267	143	187	113	137	114	55	76	53	50
60 » 70	190	177	165	261	254	203	267	169	172	160	191	136	84	96	89	55
70 » 80	134	156	190	254	235	169	249	209	207	206	176	136	62	123	94	50
80 » 90	102	158	119	206	219	144	157	176	200	158	138	114	59	116	78	71
Somme																
Nord	1020	1117	999	1816	1588	1105	1264	1081	1110	958	1017	980	609	766	559	465
Sud																
Totali																

NUMERI DIURNI DELLE GRANDI PROTUBERANZE SOLARI

Specchio D — moltiplicat[o] per 100

DISTANZE POLARI	EMISFERO NORD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0 a 10	0	0	36	31	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	27	52	60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	11	56	26	12	0	5	0	4	1	4	0	0	4	0	2	0
30 » 40	23	19	6	40	14	34	6	21	7	8	15	20	21	10	7	2
40 » 50	25	29	13	59	46	52	45	41	14	10	26	17	11	6	4	2
50 » 60	21	30	45	58	51	35	47	50	42	30	29	19	9	1	1	1
60 » 70	17	32	39	50	38	37	29	26	39	26	26	29	9	11	1	1
70 » 80	10	44	26	31	30	32	43	21	25	10	11	6	6	5	0	1
80 » 90	8	16	32	24	27	27	26	20	20	9	6	3	4	5	1	0
Somme																
Nord	115	253	275	365	211	222	196	180	148	97	113	94	64	38	16	10
Sud	146	218	227	413	187	191	186	208	114	98	75	65	42	28	12	11
Totali	261	471	502	778	398	413	382	388	262	195	188	159	106	66	28	21

DISTANZE POLARI	EMISFERO SUD — PERIODI															
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
0 a 10	0	0	3	39	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 » 20	0	0	6	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20 » 30	17	20	13	15	0	2	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
30 » 40	35	41	23	10	5	19	6	14	5	1	3	7	2	2	0	0
40 » 50	35	32	23	45	14	37	45	37	8	10	8	21	28	9	0	1
50 » 60	13	29	52	80	54	47	39	46	27	12	16	14	7	3	2	5
60 » 70	25	49	26	58	41	45	53	44	24	24	16	7	0	1	3	2
70 » 80	8	25	39	48	46	27	29	34	29	35	26	15	3	2	4	2
80 » 90	13	22	42	28	24	14	14	29	21	16	6	1	1	5	3	1
Somme																
Nord	146	218	227	413	187	191	186	208	114	98	75	65	42	28	12	11
Sud																
Totali																

CATALOGO E SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLE TAVOLE I, II, III, IV e V.

N. B. *Le ore sono contate dalla mezzanotte, e da* 0^h *a* 24^h.

1870.

	g	h m		
Gen.	4	13.50	A 296°	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
	21	14.10	132.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi.
	30	13.15	86.	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
Febb.	4	14.10	118.	Macchie al bordo, getti vivissimi.
	4	14.55	254.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi e masse nebulose.
	23	8.20	93.	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
	26	10.40	134.	Macchie al bordo, getto straordinario per forma, splendore, e rapide trasformazioni.
Marzo	8	14. 8	310.	Macchia al bordo, getti lucidissimi.
	9	9.30 *(a)*	102.	Macchia al bordo, getti lucidissimi—$14^h.45^m$. *(b)* getti lucid^{mi}., visibili *a*B e BC.
	9	9.20	307.	Macchia presso il bordo, getti lucidissimi.
	11	15.22 *(a)*	270.	Macchie presso al bordo, getti bassi lucidissimi — $16^h.40^m$. *(b)* getti giganteschi lucidissimi e sensibilmente parabolici, visibili *a*B e BC anche alla sommità dei getti, rapidissime variazioni di forma e splendore.
	20	15.10	103.	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
	20	10. 0	274.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi.
	21	13.42 *(a)*	100.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC — $13^h.46^m$. *(b)* getti giganteschi sviluppati in circa 2^m., e pochi minuti dopo ricurvati sul bordo.
	21	8.35 *(a)*	275.	Macchia poco lontano dal bordo, piccolo getto lucidissimo, con ispettro quasi continuo alla base — $14^h.17^m$. *(b)* getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Aprile	1	8.45	310.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	4	15.30	140.	Gruppo di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	4	8.20 *(a)*	310.	Gruppo di macchie al bordo, getti lucidissimi, alta nube. — $15^h.10^m$. *(b)* nube deformata e comunicante col bordo per un sottilissimo getto.
	5	17.10	271.	Macchia al bordo, gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	11	10.50	143.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	18	8.35 *(a)*	306.	Macchia presso al bordo con altre vicine: piccoli getti lucidissimi e gruppo di alti getti ricadenti sul sole, visibili *a*B e BC — $10^h.40^m$. *(b)* getti lucidissimi.
	18	10. 7 *(a)*	94.	Macchie vicine al bordo, getti straordinarî, variabili a colpo d'occhio: visibili *a*B e BC anche alla sommità dei getti; alla base di qualche getto tutto lo spettro diventa lucidissimo ad intervalli — $10^h.15^m$. *(b)* getti vivissimi trasformati — $10^h.46^m$. *(c)* i grandi getti scomparsi.
	19	8.50	270.	Macchie al bordo, getti bassi lucidissimi.
	20	10.10	272.	Piccola macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	24	8.30	126.	Piccola macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	24	8.45	99.	Macchia vicina al bordo, punte vivissime, visibili *a*B e BC.
	24	10.16	282.	Larga macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	25	8.50	282.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e molto variabili, visibili *a*B e BC.
	27	7.40 (*a*)	273.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — $8^h.3^m$. (*b*) alla base di un piccolo getto tutto lo spettro è lucido — $9^h.10^m$. *(c)* piccoli getti vivissimi — $14^h.35^m$. (*d*) cromosfera mancante al posto della macchia.
	29	9.10	138.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e molto variabili, visibili *a*B e BC.
Maggio	3	9.40	312.	Larga macchia al bordo, piccoli getti vivissimi, visibili *a*B e BC.
	8	7.38 (*a*)	272.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC; altra macchia a 281° — $10^h.55^m$. (*b*) getti luc.^{mi}, cromosfera interrotta sul posto della macchia a 281°.

g	h m		
Mag. 13	13.45	A 268°	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, grandi e variabili, visibili *a*B e BC — 14h.25m. (*b*) grande getto diviso e interrotto — 14h. 59m. (*c*) getti totalmente trasformati.
13	14.10	305.	Macchie vicine al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
14	8.40	264.	Larga macchia poco lontana dal bordo, getti vivissimi, visibili *a*B e BC.
15	14. 0	267.	Larga macchia al bordo, arco lucidissimo sulla macchia, gruppo vicino di alti getti, visibili *a*B e BC.
20	8.20 (*a*)	263.	Macchie vicine al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC — 17h.50m. (*b*) getti più sviluppati.
21	8.15	129.	Macchie al bordo, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC.
21	8.40	91.	Macchia vicina al bordo, getti lucidi.mi e gran massa nebulosa, visibili *a*B e BC.
21	3.28 (*a*)	261.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi e molto variabili, visibili *a*B e BC— 8h.48m. (*b*) getti totalmente variati.
24	8.20	267.	Macchie vicine al bordo, piccoli getti lucidissimi.
25	7.55	268.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
27	15. 5	130.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
30	14.45	297.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, nube lucida, gigantesca, distante 1′′/2 dal bordo.
Giugno 2	17.15	134.	Macchia al bordo, getti lucidissimi.
4	8. 5	84.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
26	9.30	292.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, cromosfera bassissima.
29	9.30	87.	Macchie al bordo, getti vivissimi, visibili *a*B e BC, cromosfera bassissima.
Luglio 1	15.20	280.	Macchie al bordo, pochi getti, a 283° getto e massa lucidissima, visibile anche sulla fotosfera, visibili *a*B e BC.
9	17.40 (*a*)	246.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, alcuni penetranti sulla fotosfera, la C presenta qualche irregolarità sui getti, visibili *a*B e BC — 5h.50m. (*b*) getti totalmente cambiati — 18h.5m. (c) archi lucidissimi al disopra della macchia.
10	9.30 (*a*)	70.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 18h.45m. (*b*) getti lucidissimi con nube.
14	14.45	101.	Macchia al bordo, cromosfera quasi mancante, visibili *a*B e BC.
15	8.54 (*a*)	100.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 9h.0m. (*b*) archi lucidissimi, e massa nebulosa — 14h.30m. (*c*) getti lucidissimi — 14h.35m. (*d*) getti lucidissimi, irregolare la C.
20	10.40 (*a*)	67.	Macchia al bordo, getti e massa nebulosa lucidissima, visibili *a*B e BC — 14h.50m. (*b*) getti lucidissimi.
30	8.20 (*a*)	243.	Larga macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, la C è allargata sopra i getti, visibili *a*B e BC — 10h.30m. (*b*) getti sempre lucidissimi.
Agosto 1	10. 0	86.	Macchia vicina al bordo, getti, masse piccole lucidissime con nube gigantesca, visibili *a*B e BC.
5	17.50	94.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi.
5	11. 0 (*a*)	232.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 17h.40m. (*b*) getti lucidissimi.
7	10.48 (*a*)	63.	Bella macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 17h.30m. (*b*) getti lucidissimi, cromosfera mancante sul posto della macchia — 17h.37m. (*c*) getti più sviluppati.
10	18.10	90.	Macchia al bordo, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC.
11	11.10	272.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi e nube, visibili *a*B e BC.
14	14.35	101.	Macchia al bordo, getti lucidissimi bassi.
14	18.30	243.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi.
15	10. 5	270.	Macchie poco lontane dal bordo. getti lucidissimi e molto variabili, visibili *a*B e BC.

	g	h m		
Agosto	21	15. 8	A 55°	Macchia vicina al bordo, getto gigantesco, cromosfera quasi regolare.
	21	14.50	(*a*) 275.	Macchie presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 15h.0m. (*b*) massa nuvolosa lucidissima — 15h.5m. (*c*) getto lucidissimo — 15h.30m. (*d*) getti bassi lucidissimi, cromosfera bassa.
	23	15.10	*(a)* 266.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi intrecciati, visibili *a*B e BC — 17h.35m. *(b)* arco lucidissimo troncato sulla macchia.
	24	12. 0	*(a)* 266.	Macchia tramontata, getti giganteschi e variabili, visibili *a*B e BC— 12h.26m. *(b)* getto gigantesco, stranissimo e variabilissimo — 16h.30m. *(c)* piccoli getti lucidissimi.
	24	12.45	*(a)* 231.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e strani di forma, cromosfera quasi mancante — 17h.30m. *(b)* getti sempre strani, visibili *a*B e BC.
	25		230.	Traccia di macchie vicine al bordo, grandi masse nebulose,cromosfera bassa.
	27	17.50	*(a)* 59.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC. — 18h.0m. *(b)* getto variabile — 18h.10m. *(c)* massa straordinaria per forma ed altezza, la cromosfera è quasi invisibile sotto l'arco luminoso.
	28	10.50	*(a)* 101.	Larga macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 11h.35m. *(b)* getti vivissimi.
	31	9.50	266.	Macchia presso al bordo, getto lucidissimo, piccolo getto vivissimo che si projetta sulla fotosfera, visibili *a*B e BC.
Sett.	4	9.50	88.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	4	10.15	*(a)* 57.	Macchia presso al bordo, grande getto lucidissimo che ricadendo sul bordo si rende più lucido, visibili *a*B e BC — 16h.54m. *(b)* getti bassi lucidissimi.
	5	9.20	*(a)* 49.	Macchia presso al bordo, altra macchia a 58°, getti lucidissimi e nubi, visibili *a*B e BC — 14h.5m. *(b)* getti strani e molto variabili a 58° — 16h.50m. *(b)* getti vivissimi.
	6	10.20	52.	Macchia vicina al bordo, altra più lontana, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	7	16.40	52.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e bassi, visibili *a*B e BC.
	9	13. 5	*(a)* 70.	Macchia distante 10″ dal bordo, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC — 16h.40m. *(b)* getti bassi lucidissimi.
	10	10. 0	258.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi.
	25	11. 0	95.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	28	10.40	*(a)* 40.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi e variabili, punti lucidissimi — 16h.35m. *(b)* piccoli getti lucidissimi, la C irregolare, visibili *a*B e BC.
	29	16.30	266.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Ottob.	1	10.10	50.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC.
	2	9. 5	*(a)* 52.	Macchie presso e getti lucidissimi, punto lucidissimo alla base di un getto colla C allargata, visibili *a*B e BC — 10h.5m. *(b)* getti lucidissimi.
	2	11.55	285.	Piccole macchie, getto strano, gigantesco e lucidissimo, visibili *a*B e BC.
	3	10.15	51.	Macchie al bordo, piccoli getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	7	17. 0	257.	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
	11	14. 0	269.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	12	9.45	258.	Macchia presso al bordo, altra macchia a 270°, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	20	10.44	*(a)* 84.	Grande macchia distante 25″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 10h.48m. *(b)* il getto più alto varia intermittentemente di splendore — 12h.35m. *(c)* ai lati della macchia due getti ricurvi lucidissimi, getto debole sulla macchia.
	22	9.30	*(a)* 68.	Eruzione gigantesca, complicatissima e variabilissima, non si è potuto verificare se vi siano macchie vicine — 12h.8m. *(b)* massa gigantesca persistente, ma totalmente cambiata, getti lucidissimi a 76°, visibili *a*B e BC.
	26	14.28	220.	Macchia al bordo, punti lucidissimi e getti variabilissimi, visibili *a*B e BC.

	g	h m		
Ottob.	28	13. 5	Λ 264°.	Macchie al bordo, getti piccoli lucidissimi, visibili *a*B e BC — 13h.24m. *(b)* getti lucidissimi vagamente intrecciati, e continuamente variabili — 15h.4m. *(c)* getti lucidi arcuati.
	29	10.25	51.	Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	29	11.40 *(a)*	262.	Gruppo di macchie vicine al bordo, getti bassi lucidissimi con nube gigantesca — 12h.18m. *(b)* eruzione straordinaria, sviluppata prima per getti sottilissimi, che incontrandosi formarono una nube, alla cui detonazione seguì una deformazione generale della massa con diramazioni a più di 6′ di altezza, trasformazioni straordinarie e rapidissime — 12h.55m. *(c)* non restano più che tratti o lineette lucide irregolarmente sparse in una grande estensione — 13h.25m. *(d)* getto gigantesco con piccoli getti, cromosfera sempre bassa e visibili sempre *a*B e BC.
Nov.	24	15.48	284.	Piccole macchie vicine al bordo, eruzione straordinaria sopra una grande estensione, bellissimi getti parabolici lucidissimi, in alcuno dei quali sono visibili le *a*B e BC anche alla sommità.
	25	9.45 *(a)*	62.	Larga macchia distante circa 10″ dal bordo, getti strani, variabilissimi e giganteschi, visibili *a*B e BC, la C sul contorno della macchia è lucida anche all'interno del disco — 10h.18m. *(b)*, 10h 25m. *(c)*, 10h.30m. *(d)*, 10h.34m. *(e)*, 10h.37m. *(f)*, 11h.10m. *(g)*, 12h.10m. *(h)*, 15h.2m. *(i)* forme successive dei getti nella stessa località.
	25	14.40	274.	Macchie presso al bordo, getti lucidissimi e variati, visibili *a*B e BC.
	29	15.10	243.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi, gruppo strano di getti a 249°, visibili *a*B e BC.
	30	12. 5	240.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Dec.	8	15.30	276.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, getti nebulosi giganteschi e variabili.
	11	15.30	89.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	18	13.50	101.	Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi.
	18	13.58	90.	Getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, probabilmente macchia vicina.
	22	15.42	76.	Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.

1871.

Febb.	7	15. 5 *(a)*	306.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 15h.55m. *(b)* gruppo di getti lucidissimi.
	8	10.35	307.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi alti, uno più alto debole, visibili *a*B e BC — 14h.0m. *(b)*, 14h.20m. *(c)*, 14h.30m. *(d)*, 14h.40m. *(e)* aspetti successivi della cromosfera nella stessa località.
	13	14.30	307.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	18	15.40	277.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi bassi, visibili *a*B e BC.
	24	15.25	92.	Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	25	14.50	278.	Traccie di macchie al bordo, getti molto sviluppati lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC.
	27	14.55	128.	Macchia presso al bordo, pochi getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	27	15.15	286.	Macchie vicine al bordo, getti bassi lucidissimi, nubi alte, visibili *a*B e BC.
Marzo	6	14.50	113.	Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	6	14.35 *(a)*	307.	Macchie al bordo, getti intrecciati lucidissimi, altri più deboli, visibili *a*B e BC — 15h.0m. *(b)* getti molto variati, nube alta, e fiocco lucidissimo sopra un piccolo getto.
	7	14.15 *(a)*	309.	Macchia vicina al bordo, stupenda eruzione, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC — 15h.15m. *(b)* getti cambiati, punto straordinariamente lucido presso la macchia.
	8	14.50	314.	Macchia presso al bordo, belli e lucidissimi getti, visibili *a*B e BC.

g	h m		
Marzo 10	14.40	A 128°	Larga macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi, massa nuvolosa.
12	10.25	127.	Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Aprile 5	10.45	93.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
8	15.15	*(a)* 288.	Traccie di macchie al bordo, getti straordinariamente lucidi e masse nuvolose, visibili *a*B e BC — 17h.30m. *(b)* getti cambiati, punto lucidissimo alla base del getto più grande.
16	10.36	293.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e variabili.
17	16.56	289.	Macchie vicine al bordo, getto straordinariamente lucido, visibili *a*B e BC e moltissime altre righe rovesciate.
19	9.25	135.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, cromosfera quasi interrotta, visibili *a*B e BC.
19	11.50	*(a)* 275.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi variabili, nube alta, visibili *a*B e BC — 12h.6m. *(b)*, 14h.10m. *(c)* aspetto della cromosfera nella stessa località.
22	8.30	99.	Macchie presso al bordo, getti bassi e lucidissimi, cromosfera quasi mancante al posto delle macchie.
22	8.55	124.	Macchie presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
25	8.30	*(a)* 103.	Larga macchia distante 20″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 15h.15m. *(b)* getti bassi lucidissimi — 16h.40m. *(c)* cromosfera bassa lucidissima.
26	7.45	*(a)* 277.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassissima, visibili *a*B e BC — 11h.15m. *(b)* getti più sviluppati, cromosfera quasi mancante con debole sfumatura superiore.
27	8.15	*(a)* 281.	Macchia al bordo ed altra più lontana, a 279° eruzione straordinaria, getti continuamente variabili, visibili le *a*B e BC e le righe del magnesio anche nelle parti superiori dei getti — 8h.30m. *(b)* continua e più violentemente l'eruzione, la riga F presenta sensibili irregolarità, e così la C — 17h.0m. *(c)* eruzione diminuita, cromosfera bassissima al posto della macchia.
28	10.10	*(a)* 282.	Grande macchia distante dal bordo 30″ circa, getti lucidissimi e molto sviluppati, visibili *a*B e BC — 13h.50m (*b*) macchia al bordo a 280°, grandi e vivi getti continuamente variabili.
30	9.25	*(a)* 102.	Macchia vicinissima al bordo, cromosfera bassa, pochi getti bassi e lucidissimi — 10h.0m. *(b)* getti bassi lucidissimi — 18h.5m. *(c)* sul posto della macchia la cromosfera è debolissima.
Maggio 2	8. 0	*(a)* 86.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC — 8h.30m. *(b)* getti più sviluppati sui lati della macchia, e piccoli getti sul posto di questa — 14.15 *(c)* getti variati e lucidissimi.
6	16.45	309.	Macchia al bordo, getti lucidissimi che si allungano rapidamente, visibili *a*B e BC.
8	8. 0	*(a)* 308.	Macchie al bordo, visibili *a*B e BC — 13h.10m. *(b)* cromosfera bassissima al posto delle macchie — 15h.0m. *(c)* getti lucidissimi giganteschi.
11	8.25	*(a)* 127.	Grande gruppo di macchie presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 13h.15m. *(b)* getti lucidissimi, facula al bordo senza getti — 14h.35m. *(c)* getti lucidissimi strato basso — 14h.55m. *(d)* getti bassi e massa nuvolosa lucidissimi.
12	8. 5	*(a)* 125.	Macchia presso al bordo, gruppo di getti giganteschi, e piccoli getti, visibili *a*B e BC — 8h.35m. *(b)* getti lucidissimi e molto sviluppati ai lati della macchia.
20	16.55	276.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
21	14.30	96.	Macchie al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
22	14.40	*(a)* 125.	Macchia vicina al bordo, cromosfera bassa, getti lucidissimi a 429° — 17h.45m. *(b)* molto più sviluppati i getti, visibili *a*B e BC.
26	10.20	276.	Macchia vicina al bordo, cromosfera sfumata e getto lucidissimo.
26	9.45	*(a)* 308.	Macchia al bordo, cromosfera bassa, nube lucida, visibili *a*B e BC — 14h.30m. *(b)* cromosfera bassa, getti lucidissimi a 304°.

	g	h m		
Mag.	27	8.20	A 118°	Macchia presso al bordo, punto lucidissimo — 14h.45m. *(b)* getti bassi.
	27	8. 0	307.	Macchia vicina al bordo, cromosfera e getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Giugno	4	11. 5	261.	Macchie al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	7	16.50	296.	Macchie al bordo, pochi getti lucidissimi.
	10	15.40	321.	Macchia al bordo, cromosfera bassa, getti lucidi e piccola nube.
	10	17.15	308.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC.
	11	7.50 *(a)*	308.	Macchia grande al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassa, nube alta, visibili *a*B e BC — 7h.56m. *(b)* getti totalmente cambiati, nube scomparsa — 9h.40m. *(c)* getti giganteschi troncati a guisa di nubi — 14h.45m *(d)* getti bassi e lucidissimi, la macchia distante 2″ o 3″ dal bordo.
	14	8.15 *(a)*	109.	Larga macchia sul bordo, getti bassi lucidissimi e grandi masse nuvolose — 8h.50m. *(b)* getti giganteschi, arco lucidissimo sulla macchia, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC—9h.15m. *(c)*, 9h.30m. *(d)*, 14h.36m. *(e)* trasformazioni successive.
	16	8.45	111.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi con masse nuvolose, visibili *a*B e BC.
	17	8.10 *(a)*	93.	Larga macchia vicina al bordo, piccoli getti sulla macchia, getti giganteschi variabilissimi e strani a lato della macchia, visibili *a*B e BC — 14h.57m *(b)* getti lucidissimi bassi, vicini alla macchia, cromosfera sfumata — 15h.25m. *(c)*, 16h.55m. *(d)*, 17h.0m. *(e)* trasformazioni successive.
	20	8.30 *(a)*	82.	Macchia al bordo, pennacchi luminosi, strani, variabili, visibili *a*B e BC — 8h.45m. *(b)*, 9h.15m. *(c)* successive trasformazioni.
	24	8.45 *(a)*	69.	Macchia poco lontana dal bordo, getti lucidi bassi, grande massa nuvolosa di forma stranissima — 18h.0m. *(b)* getti bassi, fra la macchia e il bordo la C è rovesciata.
	25	15.25	249.	Traccie di macchie al bordo, grossi getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	29	10.10	260.	Larga macchia al bordo, grandi getti e pennacchi lucidi, cromosfera sfumata.
	30	9. 0 *(a)*	257.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidi e grande massa nuvolosa — 9h.30m. *(b)* getti straordinariamente lucidi, cromosfera sfumata e debole.
Luglio	1	13.55 *(a)*	284.	Larga macchia distante 15″ circa, altra macchia a 281° sul bordo, grandi getti lucidissimi, cromosfera bassa lucidissima—14h.15m. *(b)* getti lucidissimi variabili, cromosfera bassa—14h.32m. *(c)*, 14h.40m. *(d)*, trasformazioni successive.
	2	8.45	70.	Macchia tramontata, getti lucidi bassi.
	2	17.20	259.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, e grande massa nuvolosa, visibili *a*B e BC.
	2	15.50	281.	Macchia al bordo, bordo e getti lucidissimi.
	5	8.55	72.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	6	15.10	114.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi.
	8	8. 0	98.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassissima al posto della macchia, visibili *a*B e BC; altre macchie più lontane.
	9	11. 8 *(a)*	100.	Macchia presso al bordo, getti lucidi, cromosfera bassa — 14h.45m. (*b*) massa nuvolosa lucidissima, cromosfera bassissima — 17h.15m. (*c*) getti e masse nuvolose lucidissime.
	9	8.55 (*a*)	241.	Macchia al bordo, magnifico e gigantesco gruppo di getti, visibili *a*B e BC anche nella parte superiore dei getti — 9h.8m. (*b*) i grandi getti quasi scomparsi, la C incurvata alla base dei getti — 9h.25m. (*c*), 10h.5m. (*d*), 14h.33m. (*e*), 17h.25m. (*f*) successive trasformazioni.
	10	14.0 (*a*)	245.	Macchie al bordo, gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 15h.10m. (*b*), getti più sviluppati, facula lucidissima fra le macchie.
	10	16.50	290.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi.
	12	11. 0 (*a*)	100.	Macchia distante 15″ circa dal bordo, getti bassi lucidi — 18h.5m. (*b*) gruppo di alti getti lucidissimi.
	14	11.20 (*a*)	71.	Traccie di macchie al bordo, pochi getti lucidissimi, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC, facule vicine ai getti — 16h.55m. (*b*) cromosfera bassa al posto della macchia.

g	h m		
Lug. 15	17. 0	A	287°. Macchie al bordo, getti lucidissimi e variabili, cromosfera compatta, visibili *a*B e BC — 18h.20m. (*b*) gruppo di getti molto alti — 18h.29m. sviluppati nuovi getti alti, ricadenti sul bordo.
15	17.25		245. Macchia vicina al bordo, cromosfera bassa, gruppo di getti curvi lucidissimi.
16	15.40		77. Macchia tramontata, pennacchi e getti nuvolosi lucidi.
16	10. 0	(*a*)	287. Larga macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 14h.15m. (*b*) getti piccoli lucidissimi.
16	17.30		258. Macchia al bordo, getti lucidissimi.
17	9.10		259. Larga macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
18	15.28	(*a*)	281. Macchia vicina a sorgere al bordo, pennacchio nuvoloso stranissimo — 15h.55m. (*b*) getti lucidissimi, cromosfera bassa.
22	7.35		65. Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
22	14.25	(*a*)	109. Macchie al bordo, getti nuvolosi giganteschi variabilissimi, visibili *a*B e BC, la C è irregolare sopra alcuni punti lucidi — 16h.15m. (*b*) getti bassi lucidissimi — 16h.45m. (*c*) getti bassi lucidi.
23	7.25	(*a*)	108. Macchia lontana 25″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 7h.42m. (*b*) getti giganteschi e strani, sviluppati in brevissimo tempo e molto variabili, sopra un punto lucidissimo tutto lo spettro diventa lucido — 8h.20m. (*c*) getti meno sviluppati lucidissimi — 9h.45m. (*d*), 14h.29m. (*e*), 18h.45m. (*f*) successive trasformazioni.
23	15.15	(*a*)	300. Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 18h.0m. (*b*), 18h.33m. (*c*) successive trasformazioni.
26	16.10		277. Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
28	10.20	(*a*)	97. Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 14h.25m. gruppi di getti lucidissimi.
29	15.25		294. Macchie al bordo, getti lucidissimi.
30	15.30		80. Macchia vicina al bordo con altre più lontane, getti alti e strani, cromosfera alquanto irregolare e bassa.
31	15.35		67. Macchia vicina al bordo, cromosfera molto lucida e sfumata, visibili *a*B e BC.
Agosto 1	8.25		67. Posto della macchia di jeri, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
1	15.50		269. Larga macchia al bordo, getti bassi lucidissimi.
2	15.45		269. Larga macchia vicina al bordo, gruppo di lucidissimi getti, visibili *a*B e BC.
4	15.50		277. Traccie di macchie al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
9	15. 0	(*a*)	237. Macchie al bordo, due getti alti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 16h.45m. (*b*) getti lucidissimi molto inclinati, altri quasi verticali altissimi, visibili *a*B e BC sino alla sommità di alcuni getti — 18h.30m. (*c*) getti altissimi non molto lucidi e sfumati.
10	9.25	(*a*)	242. Larga macchia al bordo, altra macchia a 237° vicina al bordo, pochi getti lucidissimi, getti finissimi inclinati, visibili *a*B e BC, variazioni rapide — 14h.35m. (*b*) getti lucidissimi.
12	10.45		271. Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi e bassi, visibili *a*B e BC.
19	8.45		52. Macchia tramontata, gruppo di getti lucidi, cromosfera piuttosto bassa al posto della macchia.
19	15.15		258. Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, cromosfera bassa regolare.
20	9.30		262. Macchia al bordo, getti lucidissimi, alti e capricciosi, visibili *a*B e BC.
21	9.20		83. Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
21	15.50		264. Macchie vicine al bordo, getti bassi lucidissimi, grande massa nuvolosa lucidissima di forma strana.
22	10. 0	(*a*)	83. Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC — 16h.0m. (*b*) pochi getti bassi lucidissimi.
22	14.50		267. Piccole macchie vicine al bordo, getti lucidissimi variabili, e massa nuvolosa, visibili *a*B e BC.

	g	h m		
Ag.	23	9.30	A 285°.	Macchie presso al bordo, grande massa nuvolosa lucidissima, pochi getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 10h.40m. (*b*) getti sottili lucidissimi.
	23	15.50	86.	Macchia al bordo, getti lucidissimi.
	23	14.30	279.	Macchie al bordo, getti lucidissimi e massa nuvolosa gigantesca.
	24	14.40	267.	Macchia al bordo con altre macchie più distanti, pennacchio lucido alto e staccato dal bordo, a lato della macchia getto gigantesco ricadente sul sole.
	24	15.10	267.	Aspetto della cromosfera nella stessa località, grande getto scomparso quasi totalmente.
	25	8.50	87.	Macchia tramontata, getti lucidissimi e capricciosi.
	25	15.40	61.	Macchia poco lontana dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	25	8.30 (*a*)	266.	Macchia presso al bordo, gruppo di getti alti nuvolosi e getti piccoli lucidissimi, visibili *a*B e BC — 14h.15m. (*b*) getti diminuiti.
	26	9. 0 (*a*)	60.	Macchia distante 25″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 15h.32m. (*b*) getti alti lucidissimi — 15h.40m. (*c*), 16h.22m. (*d*) successive trasformazioni.
	27	8.20 (*a*)	60.	Macchie al bordo, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC — 8h.27m. (*b*), 15h.40m. (*c*) successive trasformazioni.

1872.

Genn.	31	15.25	293.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Febbr.	1	8.30	278.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi interrotti, visibili *a*B e BC.
	2	15.15	301.	Macchia al bordo, grande gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	3	14.20	304.	Macchie poco lontane dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	9	15.45	297.	Macchie presso al bordo, getti straordinariamente lucidi, visibili *a*B e BC.
	17	13.45	92.	Macchie al bordo, pochi getti lucidissimi, nube alta e gigantesca, visibili *a*B e BC.
	18	9.15	88.	Gruppo di macchie al bordo, magnifico gruppo di getti giganteschi, cromosfera lucida sfumata.
	18	10.10	78.	Traccie di macchie al bordo, getti strani lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	19	9.40	110.	Traccie di macchie al bordo, pochi getti lucidissimi.
	20	9. 0	277.	Macchie al bordo, getti straordinariamente lucidi, visibili *a*B e BC.
	27	10.20	138.	Traccie di macchie al bordo, getti bassi lucidissimi e gran getto nebuloso, visibili *a*B e BC.
	27	11.50 (*a*)	126.	Getti lucidissimi variabili, visibili *a*B e BC, ma non si vedono macchie — 15h.20m. gruppo gigantesco di getti, visibili *a*B e BC.
	28	9.33	98.	Traccie di macchie al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	29	13. 0 (*a*)	316.	Macchie al bordo, getto altissimo troncato, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC — 13h.20m. (*b*) gruppo di getti lucidissimi, piccola nube alta.
Marzo	1	9.50 (*a*)	93.	Macchia larga distante 10″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 10h.0m. (*b*) getti più sviluppati.
	2	14.35	123.	Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi.
	5	10.40	87.	Piccola macchia presso al bordo, larga macchia lontana, archi lucidissimi e regolari.
	6	15.20	87.	Grande macchia al bordo, getti bassi lucidissimi, cromosfera bassa.
	17	13.40	260.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, punto straordinariamente lucido, visibili *a*B e BC.
	18	11. 0	276.	Macchie al bordo, getto altissimo troncato, altri getti inclinati, visibili *a*B e BC.
	21	15.20	278.	Non si veggono macchie, getti lucidissimi bassi, pennacchio troncato, visibili *a*B e BC.
	30	9.30 (*a*)	272.	Macchia vicina al bordo, cromosfera regolare, pochi getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC — 10h.40m. (*b*) getti più sviluppati.
Aprile	3	9.35 (*a*)	88.	Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi — 16h.45m. (*b*) piccoli getti.

g	h	m			
Aprile 7	9.	3	A	136°	Macchie presso al bordo, getti giganteschi variabilissimi e piccoli getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 9h.16m. (*b*), 15h.5m. (*c*) successive trasformazioni.
10	17.10			286.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
11	10.10			286.	Macchie al bordo, altre più lontane, getti lucidissimi giganteschi, visibili *a*B e BC.
13	9.30			284.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
14	12.45			314.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
14	15.	7		282.	Macchia al bordo, getti alti lucidissimi.
15	15.55			284.	Traccie di macchie presso al bordo, getti curvi lucidissimi.
16	16.35			303.	Macchie al bordo, getti lucidissimi intrecciati, visibili *a*B e BC.
26	8.25			316.	Traccie di macchie al bordo, pochi getti lucidissimi, nube, e grande massa di getti molto alti.
27	9.40			313.	Macchia presso al bordo, altra più lontana, la C oscura sembra allargata sul posto della macchia, piccoli getti lucidissimi.
29	8.50		(*a*)	107.	Gruppo di macchie vicine al bordo, getti lucidissimi, alti getti deboli, visibili *a*B e BC — 9h.12m. (*b*) getti lucidissimi bassi, getti alti troncati.
29	9.55			272.	Macchie vicine al bordo, altre più lontane, cromosfera sfumata, getti alti deboli e getto lucidissimo.
Maggio 4	9.40			267.	Macchie presso al bordo, cromosfera bassa, getto gigantesco lucidissimo, altri getti più deboli, visibili *a*B e BC.
10	10.10			95.	Traccie di macchie al bordo, getti alti interrotti, getti minori lucidissimi, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC.
12	18.	0		298.	Macchie presso al bordo, getti bassi lucidissimi.
13	8.	0	(*a*)	296.	Macchia al bordo, altra macchia grande a 299°, tronco di getto alto e nube lucidissima e strana, in cui sono visibili *a*B e BC — 8h.25m. (*b*) getti alti lucidissimi e di forma strana — 11h.6m. (*c*) getti totalmente cambiati.
16	8.	0		283.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi bassi, visibili *a*B e BC.
17	15.45			139.	Macchia distante 8″ dal bordo, getti lucidissimi.
18	15.55			315.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
24	8.	6		317.	Larga macchia distante 8″ dal bordo, macchia al bordo a 313°, grandi getti lucidissimi, cromosfera bassissima — 8h.16m. (*b*) grandi getti lucidissimi — 8h.23m. (*c*) eruzione straordinaria, cromosfera bassissima — 9h.40m. (*d*) getti bassi, lucidissimi e nubi.
26	8.15		(*a*)	99.	Macchie presso al bordo, e grande macchia distante 25″ dal bordo, cromosfera bassa, getti lucidissimi — 11h.10m (*b*) cromosfera bassissima, getti lucidissimi — 17h.50m. (*c*) cromosfera bassa, getti bassi lucidissimi.
28	15.0			67.	Traccie di macchie al bordo e larga macchia distante circa 30″, getti lucidissimi e massa nuvolosa, visibili *a*B e BC.
Giugno 4	9.58			80.	Larga macchia distante 10″ dal bordo, getti alti deboli e variabilissimi, nube lucidissima.
4	18.47			279.	Macchia al bordo, magnifico gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
5	16.50			87.	Macchia al bordo, getti giganteschi, lucidissimi e molto variabili, visibili *a*B e BC.
6	10.	0		85.	Macchie presso al bordo, getti lucidissimi e variabilissimi, visibili *a*B e BC.
7	8.	0		85.	Macchie tramontate, getti lucidissimi e massa nebulosa, visibili *a*B e BC per un lunghissimo tratto della cromosfera.
7	9.30			287.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
10	10.35		(*a*)	95.	Macchie tramontate, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 11h.10m. (*b*) getti più sviluppati.
10	10.45			264.	Macchia al bordo, altra macchia più lontana, gruppo gigantesco di getti troncati alla base, visibili *a*B e BC, cromosfera bassa con pochi getti.
15	15.	0	(*a*)	75.	Macchia al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC — 15h.50m. (*b*) sempre getti bassi lucidissimi.

g	h m		
Giugno 16	8.30	A 303°.	Larga macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili aB e BC.
16	8.44	272.	Macchia al bordo, getto lucidissimo e masse nuvolose, visibili aB e BC.
17	8.10	95.	Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi, cromosfera bassa.
17	18. 0	104.	Macchia al bordo, cromosfera bassa assai, getti inclinati e lucidissimi.
18	15.55	304.	Macchia vicina a sorgere, getti lucidissimi.
19	8.55	304.	Larga macchia al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili aB e BC.
21	15.42	105.	Getti lucidissimi, visibili aB e BC, ma non si sono viste macchie.
22	8.45	(a) 90.	Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi, visibili aB e BC — $15^h.42^m$. (b) alti getti, cromosfera bassa.
24	9.25	275.	Traccie di macchie al bordo, e macchia distante circa 30″, cromosfera bassa, getti lucidissimi.
25	8. 5	86.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili aB e BC.
25	16.20	261.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili aB e BC.
30	15. 5	266.	Macchia al bordo, getti lucidissimi.
Luglio 2	15.20	102.	Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili aB e BC.
5	8.20	(a) 103.	Traccie di macchie al bordo, magnifico gruppo di getti, visibili aB e BC — $10^h.20^m$. (b) getti diminuiti.
7	16. 0	253.	Macchia vicina al bordo, altra più lontana, cromosfera bassa e lucida.
7	16.35	(a) 275.	Larga macchia vicina a sorgere, eruzione straordinaria, getti giganteschi lucidissimi, variabilissimi, sopra alcuni getti la C è irregolare e più irregolare la F, visibili aB e BC — $18^h.25^m$. (b) persiste la grande eruzione colle irregolarità sopra alcuni getti delle righe C ed F.
8	7.50	277.	Larga macchia al bordo, cromosfera mancante sul posto della macchia con semplice sfumatura al di sopra, getti curvi sfumati e giganteschi.
8	8. 0	295.	Macchia al bordo, piccoli getti lucidissimi, a 287° massa lucid^{ma}. addentellata.
11	9.15	(a) 114.	Macchia vicina al bordo, getti giganteschi lucidissimi, variabili — $16^h.10^m$. (b) getti più bassi, punto sul bordo a spettro tutto lucido — $14^h.17^m$. (c) eruzione straordinaria per numero e grandezza di getti divergenti dal posto della macchia — $16^h.40^m$. (d) eruzione aumentata, getti variabilissimi, grandi irregolarità nella C e nella D_3, rapidissime trasformazioni.
12	9.10	(a) 114.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, a 106° nube gigantesca stranissima, colla cromosfera sottoposta bassissima, visibili aB e BC — $10^h.15^m$. (b) bellissimi getti parabolici — $15^h.15^m$. (c) getti totalmente cambiati, gran massa nuvolosa.
16	16. 4	98.	Macchia al bordo, getti giganteschi lucidissimi, a 98°, piccolo getto collo spettro lucido dalla C sino verso la BC, visibili aB e BC, rapide variazioni.
16	16.55	256.	Macchia al bordo, grande massa nuvolosa lucidissima, sviluppata con grande rapidità.
17	15.12	100.	Traccie di macchie al bordo e macchia distante 50″, getti lucidissimi e massa nuvolosa lucidissima.
18	15.10	80.	Macchia al bordo, altra macchia lontana 50″, getti lucidissimi.
18	15.30	99.	Macchia distante 30″ dal bordo, altra più vicina, gruppo di getti lucidissimi, visibili aB e BC.
18	16.45	253.	Macchia al bordo ed altre a 242°, getti lucidissimi, visibili aB e BC.
19	8.30	102.	Macchie distanti 25″ dal bordo, gruppi di getti lucidissimi, visibili aB e BC.
19	8.20	82.	Macchia al bordo con altra più distante, getti nuvolosi strani e variabili.
20	15.20	80.	Macchia occultata ed altra a 76° distante 50″ dal bordo, massa nuvolosa, e piccola nube.
20	15.25	93.	Macchia tramontata, getti bassi lucidi.
21	9.40	(a) 76.	Grande macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili aB e BC — $13^h.45^m$. (b) macchia al bordo, getti lucidissimi più bassi sul posto della macchia — $14^h.40^m$. (c) grandi getti nuvolosi.

	g	h m	
Lug.	22	8.22	67°. Traccie di macchie al bordo, getto gigantesco, bellissimo e ricadente sul sole, visibili *a*B e BC, variazioni rapidissime.
	22	8.35	99. Macchie al bordo, getti bassi lucidissimi.
	25	15. 0	87 e 96. Gruppi di lucidissimi getti, visibili *a*B e BC, ma non si sono viste macchie.
	26	8.20	83. Macchia distante 30″ circa dal bordo, getti lucidissimi e tronchi di getti altissimi, visibili *a*B e BC.
	26	9.26	238. Macchia al bordo con altra vicina, bellissima eruzione, visibili *a*B e BC — 16h.35m. (*b*) grandi masse e getti nuvolosi.
	29	8.25 (*a*)	71. Larga macchia distante circa 20″ dal bordo, con macchie vicine, getti bassi lucidissimi — 15h.0m. (*b*) piccoli getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	30	9.22	71. Macchia tramontata, getto gigantesco lucidissimo, visibili *a*B e BC.
	31	9.35 (*a*)	265. Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi e massa nuvolosa di forma assai complessa, strana e assai variabile, cromosfera bassa con pochi getti — 16h.10m. (*b*) massa gigantesca, cromosfera bassissima sotto il getto.
Agosto	1	9.30	265. Traccie di macchie al bordo, massa gigantesca nuvolosa somigliante e forse identica a quella di jeri.
	2	15.20	118. Macchia al bordo, cromosfera bassa.
	2	8.35	250. Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	4	9.35	263. Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	5	15.55	260. Macchie distanti 10″ dal bordo, getti lucidissimi vicini ad altri getti giganteschi più lontani, visibili *a*B e BC sopra un lunghissimo tratto della cromosfera.
	26	8.30	90. Gruppo di macchie al bordo, getti giganteschi lucidissimi, visibili *a*B e BC, grande massa nebulosa complicatissima di forma.
	28	15.40	41. Macchia vicina al bordo, pochi getti lucidissimi.
	29	8.15 (*a*)	41. Macchia al bordo, getti lucidissimi, alcuni molto alti, visibili *a*B e BC — 10h.15m. (*b*) gruppo di getti giganteschi quasi verticali, visibili *a*B e BC.
Ottob.	16	14.25	42. Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Nov.	3	9.35	50. Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, e getti più alti deboli — 11h.15m. (*b*) gruppo di getti lucidissimi, sopra un getto tutto lo spettro diventa lucido, anche in punti elevati del bordo.
	4	10.20	93? Traccie di macchie al bordo, getto gigantesco lucidissimo, visibili *a*B e BC anche alla sommità del getto, la posizione non è sicura, non essendo indicato l'emisfero in cui fu osservata.
Dec.	15	15.35	93. Macchia al bordo, cromosfera bassa, masse nebulose laterali, lucidissime, visibili *a*B e BC.
	19	9.25	90. Macchia tramontata, getti lucidissimi.
	19	10.10	97. Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi.
	23	9.20	92. Macchia vicina al bordo, grande massa nuvolosa, rasente la cromosfera.

1873.

Genn.	6	13.20	82. Grande macchia distante circa 15″ dal bordo, facula lucidissima al bordo, getti bassi lucidissimi.
	7	10.40	82. Macchia tramontata, piccoli getti inclinati.
	10	10.15	70. Larga macchia tramontata, getti bassi lucidi.
	12	11. 0	294. Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	14	15.55	253. Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	15	10. 0	73. Macchia distante 15″ dal bordo, ed altra più lontana, getti lucidi.
	29	15. 0	119. Macchia distante 15″, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	29	15.40	268. Macchia al bordo, arco lucidissimo al posto della macchia.
Febb.	14	13.15	280. Bella eruzione, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, non si sono viste macchie.
	15	14.30	111. Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.

g	h m		
Febb. 16	10. 0	85°.	Getti lucidissimi, visibili *a*B e BC anche alla sommità dei getti, senza macchie visibili.
16	10.10	113.	Macchia al bordo, getto ricadente sul sole, lucidissimo, visibili *a*B e BC.
16	11.45	263.	Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
17	12. 5	115.	Traccie di macchie presso al bordo, getti e pennacchi lucidissimi alti.
20	14.15	113.	Da 113° fino a 120° traccie di macchie, getti giganteschi e lucidissimi.
22	14.40	91.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
22	15.10	124.	Macchia vicina al bordo, massa nuvolosa di forma strana.
23	10.55 (*a*)	274.	Macchia presso al bordo, con altra più lontana, magnifico gruppo di getti intrecciati, lucidissimi e variabilissimi, visibili *a*B e BC — 14.10. (*b*) non restano che pochi getti lucidissimi.
25	15.15	127.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi bassi.
Marzo 4	12. 5 (*a*)	312.	Piccola macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 16^{h}.45^{m}. (*b*) piccoli getti inclinati e grandi getti nuvolosi con nube.
5	15. 0	317.	Grande macchia distante 30″, getti lucidissimi, e tronchi di getti più alti, getti variabilissimi.
7	15. 0	118.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e masse nuvolose, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC.
22	11.50 (*a*)	126.	Larga macchia al bordo ed altra vicina, pochi getti lucidi, cromosfera regolare e bassa — 16^{h}.50^{m}. (*b*) cromosfera bassa sul posto della macchia con pochi getti, getti lucidissimi sui lati.
23	17. 3	275.	Larga macchia al bordo, cromosfera bassa, getti inclinati lucid^{mi}., visibili *a*B e BC.
28	17.25	314.	Macchia al bordo, getti bassi lucid^{mi}. e grande massa nuvolosa, visibili *a*B e BC.
29	17. 0	316.	Piccole macchie al bordo, pochi getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Aprile 1	9.45	95.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC sopra un gran tratto di cromosfera.
2	16.25 (*a*)	269.	Gruppo gigantesco e strano di forma, nuvoloso, visibili *a*B e BC, ma non si sono trovate macchie — 17^{h}.5^{m}. (*b*) getti nuvolosi molto trasformati.
5	9.25	132.	Piccole macchie al bordo, e grande macchia a 129° distante 35″ circa, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
5	9.50	284.	Larga macchia vicina a sorgere, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
5	10.50	309.	Macchia vicina a sorgere, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
6	9. 0	99.	Macchia distante dal bordo 20″ circa, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
6	9.20	125.	Larga macchia distante 25″ dal bordo, e macchia vicina a questo, getti bassi inclinati.
7	8.45	99.	Macchia tramontata, gruppo lucidissimo di getti.
20	15. 0 (*a*)	128.	Macchie presso al bordo, getti giganteschi, lucidissimi — 16^{h}.115^{m}. (*b*) getti compatti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 17^{h}.52^{m}. (*c*) getti lucidissimi, la cromosfera in qualche parte sembra mancante.
Maggio 8	8.30	97.	Macchia distante 20″ dal bordo, grande massa nuvolosa di forma assai complessa e molto lucida.
26	18.10	299.	Larga macchia al bordo, pochi e piccoli getti molto lucidi.
29	9.48 (*a*)	291.	Macchia al bordo, grandi getti molto lucidi — 10^{h}.20^{m}. (*b*) getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
29	15.50	275.	Macchie presso al bordo, getti lucidissimi e bassi, visibili *a*B e BC.
30	15.15	105.	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
Giugno 1	7.25 (*a*)	115.	Macchia al bordo, altra macchia distante 10″ dal bordo, getti lucidissimi — 8^{h}.20^{m}. (*b*) getti lucidissimi inclinati all' opposto dei primi — 15^{h}.15^{m}. (*c*) pochi getti lucidissimi.
4	11. 0 (*a*)	118.	Macchia occultata, cromosfera bassissima, grande getto nuvoloso — 15^{h}.40^{m}. (*b*) getti lucidissimi, e punto straordinariamente lucido sul bordo — 17^{h}.0^{m}. (*c*) cromosfera bassa, getti bassi.

g	h m		
Giugno 8	9.33		120°. Traccia di macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
9	16. 5	(*a*)	110. Macchia presso al bordo, gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 16h.20m. (*b*) getti lucidissimi.
12	16.25		110. Macchia presso il bordo, getti lucidi bassi.
13	8.25		110. Macchia tramontata, cromosfera bassa, pochi getti, uno alto, visibili *a*B e BC — 18h.30m. (*b*) getto alto molto lucido, massa nuvolosa lucida.
18	16.30		256. Macchia al bordo, altra più lontana 35″, getti lucidissimi e massa nuvolosa.
19	16.30		262. Macchia presso al bordo, getti bassi.
20	16.15		257. Macchia al bordo, gruppo di getti lucidissimi e variabilissimi, a 264° larga macchia distante 32″ circa dal bordo.
25	16. 0	(*a*)	87. Macchia al bordo, gruppo di alti getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 17h.0m. (*b*) grande gruppo di lucidissimi getti.
30	10. 5		110. Macchia distante dal bordo 20″, getti bassi lucidissimi.
Luglio 2	13.45		100. Larga macchia distante 20″ circa dal bordo, a 103° macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
3	9. 0	(*a*)	99. Larga macchia tramontata, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC, per un gran tratto della cromosfera, cromosfera bassa — 15.30. (*b*) getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, gran massa nebulosa di aspetto turbinoso.
5	15.50		107. Macchia distante circa 35″ dal bordo, getti bassi.
6	15.15		107. Macchia tramontata, getti lucidi inclinati, cromosfera bassa al posto della macchia.
7	15.40	(*a*)	77. Larga macchia distante 35″ ed altra macchia a 20″, getti alti, lucidissimi — 17h.0m. (*b*) scomparsi i grandi getti.
8	8.40	(*a*)	76. Larga macchia vicina al bordo, getti lucidissimi — 8h.53m. (*b*) getti lucidissimi, cromosfera bassa al posto della macchia — 9h.10m. (*c*) getti lucidissimi, getti e massa nebulosa gigantesca, variabilissima e di forma strana — 9h.25m. (*d*) la grande massa nebulosa in gran parte scomparsa — 16h.0m. (*e*) getti lucidi — 16h50m. (*f*) grosso getto lucidissimo e massa nebulosa piuttosto bassa.
11	9.58	(*a*)	71. Macchia vicinissima al bordo, getti lucidissimi, uno alto, visibili *a*B e BC — 16h.5m. (*b*) getti totalmente cambiati.
12	16. 0		72. Posto della macchia tramontata, getti bassi lucidissimi.
17	16. 5		248. Macchia presso al bordo, altra a 253° distante 20″ circa, getti bassi lucidissimi.
17	16.40		248. Macchia vicina al bordo, getti radi piccoli e getto grande lucidissimo.
18	16.40		288. Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
29	15.50		91. Macchia distante 15″ circa dal bordo, piccoli getti lucidissimi.
30	9.40	(*a*)	91. Macchia tramontata, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC — 10h.0m. (*b*) getti lucidissimi.
31	15. 0		61. Macchia presso al bordo, larga macchia distante 20″, getti lucidissimi, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC per un gran tratto del bordo — 17h.12m. (*b*) getti lucidissimi, cromosfera regolare — 18h.30m. (*c*) eruzione straordinaria, getti giganteschi, lucidissimi e molto variabili, visibili *a*B e BC anche alla sommità dei getti, sulla macchia piccoli getti.
Agosto 2	17. 0		68. Macchia al bordo, getti lucidissimi giganteschi, molto incurvati e variabili.
4	9.15	(*a*)	63. Macchie presso al bordo, piccoli getti lucidissimi, larga macchia vicina al bordo — 15h.20m. (*b*) cromosfera bassa, gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 18h.30m. (*c*) cromosfera bassissima al posto della macchia.
6	9.13		63. Macchia tramontata, piccoli getti lucidissimi.
Sett. 2	15.15		77. Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi.
11	14.30	(*a*)	65. Macchie vicine al bordo, getti giganteschi lucidissimi, visibili *a*B e BC anche sui getti — 15h.30m. (*b*) macchia grande distante 15″, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.

	g	h m		
Sett.	12	9.45	65°.	Grande macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	18	16.10	255.	Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC per un gran tratto dalla cromosfera.
	22	13.45	(*a*) 238.	Macchia presso al bordo, cromosfera bassa al posto della macchia, grandi getti lucidissimi, ricadenti verso la macchia, visibili *a*B e BC — 16h.15m. (*b*) getti poco cambiati.
	25	14.25	(*a*) 248.	Macchie al bordo, gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 14h.55m. (*b*) gruppo di getti alti e lucidissimi, visibili *a*B e BC in gran parte dei getti.
	28	16.15	256.	Macchie al bordo, getti alti, alcuni lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	29	9.30	56.	Traccie di macchie al bordo e macchia più lontana, getti bassi lucidissimi.
	30	10.30	87.	Macchia al bordo, getti lucidissimi e grandi masse nuvolose, visibili *a*B e BC per un gran tratto del bordo.
Ottobre	5	10.40	(*a*) 78.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC ad 11h. grande eruzione — 14h.25m. distanza della macchia 7″, getti lucidissimi, la C rovesciata alle basi dei getti penetra sotto il bordo sino alla macchia, ma su questa la riga è nera.
	8	8.45	(*a*) 63.	Grande macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — 10h.40m. (*b*) getti lucidissimi, cromosfera bassa sul posto della macchia, sormontata da arco lucidissimo — 13h.40m. (*c*) getti più sviluppati e lucidissimi, piccole macchie vicine al bordo.
	21	10. 0	52.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Nov.	7	10.15	76.	Macchia distante 20″ dal bordo, getti lucidissimi.
	7	14. 5	(*a*) 259.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC 12h.15m. (*b*) a quest'ora i getti più sviluppati e lucidi, visibili *a*B e BC sopra un gran tratto della cromosfera.
	7	14.20	76.	Macchie vicinissime al bordo, getti lucidissimi ed alti, visibili *a*B e BC.
	12	14.15	82.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	18	9.50	63.	Macchie presso al bordo, getti lucidissimi alti, cromosfera bassa, visibili *a*B e BC.
	18	10. 0	85.	Piccole macchie vicine al bordo, getti lucidissimi, visibili, ma deboli *a*B e BC.
	24	9.45	76.	Macchie vicine al bordo, piccoli getti lucidissimi e masse nuvolose, visibili *a*B e BC.
	25	14.15	52.	Macchie vicine al bordo, getti molto sviluppati e masse nuvolose.
	26	10.20	(*a*) 52.	Macchia tramontata, getti lucidissimi e bella nube, cromosfera bassa al posto della macchia — 14h.25m. (*b*) getti lucidissimi e nubi alte, visibili *a*B e BC sopra un gran tratto del bordo.
	26	10.30	(*a*) 238.	Larga macchia presso al bordo, getti lucidissimi — 15h.20m. (*b*) macchia al bordo, getti lucidissimi, nube lucidissima, visibili *a*B e BC.
Dec.	8	10.30	60.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
	9	10.15	92.	Larga macchia distante 20″ dal bordo, getti bassi lucidi.
	10	14.40	92.	Macchia tramontata, getti lucidissimi.
	14	13.30	81.	Larga macchia al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC per lungo tratto della cromosfera.
	15	10.35	96.	Piccola macchia al bordo, getti lucidissimi.
	19	15. 0	74.	Macchia tramontata, getto alto e getti piccoli lucidissimi, visibili *a*B e BC.

1874.

Genn.	1	13.25	108.	Getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, ma non si sono viste macchie.
	13	14.35	263.	Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, cromosfera bassa sulla macchia.
	20	14.25	85.	Macchia presso al bordo ed altra macchia più lontana, getti e masse nuvolose lucidissime.

g	h m		
Genn. 21	11.55		85°. Macchie al bordo, getti molto alti e masse nuvolose lucidissime, visibili *a*B e BC, eruzione grandiosa.
22	13.15		289. Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi.
22	15.35		70. Getto spettacoloso stranissimo, lucidissimo e variabilissimo, ma senza macchie visibili.
23	15.20		291. Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
26	12.30		119. Macchia vicina al bordo, getto lucidissimo.
27	12. 5		109. Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi.
Febbr. 2	14.55		115. Macchia distante 10″ dal bordo, getti bassi lucidissimi.
3	13. 0		106. Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidi.
4	15.20		93. Larga macchia presso al bordo, getti lucidissimi e masse nuvolose.
4	15.50		288. Macchia più lontana dal bordo, getti lucidissimi.
5	11.40		92. Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi.
5	11.50		107. Macchia vicina al bordo, grandi gruppi di getti nuvolosi.
26	13.50		290. Macchia distante 10″, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC per un tratto del bordo.
28	13.15		104. Traccie di macchie al bordo, getti bassi lucidissimi.
Marzo 2	14. 0		303. Macchia al bordo, cromosfera bassa sulla macchia con grandi gruppi di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC sopra un gran tratto della cromosfera.
8	11.55		91. Larga macchia distante 10″, altra macchia più lontana dal bordo, getti bassi lucidissimi.
18	13. 0		109. Macchie vicine al bordo, grande getto lucidissimo, cromosfera bassa.
20	14.50		109. Macchia al bordo, altra più lontana, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
21	9.30	(*a*)	155. Larga macchia vicina al bordo, piccoli getti lucidi — 11h.50m. (*b*) getti lucidissimi.
22	9. 0	(*a*)	118. Grande macchia al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassa al posto della macchia, visibili *a*B e BC — 11h.10m. (*b*), 13h.45m. (*c*), 17h.0m. (*d*) trasformazioni successive, cromosfera sempre bassa al posto della macchia.
28	14.40		282. Macchia vicina a sorgere, getti lucidissimi.
30	14.10		282. Macchia distante 10″ dal bordo, getti lucidissimi, grandi getti nuvolosi.
Aprile 5	10.40		97. Macchia distante 8″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
25	15. 0		280. Macchia al bordo, getti piccoli lucidissimi e gran getto nuvoloso, visibili *a*B e BC.
Maggio 6	12.50	(*a*)	283. Larga macchia distante 15″, altra più vicina, eruzione straordinaria, gruppi di getti giganteschi, lucidissimi e molto variabili: sulla base di alcuni getti lucidissimo tutto lo spettro, le righe del magnesio, visibili sino a 35″ di altezza, le *a*B e BC visibili in una gran parte dei getti — 13h.5m. (*b*) continua l'eruzione gigantesca con getti variati — 14h.55m. (*c*) diminuita l'eruzione, ma sempre grandi getti lucidissimi.
19	17. 0	(*a*)	114. Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi — 17h.15m. (*b*) getti lucidissimi più sviluppati.
24	15.35		299 e 301. Macchie presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, cromosfera bassa sulle macchie.
30	15. 5		90. Macchie presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
31	9.10		90. Macchie tramontate, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Giugno 9	15.10	(*a*)	77. Larga macchia a 15″ dal bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, la C è rovesciata sotto i getti anche sul disco solare sin quasi alla macchia, ma su questa la C è nera — 18h.20m. (*b*) la C continua ad esser rovesciata sul bordo, ma non sulla macchia.
10	13.10		77. Grande macchia tramontata, getti giganteschi lucidissimi sul contorno, visibili *a*B e BC.
22	17.50		104. Macchia tramontata, getti alti lucidissimi.

g	h m		
Giug. 24	18.40		280°. Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi.
25	11. 0		299. Macchia vicina al bordo, getti alti e lucidissimi.
Luglio 1	13.30		267. Macchia al bordo, getti lucidissimi.
4	15.30		80. Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi.
Agos. 17	14.55		88. Piccole macchie vicine al bordo, getti lucidissimi.
17	15.30	(*a*)	236. Larga macchia al bordo, getti straordinariamente lucidi, visibili *a*B e BC — $16^h.15^m$. (*b*) getti lucidissimi, cromosfera bassa al posto della macchia.
18	10.10		236. Larga macchia distante 40″ circa dal bordo, altra macchia più vicina, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC, grande gruppo di macchie.
30	15.15		87. Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi.
31	16. 0		233. Piccole macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Sett. 5	10.45	(*a*)	76. Grande macchia distante circa 15″ dal bordo, getti straordinariamente lucidi ed alti, visibili *a*B e BC sopra interi getti, la C è rovesciata sul contorno occidentale della macchia, ma sulla macchia è nera — $11^h.30^m$. (*b*), $13^h.55^m$. (*c*), $14^h.45$. (*d*), $15^h.45^m$. (*e*) successive trasformazioni, sempre getti lucidissimi e con irregolarità nella C sopra alcuni getti, sempre visibili *a*B e BC.
28	13.20		229. Macchie vicine al bordo, getti lucidissimi alti.
Ottob. 1	10.15		53. Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
9	14.20		85. Macchia al bordo ed altra più lontana, getti lucidissimi, gigantesche masse nuvolose.
11	11.45	(*a*)	83. Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi giganteschi e molto variabili — $12^h.5^m$. (*b*) getti giganteschi totalmente diversi, visibili *a*B e BC — $13^h.10^m$. (*c*) getti totalmente trasformati, sempre lucidi e giganteschi.
12	10.50		86. Traccie di macchie al bordo, getti molto alti e getti bassi lucidissimi.
13	11.50		55. Macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, massa nuvolosa gigantesca e strana.
14	11.50		257. Macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
28	10.25		58. Macchie tramontate, getti lucidissimi.
30	14.50		228. Macchia al bordo e macchia vicinissima, getti vicini lucidissimi, alti, e getti piccolissimi, visibili *a*B e BC.
Nov. 7	13.50		54. Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
10	15.30		257. Getti lucidissimi, visibili *a*B e BC per un gran tratto del bordo, probabilmente macchie, ma non visibili.
12	10.20		81. Macchie presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
28	14.15		66. Macchia distante 15″, getti lucidissimi.

1875.

Febb. 17	11.30		302. Traccie di macchie presso al bordo, getti giganteschi, stranissimi e luc.^{mi}.
Marzo 16	16.55		312. Macchie al bordo, getti lucidissimi.
25	14.55	(*a*)	310. Gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, ma non si vedono macchie — $16^h.25^m$. (*b*) getti giganteschi lucidissimi.
26	17.30		130. Macchia distante 10″ circa dal bordo, getti bassi lucidi.
27	10.35	(*a*)	130. Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC — $11^h.50^m$. (*b*) getti più sviluppati sul contorno della macchia, sui quali la riga D del sodio sparisce per tutta l'altezza dei getti stessi.
30	13. 5		98. Macchie presso al bordo, getti lucidissimi.
Aprile 1	10.20		102. Traccie di macchie presso al bordo, gruppo complesso di getti lucidissimi.
21	14.50		106. Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Magg. 8	15.20	(*a*)	101. Macchia a 6″ circa dal bordo, con altre vicine, getti bassi lucidissimi — $18^h.30^m$. (*b*) getti bassi.
9	9.45	(*a*)	101. Macchia tramontata, getti bassi inclinati, lucidissimi, visibili *a*B e BC, cromosfera bassa al posto della macchia — $10^h.10^m$. (*b*) getti più sviluppati

g	h m		
Giug. 12	9.35	(*a*) 108°.	Larga macchia a 6″ circa dal bordo, altre macchie più lontane, getti giganteschi, lucidissimi e di forma strana, visibili *a*B e BC — $9^h.56^m$. (*b*), $11^h.5^m$. (*c*), $14^h.25^m$. (*d*), $15^h.50^m$. (*e*), $18^h.30^m$. (*f*) successive trasformazioni.
28	18.25	101.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, cromosfera bassa.
Luglio 3	15.15	78.	Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi, getto lontano di forma strana.
12	17.20	258.	Grande fascio di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, probabilmente macchia vicina.
25	13.30	88.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi.
Agosto 6	18.10	69.	Macchia al bordo, altra lontana 15″ circa, getti bassi lucidissimi.
20	16. 0	254.	Macchie al bordo, getti lucidissimi bassi, altra macchia distante a 30″.
21	13.50	258.	Macchia presso al bordo, altra macchia più lontana, getti lucidi bassi.
Sett. 10	12.55	49.	Macchia vicina al bordo, getto lucidissimo.
13	16.55	260.	Macchia distante 15″ dal bordo, getti lucidissimi alti.
30	16.30	46.	Traccie di macchie al bordo, getti nuvolosi grandi e lucidissimi.
Ott. 10	10.25	(*a*) 52.	Macchia presso al bordo, getti bassi lucidissimi — $14^h.34^m$. (*b*) getti alti lucidissimi, sviluppati rapidamente, visibili *a*B e BC.
10	11.20	245 e 248.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC — $14^h.45^m$. (*b*) getti bassi lucidissimi — $14^h.59^m$. (*c*) getti lucidissimi sviluppati rapidamente.
Nov. 6	10.55	56.	Traccie di macchie al bordo, grande massa nuvolosa, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
26	14.35	78.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi bassi.
Dec. 19	12.55	(*a*) 253.	Traccie di macchie al bordo, fascio di getti alti lucidissimi, visibili *a*B e BC — $15^h.10^m$. (*b*) getti lucidissimi.
27	14.10	96.	Traccia di macchia al bordo, getti piccoli lucidissimi.
28	12.30	107.	Grandi getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, probabilmente macchia tramontata.

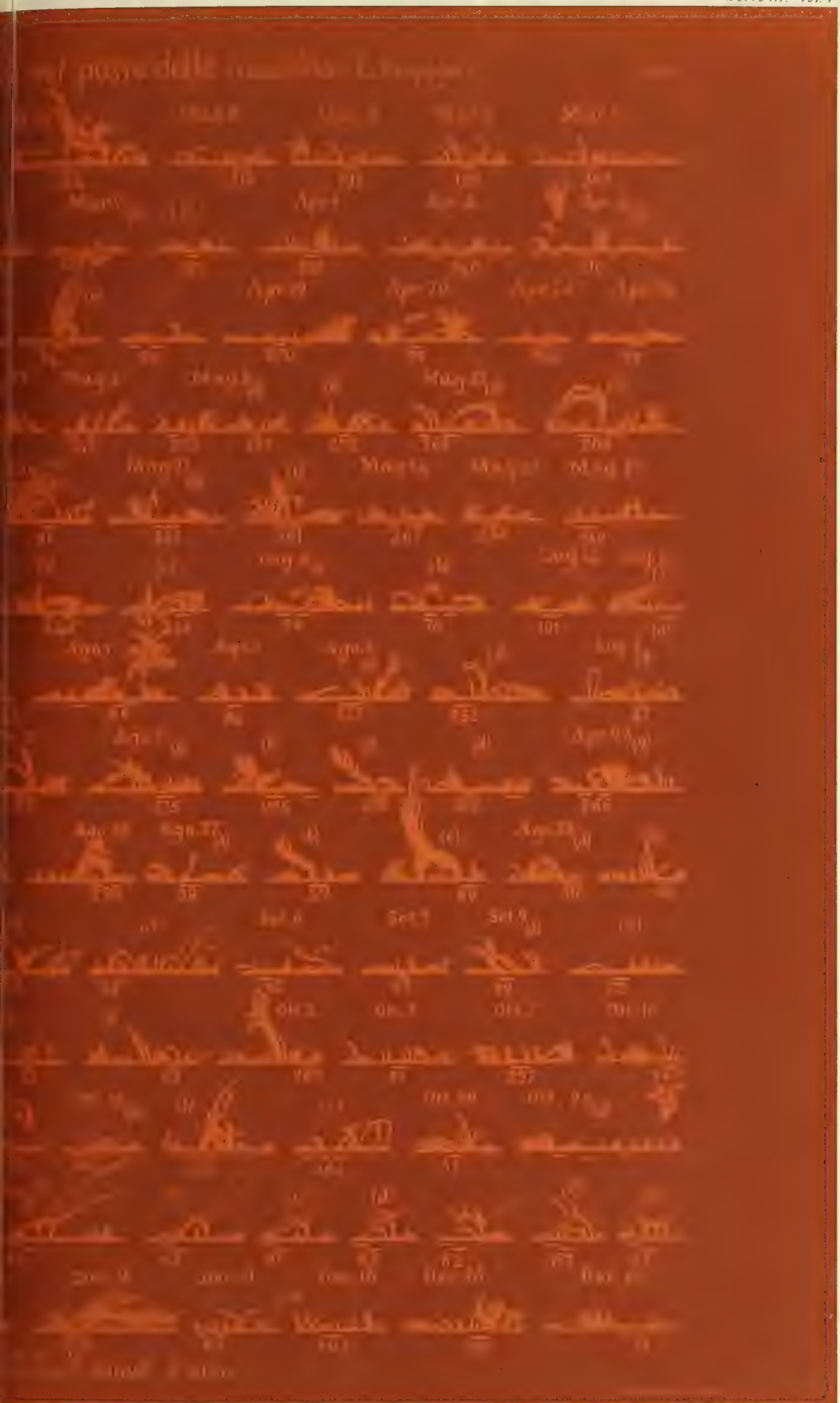
1876.

Genn. 14	13.45	289.	Traccie di macchie al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
16	13.55	263.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC.
17	14. 3	265.	Larga macchia distante 15″ circa dal bordo, getti lucidissimi, grande massa nuvolosa, visibili *a*B e BC.
18	13.50	265.	Macchia presso al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Marzo 30	17.25	99.	Macchia poco lontana dal bordo, getti bassi lucidissimi.
31	15.40	99.	Macchia tramontata, getti bassi lucidissimi.
Aprile 24	15.24	119 a 123.	Piccole macchie al bordo, piccoli getti lucidissimi e grandi masse nuvolose.
Magg. 24	11.40	(*a*) 276.	Macchia al bordo, grande gruppo di getti lucidissimi, visibili *a*B e BC, la C irregolare sotto il getto più alto — $11^h.52^m$. (*b*), $12^h.13^m$. (*c*), $12^h.25^m$. (*d*), $15^h.0^m$. (*e*), $15^h.15^m$. (*f*) successive trasformazioni.
Giug. 19	16. 0	273.	Macchia al bordo, getti lucidissimi.
30	16.50	262.	Macchie al bordo, getti lucidissimi.
Luglio 1	15.55	266.	Macchia presso al bordo, macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Agos. 29	14. 0	78.	Macchia poco lontana dal bordo, getti lucidissimi.
30	15. 0	78.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
Sett. 6	15.15	91.	Piccola macchia al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
25	15.15	234.	Gruppo di macchie al bordo, getti lucidissimi.
Ottob. 6	14.10	233.	Traccie di macchie al bordo, getti lucidissimi, visibili *a*B e BC.
7	14.15	76.	Traccie di macchie al bordo, getti bassi lucidissimi, visibili *a*B e BC.
8	12. 0	76.	Macchie tramontate, getti lucidissimi.
17	13. 0	230.	Macchia al bordo, getti grandi lucidissimi, cromosfera bassa.

	g	h m		
Ottob.	18	10.50 (*a*)	73°.	Larga macchia distante circa 10″ dal bordo, e piccola macchia al bordo, getti grandi lucidissimi e variabili, visibili *a*B e BC — 13h.0m. (*b*), 13h.25m. (*c*), 14h.3m. (*d*), 14h.50m. (*e*) successive trasformazioni, all'ultima osservazione la macchia era quasi a contatto del bordo e sempre visibile.
	29	12.20	81.	Macchia vicina al bordo, getti bassi lucidissimi.
Nov.	5	13.50 (*a*)	56.	Macchia vicina al bordo, getti lucidissimi, altra macchia distante 40″ circa — 15h.0m. (*b*), 15h.15m. (*c*) osservazioni successive, getti sempre bassi e lucidissimi.
	6	9.55	56.	Macchia tramontata, cromosfera bassa, getti lucidissimi.
	14	14.30	273.	Macchia a 12″ dal bordo, altra più lontana, getti lucidissimi, ma non si veggono le *a*B e BC — 14h.55m. (*b*) getti cambiati, sempre lucidissimi.
Dec.	29	10.30	78.	Larga macchia distante 20″ circa dal bordo, getti bassi lucidissimi.
	30	15.30	78.	Macchia tramontata, getti lucidissimi, alcuni alti.

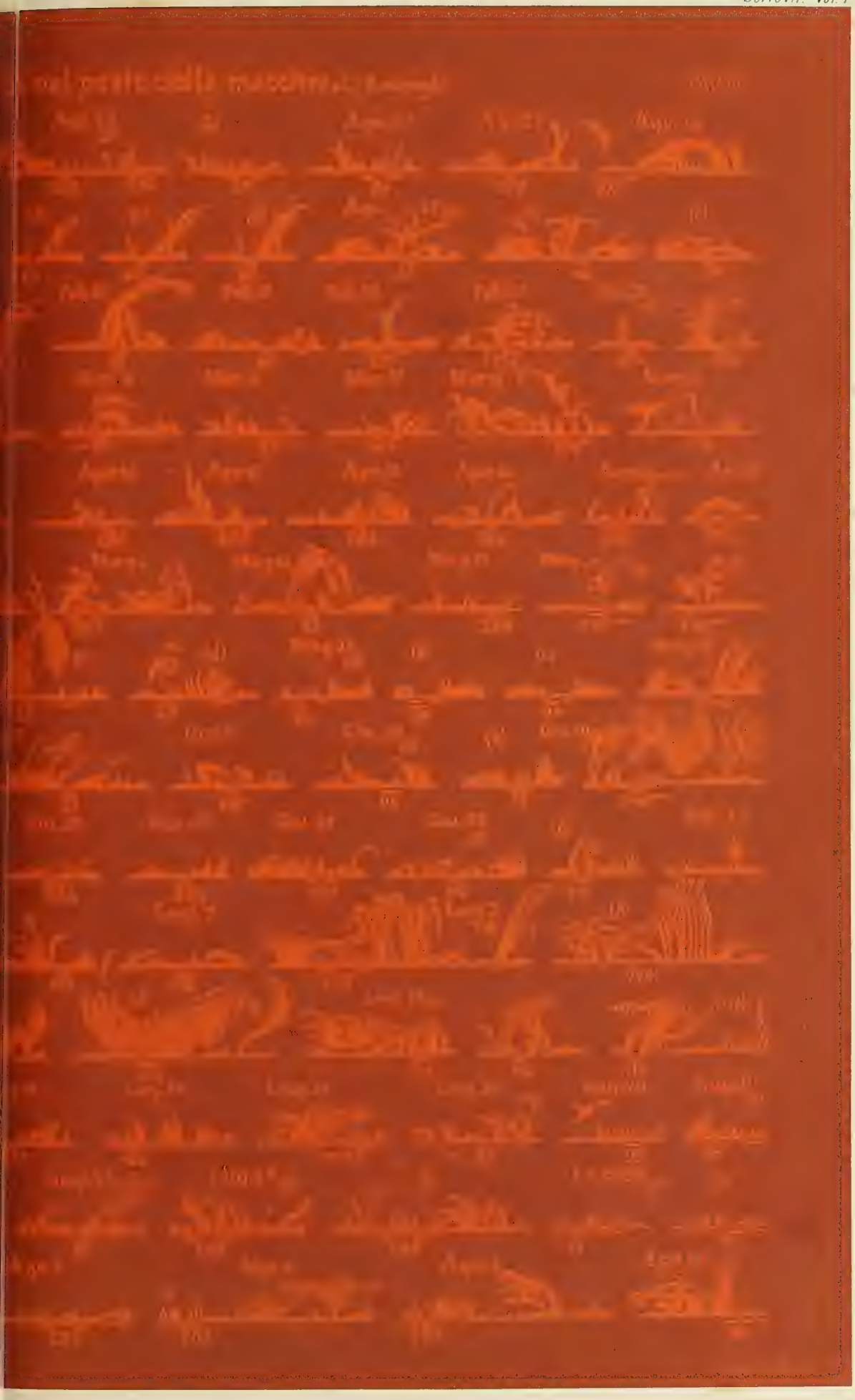
Correzioni per le Tavole I, II, III, IV e V

	Errata	Corrige		Errata	Corrige
Tav. I	1870 Apr. 20. 65°	Apr. 20. 272°	Tav. III	1872 Febb. 9. 63°	Febb. 9. 297°
»	» Giug. 30.	Giug. 29.	Tav. IV	1873 Genn. 29. 228°	Genn. 29. 119°
»	» Lugl. 7. 61°	Lugl. 7. 63°	»	» Marz. 29. 276°	Marz. 29. 316°
»	» Agos. 30. 265°	Agos. 30. 270°	»	» Agos. 1.	Agos. 2.
Tav. II	1871 Magg. 9. 110°	Mag. 11. 127°	Tav. V	1875 Sett. 13. 85°	Sett. 13. 260°
»	» Lugl. 11.	Lugl. 12.	»	» Nov. 28.	Nov. 26.
»	» Agos. 19. 102°	Agos. 19. 258°	»	1876 Mag. 24. 296°	Mag. 24. 276°
Tav. III	1872 Febb. 3. 50°	Febb. 3. 304°	»	» Giug. 19. 276°	Giug. 19. 273°

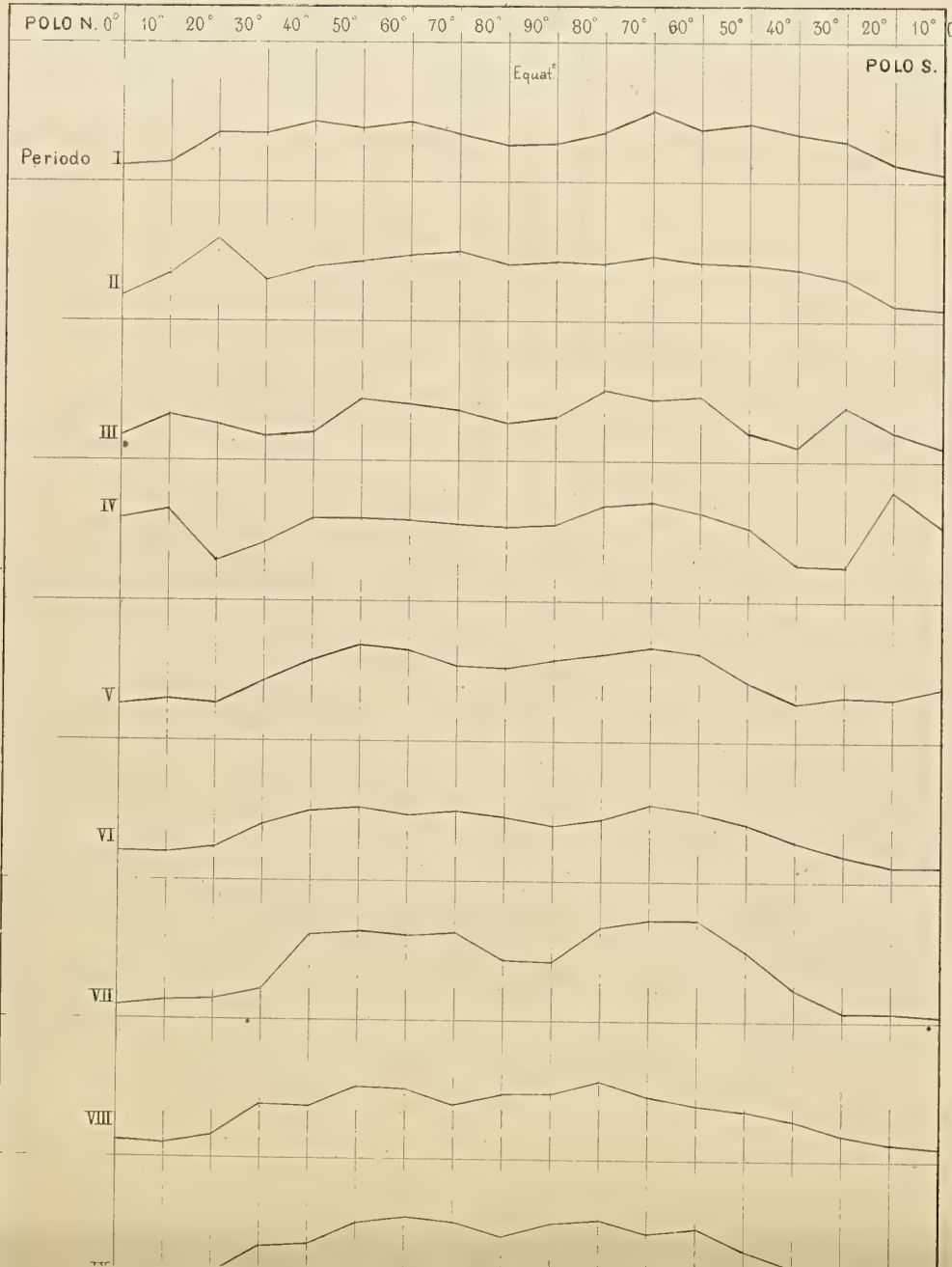


Osservazioni della
1871 Feb. 2

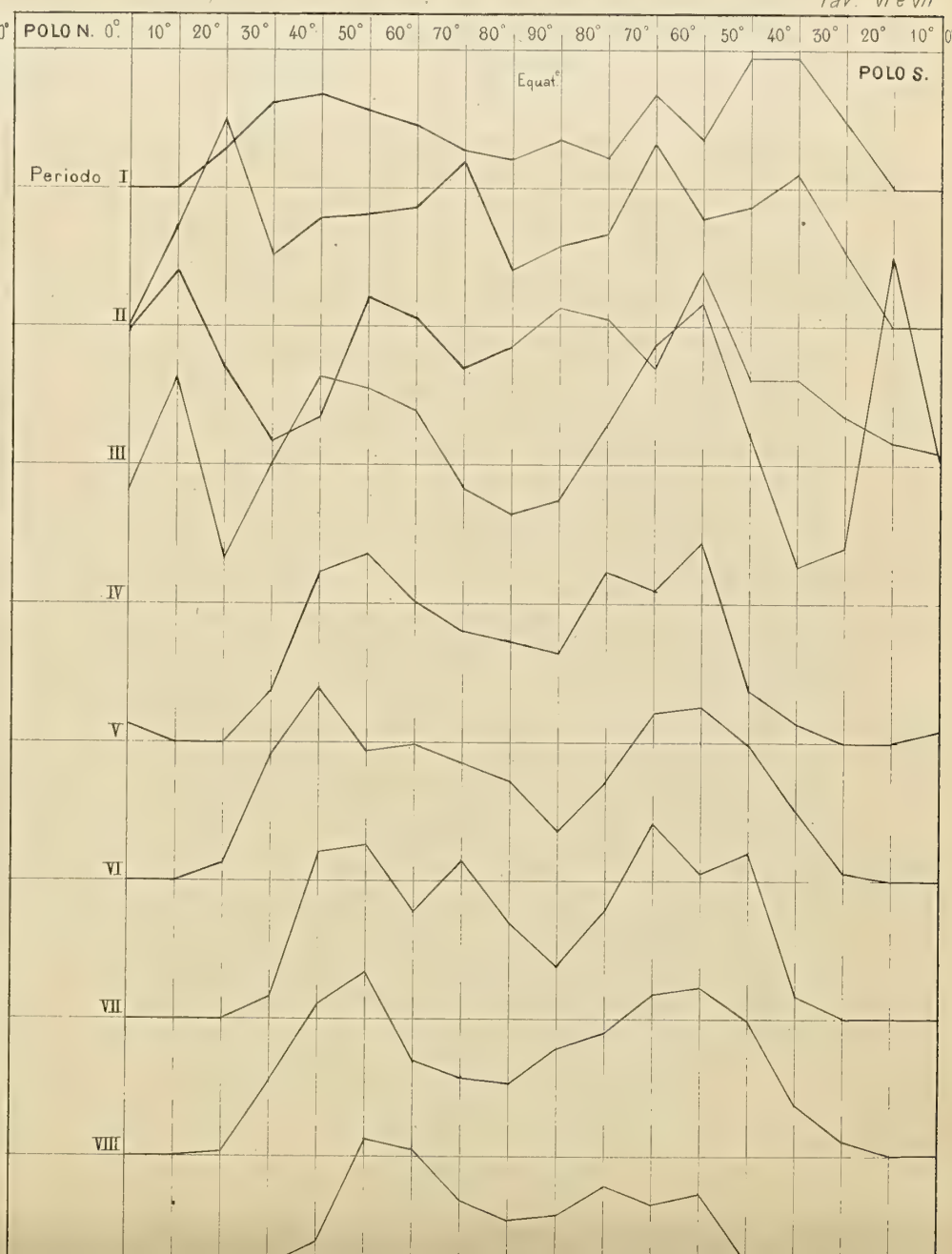
nel posto della macchina

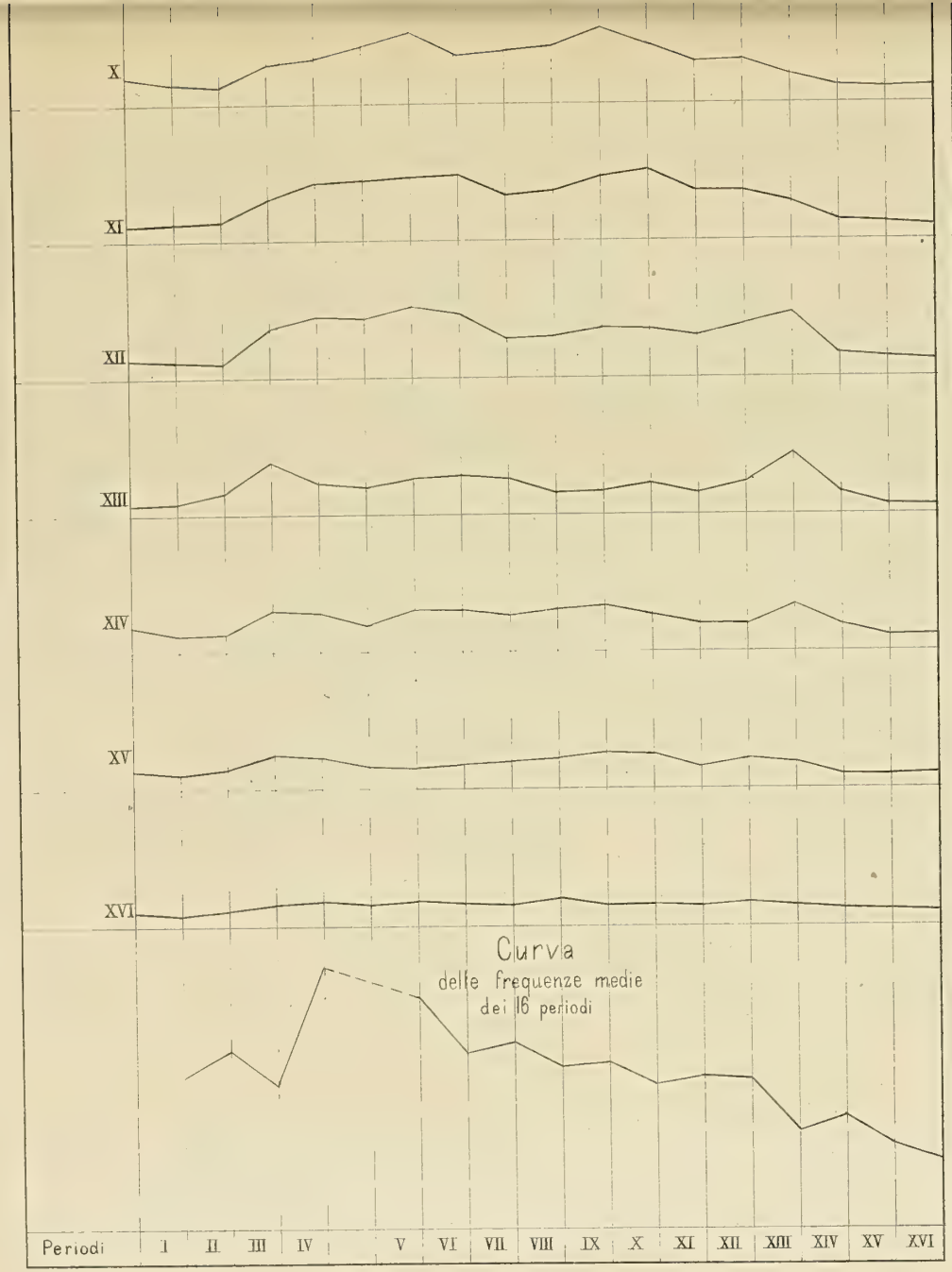


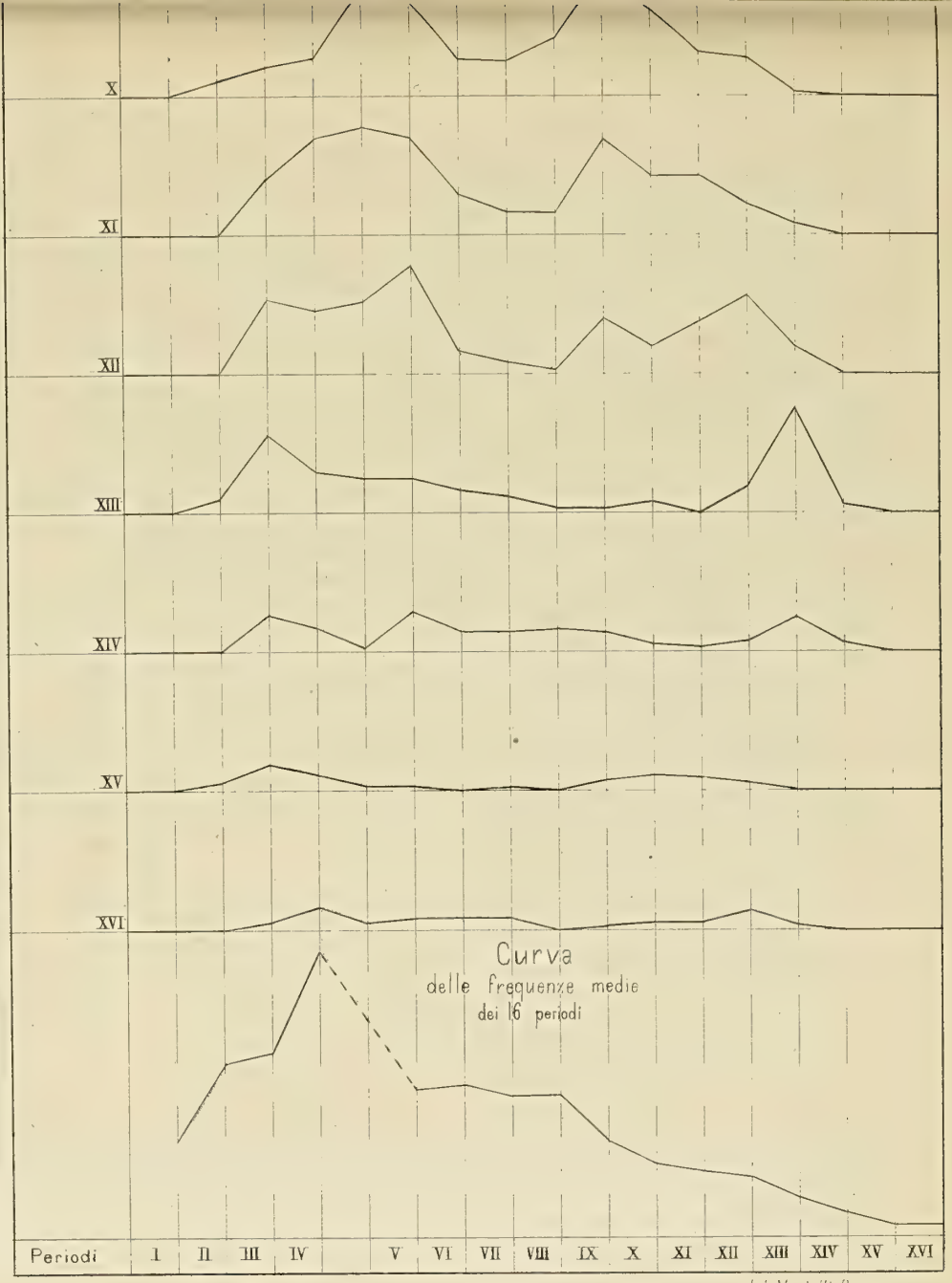
FREQUENZA RELATIVA DELLE PROTUBERANZE NELLE VARIE ZONE SOLARI



FREQUENZA RELATIVA DELLE GRANDI PROTUBERANZE NELLE VARIE ZONE SOLARI

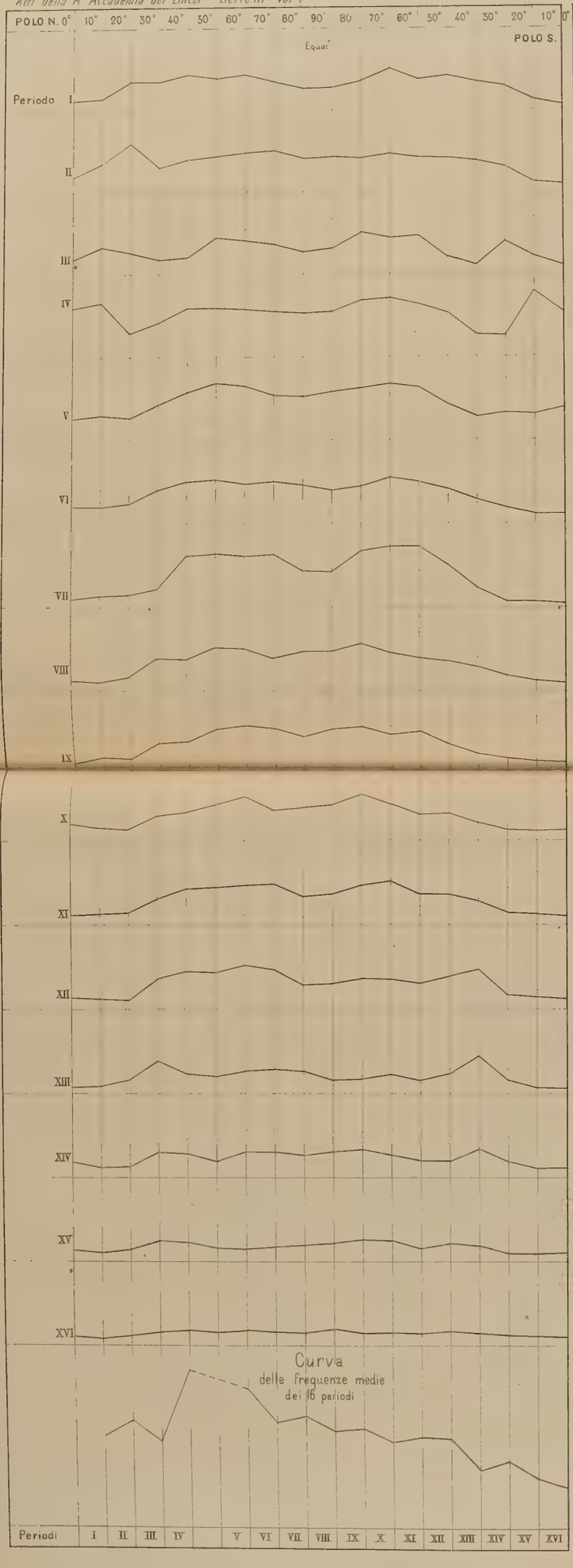




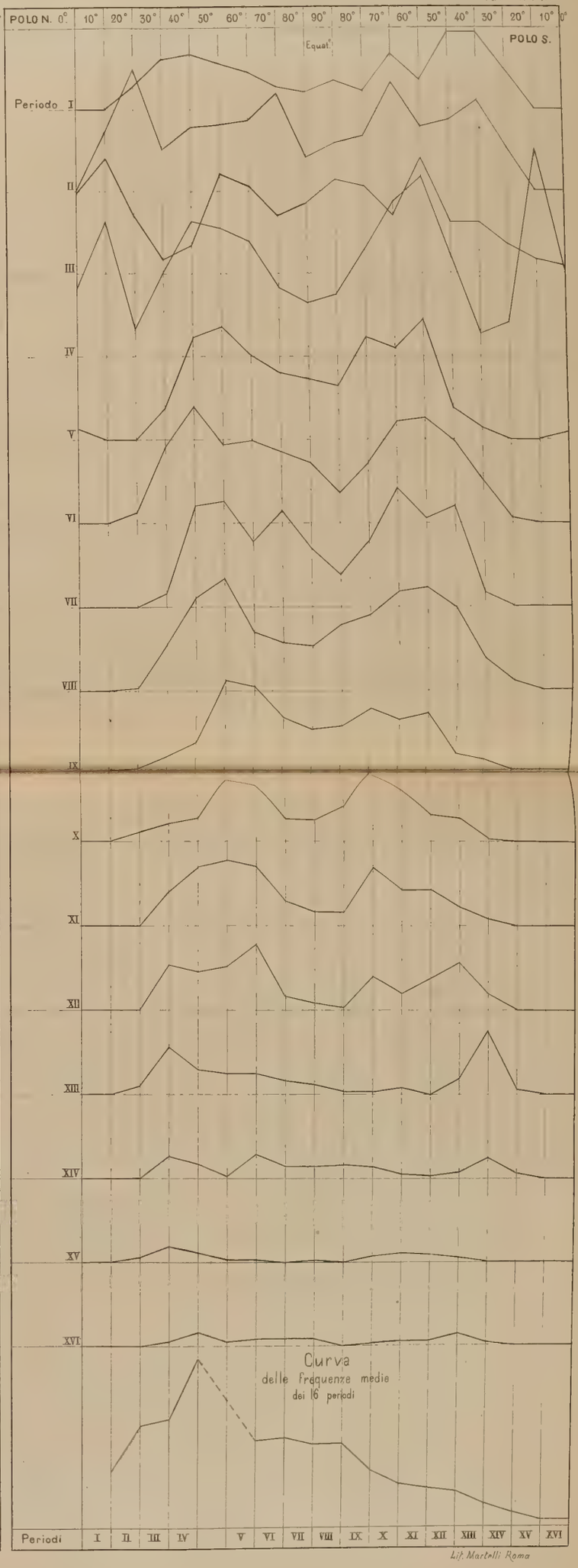


Lit. Martelli Roma

FREQUENZA RELATIVA DELLE PROTUBERANZE NELLE VARIE ZONE SOLARI



FREQUENZA RELATIVA DELLE GRANDI PROTUBERANZE NELLE VARIE ZONE SOLARI



Lit. Martelli Roma

INDICE DEL VOLUME I° SERIE 3ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Respighi. *Sulla latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio* . . . pag. 5
Cossa. *Sul fluoruro di magnesio. Nota presentata dal Socio* Q. Sella . . » 33
Roiti. *La velocità teorica del suono e la velocità molecolare dei gas. Nota presentata dal Socio* E. Betti . . . . . » 39
Struever. *Studî petrografici sul Lazio* . . . . . » 46
Schiff. *Intorno alla costituzione del cloralammonio e dell'aldeidato d'ammonio. Nota presentata dal Socio* Cannizzaro . . . . . » 59
Volpicelli. *Sull'elettrostatico inducente costante* (appendice seconda). . . » 65
Boll. *Studî sulle immagini microscopiche della fibra nervosa midollare. Nota presentata dal Socio* Tommasi-Crudeli (con due tavole) . . . . . » 75
Struever. *Studî sui minerali del Lazio* (parte seconda) (con due tavole) . . » 93
Gastaldi. *Su alcuni fossili paleozoici delle Alpi marittime e dell'Apennino ligure studiati da* G. Michelotti (con quattro tavole) . . . . . » 115
Volpicelli. *Ad una obbiezione contro la teorica del Melloni sulla elettrostatica influenza* . . . . . » 129
Smith. *Mémoire sur les équations modulaires. Présenté par M^r* L. Cremona » 136
Pisati. *Su la dilatazione, la capillarità e la viscosità del solfo fuso. Nota presentata dal Socio* P. Blaserna (con una tavola) . . . . . » 150
Uzielli. *Sopra la Titanite e l'Apatite della Lama dello Spedalaccio. Nota presentata dal Socio* Q. Sella . . . . . » 157
Keller. *Sulla direzione della gravità alla stazione Barberini sul Monte Mario. Nota presentata dal Socio* P. Blaserna . . . . . » 162
Volpicelli. *Sul piano di prova piccolissimo e non condensante.* . . . . » 174
Pisati, Saporito e Scichilone. *Ricerche sperimentali sulle tenacità dei metalli a diverse temperature.* I.° *Del rame e dell'acciajo, per* G. Pisati e C. Saporito. II.° *Dell'ottone e dell'alluminio, per* G. Pisati e S. Scichilone. *Note presentate dal Socio* P. Blaserna (con una tavola) . . . . . » 179
Baretti. *Studî geologici sul gruppo del Gran Paradiso. Memoria approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del* 7 *gennaio* 1877 (con sette tavole) . . . . . » 195
Righi. *Ricerche sperimentali sulle scariche elettriche* (Memoria seconda *approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del* 4 *febbraio* 1877) (con cinque tavole) . . . . . » 315
Cerruti. *Intorno alle piccole oscillazioni di un corpo rigido interamente libero. Memoria presentata dal Socio* L. Cremona. . . . . » 345
Boll. *Sull'Anatomia e Fisiologia della retina. Memoria presentata dal Socio* Q. Sella (con una tavola). . . . . » 371
Betocchi. *Effemeridi e statistica del Fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno* 1876 (con una tavola) » 395

Fanzago. *Sopra alcuni Miriapodi cavernicoli della Francia e della Spagna. Nota approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 4 marzo* 1877 . . . . . pag. 407
Colasanti. *La durata della vitalità della macula germinativa. Nota approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 4 giugno* 1876. » 418
Uzielli. *Studi di Cristallografia teorica. Memoria presentata dal Socio* E. Beltrami . . . . . » 427
Volpicelli. *Risposta alla Nota del Socio* Giovanni Cantoni *che ha per titolo: Su una nuova difesa della teorica di Melloni su la elettrostatica induzione* . . . . . » 481
Beltrami. *Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori* . . . . . » 491
Narducci. *Intorno ad un manoscritto della Biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio, senz'abaco e con valore di posizione. Nota approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta dell'8 aprile* 1877 (con una tavola) . . . . . » 503
De Paolis. *Le trasformazioni piane doppie. Memoria presentata dal Socio* L. Cremona. . . . . » 511
Taramelli. *Catalogo ragionato delle Rocce del Friuli. Memoria approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 7 genn.* 1877 (con sette tavole) » 545
Capellini. *Balenottere fossili e Pachyacanthus dell'Italia Merid.* (con tre tavole) . » 611
Battaglini. *Sul movimento per una linea di 2° ordine*. . . . . » 631
Capranica. *Studi chimico-fisiologici sulle materie coloranti della retina. Nota presentata dal Socio* Tommasi-Crudeli (con una tavola) . . . . . » 639
Veronese. *Nuovi teoremi sull'Hexagrammum Mysticum. Memoria presentata dal Socio* Battaglini . . . . . » 649
Saviotti. *Sopra alcuni punti di Statica grafica. Memoria approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 4 marzo* 1877 (con undici tavole) » 704
Gautero. *Delle ruote a turbine. Nota presentata dal Socio* Q. Sella. . . » 741
Respighi. *Osservazioni del diametro solare fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel* 1876. . . . . » 751
Roiti. *Sulla propagazione del suono nella odierna teoria degli aeriformi. Memoria presentata dal Socio* Blaserna. . . . . » 762
Bellavitis. *Sulla risoluzione delle congruenze numeriche, e sulle tavole che danno i logaritmi (indici) degli interi rispetto ai varî moduli* . . . . . » 778
Branco. *I Vulcani degli Ernici nella Valle del Sacco. Memoria presentata dal Socio* Q. Sella (con una tavola). . . . . » 801
Moriggia. *Effetti di alcuni liquidi specialmente acidi e salini sopra i moti dei filamenti spermatici, dell'epitelio vibratile, delle opaline e del cuore, nonchè degli acidi sulla tenacità dei nervi*. . . . . » 819
Bagnis. *Mycologia Romana. Memoria presentata dal Socio* Tommasi-Crudeli (con due tavole) . . . . . » 829
Schiff. *Sopra due nuovi nervi arrestatori. Nota presentata dal Socio* Blaserna » 847
Cremona. *Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*. . . . . » 854
Ponzi. *La Tuscia Romana e la Tolfa* (con due tavole) . . . . . » 875
D'Ovidio. *Le funzioni metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. Memoria pres. dal Socio* Cremona . » 929

Milone. *Sulla origine della cellula gigantesca del tubercolo. Nota presentata dal Socio* Todaro (con una tavola). . . . . pag. 987
Volpicelli. *Risposta alle obbiezioni fatte dal prof.* G. Pisati *contro la moderna teorica di Melloni sulla elettrostatica induzione* (con una tavola) . . . » 1005
Lessona. *Studi sugli anfibi anuri del Piemonte. Memoria approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 4 marzo* 1877 (con cinque tavole). . » 1019
Selmi. *Delle alterazioni alle quali soggiace il granturco* (Zea mais) *e specialmente di quello che ingenera la pellagra. Memoria approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 4 marzo* 1877 . . . » 1099
Reichenheim. *Sopra il midollo spinale ed il lobo elettrico della torpedine. Nota presentata dal Socio* Tommasi-Crudeli (con tre tavole) . . . . » 1142
Seguenza. *Nuculidi terziarie rinvenute nelle provincie meridionali d'Italia. Memoria approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 4 febbraio* 1877 (con cinque tavole) . . . . . » 1163
Volpicelli. *Risposta ad una Nota del Socio* G. Cantoni *contro la teorica di Melloni sulla elettrostatica induzione* . . . . . » 1201
Briosi. *Il marciume od il bruco dell'uva* (*Albinia Wockiana* Briosi). *Nota presentata dal Socio* Cremona (con due tavole) . . . . . » 1247
Respighi. *Sulle osservazioni spettroscopiche del bordo e delle protuberanze solari fatte al R. Osservatorio del Campidoglio* (con sette tavole) . . » 1271

ERRATA	CORRIGE
—	—
Pag. 95 linea 30 — Colonna	— Colonna Velletri
» 103 » 28 — 131	— 130
» 110 » 16 — $\bar{1}11$	— $\bar{1}01$
» 162 » 4 — presentata nella seduta del 4 febbraio 1877.	— presentata dal Socio Blaserna nella seduta del 4 febbraio 1877.
» 195 » 3 — presentata dai Soci Sella e Struever	— approvata per la stampa negli Atti accademici nella seduta del 7 gennaio 1877.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01354 6239